وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N0 : U.S/F.S/D.M/……/2017.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

SUR l'INEGALITE DE SIMPSON AVEC DES FONCTIONS h-PREINVEXES

Option : ANEDP

Par :

1. HAMIOUDA Ahlem

Encadrée par : S. HAMIDA **MCA U. ANNABA**

Devant le jury :

Président : N. NASRI **MCB U. SKIKDA**

Examinateur : G. *KHENNICHE* **MCB U. SKIKDA**

Année : 2022/2023

Dédicace

Je dédie cet humble travail à ceux à qui, quels que soient les termes adoptés, je ne pourrai jamais exprimer mon amour et ma gratitude :

A celle qui m'a donné la vie, symbole de tendresse et de tendresse, celle qui n'a cessé de formuler des prières pour moi, à mon idéal éternel, ma fierté, ma force, qui a tout appris à ma mère aimante... j'avoue que si je suis devenu quelque chose aujourd'hui grâce à vos efforts, vos encouragements et vos conseils ; Vous m'avez insufflé le sens des responsabilités, l'optimisme et la confiance en moi face aux difficultés de la vie. Que Dieu Tout-Puissant vous protège et vous bénisse avec la santé, le bonheur et la tranquillité d'esprit, et vous protège de tout mal. Que la grâce soit toujours avec moi.

A Celui qui ne m'a rien épargné, à Celui qui cherchait mon confort et ma réussite, à l'homme le meilleur et le plus cher de l'univers : mon cher Père

À mes sœurs bien-aimées **Wassila**, **Fouzia**, **Dalal**, **Faten** et **Bouchra**, la fierté de notre famille, qui ont toujours été derrière moi et n'ont jamais cessé de me conseiller, de m'encourager et de me soutenir.

Pour mon soutien et mon espoir dans cette vie : mes **frères imad, Khairo**, **Oussama** et **iyad**

A mes neveux et nièces**, Mihammad**, **Qusay**, **Ali, Noursin, Nidhal et Israa**

A mes meilleures amies **Rania**, **Safaa**, **Fayrouz**, **Sarah**, **Asmaa**, **Rihab, inas, Ghada** et **Nada**, notre amitié est un trésor de mes êtres chers, je vous remercie pour beaucoup de choses, votre amitié sincère, votre générosité vous a toujours accompagné - mon côté plus que les sœurs. Merci beaucoup pour l'amitié et pour nos bons moments, et nos rires. Je vous souhaite le meilleur.

A mon fiancé, **Nabil**, qui m'a soutenu, encouragé et motivé, et a été le meilleur assistant pour moi

A tous ceux que j'aime, ceux qui m'aiment et me respectent de près ou de loin.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu de m'avoir accordé la force et la patience pour compléter cet humble travail, et j'espère que ce sera un acte sincère à Sa gloire.

Je voudrais remercier après Dieu Tout-Puissant tous mes professeurs depuis l'enseignement primaire jusqu'à ce jour et tous ceux qui m'ont appris une lettre car si j'arrive à ce jour. Car c'est grâce à leurs efforts considérables dans le transfert du savoir que je suis aujourd'hui là.

Encadreur

Je tiens à remercier en premier lieux l'honorable encadreur **Dr. Hamida salim.**

Je lui adresse également mes sincères remerciements et ma gratitude, c'est lui qui m'a aidé à mener à bien ce travail et il a été le meilleur assistant pour moi. De même il n'a pas lésiné avec ses précieux conseils et a fait de son mieux pour achever ce travail.

Enseignants

Je dois toute ma reconnaissance à mes professeurs de faculté math et informatique qui ont fait un excellent travail dans leur noble mission à savoir l'enseignement des bases de la mathématique qui demande beaucoup de patience. Je les remercie non seulement pour les connaissances qui nous ont transmises, mais aussi pour la fierté et l'ambition desquelles je m'inspire aujourd'hui.

J'exprime mes sincères remerciements à ***Dr. Nasri nassima*** *pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de cette soutenance pour évaluer et enrichir ce travail. Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude à* ***Dr. KHannich Ghania*** *d'avoir accepté de revoir mon travail. Votre présence et vos commentaires me feront toujours plaisir, et vous trouverez dans ce modeste travail un témoignage de mes sincères estimes.*

ملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة متراجحة تكاملية من نوع سيمسون في حالة دوال غير اعتيادية ونعني بذلك دوال تقريبا محدبة ، وتوسيع بعض النتائج التي تم اثباتها في سياق الدوال المحدبة والدوال -S- محدبة .

في الفص الأول نذكر ببعض التعريفات التي تخص التحدب الكلاسيكي ونطرح مفهوم التحدب المعمم للدوال ذات المتغير الحقيقي .

أما بالنسبة للفصل الثاني نعطي بعض النتائج المنشورة والمتعلقة بالمتراجحة التكاملية من نوع سيمسون ، حيث تكون الدوال محدبة و -S- محدبة .

ونختم بالفصل الاساسي حيث نقدم تعميمات لبعض النتائج السابق ذكرها ونشير إلى أن هذه النتائج تم نشرها في مجلة دولية من نوع "B".

Résumé

L'objectif de ce mémoire, et de traiter une inégalité intégrale de type Simpson pour une classe de fonctions non classique à savoir les fonctions h-préinvexes et d'étendre certains résultats qui ont été prouvés dans le cadre des fonctions convexes et s convexes pour ces dernières.

Ce mémoire est structuré comme suit:

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique et de convexité généralisée pour les fonctions à variable réelle, également une identité intégrale sera donnée.

Dans le deuxième chapitre, nous citons quelques résultats publiés concernant les inégalités intégrales de type Simpson où les fonctions objectives sont des fonctions à premières dérivées convexes et s-convexes.

Et enfin on clôture par le chapitre essentiel de ce mémoire où on donne de nouvelles généralisations de certains résultats, on note que ces dernières ont fait l’objet d’une publication.

Mots clés: Inégalité de Simpson, Inégalité de Hölder, fonctions s-convexes, fonctions préinvexes,fonctions h-préinvexes, .

Introduction

La théorie des inégalités a connu un développement intense ces dernières années comme on le voit aujourd'hui, ceci est dû à son rôle important dans de divers branches de mathématiques telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc.

. En revanche l'apparition des équations différentielles fractionnelles ainsi, les équations aux dérivées partielles de type fractionnelles ont joué un rôle très important dans développement des inégalités intégrales. Celles-ci constituent un important sujet de recherche, par ailleurs beaucoup de chercheurs ont commencé à explorer ce domaine de recherche ce qui a fait apparaitre de nouvelles techniques, voire de nouvelles méthode, une chose qui a contribué à la résolution de beaucoup de problèmes mathématiques en théorie de l'approximation, en analyse numérique, dans l'étude des équations intégro-différentielles non linéaires. Ainsi l'intérêt porté à l'étude des inégalités intégrales n'a cessé de croitre, et comme abondante littérature dans ce domaine on cite les travaux de S.Dragomir [2], [3].

Pour le fondement mathématique de cette théorie on note qu'il est dû aux éminents mathématiciens Gauss, Cauchy, Čebyšev au cours du 18éme et 19éme siècle, dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens: Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. Pour plus d'informations on cite les ouvrages de Mitrinović, Pečarić et Fink [6] [7] et [8] là où on peut trouver une bonne description de l'évolution historique des inégalités.

On note que cette direction de recherche s'évolue d'une manière remarquable, ce qui a fait apparaitre de nouvelles inégalités, des généralisations, des extensions aux dimensions supérieures, de même des variantes, fractionnaires et discrètes.

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse concernant les inégalités intégrales de type Simpson et d'établir de nouvelles résultats pour une classe de fonctions plus large que celle des fonctions convexes pour ce type d'inégalité intégrale.

Ce mémoire est structuré comme suit:

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique et de convexité généralisée pour les fonctions à une variable.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson.

L'objet du dernier chapitre sera l'extension des résultats classiques pour la classe des fonctions citée dessus .

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques types de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, pour plus d'informations sur la convexité en peut consulter [3].

1.1 Convexité classique et convexité généralisée

1.1.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1 - t)\, y) \leq tf\,(x) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 *$f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fortement convexe avec module c avec $c > 0$, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq tf\left(x\right) + (1-t)\,f\left(y\right) - ct(1-t)\left(x-y\right)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.4 *Soit $s \in (0, 1]$ et soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0 = [0, \infty)$ une fonction positive, f est dite s-convexe si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.5 *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fortement s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$ et $c > 0$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) - ct(1-t)\left(x-y\right)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.6 *Une fonction $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite m-convexe où $m \in (0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1-t)y) \ \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.7 *Soit $h : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non négative où (0,1)$\subseteq J$ .Une fonction non négative $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite h-convexe sur I, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in (0, 1)$.

Définition 1.8 *Une fonction non négative $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite s-Godunova-fonction Levin, où $s \in [0,1]$,si*

$$f(tx+(1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t^s} + \frac{f(y)}{(1-t)^s}.$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in (0,1)$.

Définition 1.9 *Une fonction non négative $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit p-convexe, si*

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(x) + f(y).$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ est tout $t \in [0,1]$.

1.1.2 Convexité généralisée

Les fonctions préinvexes est un concept qui a été introduit par [10] Hanson qui est une extention naturelle de la notion de la convexité classique .

Définition 1.10 *Un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ est dit invexe au point x par rapport à $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$, si*

$$x + t\eta(y,x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.11 *Une fonction $f : K \subset (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ est dite préinvexe par rapport à η, si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq (1-t) f(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$.

Définition 1.12 *Soit $s \in (0,1]$,une fonction positive $f : K \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-préinvexe par rapport à η, si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq (1-t)^s f(x) + t^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et* $t \in [0,1]$.

Définition 1.13 *Soit* $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction non négative* $h \neq 0$.*la fonction non négative* f *sur l'ensemble invexe* K *est dite fonction h-pré-invexe avec par rapport à* η, *si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y).$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in (0,1)$.

Définition 1.14 *Une fonction non négative* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dit s-Godunova-fonction de pré-invexe de Levin par rapport à* η *où* $s \in [0,1]$, *si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq \frac{f(x)}{t^s} + \frac{f(y)}{(1-t)^s}.$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in (0,1)$.

Définition 1.15 ***U****ne fonction non négative* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dit fonction* P*-preinvexe par rapport à* η *si*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq f(x) + f(y).$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in [0,1]$.

1.2 Quelques identités et inégalités intégrales

1.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1 *Soit* $p > 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* f *et* g *sont des fonctions réelles définies sur* $[a,b]$, *et si de plus* $|f|^p$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a,b]$, *alors*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2.2 Inégalité des moyens d'ordre q

Théorème 1.2 ([3]) *Soient* $x = (x_i)_{i=1,2,...,n}$ *et* $p = (p_i)_{i=1,2,...,n}$ *deux strictement positives* n*-uplet et soit* $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, l'inégalité des moyens d'ordre* q *pondérés par* p *est définie par*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \text{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$*, on a*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Remarque 1.1 *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a, b]$*, alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| \, |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Simpson

2.0.3 Les inégalités de Simpson pour les fonctions assez régulières

2.0.4 Motivation

Dans beaucoup de problèmes pratiques on on est affronté au calcul de la quantité $I = \int_a^b f(x)\,dx$, ce qui est possible que dans certains cas très limités, là où une telle intègrale pourra être évaluée analytiquement. Et le plus souvent le calcul analytique est compliqué, voire impossible. D'où l'idée de remplacer l'intégrale I par une formule assez proche est dont pami elles la formule de Simpson qui est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.1 ([3]) *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on suppose que $f^{(4)} \in L^1([a,b])$.*
Alors on a :

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{1}{2880}\|f^{(4)}\|_\infty (b-a)^4 \end{aligned}$$

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions convexes

Dans le travail [10],Sakarikaya et all, en utilisant une identité qui semble à celle énoncée par

le Lemme1.1 et par le billet de la convexité ils ont réussi à montrer les théorèmes suivants.

Théorème 2.2 *Soit* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable, telle que* $f' \in L_1([a, b])$. *On suppose que* $|f'|$ *est convexe sur* $[a, b]$.
Alors

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{5(b-a)}{72}(\mid f'(a) \mid + \mid f'(b) \mid). \end{aligned}$$

Théorème 2.3 *Soit* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable, telle que* $f' \in L_1([a, b])$. *On suppose que* $|f'|^q$ *est convexe sur* $[a, b]$.
Alors

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{2}\left[\frac{2}{p+1}(\frac{1}{3})^{p+1} + \frac{2}{p+1}(\frac{1}{6})^{p+1}\right]^{\dfrac{1}{p}} \\ & \times \left[(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4})^{\frac{1}{q}} + (\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4})^{\frac{1}{q}}\right]. \end{aligned}$$

Théorème 2.4 *Soit* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable, telle que* $f' \in L_1([a, b])$. *On suppose que* $|f'|^q$ *est convexe sur* $[a, b]$.

Alors

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{72}5^{1-\frac{1}{q}} \\
&\left[\left(\frac{29\mid f'(a)\mid^{q}+61\mid f'(b)\mid^{q}}{18}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{61\mid f'(a)\mid^{q}+29\mid f'(b)\mid^{q}}{18}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

2.1.1 Inégalités de Simpson pour les fonctions s-convexes

dans [11] Sakarikaya et all ont généralisé les résultats précédents pour les fonctions s-convexes qui est un cadre plus général. Et ils ont établi les théorèmes suivants.

Théorème 2.5 *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f'\in L_1([a,b])$. On suppose que $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$, où $s\in(0,1]$ est un paramètre. Alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\frac{(s-4)6^{S+1}+2\times 5^{S+2}-2\times 3^{S+2}+2}{6^{S+2}(s+1)(s+2)}\right)(\mid f'(a)\mid+\mid f'(b)\mid).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Théorème 2.6 *Soit $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f'\in L_1([a,b])$. On suppose que $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, où $s\in(0,1]$ est un paramètre. Alors on a l'estimation suivante*

$$\begin{gathered}
\left|\tfrac{1}{6}\left[f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\tfrac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\begin{array}{c}
(\dfrac{\mid f'(a)\mid^{q}+(2^{1+s}-1)\mid f'(b)\mid^{q}}{(1+s)2^{s}})^{\frac{1}{q}} \\
+(\dfrac{(2^{1+s}-1)\mid f'(a)\mid^{q}+\mid f'(b)\mid^{q}}{(1+s)2^{s}})^{\frac{1}{q}}
\end{array}\right)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Théorème 2.7 *Soit* $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction dérivable, telle que* $f'\in L_1([a,b])$. *On suppose que* $|f'|^q$ *est s-convexe sur* $[a,b]$, *où* $s\in(0,1]$ *est un paramètre.*
Alors l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq$$

$$\frac{b-a}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{2+(1+2s)3^{1+s}}{3\times(1+s)(2+s)6^{1+s}}\mid f'(a)\mid^q+\frac{2\times5^{2+s}-(7+2s)3^{1+s}+(s-4)6^{1+s}}{3\times(1+s)(2+s)6^{1+s}}\mid f'(b)\mid^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{2\times5^{2+s}-(7+2s)3^{1+s}+(s-4)6^{1+s}}{3\times(1+s)(2+s)6^{1+s}}\mid f'(a)\mid^q+\frac{2+(1+2s)3^{1+s}}{3\times(1+s)(2+s)6^{1+s}}\mid f'(b)\mid^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Dans ce chapitre, nous allons établir une nouvelle identité, sur laquelle en s'appuyant pour généraliser les théorèmes cités dessus pour une classe de fonctions plus large à savoir les fonctions h-preinvexe. Cette étude a fait l'objet d'une publication.

Lemme 3.1 *Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$, $.\eta(b, a) > 0$*
Alors l'égalité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + f(a + \eta(b,a)) \right] - \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a} f(u)\, du \right| \\ = \;& \frac{\eta(b,a)}{2} {}_0\int^1 (\frac{t}{2} - \frac{1}{3})(f'(a + \frac{1+t}{2}\eta(b,a)) - f'(a + \frac{1-t}{2}\eta(b,a)))dt. \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Preuve. Soit

$$I_1 = \frac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 (\frac{t}{2} - \frac{1}{3}) f'(a + \frac{1+t}{2}\eta(b,a))dt \qquad (3.2)$$

$$I_2 = \frac{\eta(b,a)}{2} \int_0^1 (\frac{t}{2} - \frac{1}{3}) f'(a + \frac{1-t}{2}\eta(b,a))dt \qquad (3.3)$$

En intégrant par partie le côté droit de (3.1), on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= (\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{2}{\eta}f(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)))\,|_0^1 - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_0^1 f(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))dt \\
&= [\frac{1}{6}(\frac{2}{\eta}f(a+\eta(b,a))+\frac{1}{3}(\frac{2}{\eta}f(a+\frac{1}{2}\eta(b,a))] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_0^1 f(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))dt \quad (3.4)\\
&= \frac{2}{6\eta}f(a+\eta(b,a))+\frac{2}{3\eta}f(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_0^1 f(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))dt. \\
&= \frac{1}{6}f(a+\eta(b,a))+\frac{1}{3}f(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a+\frac{1}{2}\eta(b,a)}^{a+\eta(b,a)} f(u)du. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable

$$\begin{aligned}
u &= a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a) \\
dt &= \frac{2}{\eta(b,a)}du,
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_1 &= (\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{2}{\eta}f(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)))_0^1 - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_0^1 f(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))dt \\
&= \frac{1}{6}f(a+\eta(b,a))+\frac{1}{3}f(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a+\frac{\eta}{2}}^{a+\eta(b,a)} f(u)du.
\end{aligned}$$

Soit le changement de variable

$$\begin{aligned}
u &= a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a) \\
dt &= -\frac{2}{\eta(b,a)}du.
\end{aligned}$$

Alors pour l'intégrale I_2 on a

$$\begin{aligned} I_2 &= [(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(-\frac{2}{\eta(b,a)}f(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))] \mid_0^1 + \frac{1}{\eta(b,a)}\int_0^1 f(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))dt \\ &= -\frac{1}{6}(f(a)) - \frac{1}{3}f(a+\frac{1}{2}\eta(b,a))) + \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\frac{\eta(b,a)}{2}} f(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))dt. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En les regroupant les relations (3.2), (3.3) et en multipliant par le facteur $\frac{\eta(b,a)}{2}$ on a

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+f(a+\eta(b,a))\right] - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a} f(u)\,du \right| \\ &= \frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1 (\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)) - f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a)))dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

■

3.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions h-préinvexes

Théorème 3.1 *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur $(a, a+\eta(b,a))$ où $\eta(b,a) \succ 0$ et $f' \in L([a, a+\eta(b,a)])$. On suppose que $|f'|$ est h-préinvexe par rapport à $\eta(b,a)$,*
Alors l'inégalité suivante est satisfaite.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6}\left(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\ \leq\ & \eta(b,a)(\mid f'(a)\mid + \mid f'(b)\mid) \\ & \times(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} (\frac{5}{6}-t)(h(1-t)+h(t))dt + \int_{\frac{5}{6}}^{1} (t-\frac{5}{6})(h(1-t)+h(t))dt). \end{aligned}$$

Preuve. Par le billet du lemme 3.1 et les propriétés de la valeur absolue on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1 \left|(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(f'(a+\tfrac{1+t}{2}\eta(b,a))-(f'(a+\tfrac{1-t}{2}\eta(b,a))dt\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\begin{array}{c}\int_0^1 \mid \tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\mid\mid f'(a+\tfrac{1+t}{2}\eta(b,a))\mid \\ +\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right|\left|(f'(a+\tfrac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|dt.\end{array}\right)
\end{aligned}$$

En intégrant sur les intervalles $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3},1\right]$

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{\eta(b,a)}{2}[\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)\right|dt \qquad (3.8)\\
&+\int_{\frac{2}{3}}^1(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)\right|dt \\
&+\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a)\right|dt \\
&+\int_{\frac{2}{3}}^1(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a)\right|dt].
\end{aligned}$$

Comme $|f'|$ est h-préinvexe, alors

$$\begin{aligned}
\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq h(\frac{1-t}{2})\left|f'(a)\right|+h(\frac{1+t}{2})\left|f'(b)\right| \\
\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq h(\frac{1+t}{2})\left|f'(a)\right|+h(\frac{1-t}{2})\left|f'(b)\right|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \quad \frac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})h(\frac{1-t}{2})dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})h(\frac{1+t}{2})dt$$

$$+|f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})h(\frac{1-t}{2})dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})h(\frac{1+t}{2})dt$$

$$+|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})h(\frac{1+t}{2})dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})h(\frac{1-t}{2})dt$$

$$+|f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})h(\frac{1+t}{2})dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})h(\frac{1-t}{2})dt.$$

En regroupant les termes on a

$$= \quad \frac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)(\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})h(\frac{1-t}{2})dt+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})h(\frac{1-t}{2})dt$$

$$+\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})h(\frac{1+t}{2})dt+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})h(\frac{1+t}{2})dt).$$

En utilisant un changement de variable convenable on obtient

$$\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|\leq$$

$$\eta(b,a)(|f'(a)|+|f'(b)|)(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}(\tfrac{5}{6}-t)(h(1-t)+h(t))dt+\int_{\frac{5}{6}}^{1}(t-\tfrac{5}{6})(h(1-t)+h(t))dt.$$

■

3.1.1 Corollaires

Corollaire 3.1 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 soient satisfaites et* $|f'|$ *est une fonction h-convexe,alors pour* $\eta(b,a) = b - a$ *alors on a*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq\ & (b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|) \\ & \times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t\right)(h(1-t) + h(t))dt + \int_{\frac{5}{6}}^{1} \left(t - \frac{5}{6}\right)(h(1-t) + h(t))dt\right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 soient satisfaites et* $|f'|$ *est une fonction p-préinvexe,alors on a*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + f(a+\eta(b,a))\right) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\ \leq\ & \frac{5}{36}\eta(b,a)(|f'(a)| + |f'(b)|). \end{aligned}$$

De plus pour $\eta(b,a) = b - a$ *on a*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + f(a+\eta(b,a))\right) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\ \leq\ & \frac{5(b-a)}{36}(|f'(a)| + |f'(b)|) \end{aligned}$$

Preuve. D'aprés la relation (3.6) on a

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}[\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)\right|dt$$

$$+\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a)\right|dt$$

$$+\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a)\right|dt$$

$$+\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a)\right|dt].$$

Comme $|f'|$ est P- préinvexe, alors

$$\begin{aligned}\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq |f'(a)|+|f'(b)|\\ \left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq |f'(a)|+|f'(b)|.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})dt$$

$$+|f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})dt$$

$$+|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})dt$$

$$|f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})dt.$$

alors

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)(\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})dt)+$$

$$(|f'(a)|+|f'(b)|)\,(\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})dt)+$$

$$(|f'(a)|+|f'(b)|)\,(\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})dt)+$$

$$(|f'(a)|+|f'(b)|)\,(\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})dt).$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{2}[\tfrac{4}{36}(|f'(a)|+|f'(b)|)+\tfrac{1}{36}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

$$+\tfrac{4}{36}(|f'(a)|+|f'(b)|)+\tfrac{1}{36}(|f'(a)|+|f'(b)|)]$$

$$=\frac{5\eta(b,a)}{36}(|f'(a)|+|f'(b)|).$$

De plus, si on choisit $\eta(b,a) = b - a$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{5(b-a)}{36}(|f'(a)| + |f'(b)|)
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.3 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 soient satisfaites, et* $|f'|$ *est une fonction préinvexe, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}) + f(a+\eta(b,a))\right) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{5}{72}\eta(b,a)(|\ f'(a)\ | + |\ f'(b)\ |).
\end{aligned}$$

Preuve. De même on sait que :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}) + f(a+\eta(b,a))\right) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}[\int_0^{\frac{2}{3}} (\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2})\left|f'(a + \tfrac{1+t}{2}\eta(b,a)\right| dt \\
&\quad + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3})\left|f'(a + \tfrac{1+t}{2}\eta(b,a)\right| dt \\
&\quad + \int_0^{\frac{2}{3}} (\tfrac{1}{3} - \tfrac{t}{2})\left|f'(a + \tfrac{1-t}{2}\eta(b,a)\right| dt \\
&\quad + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{3})\left|f'(a + \tfrac{1-t}{2}\eta(b,a)\right| dt.]
\end{aligned}$$

Comme $|f'|$ est préinvexe, alors

$$\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}[|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1-t}{2})dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1+t}{2})dt+$$
$$|f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1-t}{2})dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1+t}{2})dt$$
$$+|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1+t}{2})dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1-t}{2})dt$$
$$|f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1+t}{2})dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1-t}{2})dt].$$

En intégrant sur les intervalles $[0,\frac{2}{3}],[\frac{2}{3},1]$ on a

$$= \tfrac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)[\tfrac{1}{72}+\tfrac{4}{72}+\tfrac{1}{72}+\tfrac{4}{72}]$$
$$= \tfrac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)\left(\tfrac{10}{72}\right)$$
$$= \tfrac{5\eta(b,a)}{72}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

■

Corollaire 3.4 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 soient satisfaites et $|f'|$ est une fonction s-préinvexe, alors*

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{(s+1)(s+2)}(\mid f'(a)\mid+\mid f'(b)\mid)(2(\frac{1}{6})^{s+2}+2(\frac{5}{6})^{s+2}-(\frac{1}{2})^{s+1}+\frac{s-4}{6}).$$

Preuve. Comme $|f'|$ est S- préinvexe, alors on a

$$\begin{aligned}
\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq (\frac{1-t}{2})^s\,|f'(a)|+(\frac{1+t}{2})^s\,|f'(b)| \\
\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq (\frac{1+t}{2})^s\,|f'(a)|+(\frac{1-t}{2})^s\,|f'(b)|\,.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.6) donc

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\textstyle\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}[|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1-t}{2})^s dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1+t}{2})^s dt \\
&\quad |f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1-t}{2})^s dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1+t}{2})^s dt \\
&\quad +|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1+t}{2})^s dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})(\tfrac{1-t}{2})^s dt \\
&\quad |f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1+t}{2})^s dt+|f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1-t}{2})^s dt].
\end{aligned}$$

Soit

$$I_1=|f'(a)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1-t}{2})^s dt+|f'(b)|\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1+t}{2})^s dt,$$

$$I_2 = |f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1-t}{2})^s dt + |f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1+t}{2})^s dt,$$

$$I_3 = |f'(a)|\int_{0}^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1+t}{2})^s dt + |f'(b)|\int_{0}^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1-t}{2})^s dt,$$

$$I_4 = |f'(a)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1+t}{2})^s dt + |f'(b)|\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1-t}{2})^s dt.$$

En intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{|f'(a)|}{3\times 2^s}\frac{1}{s+1}(1-\frac{1}{3^{s+1}}) + \frac{|f'(b)|}{3\times 2^s}\frac{1}{s+1}((\frac{5}{3})^{s+1}-1) \\ &\quad -\frac{|f'(a)|}{2^{s+1}}\left(-\frac{2}{3^{s+2}(s+1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}(\frac{1}{3^{s+2}}-1)\right) \\ &\quad -\frac{|f'(b)|}{2^{s+1}}\left(\frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}((\frac{5}{3})^{s+2}-1)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{|f'(a)|}{2^{s+1}}\left(\frac{2}{3^{s+2}(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)3^{s+2}}\right) \\ &\quad +\frac{|f'(b)|}{2^{s+1}}\left(\frac{2^{s+1}}{s+1} - \frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}[2^{s+2}-(\frac{5}{3})^{s+2}\right) \\ &\quad -\frac{|f'(a)|}{3\times 2^s}\left(\frac{1}{3^{s+1}(s+1)}] - \frac{|f'(b)|}{3\times 2^s}[\frac{2^{s+1}}{s+1} - \frac{(\frac{5}{3})^{s+1}}{s+1}\right) \end{aligned}$$

De la même façon on a

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{|f'(a)|}{3\times 2^s}[\frac{1}{s+1}((\frac{5}{3})^{s+1}-1)] + \frac{|f'(b)|}{3\times 2^s}[\frac{1}{s+1}(1-\frac{1}{3^{s+1}})] \\ &\quad -\frac{|f'(a)|}{2^{s+1}}[\frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}((\frac{5}{3})^{s+2}-1)] \\ &\quad -\frac{|f'(b)|}{2^{s+1}}[-\frac{2}{3^{s+2}(s+1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}(\frac{1}{3^{s+2}}-1)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \frac{|f'(a)|}{2^{s+1}}\left(\frac{2^{s+1}}{s+1}-\frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{s+1}}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}(2^{s+1}-(\frac{5}{3})^{s+2})\right)\\
&+\frac{|f'(b)|}{2^{s+1}}\left(\frac{2}{3^{s+2}(s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)3^{s+2}}\right)\\
&-\frac{|f'(a)|}{3\times 2^{s}}\left(\frac{2^{s+1}}{s+1}-\frac{(\frac{5}{3})^{s+1}}{s+1}\right)-\frac{|f'(b)|}{3\times 2^{s}}\frac{1}{3^{s+1}(s+1)}
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{gathered}
I_1+I_2+I_3+I_4=(|f'(a)|+|f'(b)|)\\
[\tfrac{5^{s+2}}{(2^{s+1})(3^{s+2})(s+1)(s+2)}+\tfrac{1}{(2^{s+1})(3^{s+2})(s+1)(s+2)}\\
+\tfrac{1}{(s+1)}-\tfrac{2}{3(s+1)}-\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}-\tfrac{2}{(2^{s+1})(s+1)(s+2)}\\
+\tfrac{5^{s+2}}{(2^{s+1})(3^{s+2})(s+1)(s+2)}+\tfrac{1}{(2^{s+1})(3^{s+2})(s+1)(s+2)}]\\
=\tfrac{(|f'(a)|+|f'(b)|)}{(s+1)(s+2)}[2(\tfrac{5^{s+2}}{(2^{s+1})(3^{s+2})})+2(\tfrac{1}{(2^{s+1})(3^{s+2})})\\
+(s+2)-\tfrac{2(s+2)}{3}-2-\tfrac{2}{(2^{s+1})}]\\
=\tfrac{(|f'(a)|+|f'(b)|)}{(s+1)(s+2)}[4(\tfrac{5^{s+2}}{(6^{s+2})})+4(\tfrac{1}{(6^{s+2})})-\tfrac{2}{(2^{s+1})}+\tfrac{2s-8}{6}]\\
=\tfrac{2(|f'(a)|+|f'(b)|)}{(s+1)(s+2)}[2(\tfrac{5}{6})^{s+2}+2(\tfrac{1}{6})^{s+2}-(\tfrac{1}{2})^{s+1}+\tfrac{s-4}{6}]
\end{gathered}
$$

En miltipliant par le facteur $\frac{\eta(b,a)}{2}$ on obtient le résultat annoncé. ■

Remarque 3.1 *le corollaire 4 se réduit au théorème 7 de [11] (qui correspond au théorème 2.5 page 9), si on prenant $\eta(b,a)=b-a$.*

Corollaire 3.5 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 soient satisfaites et $|f'|$ est une fonction s-Godunova-Levin préinvexe au second sens, alors on a*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|\\
\leq\ &\frac{\eta(b,a)}{(1-s)(2-s)}(|\ f'(a)\ |+|\ f'(b)\ |)(2(\frac{5}{6})^{2-s}+2(\frac{1}{6})^{2-s}-(\frac{1}{2})^{1-s}-\frac{s+4}{6}).
\end{aligned}
$$

Preuve. On sait que

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|\\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{2}(\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})\left|f'(a+\tfrac{1+t}{2}\eta(b,a)\right|dt\\
&+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})\left|f'(a+\tfrac{1+t}{2}\eta(b,a)\right|dt\\
&+\int_0^{\frac{2}{3}}(\tfrac{1}{3}-\tfrac{t}{2})\left|f'(a+\tfrac{1-t}{2}\eta(b,a)\right|dt\\
&+\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3})\left|f'(a+\tfrac{1-t}{2}\eta(b,a)\right|dt).
\end{aligned}$$

Comme $|f'|$ est s Godunova Levin préinvexe, alors

$$\begin{aligned}
\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq \frac{1}{(\frac{1-t}{2})^s}|f'(a)|+\frac{1}{(\frac{1+t}{2})^s}|f'(b)|\\
&\leq (\frac{1-t}{2})^{-s}|f'(a)|+(\frac{1+t}{2})^{-s}|f'(b)|\\
\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right| &\leq \frac{1}{(\frac{1+t}{2})^s}|f'(a)|+\frac{1}{(\frac{1-t}{2})^s}|f'(b)|.\\
&\leq (\frac{1+t}{2})^{-s}|f'(a)|+(\frac{1-t}{2})^{-s}|f'(b)|
\end{aligned}$$

donc

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}(|f'(a)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt$$

$$+|f'(a)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt$$

$$+|f'(a)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1-t}{2})^{s}dt$$

$$+|f'(a)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt.$$

Soit

$$I_1=(|f'(a)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt$$

$$I_2=|f'(a)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt$$

$$I_3=|f'(a)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt$$

$$I_4=|f'(a)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1+t}{2})^{-s}dt+|f'(b)|\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})(\frac{1-t}{2})^{-s}dt$$

En intégrant par partie on obtient

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{|f'(a)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{1}{1-s}(1-\frac{1}{3^{1-s}})] + \frac{|f'(b)|}{3\times 2^{1-s}}[\frac{1}{1-s}((\frac{5}{3})^{1-s}-1)] \\
&\quad -\frac{|f'(a)|}{2^{1-s}}[-\frac{2}{3^{2-s}(1-s)} - \frac{1}{(1-s)(2-s)}(\frac{1}{3^{2-s}}-1)] \\
&\quad -\frac{|f'(b)|}{2^{1-s}}[\frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{(1-s)(2-s)}((\frac{5}{3})^{2-s}-1)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{|f'(a)|}{2^{1-s}}[\frac{2}{3^{2-s}(1-s)} + \frac{1}{(1-s)(2-s)3^{2-s}}] \\
&\quad +\frac{|f'(b)|}{2^{1-s}}[\frac{2^{1-s}}{1-s} - \frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{(1-s)(2-s)}[2^{2-s}-(\frac{5}{3})^{2-s}] \\
&\quad -\frac{|f'(a)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{1}{3^{1-s}(1-s)}] - \frac{|f'(b)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{2^{1-s}}{1-s} - \frac{(\frac{5}{3})^{1-s}}{1-s}].
\end{aligned}
$$

De la même façon, on a

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \frac{|f'(a)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{1}{1-s}((\frac{5}{3})^{1-s}-1)] + \frac{|f'(b)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{1}{1-s}(1-\frac{1}{3^{1-s}})] \\
&\quad -\frac{|f'(a)|}{2^{1-s}}[\frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{(1-s)(2-s)}((\frac{5}{3})^{2-s}-1)] \\
&\quad -\frac{|f'(b)|}{2^{1-s}}[-\frac{2}{3^{2-s}(1-s)} - \frac{1}{(1-s)(2-s)}(\frac{1}{3^{2-s}}-1)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \frac{|f'(a)|}{2^{1-s}}[\frac{2^{1-s}}{1-s} - \frac{\frac{2}{3}(\frac{5}{3})^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{(1-s)(2-s)}(2^{1-s}-(\frac{5}{3})^{2-s})] \\
&\quad +\frac{|f'(b)|}{2^{1-s}}[\frac{2}{3^{2-s}(1-s)} + \frac{1}{(1-s)(2-s)3^{s+2}}] \\
&\quad -\frac{|f'(a)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{2^{1-s}}{1-s} - \frac{(\frac{5}{3})^{1-s}}{1-s}] - \frac{|f'(b)|}{3\times 2^{-s}}[\frac{1}{3^{1-s}(1-s)}].
\end{aligned}
$$

D'où

$$
I_1+I_2+I_3+I_4 = \frac{2(|f'(a)|+|f'(b)|)}{(1-s)(2-s)}[2(\frac{5}{6})^{2-s} + 2(\frac{1}{6})^{2-s} - (\frac{1}{2})^{1-s} - \frac{s+4}{6}].
$$

En miltipliant par le facteur $\dfrac{\eta(b,a)}{2}$ on obtient le résultat ci dessus. ■

Corollaire 3.6 *De plus,si on prend* $\eta(b,a) = b - a$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(1-s)(2-s)}(|f'(a)| + |f'(b)|)(2(\frac{5}{6})^{2-s} + 2(\frac{1}{6})^{2-s} - (\frac{1}{2})^{1-s} - \frac{s+4}{6}).
\end{aligned}$$

3.2 Inégalités intégrales de type Simpson pour des fonctions dont la dérivée est h-préinvexe

Théorème 3.2 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* $(a, a+\eta(b,a))$ *où* $\eta(b,a) \succ 0$ *et* $f' \in L([a, a+\eta(b,a)])$. *On suppose que* $|f'|^q$ *est h-préinvexe par rapport à* $\eta(b,a)$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a) + 4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}) + f(a+\eta(b,a))) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{12}(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\left(|f'(a)|^q\displaystyle\int_0^1 h(\tfrac{1-t}{2})dt + |f'(b)|^q\int_0^1 h(\tfrac{1+t}{2})dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(|f'(a)|^q\displaystyle\int_0^1 h(\tfrac{1+t}{2})dt + |f'(b)|^q\int_0^1 h(\tfrac{1-t}{2})dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1,$ *et* $q \succ 1$

Preuve. En utilisant le lemme1, propriétés de la valeur absolue et l'inégalité de Hőlder, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\begin{array}{c}\left(\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\int_0^1\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right) \\
=\ & \frac{\eta(b,a)}{2}(\frac{2}{p+1}(\frac{1}{3})^{p+1}+\frac{2}{p+1}(\frac{1}{6})^{p+1})^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left(\int_0^1\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

comme $|f'|^q\, est$ une fonction h-préinvexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$ on a

$$\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q \leq h(\frac{1-t}{2})\left|f'(a)\right|^q + h(\frac{1+t}{2})\left|f'(b)\right|^q \tag{3.10}$$

$$\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q \leq h(\frac{1+t}{2})\left|f'(a)\right|^q + h(\frac{1-t}{2})\left|f'(b)\right|^q \tag{3.11}$$

En combinant (3.9), (3.10), et (3.11) on obtient le résultat annoncé. ■

3.2.1 Corollaires

Corollaire 3.7 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.2 soient satisfaites, et* $|f'|^q$ *est une fonction h-convexe, alors pour* $\eta(b,a)=b-a$ *on a*

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12}(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\left(|f'(a)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1-t}{2})dt+|f'(b)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1+t}{2})dt\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(|f'(a)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1+t}{2})dt+|f'(b)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1-t}{2})dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).$$

Corollaire 3.8 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.2 soient satisfaites,et* $|f'|^q$ *est une fonction P-préinvex, alors on a*

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{6}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus pour $\eta(b,a)=b-a$, *on a*

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{6}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. En utilisant le théorème 3.2 on a

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{12}(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\left(|f'(a)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1-t}{2})dt+|f'(b)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1+t}{2})dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(|f'(a)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1+t}{2})dt+|f'(b)|^q\int\limits_0^1 h(\frac{1-t}{2})dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).$$

Comme $|f'|^q$ si est P- préinvexe, alors

$$\begin{aligned}\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq |f'(a)|^q+|f'(b)|^q\\ \left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq |f'(a)|^q+|f'(b)|^q.\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent au fait que la fonction h est une fonction constante qui est définie par $h(t)=1$ sur $[0,1]$, d'où

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{6}(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En remplaçant $\eta(b,a)$ par la valeur $b-a$ on obtient la dexième partie du corollaire 3.8 ∎

Corollaire 3.9 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.2 soient satisfaites,et*

$|f'|^q$ *une fonction préinvexe,alors on a*

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{12}(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Preuve. Comme $|f'|^q$ est préinvexe, alors

$$\begin{aligned}\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq (\frac{1-t}{2})|f'(a)|^q+(\frac{1+t}{2})|f'(b)|^q\\ \left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq (\frac{1+t}{2})|f'(a)|^q+(\frac{1-t}{2})|f'(b)|^q.\end{aligned}$$

En utilisant la théorème (3.2) on a

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\int\limits_0^1(\frac{1-t}{2})|f'(a)|^q dt+\int\limits_0^1(\frac{1+t}{2})|f'(b)|^q dt\\ +\left(\int\limits_0^1(\frac{1+t}{2})|f'(a)|^q dt+\int\limits_0^1(\frac{1-t}{2})|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right)^{\frac{1}{q}},$$

par un calcul directe on trouve le résultat mentionné. ■

Corollaire 3.10 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème (3.2) soient satisfaites,et* $|f'|^q$ *est une fonction s-préinvexe,alors on a*

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{12}(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+(2^{1+s}-1)|f'(b)|^q}{(1+s)2^S}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2^{1+s}-1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{(1+s)2^S}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Preuve. Comme $|f'|^q$ est s-préinvexe, alors

$$\begin{aligned}
\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq (\frac{1-t}{2})^s |f'(a)|^q + (\frac{1+t}{2})^s |f'(b)|^q \\
\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq (\frac{1+t}{2})^s |f'(a)|^q + (\frac{1-t}{2})^s |f'(b)|^q .
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème (3.2) on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
&\leq \frac{\eta(b,a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\begin{array}{c} \left(\int\limits_0^1 (\frac{1-t}{2})^s |f'(a)|^q dt + \int\limits_0^1 (\frac{1+t}{2})^s |f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\int\limits_0^1 (\frac{1+t}{2})^s |f'(a)|^q dt + \int\limits_0^1 (\frac{1-t}{2})^s |f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right) \\
&= \frac{\eta(b,a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\begin{array}{c} \left(\frac{|f'(a)|^q+(2^{s+1}-1)|f'(b)|^q}{2^s(s+1)})\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\frac{(2^{s+1}-1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.2 *Le corollaire 3.10 se réduit au théorème 6 de [14] (qui correspond au théorème 2.5 page 9) si on prend $\eta(b,a) = b-a$.*

Corollaire 3.11 *On suppose que toutes les hypothèses du théorème 3.2 soient satisfaites, et $|f'|^q$ une fonction s-Godunova-Levin préinvexe ,alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
&\leq \frac{\eta(b,a)}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+(2^{1-s}-1)|f'(b)|^q}{(1-s)2^{-S}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{(2^{1-s}-1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{(1-s)2^{-S}}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Si de plus on prend $\eta(b,a) = b-a$ on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
&\leq \frac{b-a}{12}\left(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+(2^{1-s}-1)|f'(b)|^q}{(1-s)2^{-S}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{(2^{1-s}-1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{(1-s)2^{-S}}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Comme $|f'|^q$ est s-Godunova-Levin préinvexe, alors

$$\begin{aligned}
\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq (\frac{1-t}{2})^{-s}|f'(a)|^q+(\frac{1+t}{2})^{-s}|f'(b)|^q \\
\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q &\leq (\frac{1+t}{2})^{-s}|f'(a)|^q+(\frac{1-t}{2})^{-s}|f'(b)|^q.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème (3.2) d'où

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
&\leq \tfrac{\eta(b,a)}{12}(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1(\frac{1-t}{2})^{-s}|f'(a)|^q dt+\int\limits_0^1(\frac{1+t}{2})^{-s}|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+ \\ \left(\int\limits_0^1(\frac{1+t}{2})^{-s}|f'(a)|^q dt+\int\limits_0^1(\frac{1-t}{2})^{-s}|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right) \\
&= \tfrac{\eta(b,a)}{12}(\tfrac{1+2^{p+1}}{3(p+1)})^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+(2^{1-s}-1)|f'(b)|^q}{2^{-s}(1-s)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{(2^{1-s}-1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2^{-s}(1-s)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie du corollaire en question il suffit de remplacer η par sa valeur.

■

Théorème 3.3 *soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application différentiable sur $(a,a+\eta(b,a))$ où $\eta(b,a)\succ 0$ et $f'\in L([a,a+\eta(b,a)])$.On suppose que $|f'|^q$ est h-preinvexe par rapport à $\eta(b,a)$ où $q\geq 1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
&\leq \frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}(\psi_1(h)|f'(a)|^q+\psi_2(h)|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ +(\psi_2(h)|f'(a)|^q+\psi_1(h)|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).
\end{aligned}$$

Où

$$\psi_1(h)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}(\frac{5}{6}-t)h(1-t)dt+_{\frac{5}{6}}\int^1(t-\frac{5}{6})h(1-t)dt \tag{3.12}$$

et
$$\psi_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} (\frac{5}{6} - t)h(t)dt + \int_{\frac{5}{6}}^{1} (t - \frac{5}{6})h(t)dt \tag{3.13}$$

Preuve. En utilisant le lemme 1, les propriétés de la valeur absolue et la remarque 1.1 on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a))) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du\right| \\
&\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\begin{array}{c} \left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| \left|f'(a+\tfrac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| \left|f'(a+\tfrac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\eta(b,a)}{2}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}} \left(\begin{array}{c} \left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| \left|f'(a+\tfrac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\int_0^1 \left|\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{3}\right| \left|f'(a+\tfrac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{array}\right). \tag{3.14}$$

Comme $|f'|^q$ est h-préinvexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$, on a

$$\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q \leq h(\frac{1-t}{2})\left|f'(a)\right|^q + h(\frac{1+t}{2})\left|f'(b)\right|^q$$

et

$$\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q \leq h(\frac{1+t}{2})\left|f'(a)\right|^q + h(\frac{1-t}{2})\left|f'(b)\right|^q.$$

On obtient

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\left(\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1\left|t-\frac{5}{6}\right|h(1-t)\left|f'(a)\right|^q+h(t)\left|f'(b)\right|^q dt)\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\int\limits_0^1\left|t-\frac{5}{6}\right|h(t)\left|f'(a)\right|^q+h(1-t)\left|f'(b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right)$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(1-t)\left|f'(a)\right|^q+h(t)\left|f'(b)\right|^q dt)+\\\int\limits_{\frac{5}{6}}^{1}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(1-t)\left|f'(a)\right|^q+h(t)\left|f'(b)\right|^q dt)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\begin{array}{c}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(t)\left|f'(a)\right|^q+h(1-t)\left|f'(b)\right|^q dt)+\\\int\limits_{\frac{5}{6}}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)h(t)\left|f'(a)\right|^q+h(1-t)\left|f'(b)\right|^q dt)\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right)$$

D'où

$$\frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}|f'(a)|^q\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(1-t)dt+\int\limits_{\frac{5}{6}}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)h(1-t)dt\right)\\+|f'(b)|^q\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(t)dt+\int\limits_{\frac{5}{6}}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)h(t)dt\right)\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\\ \left(\begin{array}{c}|f'(a)|^q\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(t)dt+\int\limits_{\frac{5}{6}}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)h(t)dt\right)\\+|f'(b)|^q\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)h(1-t)dt+\int\limits_{\frac{5}{6}}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)h(1-t)dt\right)\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right) \tag{3.15}$$

En combinant les relations (3.13), (3.13) et (3.15) on obtient le résultat. ∎

Corollaire 3.12 ***S****upposons que toutes les hypothèses du théorème 3.3 soint satisfaites, et $|f'|^q$une fonction h-convexe,alors on a*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}((\psi_1(h)\left|f'(a)\right|^q+\psi_2(h)\left|f'(b)\right|^q)^{\frac{1}{q}}\\ &+(\psi_2(h)\left|f'(a)\right|^q+\psi_1(h)\left|f'(b)\right|^q)^{\frac{1}{q}}).\end{aligned}$$

Où ψ_1 et ψ_2 sont respectivement données par (3.12) et (3.13)

Il suffit de remplacer $\eta(b,a)$ par la valeur $b-a$.

Corollaire 3.13 *On suppose que toutes les hypothèses du théorème 3.3 soient satisfaites* *et* $|f'|^q$ *est une fonction P-préinvexe alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{5\eta(a,b)}{36}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

De plus pour $\eta(b,a)=b-a$, *on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{36}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Preuve. Comme $|f'|^q$ est P-préinvexe

$$\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q\leq|f'(a)|^q+|f'(b)|^q$$

$$\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q\leq|f'(a)|^q+|f'(b)|^q$$

En utilisant le théorème 3.3 on a

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}} \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6}-t\right)\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)dt+ \\ \int\limits_{\frac{5}{6}}^{1} \left(t-\frac{5}{6}\right)\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\begin{array}{c} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6}-t\right)\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)dt+ \\ \int\limits_{\frac{5}{6}}^{1} \left(t-\frac{5}{6}\right)\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right)$$

On trouve le résultat annoncé en achevant le calcul des intégrales.

Pour la euxième partie du corollaire il suffit de remplacer η par la valeur $b-a$. ■

Corollaire 3.14 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 9 soient satisfaites et* $|f'|^q$ *une fonction préinvexe, alors on a*

$$\begin{array}{c} \left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\ \leq \frac{\eta(b,a)}{72}5^{1-\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{29|f'(a)|^q+61|f'(b)|^q}{18}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{61|f'(a)|^q+29|f'(b)|^q}{18}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \end{array}$$

Preuve. Comme $|f'|^q$ est préinvexe, en utilisant le théorème 3.3 on a

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}} \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6}-t\right)(1-t)\left|f'(a)\right|^q dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} (1-t)\left|f'(b)\right|^q dt + \\ \int\limits_{\frac{5}{6}}^{1} \left(t-\frac{5}{6}\right) t\left|f'(a)\right|^q dt + \int\limits_{\frac{5}{6}}^{1} t\left|f'(b)\right|^q dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\begin{array}{c} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6}-t\right) t\left|f'(a)\right|^q dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} t\left|f'(b)\right|^q dt + \\ \int\limits_{\frac{5}{6}}^{1} \left(t-\frac{5}{6}\right)(1-t)\left|f'(a)\right|^q dt + \int\limits_{\frac{5}{6}}^{1} (1-t)\left|f'(b)\right|^q dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right)$$

En effectuant le calcul des intégrales d'où le résultat. ■

Corollaire 3.15 *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.3 soient satisfaites, et* $|f'|^q$ *est une fonction s-préinvexe,alors*

$$\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right| \\ \leq \tfrac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\tfrac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}} \\ \left(\begin{array}{c} \left(\frac{2+(1+2s)3^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}\left|f'(a)\right|^q+\frac{2\times 5^{2+s}-(7+2s)3^{1+s}+(s-4)6^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ \left(\frac{2\times 5^{2+s}-(7+2s)3^{1+s}+(s-4)6^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}\left|f'(a)\right|+\frac{2+(1+2s)3^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right).$$

Preuve. Comme $|f'|^q$ est s préinvexe on a

$$\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q \leq (\frac{1-t}{2})^s\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1+t}{2})^s\left|f'(b)\right|^q,$$

et

$$\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q \leq (\frac{1+t}{2})^s\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1-t}{2})^s\left|f'(b)\right|^q.$$

En utilisant le théorème 3.3 d'où

$$\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\begin{array}{l}\int\limits_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt\\ +\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt\\ +\int\limits_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt\\ +\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right)dt\end{array}\right)$$

En effectuant le calcul des intégrales on trouve

$$\left|\tfrac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$

$$\leq\frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}\left(\frac{2+(1+2s)3^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}|f'(a)|^q+\frac{2\times5^{2+s}-(7+2s)3^{1+s}+(s-4)6^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ \left(\frac{2\times5^{2+s}-(7+2s)3^{1+s}+(s-4)6^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}|f'(a)|+\frac{2+(1+2s)3^{1+s}}{(2+s)(1+s)6^{2+s}}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).$$

■

Remarque 3.3 *Le théorème 7 de* [13] *correpond au corollaire 3.15 et le théorème 9 de* [14] *correspond au corollaire 3.16 lorsqu'on remplace η par $(b-a)$.*

Corollaire 3.16 *On suppose que toutes les hypothèses du théorème 3.3 soient satisfaites,* *et* $|f'|^q$ *une fonction s-Godunova-Levin préinvexe au second sens,alors on a*

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\left(\begin{array}{c}\left(\frac{2+(1-2s)3^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(a)\right|^q+\frac{2\times 5^{2-s}-(7+2s)3^{1-s}+(s-4)6^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\frac{2\times 5^{2-s}-(7+2s)3^{1-s}+(s-4)6^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(a)\right|+\frac{2+(1+2s)3^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{array}\right)$$

Preuve. comme $|f'|^q$ est s-Godunova-Levin préinvexe on a

$$\left|f'(a+\frac{1+t}{2}\eta(b,a))\right|^q\leq(\frac{1-t}{2})^{-s}\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1+t}{2})^{-s}\left|f'(b)\right|^q,$$

et

$$\left|f'(a+\frac{1-t}{2}\eta(b,a))\right|^q\leq(\frac{1+t}{2})^{-s}\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1-t}{2})^{-s}\left|f'(b)\right|^q.$$

En utilisant le théorème 3.3 on a

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq\frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})\left((\frac{1-t}{2})^{-s}\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1+t}{2})^{-s}\left|f'(b)\right|^q\right)dt\\ +\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})\left((\frac{1-t}{2})^{-s}\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1+t}{2})^{-s}\left|f'(b)\right|^q\right)dt\\ +\int_0^{\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}-\frac{t}{2})\left((\frac{1+t}{2})^{-s}\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1-t}{2})^{-s}\left|f'(b)\right|^q\right)dt\\ +\int_{\frac{2}{3}}^{1}(\frac{t}{2}-\frac{1}{3})\left((\frac{1+t}{2})^{-s}\left|f'(a)\right|^q+(\frac{1-t}{2})^{-s}\left|f'(b)\right|^q\right)dt\end{array}\right)$$

En intégrant par partie on obtient

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \quad \frac{\eta(b,a)}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}\left(\frac{2+(1-2s)3^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(a)\right|^q+\frac{2\times 5^{2-s}-(7-2s)3^{1-s}-(s+4)6^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2+s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{2\times 5^{2-s}-(7-2s)3^{1-s}-(s+4)6^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2+s}}\left|f'(a)\right|+\frac{2+(1-2s)3^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).$$

De plus,si on choisit $\eta(b,a)=b-a, on$ obtient

$$\left|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{2a+\eta(b,a)}{2})+f(a+\eta(b,a)))-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)du\right|$$
$$\leq \quad \frac{b-a}{2^{1-\frac{1}{q}}}(\frac{5}{36})^{1-\frac{1}{q}}\left(\begin{array}{c}\left(\frac{2+(1-2s)3^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(a)\right|^q+\frac{2\times 5^{2-s}-(7-2s)3^{1-s}-(s+4)6^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2+s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\+\left(\frac{2\times 5^{2-s}-(7-2s)3^{1-s}-(s+4)6^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2+s}}\left|f'(a)\right|+\frac{2+(1-2s)3^{1-s}}{(2-s)(1-s)6^{2-s}}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right).$$

■

Conclusion

Le travail effectué dans ce mémoire s'inscrit dans le champ de la convexité, il constitue une introduction aux fonctions h-préinvexes, à travers l'étude de l'inégalité de Simpson dans un cadre non classique à savoir les fonctions h-préinvexes. Avant d'entamer l'étude dans le cadre cité dessus, on a établit une nouvelle identité intégrale qui était fondamentale par la suite.

Dans la première partie, on a introduit les notions nécessaires pour la suite, à savoir convexité classique et convexité généralisé ainsi, quelques théorèmes de base

Pour la deuxième partie on a rappelé l'inégalité de Simpson, de même on a cité quelques résultats concernant cette dernière dans le cadre des fonctions convexes. Egalement d'autres résultats dans le cadre des fonctions s-convexes.

En ce qui concerne la troixième partie, on a établi un résultat plus général là où on peut avoir comme cas particulier les résultats du deuxiéme chapitre.

Bibliographie

[1] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[2] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, Victoria University, Australia, (2000).

[3] S. S. Dragomir and Th. M. Rassias.Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,2002.

[4] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić, and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type.Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3,335-341.

[5] S. S. Dragomir,nequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex function on linear spaces Proyecciones 34 (2015), no. 4, 323-341.

[6] D.S.Mitrinovi ´c,Analytic inequalities.In cooperation withP.M.Vasi ´c.Die Grundlehrender mathematischen Wissenschaften,Band165 Springer-Verlag,NewYork-Berlin1970.

[7] D.S.Mitrinovi ´c,J.E.Pecari ´candA.M.Fink,Classical and new inequalities in analysis.Mathematics and its Applications,61.Kluwer Academic Publishers-Group,Dordrecht,1993.

[8] D.S.Mitrinovi ´c,J.E.Pecari ´c and A.M.Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, KluwerAcademic,Dordrecht,1994.

[9] J.-Y. Li, On Hadamard-type inequalities for s-preinvex functions. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) 27(2010), no. 4, p. 003.

[10] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.

[11] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), no. 2, 545–550.

[12] M. Matloka, Inequalities for h-prienvex functions. Appl. Math. Comput. 234 (2014), 52-57.

[13] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan and J. Li, On Hermite-Hadamard inequalities for h-preinvex functions, Filomat, 28 (2014), no. 7, 1463-1474.

[14] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan and S. Khan, Hermite-Hadamard inequalities for s-Godunova-Levin preinvex functions, J. Adv. Math. Stud. 7 (2014), no. 2, 12-19.

[15] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[16] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Őzdemir, On new inequelities of Simpson's type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll. 13 (2010), no. 2, Article2.

[17] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Őzdemir, On new inequelities of Simpson's type for s-convex functions. Comput. Math. Appl. 60 (2010), no. 8, 2191-2199.

[18] S. Varošanec, On h-convexity. J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), no. 1, 303-311.

[19] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.