وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــية العلـــوم
قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2022

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Espaces non bornés pondérés par la fonction de densité :Application en équation hyperbolique en viscoélasticité avec non-linéarité logarithmique

Option : Commande Optimale et Systèmes Dynamiques

Par : *CHEKHAR* Rania

Encadré par : BOUHALI keltoum M.C.B U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : BOUZETTOUTA Lamine	M.C.A	U.SKIKDA
Examinateur 1 : GHENNAM Karima	M.C.B	U.SKIKDA
Examinateur 2 : HAMDI Zakaria	M.C.B	U.SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciement

A la fin de ce travail, je ne manque d'adresser mes sincères Remerciements à mon ***Dieu*** *le grand créateur qui ma a guidé dans mes pats pour arriver à ce niveau.*

La réalisation de ce travail n'aurait pu être menée à terme sans le support constant de mon encadreur Docteur **BOHALI Keltoum** *désire lui adresser un merci tout particulier, ses précieux commentaires et ses conseils pertinents m'ont grandement aidé tout au long des différentes étapes inhérentes au processus de recherche et à l'élaboration de ce mémoire.*

Nombreuses sont les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail, auxquelles je dois avec plaisir, présenter mes remerciements.

Je voudrais également remercier les membres de jury, pour avoir bien voulu lire, commenter et débattre mon travail.

Je remercie toute personne, qui de prés ou de loin ayant généreusement contribuée à l'élaboration de ce travail.

En fin, un grand merci à mon père, ma mère, mes sœurs et mes frères pour leur amour, leur conseils ainsi que leur soutiens inconditionnel, qui m'a permis de réaliser ce mémoire.

CHEKHAR RANIA*.*

Dédicaces

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi

Mon cher père **KHELLIL**

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

Ma chère mère **ZAKIYA**

A mes Frères **AYOUB , YOUNES ,YAKOUB**

Merci pour m'avoir toujours supporté dans mes décisions. Merci pour tout votre amour et votre confiance, pour m'avoir aidé à ranger mon éternel désordre et pour votre énorme support pendant la rédaction de mon projet!
Je vous aime beaucoup.

A mes **grands-mères,** *mes* **grands-pères, mes tantes** *que dieu leur fasse miséricorde*

A mes chères amies **BOUCHRA, NOURHANE** *qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.*

CHEKHARRANIA

Résumé

Dans n’importe quelle dimension d’éspaces (**R**^n) , nous utilisons des espaces pondérés pour établir un taux de décroissance général de la solution de l’équation d’onde viscoélastique avec des non_linéarités logarithmiques.De plus, nous établissons,sous des hypothéses convenables sur g et les données initiales , l’existence d’une solution faible associée à l’equation.

Abstract

In any dimension of spaces (Rn) , we use weighted spaces to establish a general decay rate of the solution of the viscoelastic wave equation with logarithmic nonlinearities.Furthermore,we establish ,under suitable assumptions on g and the initial data,the existence of a weak solution associated with the equation.

ملخص

في اي بعد للمسافات (Rn) ، نستخدم المساحات الموزونة لايجاد معدل الاضمحلال العام لحل معادلة الموجة اللزجة المرنة مع اللاخطية اللوغاريتمية .تحت افتراضات مناسبة على g والبيانات الاولية, وجدنا حل ضعيف مرتبط بالمعادلة .

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}^N$: L'éspace Euclidien avec la norme $|s| = |(s_1, ..., s_2)| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} s_i^2\right)^{1/2}$

Ω : domaine borné de $\mathbb{R}^N$.

$\Gamma, \partial\Omega$: frontière topologique de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$: point de $\mathbb{R}^N$.

$\nabla_x u$: gradient spatial de u : $\nabla_x u = (frac\partial\partial x_1 u, ..., frac\partial\partial x_N u)$

$\Delta_x u$: Laplacien de u est l'opérateur du second ordre sur $\mathbb{R}^N$: $\Delta_x u = div(\nabla u) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}u + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_N^2}u$,

q : conjugué de p, $c - \grave{a} - d$: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

$D(\Omega)$: espace des fonctions a support compacte dans Ω.

$D'(\Omega)$: espace de distribution .

$\|x\|_X$: la norme de x dans X .

$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega),\ \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\right\}$.

$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: la ferméture de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

H : espace de Hilbert.

$H_0^1 = W_0^{1,2}$.

$u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$.

$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Opérateur de dérivation : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, alors :

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f(x)$$

<u>Si X est un espace de Banach</u>

$L^p(0,T;X) = \left\{f : (0,T) \to X \text{ est mesurable}\,; \int\limits_0^T \|f(t)\|_X^p\, dt < \infty\right\}$.

$L^\infty(0,T;X) = \left\{f : (0,T) \to X \text{ est mesurable}\,; ess - \sup\limits_{t\in(0,T)} \|f(t)\|_X^p < \infty\right\}$.

$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$: la boule unitée.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé *"EDP"* dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées. Elles sont utilisées dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes.
Le but principal de résoudre ces équations est d'essayer d'apprendre quelques informations sur le processus physique que l'équation est estimée à modéliser. Il est de base à l'importance des équations différentielles que même les plus simples équations correspondent aux modèles physiques utiles.
La compréhension d'un processus complexe par nature, est généralement réalisée en combinant où constituant sur des modèles plus simples et plus fondamentales. Ainsi, une connaissance approfondie de ces modèles, les équations qui les décrivent, et leurs solutions, est la première indispensable étape vers la solution des problèmes plus complexes et réalistes.

Les équations aux dérivées partielles avec le temps t en tant qu'une des variables indépendantes forment des équations d'évolutions en temps (Hyperboliques et paraboliques), elles résultent non seulement de beaucoup de champs des mathématiques, mais également d'autres branches de la science telles que la physique, la mécanique et la science des matériaux. Par exemple, équations de Navier-Stokes et d'Euler de la mécanique liquide, équations de réaction-diffusion des transferts thermiques et sciences biologiques, Klein....

Les équations aux dérivées partielles Hyperboliques servent à représenter des processus dynamiques que l'on rencontre notamment dans l'étude des structures flexibles.
Dans ce travail, que nous présentons sous forme d'un mémoire de Licence en Mathématiques, nous étudions un problème de type Hyperbolique (l'équation typique est une equation des ondes).
Une équation différentielle du second ordre se produisant fréquemment en mathématiques appliquées est l'équation d'onde. La resolution de l'équation des ondes était l'un des problèmes mathématiques majeurs de la première moitié du $XVIII^{eme}$ siècle.
Elle a été étudiée par D. Alembert en 1746, également elle a attirée l'attention d'Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753), et Lagrange (1759). Des solutions ont été obtenus dans plusieurs formes différentes, et vante les mérites et les relations entre, ces solutions ont été débattues, parfois avec véhémence, dans une série de documents. Les principaux points en litige portaient sur la nature d'une fonction, et les types de fonctions qui peuvent être représentés par des séries trigonométriques. Ces questions n'ont pas été résolus jusqu'à le XIX^{eme} siècle.

Une certaine forme de cette équation, où une généralisation de celui-ci, presque inévitablement se pose dans toute analyse mathématique des phénomènes impliquant la propagation des ondes dans un milieu continu. Par exemple, les études des ondes acoustiques, des vagues d'eau, les ondes électromagnétiques et les ondes sismiques sont toutes basées sur cette équation.

Peut-être la situation la plus facile se produit dans les vibrations mécaniques. Supposer qu'un fil élastique de longueur L est tendu entre deux supports de même niveau horizontal, de telle sorte que l'axe x s'étend le long de la chaîne. La corde élastique peut être considérée comme une corde de violon, un hauban, où peut-être une ligne électrique. Supposer que la chaîne est mise en mouvement (par pincement, par exemple) de sorte qu'il vibre dans un plan vertical, et $u(x,t)$ représentent le déplacement verticale subie par la chaîne au point x à l'instant t. Si les effets d'amortissement, comme l'air la résistance, sont négligés, et si l'amplitude du mouvement n'est pas trop grand, alors $u(x,t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{1}$$

dans un domaine $0 < x < L, t > 0$. L'équation (1) est connue comme l'équation des ondes.

La constante a^2 dans (1) est donnée par

$$a^2 = T/\rho, \tag{2}$$

où t est la tension (force) dans la chaîne, et ρ est la masse par unité de longueur du matériau de chaîne. Il s'ensuit que a l'unité de longueur/ heure, qui est, de la vitesse de propagation des ondes le long de la chaîne. Pour décrire le mouvement de la chaîne complète, il est nécessaire également de préciser des conditions initiales et limites pour le déplacement $u(x,t)$. Les extrémités sont supposées rester fixes, et donc les conditions aux limites sont

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t \geq 0. \tag{3}$$

Comme l'équation (1) est de second ordre pour la variable t, il est plausible de prescrire deux conditions initiales.

Elles sont la position initiale de la corde,

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \leq x \leq L, \tag{4}$$

et la vélocité,

$$u_t(x,0) = u_1(x), 0 \leq x \leq L, \tag{5}$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions données.

Pour les équations (3), (4) and (5), il est également nécessaire d'exiger que

$$u_0(0) = u_0(L) = 0, u_1(0) = u_1(L) = 0. \tag{6}$$

Le problème mathématique est alors de déterminer la solution de l'équation d'onde (1) que satisfis également les conditions aux limites (3) et les conditions initiales (4) et (5). Ce problème est un problème de valeur initiale dans les variables t temps, et un problème de valeur limite dans l'espace de la variable x.

Il peut être considéré comme un problème aux limites dans la semi-finis bande $0 < x < L, t > 0$ du plan xt. Une condition est imposée à chaque point sur les côtés semi-infinis, et deux sont imposées à chaque point d'extrémité.

Il est important de réaliser que l'équation (1) régit un grand nombre de problèmes d'ondes autres que les vibrations transversales d'une corde élastique. Par exemple, il est seulement nécessaire d'interpréter la fonction u et la constante a appropriées à des problèmes portant sur des vagues d'eau dans un océan, ces ondes acoustiques où électromagnétiques dans l'atmosphère, où des ondes élastiques dans un corps solide. Si plus d'une dimension de l'espace est important, alors l'équation (1) doit être légèrement généralisée.

L'équation d'onde à deux dimensions est

$$a^2 (u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \tag{7}$$

Cette équation se poserait, par exemple, si l'on considérait le mouvement d'une feuille mince et élastique, comme une peau de tambour.

De même, dans les trois dimensions de l'équation d'onde est

$$a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \tag{8}$$

Dans le cas de ces deux dernières équations, les conditions aux bords et les conditions initiales doivent également être convenablement généralisée.

En dimension supérieure l'équation suivante

$$u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), \tag{9}$$

représente l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$, elle modélise la propagation des ondes où de vibration, avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x)$$

et les conditions aux bords

$$u(x,t) = 0,$$

où Δ_x le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ et la fonction $f(x,t)$ donnée. Par exemple, la propagation au cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique, ou bien de l'amplitude d'un champ électrique de direction constante. L'inconnue dans cette équation est la fonction $u(x,t)$.

Plan de mémoire

On a structuré ce mémoire en trois grands chapitres :

Chapitre01 :

Dans ce premier chapitre on rassemble toutes les notions et résultats de base que nous utiliserons par la suite.

Chapitre02 :

Ce chapitre traite l'une des premières équations aux dérivées partielles mises en évidence (Equation des cordes vibrantes).

Chapitre03 :

Dans ce chapitre on considere une equation hyperbolique en viscoélasticité avec non-linéarité logarithmique. ce chapitre est principale, où nous avons traduit un article de mon encadreur et simplifié, develloppé les calcules. La question d'existence globale et comportement asymptotiques de la solutions ont été traité

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les notions essentielles, de même quelques résultats fondamentaux, qui concernent les espaces métriques, topologiques, les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev, espaces fonctionnelles et d'autres théorèmes classiques. Ces notions et ces résultats représentent un outil important pour l'étude de ce type de problème.

1.1 Qu'est qu'une équation différentielle partielle ?

1.1.1 Equation différentielle ordinaire (EDO)

pour fixer les idées, on rappelle d'abord quelques notions à propos des équation différentielles ordinaires(EDO). une éqution différentielle est une relation de type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \ldots.., u^{(n)}(x)) = 0 \tag{1.1}$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dérivées de la fonction inconnue u au point x.
La fonction F est une fonction de plusieurs variables

$$(x, y) \to F(x, y)$$

oû x est dans $\mathbb{R}$ (ou parfois dans un intervalle de $\mathbb{R}$) et

$$y = (y_0, \ldots.., y_n)$$

est dans $\mathbb{R}^{n+1}$

1.1.2 Equation aux dirévées partielles (EDP)

Définition 1.1.1 *Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ a valeur dans $\mathbb{R}$*

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation entre u les variables $x_1, x_2, ...x_n$ *et un nombre fini de dérivées partielles de u.*

$$F(x_1, x_2, ...x_n, u, D_1u, D_2u, ...D_nu, D_1D_2u, ...D_1D_nu, ..; D^\alpha u, ...) \tag{1.2}$$

oû

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

.

Définition 1.1.2 *On dit que u est une solution de l' EDP dans une région* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, si aprés substitution de u et de ses dérivées partielles, F s'annule pour tout*

$$(x_1, x_2, ...x_n) \in \Omega$$

1.1.3 Classification des EDPs linéaires du second ordre

ce paragraphe est destiné à distinguer trois types d'équations, qui se révélent différentes tant du points de vue mathématique(propriétés des solution, méthodes de démonstration) que physique. Etudions touts d'abord le cas des *EDP* dépendant de deux variables réelles.

Définition 1.1.3 *L'équation aux dériivées partielles (1.2) donnée dans l'introduction :*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial u} + yu = F(x, y) \tag{1.3}$$

est dit de type :
–hyperbolique lorsque $\triangle = b^2 - 4ac > 0$;
–parabolique lorsque $\triangle = b^2 - 4ac = 0$;
–elliptique lorsque $\triangle = b^2 - 4ac < 0$;
dans la suite,on dira que $\triangle = b^2 - 4ac$ *est la discriminant de l'équation (1.3).*

1.1.4 Probléme bien posé :

le nombre de solutions d'une EDP peut etre trés grand. Rappelons le cas des équation différentilles linéaires homogènes à coefficients constants. Pour l'équation

$$a_nu^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + ... + a_1u'(x) + a_0u(x) = 0, \tag{1.4}$$

on rappellera plus loin que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel on dimension n : la solution générale dépend de n (n est l'ordre de l'quation)·on obtient une solion unique lorsque l'on fixe $n$condition supplémentaires du type

$$u(0) = y_{o,} u'(0) = y_1, ..., u^{(n-1)}(o) = y_{n-1}, \tag{1.5}$$

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω avec eventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le probléme est bien posé si on a
- existence d'une solution du probléme .
- unicité de cette solution .
- stabilité par rapport aux données du probléme (Conditions initiales et aux bords).

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu on dit que le probléme est sensible aux données.

1.2 Quelques notions autour des dériveés partielles

1.2.1 Continuité

Définition 1.2.1 *soit Ω un ouvert et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application. on dit que f est continue en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ lorsque*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \to 0$$

quand

$$d((x, y), (x_0, y_0)) \to 0$$

on dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue en chaque point de Ω.

1.2.2 Dérivées directionnelles :

Soit

$$f : \quad \Omega \to \quad \mathbb{R}$$

une application, (x_0, y_0) un point de Ω et $u = (u_1, u_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

On appelle dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction de u la dérivée en $s = 0$, si elle existe, de la fonction d'une variable

$$f_u : s \to f(x_0, y_0) + su).$$

On la note alors

$$\partial_u f(x_0, y_0).$$

1.2.3 Les applications de classe C^k

soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, pour tout

$$k \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

on définit l'espace $C^k(\Omega)$ comme suit :

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : D^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n ; |\alpha| \leq k\}.$$

Autrement dit : une fonction

$$f : \quad \Omega \to \quad \mathbb{R},$$

est ditde classe C^k sur Ω si toute ses derivées partielles jusqu'a l'ordre k existent et sont continues.

$$C^k(\overline{\Omega}) = f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ou $\mathbb{C}$: $f \in C^k(\Omega)$, et toutes les derivées partielles l'ordre k se prolenge continument à $\overline{\Omega}$.

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

et

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega}).$$

Théorème 1.2.1 *si f est de classe c^2 dans Ω, alors on a :*

$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f, \ \ dans\ \Omega.$$

on note aussi les dirévées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots$$

1.2.4 Condition initiales et aux bords (Derechlet et Numan)

Les conditions de Dirichlet imposent à la solution u d'être continue sur l'adhérence de Ω, c'est-à-dire sur Ω et sa frontière, et d'être alors égale à une fonction donnée sur la frontière de Ω.
Les conditions de Neumann imposent à la solution u d'être continue sur l'adhérence de Ω, c'est-à-dire sur Ω et sa frontière, et d'admettre en tout point de la frontière de Ω une dérivée $\partial u/\partial N$ suivant le vecteur normal N orienté vers l'extérieur de la frontière de Ω (supposée suffisamment régulière) égale à une fonction donnée.

1.3 Espaces métriques, espaces topologiques

1.3.1 Norme, distance, topologie

Définition 1.3.1 *Soit X un espace vectoriel réel, une norme sur X est une application $x \longmapsto \|x\|$ de X dans $\mathbb{R}^+$, telle que :*
(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.3.2 *Soit X un espace vectoriel réel, un espace normé est un couple $(X, \|.\|)$, où $\|.\|$ est une norme sur X.*

Définition 1.3.3 *Soit X un ensemble non vide. Une distance sur X est une application*

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :
(D_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
(D_2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X.$
(D_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \; \forall x, y, z \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.3.4 *Un espace métrique est un couple (X, d), où d est une distance sur X.*

Définition 1.3.5 *Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r > 0$, on définit :*
1- La boule ouverte de centre x et de rayon r est :

$$B(x, r) = \{y \in X, \; d(y, x) < r\}. \tag{1.6}$$

2-La boule fermée de centre x et rayon r est :

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X, \; d(y, x) \leq r\}. \tag{1.7}$$

.3-La sphère de centre x et rayon r est :

$$S(x, r) = \{y \in X, \; d(y, x) = r\}. \tag{1.8}$$

Définition 1.3.6 *Soient e un ensemble quelconque et $P(E)$ la famille de toutes les parties de e. On dit qu'une sous famille τ de $P(E)$ est une topologie sur e si elle satisfait les trois conditions suivantes :*
(A_1) $e \in \tau, \varnothing \in \tau.$

(A_2) τ est stable par réunion (fini ou non) c'est-à-dire :

$$\forall \left(\Omega_i\right)_{i\ \in I} \subset \tau : \bigcup_{i\ \in I} \Omega_i\ \ \in \tau. \tag{1.9}$$

.

(A_3) τ est stable par intersection finie c'est-à-dire :

$$\forall \left(\Omega_j\right)_{i\ \in J}\ \subset \tau : \bigcap_{j\ \in J} \Omega_i\ \ \in \tau. \tag{1.10}$$

Le couple (E, τ) s'appelle espace topologique. les éléments de τ sont dits ensembles ouverts de (E, τ).

1.3.2 Continuité, complétude, compacité

Définition 1.3.7 *Soient $(X, d), (Y, D)$ deux espaces métriques. Une application*

$$f\ :\ X \longrightarrow Y$$

est continue au point $a \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$D\left(f\ \ (x), f\ \ (y)\right) < \varepsilon \tag{1.11}$$

dés que

$$d\ \ (x, y) < \delta \tag{1.12}$$

On dit aussi que a est un point de continuité de f.
f est continue si f est continue en tout point de X.
L'ensemble des fonctions continues de (X, d) vers (Y, D) est noté $C\left((X, d), (Y, D)\right)$ où tout simplement $C(X, Y)$.

Proposition 1.3.1 *Soient $(X, d), (Y, D)$ deux espaces métriques et*

$$f :\quad (X, d) \longrightarrow (Y, D)$$

une application alors f est continue en point $a \in X$ si et seulement si pour toute suite (U_n) converge vers a donc la suite $f\ (U_n)$ converge vers $f(a)$.

Théorème 1.3.1 *Soient $(X, d), (Y, D)$ deux espaces métriques et $f :\ (X, d) \to (Y, D)$ une application, alors les assertions suivantes sont equivalentes :*
i) f est continue sur X
ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est ouverte dans X.
iii) L'image réciproque par f de tout fermé de Y est fermée dans X.

Proposition 1.3.2 *Soient* $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces normés, et* f *application linéaire*

$$f\ : (X, \|.\|_X) \longrightarrow (Y\ , \|.\|_Y)$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f *est continue.*

b) f *est continue en* 0.

c) il existe $c > 0$, *tel que*

$$\|f\ (x)\|_y\ \leq C\,\|x\|_x\,, \forall x \in X,$$

si de plus est de dimension finie, alors toute application lineaire

$$f\ :\ (X, \|\|_x) \longrightarrow \left(X, \|\|_y\right)$$

est continue.

Définition 1.3.8 *Soit* (X, d) *un espace métrique, une suite* $(x_n) \in X$ *est de Cauchy si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_0 > 0$, *tel que* $d\,(x_n, x_m) < \varepsilon$ *dés que* $n, m \geq n_0$.

Définition 1.3.9 *Soit* (X, d) *est un espace métrique.*

** Une partie* A *de* X *est bornée s'il existe* $a \in X$ *et* $r > 0$ *tels que*

$$d\ \ (a, x) \leq r,\ \forall x \in A.$$

** Une suite* $(x_n) \subset X$ *est bornée s'il existe* $a \in X$ *et* $r > 0$ *tels que*

$$d\ \ (a, x_n) \leq r,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.3.10 *Un espace* (X, d) *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy* $(x_n) \in X$ *est convergente.*

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Proposition 1.3.3 *On a*

a) Si (A, d) *un espace complet, alors* A *est un fermé de* X .

b) Si (X, d) *un espace complet et* A *est un fermé de* X *,alors* (A, d) *est complet.*

Corollaire 1.3.1 *Dans un espace métrique* A, A *complet* $\Longleftrightarrow$ A *est fermé.*

Définition 1.3.11 *Soient* $(X,d),(Y,D)$ *deux espaces métriques et*

$$f: \quad X \longrightarrow Y$$

est bornée si son image $f\ (x)$ *est bornée.*

$$C_b(X,Y)=\{f:(X,d)\to(Y,D), f \text{ est continue et bornée}\}$$

.

Proposition 1.3.4 *Si* (Y,D) *un espace complet, alors* $C_b(X,Y)$ *est un espace complet.*

Définition 1.3.12 *Un espace* (X,d) *est compact si et seulement si pour tout recouvrement ouvert* $(U_i)_{i\in I}$ *de* X*,*
(i.e.U_i *ouvert et* $X=\cup_{i\in I}U_i$ *), on peut extraire un sous recouvrement finie c'est-à-dire il existe une famille* $J\subset I$ *tel que*

$$X=\cup_{j\in J}U_j.$$

Corollaire 1.3.2 *Un espace* (X,d) *est compact si et seulement si pour tout famille fermé* $(F\ _i)_{i\in I}$ *de* X*, telle que*

$$\cap_{i\in I}F_i \ =\varnothing,$$

il existe une famille finie $J\subset I$ *, telle que*

$$\cap_{j\in J}F_j=\varnothing.$$

Définition 1.3.13 *Un espace métrique* (X,d) *est compact si et seulement si toute suite* $(x_n)\subset X$ *admet une sous suite convergente.*

Proposition 1.3.5 *Soit* (X,d) *un espace compact, et* $A\subset X$*, alors* A *est compact si et seulement si* A *fermé dans* X*.*

Proposition 1.3.6 *Soient* $(X,d),(Y,D)$ *deux espaces métrique,* f *est une application continue de* X *dans* Y*. Si* X *est compact, alors* $f\ (X)$ *est un compact.*

Proposition 1.3.7 *Un espace compact est bornée et complet.*

Définition 1.3.14 *Soit* (X,d) *un espace métrique, une partie* A *de* X *est relativement compact si et seulement si toute suite de* A *admet une valeur d'adhérence dans* X*.*

1.4 Espaces de Banach et ses propriétés

Définition 1.4.1 *Un espace* $(X, \|.\|)$ *est de Banach si et seulement si* X *est complet pour la distance associe à* $\|.\|$.

Proposition 1.4.1 *Si* (X, d) *est un espace métrique et* $(E, \|.\|_E)$ *est un espace de Banach , alors* $C_b(X, Y)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 1.4.2 *Si* $(X, \|.\|_X)$ *est un espace normé et* $(Y, \|.\|_Y)$ *un espace de Banach, alors* $\check{L}(X, Y)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.4.2 *on dit qu'un ensemble* A *d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de* A *dans* A *admet un point fixe.*

Soient X , Y deux espaces de Banach ou bien, en général, deux espaces topologiques, et deux ensembles $A \subset X$ et $B \subset Y$.

1.5 Espaces fonctionnelle

1.5.1 Les espaces L^p

On donne ici quelques définitions et propriétés élémentaires.

Définition 1.5.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq P < \infty$, *on définit* $L^P(\Omega)$ *un espace de Lebesgue par :*

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^P dx < \infty \right\}. \tag{1.13}$$

pour $P = \mathbb{R}$ *et* $0 < P < \infty$, *on définit* $\|f\|_P$ *par :*

$$\|f\|_P = \left(\int_\Omega |f(x)|^P dx \right)^{\frac{1}{P}}. \tag{1.14}$$

Si $P = \infty$, *nous avons :*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable,il existe une constante } C \text{ telle que} \\ |f(x)| \leq C \text{ p.P sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf \{c, |f(x)| \leq c\}$$

Théorème 1.5.1 *(Inégalité de Holder).*
Soint $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq P \leq \infty$ *,alors* $f \ g \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |f \ g| \leq \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

Théorème 1.5.2 *(Inégalité de Young)*
Soient $f \in L^P(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R})$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *,*$1 \leq q \leq \infty$ *et* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$*.Alors*

$$f \ \star g \in L^r(\mathbb{R}) \ et \, \|f \ \star g\|_{L^r(\mathbb{R})} \ \leq \|f\|_{L^P(\mathbb{R})} \ \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} \, .$$

Lemme 1.5.1 *(de Gronwall)*
Soient :
ϕ *une fonction* $\in L^\infty(0,T)$, $\phi(t) \geq 0$ *,p.P.t* $\in [0,T]$.
μ *une fonction* $\in L^1(0,T)$, $\mu(t) \geq 0$, *p.P.* $t \in [0,T]$.
On suppose

$$\phi(t) \leq \int_0^t \mu(s)\, \phi(s)\, ds + C, \ p.P.t \ \in [0,T] \, . \, (C = constante) \, .$$

Alors

$$\phi(t) \leq C \ \exp\left(\int_0^t \mu(s)\, ds \right), \ p.P. \ t \ \in [0,T] \, .$$

On désigne par $\langle f, g \rangle$ *le produit scalaire dans* $L^2(\Omega)$, *i.e.*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \ (x) \ g \ (x)\, dx,$$

et également le produit de dualité entre $f \in D'(\Omega)$ *(espace des distributions sur* Ω *), et* $g \in D(\Omega)$ *(espace des fonctions* C^∞ *sur* Ω *et à support compact dans* Ω*).*

Théorème 1.5.3 $L^P(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme* $\|.\|_P$, *pour tout* $1 \leq P \leq \infty$ *.*

1.5.2 Espace H^1 et H^1_0

Définition 1.5.2 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *l'espace de sobolev* $H^1(\Omega)$ *est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) telque \forall i \in \{1, ...N\} \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *est la dérivée partielle faible de* u.

1.5.3 Espaces de Sobolev

On introduit l'espace $H^{\,m}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $v \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale m -prises au sens des distributions sont dans $L^2(\Omega)$ Ces espace jouent dans analyse des équations aux dérivées partielles un rôle fondamental.

Les espaces de Sobolev d'ordre m : [$H^{\,m}(\Omega)$]

Définition 1.5.3 *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $m \in \mathbb{N}$. On appelle espace de sobolev d'ordre m sur Ω l'espace*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{calcules au sens des distributions}}}{D^\alpha u \in L^2(\Omega)} \quad , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \le m \right\}$$

Remarque 1.5.1 *Pour $m = 1$,*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{calcules au sens des distributions}}}{\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)} \quad , 1 \le i \le n \right\}$$

Définition 1.5.4 *et la norme associée à ce produit scalaire*

$$\|u\|_{H^{\,m}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u\ (x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.15}$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \textit{adhérence de } D(\Omega) \textit{ dans } H^{\,1}(\Omega) \\ &= sous-espace\ de H^{\,1}(\Omega)\ \ des\ fonction\ "nulles"\ sur\ \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.16}$$

.

Théorème 1.5.4 *(Formule de Green)*
pour tout $u \in H^{\,2}(\Omega), v \in H^{\,1}(\Omega)$ on a

$$-\int_\Omega \Delta_x u v \, dx = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\theta \tag{1.17}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u à Γ dirigée vers l'extérieur .

1.5.4 Les espaces $L^p(0,T,X)$

Définition 1.5.5 *Soit X un espace de Banach, on désigne par $L^P(0,T,X)$ l'espace du foncton mesurable :*

$$\begin{aligned} f \quad &:]0,T[\longmapsto X \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned} \tag{1.18}$$

tel que

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^P \, dt \right)^{\frac{1}{P}} = \|f\|_{L^P(0,T,X)} < \infty, \tag{1.19}$$

pour tout $1 \leq P < \infty$

Lemme 1.5.2 *Soit $f \in L^P(0,T,X)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^P(0,T,X)$, pour $1 \leq P \leq \infty$, nous avons f continue de $[0,T]$ dans X, c'est-à-dire $f \in C^1(0,T,X)$*

Chapitre 2

Equation des ondes sur un axe (Dans $\mathbb{R}$)

Les équations aux direvées partielles sont d'intérêt répandu en raison de leur raccordement avec des phénomènes dans le monde physique. Nous commençons en examinant ce raccordement dans un problème physique simple.
L'exemple le plus simple, même d'un point de vu historique, d'un problème qui inclut l'équation d'ondes est fourni par l'étude de la vibration d'une corde, comme une corde de violon ou de guitare. Nous allons étudié un système où l'inconnu $u(x,t)$ est le déplacement et nous devons analyser la nature des forces sur la corde (des forces internes et externes).

2.1 Equation des cordes vibrantes

Il s'agit de l'une des premières équations aux dérivées partielles mises en évidence.
Elle fut étudiée dés la premiére moitie du **XVIII**^{e} siècle par d'Alembert :

$$\frac{\partial^2}{\partial_{tt}} u(x,t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial_{tt}} u(x,t) = f(x,t) \tag{2.1}$$

.ou c désigne la vitesse de propagation de l'onde dans la corde et $u(x,t)$ l'ordonnée du points d'abscisse x de la corde à l'instant t (cette ordonnée étant mesurée par rapport à la position d'équilibre supposée d'ordonnée nulle).

2.1.1 Le modèle physique

Une corde est un milieu continu unitaire unidimensionnel ayant une longueur fini ou infini, elle posséde généralement des propriétées d'élasticité et peut etre tendue à des extrémités, et etre amenée à une longueur supérieur à sa longueur de repos, dans ce cas, elle posséde une tension interne, dont l'effet est d'attirer, toute portion de la corde tendue, la position d'équilibre correspend a la ligne droite, joignant les deux extrémités.

La corde tendue peut etre modilisé au niveau microscopique par la *juxtaposition* de ressorts de taille infinité *sinale* couples, autre proches voisins et exerçant, l'un sur l'autre de force de rappel l'orsqu'on écarte une portion de la corde de sa position d'équilibre, elle subit immédiatement les forces de rappel des portions voisines et il en résulte, un mouvement ocullatoire autour de la position d'équilibre qui crée une onde qui se *propage*, sur toute la corde.

On peut distinguer deux cas :

Un mouvement transversal ou orthogonal à la position d'équilibre et un mouvement longitidinal à la corde.

On considère une corde de longueur L, de densitè constante, élastique, tendue avec une force F_0 et en position d'équilibre rectiligne à l'instant $t = 0$ les points de la corde écartés de leurs positions d'équilibre accquiérent une certaine vitesse, supposons que l'axe des x coincide avec la corde en équilibre.

Le probléme des petites vibration transversales des points pour $t > 0$, si les extémités de la corde sont :

(a) Fixées régidenant.

(b) Libres, qu'elles peuvent se déplacer librement suivants des droites paralléles à la direction de l'écart.

(c) Fixées élastiquement, chaque extrémité prouve de la part de l'appui une réaction proportionnelle à l'écart et de sens opposé.

(d) Transversal selon des lois données.

Se ramene à l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2}{\partial_{tt}}u(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial_{tt}}u(x,t) = f(x,t) \tag{2.2}$$

avec c est la vitesse de propagation des ondes

$$c = \sqrt[2]{\frac{F_0}{\rho}}$$

ρ : est la densité liniaire de la corde.

2.1.2 Solution de l'équation

Solution générale

Cas d'une corde infinie

On suppose la corde vibrante infinie et on assimile la position d'équilibre de celle-ci à la droite réelle $\mathbb{R}$ on se propose d'étudier l'équation avec les *conditions initiales* suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel x.

$$u(x,0) = f(x) et \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x) \tag{2.3}$$

Ces conditions signifient que la corde a été làchée avec vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction f, que l'on suppose de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

On va résoudre l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial_{tt}} u(x,t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial_{tt}} u(x,t) = 0 \tag{2.4}$$

c'est à dire trouver les fonctions $u(x,t)$, définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient cette égalité.

L'équation des caractéristique :

$$\begin{cases} cw^2 - bw + a = 0 \\ w = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} w^2 - c^2 = 0 \\ \quad w = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} w = \pm c \\ w = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = +c \\ \frac{dx}{dt} = -c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x - ct = c_1 \\ x + ct = c_2 \end{cases}$$

Sont les deux familles de courbes caractéristiques.

On reprend la méthode du changement de coordonnées.

Soit

$$\alpha = x - ct\beta = x + ct,$$

et

$$v : (\alpha, \beta) \mapsto u(x,t).$$

On note que :

$$u(x,t) = v(x+ct, x-ct).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_{tt}}u(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial_{tt}}u(x,t) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u = u_\alpha \alpha_t + u_\beta \beta_t = -cu_\alpha + cu_\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial tt}u = -c(-cu_{\alpha\alpha} + cu_{\alpha\beta}) + c(-cu_{\beta\alpha} + cu_{\beta\beta}) = c^2u_{\alpha\alpha} - 2c^2u_{\alpha\beta} + c^2u_{\beta\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u = u_\alpha + u_\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial xx}u = u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha} + u_{\beta\beta} = u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$$

$$2.4 \Leftrightarrow c^2u_{\alpha\alpha} - 2c^2u_{\alpha\beta} + c^2u_{\beta\beta} - c^2u_{\alpha\alpha} - 2c^2u_{\alpha\beta} - c^2u_{\beta\beta} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -4c^2u_{\alpha\beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

$u_\alpha = \mathsf{F}(\alpha)$, F : fonction arbitraire.

$$u = \int \mathsf{F}(\alpha)d\alpha + \psi(\beta)$$

$u(\alpha,\beta) = \Phi(\alpha) + \psi(\beta)$, Φ, Ψ :deux fonctions arbitraires
donc :

$$u = u(x,t) = \Phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

D'aprés la condition initiale

$$u(x,0) = f(x)$$

$$f(x) = \Phi(x) + \psi(x)$$

d'aprés la condition initiale

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial_t}u(x,t) = -c\Phi'(x - ct) + c\psi'(x + ct)$$

$$g(x) = -c\Phi'(x) + c\psi'(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \Phi(x) + \psi(x) \\ g(x) = -c\Phi'(x) + c\psi'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \Phi(x) + \psi(x) \\ \frac{1}{c}g(x) = -\Phi'(x) + \psi'(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \Phi'(x) + \psi'(x) \\ \frac{1}{c}g(x) = -\Phi'(x) + \psi'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \\ \Phi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x)dx + c_1, x \in \mathbb{R} \\ \Phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x)dx + c_2, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x) + c_1 + c_2 \leftrightarrow c_1 + c_2 = 0$$

Alors :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(x)dx + c_2 + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(x)dx + c_1$$

$$\Longrightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x)dx. \tag{2.6}$$

Cas d'une corde finie

On suppose la corde vibrante finie de longueur L, et on assimile la position d'équilibre de celle-ci au segment $[0, L]$. On se propose ici d'étudier l'équation avec :
les conditions initiales suivantes, réalisées pour tout nombre réel x :

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

qui signifient que la corde a été lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position définie par la donnée de la fonction f, que l'on suppose de classe C^2 sur $[0, L]$ (ou même de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux) ;
les conditions aux limites suivantes, réalisées pour tout nombre
réel positif t :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

qui signifient que la corde est fixée à ses deux extrémités.
Pour $t = 0$, on a donc :

$$f(0) = f(L) = 0.$$

On étudie les problèmes d'existence et d'unicité de la solution u d'une telle $e.d.P.$

2.1.3 Unicité d'une éventuelle solution par considération de l'énergie

Supposons que l'on dispose de deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (qui peut ici être homogène ou avec second membre, ce qui ne change rien à la démonstration), vérifiant les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites.
Posons $u = u_1 - u_2$ et introduisons la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\frac{1}{c^2}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)^2 + (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)^2)dx$$

Les hypothèses faites autorisent la dérivation de e sous le signe intégral, et on a, puisque

$$u = u_1 - u_2$$

est aussi solution de l'équation des cordes vibrantes :

$$E'(t) = \int_0^L (\frac{1}{c^2}(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x,t) + (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x,t))dx$$

$$= \int_0^L ((\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,t) + (\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x,t))dx.$$

L'expression sous le signe intégral est une dérivée et on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L,t) = 0$$

par dérivation des relations

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

ce qui donne :

$$E'(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_0^L = 0.$$

Par conséquent, la fonction $t \to E(t)$ est constante et, en fait, nulle puisque $E(0) = 0$ et du fait que

2.2 Concervation de l'énergie

2.2.1 Vitesse de propogation

On vient de voir que l'effet d'une position $\varphi(x)$ à l'instant $t = 0$ est une paire d'ondes et qui se propagent dans les deux directions à vitesse c. Si l'on a une vitesse $\psi(x)$ à l'instant $t = 0$, on obtient une onde qui s'étale dans les deux directions, à une vitesse inférieure ou égale à c. Dans tous les cas rien ne se propage à vitesse plus grande que c. Autrement dit la valeur de la solution u au point (x, t) ne dépend que des valeurs de en $x - ct$ et en $x + ct$, et des valeurs de sur l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. Pour le voir il suffit de reprendre l'expression de la solution donnée dans le théorème de *D'Alembert.*

2.2.2 Energie

Définition 2.2.1 *Soit u une solution de l'équation des ondes. On appelle énergie de u la quantité*

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} (\frac{\partial}{t} u(x,t))^2 dx + \frac{\tau}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} (\frac{\partial}{x} u(x,t))^2 dx$$

Il faut noter que, pour ce qui concerne les constantes ρ et τ qui sont strictement positives, nous avons gardé ici la définition physique de l'énergie de la corde vibrante : la premiére intégrale est la partie énergie cinétique ($\frac{1}{2}mv^2$) et la deuxiéme est la partie énergie potentielle, qui correspond à la tension multipliée par l'allongement de la corde élastique ($\sqrt[2]{1 + (\frac{\partial}{x}u)^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(\frac{\partial}{x}u)^2$). Là encore l'hypothése de petitesse des oscillations permet de simplifier considérablement l'étude !

Chapitre 3

Equation hyperbolique en viscoélasticité avec non-linéarité logarithmique

Il est bien connu que parmi une classe de non-linéarités, la non-linéarité logarithmique se distingue par plusieurs propriétés physiques intéressantes (physique nucléaire, optique et géophysique...). Nous considérons l'équation semi-linéaire suivante avec une non-linéarité logarithmique

$$u'' - Q(x)\big(\Delta_x u - \int_0^t g(t-s)\Delta_x u(s)ds\big) = u\ln|u|^k \tag{3.1}$$

ou $x \in \mathbb{R}^n, t > 0, n \geq 2, k > 1$

Les modèles considérés ici sont bien connus et se réfèrent à des matériaux à mémoire comme on les appelle dans la vaste littérature qui s'intéresse à leur physique. comportement mécanique et les nombreux problèmes analytiques intéressants.

La propriété caractéristique physique de tels matériaux est que leur comportement dépend du temps non seulement à travers le temps présent mais aussi à travers leur histoire passée. Eq. (3.1) est équipé des données initiales suivantes

$$u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), u'(0,x) = u_1(x) \in L^2_p(\mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

où les espaces pondérés H sont donnés dans la Définition (2.1) et la fonction de densite $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, (Q(x))^{-1} = \rho(x)$ satisfait

$$\rho : \mathbb{R}^n \to R^*_+, \rho(x)\epsilon C^{0,\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}^n), \tag{3.3}$$

avec $\tilde{\gamma} \in (0,1)$ et $\rho \in L^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, où $s = 2n/(2n - qn + 2q)$.

Tout d'abord, le problème de valeur aux limites initial suivant

$$u'' - \Delta_x u + \int_0^t g(t-s)\Delta_x u(s)ds + h(u') = f(u), x \in \Omega, t > 0, \tag{3.4}$$

a été largement étudié. Par exemple [1-6] et [7], les auteurs ont étudié l'existence globale, le taux de décroissance et l 'explosion des solutions. Des études en$\mathbb{R}^n$, nous citons essentiellement les résultats de [8-12].Dans [10], auteurs ont montré que, pour des données initiales à support compact et pour une fonction de relaxation à décroissance exponentielle, la décroissance de l'énergie de solution d'un problème linéaire de Cauchy (3.1), (3.2) avec $\rho(x) = 1$ est polynome.

La propagation à vitesse finie est utilisée pour compenser le manque d'inégalité de Poincaré. Dans [9], l'auteur s'est penché sur un problème viscoélastique de Cauchy linéaire avec la densité. Son étude comprenait les taux exponentiels et polynomiaux,où il a utilisé les espaces pondérés par la densité pour compenser le manque d'inégalité de Poincaré.Le mme problème traité dans [9], a été considéré dans [11],où ils considèrent un problème de Cauchy pour une équation d'onde viscoélastique.Dans des conditions convenables sur les données initiales et la fonction de relaxation,ils prouvent un résultat de désintégration polynomiale des solutions. Conditions utilisées,sur la fonction de relaxation g et sa dérivée g' sont différentes des conditions habituelles. Le problème (3.1), (3.2) sans terme source, pour le cas $\rho(x) = 1$ dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n, (n \geq 1)$ avec une frontière lisse $\partial\Omega$ et g est une fonction non croissante positive a été considéré dans [12], où ils ont établi un résultat explicite et général de taux de décroissance pour les fonctions de relaxation satisfaisant :

$$g'(t) \leqslant -H(g(t)), t \geq 0, H(0) = 0, \tag{3.5}$$

pour une fonction positive $H \in C^1(R^+)$

et H est linéaire ou strictement croissant et strictement convexe C^2 fonction sur au $(0, r], 1 > r$. Cela améliore les conditions considérées dans [8] sur les fonctions de relaxation

$$g'(t) \leqslant -\chi(g(t)), \chi(0) = \chi'(o) = 0, \tag{3.6}$$

où χ est une fonction non-négative, strictement croissante et strictement convexe $(0, k_0], k_0 > 0$. Le but de cet article est d'établir l'existence d'une solution faible au problème (3.1)-(3.2). Nous obtenons également des résultats de décroissance.

3.1 Matériel, hypothèses et lemmes techniques

On omet la variable d'espace x $u(x,t), u'(x,t)$ et pour des raisons de simplicité dénotent u(x,t)=u et u'(x,t)=u', lorsqu'il n'y a pas de confusion.On note par $|\nabla_x u|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2, \Delta_x u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Les constantes utilisées tout au long de cet article sont des constantes génériques positives qui peuvent etre différentes dans diverses occurrences. Les fonctions considérées sont toutes à valeur réelle.ici$u' = du(t)/dt$ et $u'' = d^2u(t)/dt^2$

On rappelle et on utilise l'hypothèse suivante sur la fonction g comme :

$(A1)$ On suppose que la fonction g :$\mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ est de classe C^1 satisfaisante :

$$1 - \overline{g} = l > 0, g(0) = g_0 > 0, \tag{3.7}$$

où $\overline{g} = \int\limits_0^\infty g(t)dt$

(A2) Il existe une fonction positive $H \in C^1(R^+)$ tel que

$$g'(t) + H(g(t)) \leqslant 0, t \geq 0, H(0) = 0 \tag{3.8}$$

et H est linéaire ou strictement croissant et strictement convexe C^2 fonction sur $(0, r], 1 > r$.

(A3) D'après les résultats de [12],on a

1- On peut en déduire qu'il existe $t_1 > 0$ assez grand pour que :

1) $\forall t \geq t_1$, nous avons $(\lim\limits_{s\to\infty} g(s)) = 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{s\to\infty} -g'(s)$ ne peut pas etre positif, alors $\lim\limits_{s\to\infty} -g'(s) = 0$. Puis $g(t_1) > 0$ et

$$max\{g(s), -g'(s)\} < min\{r, H(r), H_0(r)\}, \tag{3.9}$$

où $H_0(t) = H(D(t))$ à condition que D soit une fonction C^1 positive,avec $D(0) = 0$,Pour qui H_0 est une fonction C^2 strictement croissante et strictement convexe sur (0,r] et

$$\int\limits_0^{+\infty} g(s)H_0(-g'(s))ds < +\infty$$

2) $\forall t \in [0, t_1]$: Comme g est non croissant, $g(0) > 0$ et $g(t_1) > 0$ alors $g(t) > 0$ et

$$g(0) \geq g(t) \geq g(t_1) > 0.$$

Donc, puisque H est une fonction continue positive, alors

$$a \leqslant H(g(t)) \leqslant b,$$

pour certaines constantes positives a et b. En conséquence,

$$g'(t) \leqslant -H(g(t)) \leqslant -kg(t), k > 0,$$

qui donne

$$g'(t) \leqslant -kg(t), k > 0. \tag{3.10}$$

2- Soit H_0^* soit le conjugué convexe de H_0 au sens de Young (voir [13], pages 61-64),ensuite

$$H_0^*(s) = s(H_0')^{-1}(s) - H_0[(H_0')^{-1}(s)], s\epsilon(0, H_0'(r))$$

et satisfait l'inégalité de Young suivante

$$AB \leqslant H_0^*(A) + H_0(B), A\epsilon(0, H_0'(r)), B\epsilon(0, r]. \tag{3.11}$$

L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ est définie comme la fermeture de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonctions par rapport à la norme $\|u\|^2_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u|^2 dx$. Il est défini dans la définition suivante

Définition 3.1.1 *Nous les espaces fonctionnels de notre problème et sa norme comme suit :*

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n) : \nabla_x f \epsilon (L^2(\mathbb{R}^n))^n \right\} \tag{3.12}$$

$\mathcal{H}$ et cela est intégré en permanence dans $L^{2n/(n-2)}$.

L'espace $L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonctions par rapport au produit scalaire

$$(f, h)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho f h dx.$$

Pour $1 < q < \infty$, sif est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ nous définissons

$$\|f\|_{L^q_\rho}(\mathbb{R}^n) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho |f|^q dx \right)^{1/q} \tag{3.13}$$

Remarque 3.1.1 *L'espace $L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Les lemmes techniques suivants joueront un role important dans la suite .

Lemme 3.1.1 *([14, Lemme 1.1]) Pour deux fonctions quelconques $g,\upsilon \in C^1(R)$ et $\theta \in [0.1]$ on a*

$$\upsilon'(t) \int\limits_0^t g(t-s)\upsilon(s)ds = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(t-s)|\upsilon(t)-\upsilon(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t g(s)ds\right)|\upsilon(t)|^2$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^t g'(t-s)|\upsilon(t)-\upsilon(s)|^2 ds - \frac{1}{2}g(t)|\upsilon(t)|^2 \tag{3.14}$$

et

$$\left|\int_0^t g(t-s)(v(t)-v(s))ds\right|^2 \leqslant \left(\int_0^t |g(s)|^{2(1-\theta)}ds\right)\left(\int_0^t |g(t-s)|^{2\theta}|v(t)-v(s)|^2 ds\right) \tag{3.15}$$

Le lemme suivant peut etre facilement demontré (voir [2, 15])

Lemme 3.1.2 *Soit ρ satisfait (3.3), alors pour tout $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$*

$$\|u\|_{L^q_\rho}(\mathbb{R}^n) \leqslant \|\rho\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|\nabla_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3.16}$$

avec $s = \dfrac{2n}{2n-qn+2q}, 2 \leqslant q \leqslant \dfrac{2n}{n-2}$
Maintenant, en utilisant le lemme 3.1.2, nous donnons le lemme suivant concernant l'inégalité logarithmique de Sobolev.

Lemme 3.1.3 *(voir [16-18]) Soit $u \in \mathbb{R}^n$ etre n'importe quelle fonction et $c_1, c_2 > 0$ etre n'importe quel nombre. Puis*

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)|u|^2 Ln\left(\frac{|u|}{\|u\|^2{}_{L^2_\rho}}\right)dx + n(1+c_1)\|u\|^2_{L^2_\rho} \leqslant c_2\frac{\|\rho\|^2_{L^2}}{\pi}\|\nabla_x u\|^2_2. \tag{3.17}$$

Définition 3.1.2 *Par la solution faible de* (3.1) *sur [0,T] nous entendons une fonction $u \in C([0,T],\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T],L^2_\rho(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0,T],\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^n))$*
avec $u' \in L^2([0,T],\mathcal{H}(\mathbb{R}^n))$, tel que $u(0)=u_0, u'(0)=u_1$ et pour tous $\nu \in \mathcal{H}, t \in [0,T]$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)uln|u|^k \nu dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u''\nu dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x u \nabla_x \nu dx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t g(t-s)\nabla_x u(s)ds\nabla_x \nu dx. \tag{3.18}$$

En multipliant l'équation (3.1) par $\rho(x)u'$, et en intégrant par parties sur $\mathbb{R}^n$, on obtiendra l'énergie de u au temps t comme

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(\|u'\|^2{}_{L^2_\rho} + \Big(1-\int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla_x u\|^2{}_2 + (g\circ\nabla_x u) - \int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u^2 ln|u|^k dx\Big)$$

$$+\frac{k}{4}\|u\|^2{}_{L^2_\rho}, \tag{3.19}$$

et la loi fonctionnelle énergétique suivante est vérifiée :

$$E'(t) = \frac{1}{2}(g' \circ \nabla_x u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla_x u(t)\|_2^2, \qquad \textit{pour} \qquad \textit{tous} \qquad t \geq 0, \tag{4.1}$$

ce qui signifie que notre énergie est uniformément bornée et décroissante le long des trajectoires. La notation suivante sera utilisée tout au long de ce mémoire

$$(g \circ \nabla_x u)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\|\nabla_x u(t) - \nabla_x u(\tau)\|_2^2 d\tau, \tag{4.2}$$

pour $u(t) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), t \geq 0$

3.2 Existence globale dans le temps

D'après l'inégalité logarithmique de Sobolev et en utilisant la méthode de Galerkin combinée avec le théorème compacité, similaire à la preuve de ([16, 18-21]), nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *(Existence locale) Soit $u_0(x) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), u_1(x) \in L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ etre donné.en dessous de hypothèse (A1) ,(A2) et* (3.3)*,le problème* (3.1) *a une unique solution locale*

$$u \in C([0,T], \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], L^2_\rho(\mathbb{R}^n))$$

Maintenant, nous introduisons deux fonctionnelles

$$J(t) = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla_x u\|_2^2 + (g \circ \nabla_x u) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u^2 ln|u|^k dx\right) + \frac{k}{4}\|u\|^2_{L'_\rho{}^2} \tag{4.3}$$

et

$$I(t) = \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla_x u\|_2^2 + (g \circ \nabla_x u) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u^2 ln|u|^k dx) \tag{4.4}$$

Puis,

$$J(t) = \frac{1}{2}I(t) + \frac{k}{4}\|u\|^2_{L^2_\rho} \tag{4.5}$$

Comme dans ([22]) pour établir la méthode de puits de potentiel correspondante qui est liée au terme non linéaire logarithmique, nous introduisons l'ensemble stable comme suit

$$W = \left\{u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) : I(t) > 0, J(t) < d\right\} \cup \left\{0\right\} \tag{4.6}$$

Remarque 3.2.1 *On remarque que le col de niveau d donne en (4.6) défini par*

$$d = inf\Big\{ \sup_{u\in H(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}\mu\geq 0} J(\mu u)\Big\} \tag{4.7}$$

De plus, en introduisant la soi-disant "variété de Nehari"

$$\mathcal{N} = \big\{u \in H(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}. : I(t) = 0\big\}$$

Semblable aux résultats de [23], on voit facilement que la profondeur potentielle d est également caractérisée par

$$d = \inf_{u\epsilon\mathcal{N}} J(t). \tag{4.8}$$

Cette caractérisation de d montre que

$$dist(0, \mathcal{N}) = \min_{u\epsilon\mathcal{N}} \|u\|_{H(\mathbb{R}^n)} \tag{4.9}$$

on par le fait que(4.1), on prouvera l'invariance de l'ensembleW. C'est si pour certains $t_0 > 0$ si$u(t_0)\epsilon W$, alors $u(t)\epsilon W, \forall t \geq t_0$, commenons par donner le Lemme d'existence de la profondeur potentielle (Voir [16, Lemme 2.4]).

Lemme 3.2.1 *d est une constante positive.*

Lemme 3.2.2 *Soit $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ et $\beta = e^{\frac{1}{2}n(1+c_1)}$. Si $0 < \|u\|^2_{L^2_\rho} < \beta$,alors $I(t) > 0$;si I(t)=0,$\|u\|_2^2 \neq 0$,alors $\|u\|^2_{L^2_\rho} > \beta$*

Preuve D'après (A1), (3.2) et le lemme 3.1.3, on a

$$I(t) = \big(1 - \int_0^t g(s)ds\big)\|\nabla_x u\|_2^2 + (g \circ \nabla_x u) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u^2 ln|u|^k dx$$

$$\geq 1\ \|\nabla_x u\|_2^2 - k\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u^2\big(ln\frac{|u|}{\|u\|^2_{L^2_\rho}} + ln\|u\|^2_{L^2_\rho}\big)dx$$

$$\geq \left(l - \frac{kc_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2_\rho}\right)\|\nabla_x u\|_2^2 + \frac{1}{2}kn(1+c_1)\|u\|^2_{L^2_\rho} - k\|u\|^2_{L^2_\rho}ln\|u\|^2_{L^2_\rho}$$

Choisir c_2 tel que $l > \dfrac{kc_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2_\rho}$, alors

$$I(t) \geq k\left(\frac{1}{2}n(1+c_1) - ln\|u\|^2_{L^2_\rho}\right)\|u\|^2_{L^2_\rho}.$$

Par conséquent, si $0 < \|u\|^2_{L^2_\rho} < \beta$,alors $I(t) > 0$;si I(t)=0,$\|u\|_2^2 \neq 0$,on a $\beta < \|u\|^2_{L^2_\rho}$alors,$\|u\|^2_{L^2_\rho} > \beta$.

■

Théorème 3.2.2 *(Existence globale) Soit* $u_0(x) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), u_1(x) \in L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ *et* $0 < E(0) < d, I(0) > 0$.*Alors, sous les hypothèses (A1), (A2) et les conditions* (3.3)*, le problème* (3.1) *a une solution globale en temps.*

Preuve D'aprés la définition de l'énergie pour la solution faible et par (4.1), on a

$$\frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2_\rho} + J(t) \leqslant \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2_\rho} + J(0), \forall t \in [0, T_{max}), \tag{4.10}$$

Alors, avec la définition des ensembles stables en utilisant Lemme 3.2.2, on obtient le résultat.

■

3.3 Estimations de la décroissance

Nous appliquons les techniques multiplicateur pour obtenir des estimations utiles et préparons certaines fonctionnelles associées à la nature de notre problème pour introduire une fonction de Lyapunov appropriée. Pour cela, nous introduisons les fonctionnelles

$$\psi_1(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u u' dx. \tag{4.11}$$

Lemme 3.3.1 *Sous les hypothèses (A1) et (A2), la fonctionnelle* $\psi_1(t)$ *vérifie, le long de la solution de* (3.1)*,* (3.2)

$$\psi_1'(t) \leqslant \|u'\|^2_{L^2_\rho} + \frac{(1-l)}{4\sigma}(g \circ \nabla_x u)$$
$$+ \Big[\big(\sigma + \frac{kc_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2} - l\big) + k\|\rho\|^2_{L^2}\big(ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{1}{2}n(1+c_1)\big)\Big]\|\nabla u\|^2_2$$

Preuve

D'après (4.11), intégrant sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\psi_1'(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x)|u'|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u u'' dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\rho(x)|u'|^2 + u\Delta_x u - u\int\limits_0^t g(t-s)\Delta_x u(s,x)ds\right)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u^2 ln|u|^k dx$$

$$\leqslant \|u'\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} - l\|\nabla_x u\|^2_2 + k\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u^2 (\left(ln\left(\frac{|u|}{\|u\|^2_{L^2_\rho}}\right) + ln\|u\|^2_{L^2_\rho}\right)dx$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla_x u \int\limits_0^t g(t-s)(\nabla_x u(s) - \nabla_x u(t))dsdx.$$

On a en utilisant l'inégalité Logarithmique de Sobolev dans le Lemme 3.1.3 et la version généralisée dans le Lemme 3.1.2, on obtient

$$\psi_1'(t) \leqslant \|u'\|^2_{L^2_\rho} + \left(\frac{kc_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2} - l\right)\|\nabla_x u\|_2^2 + k\|u\|^2_{L^2_\rho} ln\|u\|^2_{L^2_\rho}$$

$$+\sigma\|\nabla_x u\|_2^2 + \frac{1}{4\sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_0^t g(t-s)|(\nabla_x u(s) - \nabla_x u(t))|ds\right)^2 dx - \frac{1}{2}kn(1+c_1)\|u\|^2_{L^2_\rho}$$

$$\leqslant \|u'\|^2_{L^2_\rho} + \left(\sigma + \frac{kc_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2} - l\right)\|\nabla_x u\|_2^2$$

$$+\frac{(1-l)}{4\sigma}(g \circ \nabla_x u) + k\left(ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{1}{2}n(1+C_1)\right)\|u\|^2_{L^2_\rho}.$$

Puis

$$\psi_1'(t) \leqslant \|u'\|^2_{L^2_\rho} + \frac{(1-l)}{4\sigma}(g \circ \nabla_x u)$$

$$+\left[\left(\sigma + \frac{kc_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2} - l\right) + k\|\rho\|^2_{L^2}\left(ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{1}{2}n(1+c_1)\right)\right]\|\nabla u\|_2^2.$$

L'existence du terme de mémoire nous oblige à rendre fonctionnelle la seconde modification de l'énergie associée.

Posons

$$\psi_2(t) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u'\int\limits_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \tag{4.12}$$

■

Lemme 3.3.2 *Sous les hypothèses (A1) et (A2) la fonctionnelle ψ_2 satisfait, le long de la solution de* (3.1),(3.2) *, pour tout $\sigma \in (0,1)$*

$$\psi_2'(t) \leqslant \left[\sigma + k\left(\sigma\frac{c_2}{2\pi} + ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{n(1+c_1)}{2}\right)\right]\|\nabla_x u\|_2^2$$

$$+c_\sigma(1 + (k\frac{c_2}{2\pi} + 1)\|\rho\|^2_{L^2})(g \circ \nabla_x u) - c_\sigma\|\rho\|^2_{L^2}(g' \circ \nabla_x u)$$

$$+\left(\sigma - \int\limits_0^t g(s)ds\right)\|u'\|^2_{L^2_\rho}.$$

Preuve Exploitation de l'éq. (3.1),(4.12)pour obtenir

$$\psi_2'(t) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u''\int\limits_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u'\int\limits_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \int\limits_0^t g(s)ds\|u'\|^2_{L^2_\rho}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla_x u\int\limits_0^t g(t-s)(\nabla_x u(t) - \nabla_x u(s))dsdx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)uln|u|^k \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_0^t g(t-s)\nabla_x u(s,x)ds\Big)\Big(\int_0^t g(t-s)(\nabla_x u(t)-\nabla_x u(s))ds\Big)dx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u' \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \int_0^t g(s)ds\|u'\|^2_{L^2_\rho}$$

Par (A1), on a

$$\psi_2'(t) = \Big(1-\int_0^t g(s)ds\Big)\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x u \int_0^t g(t-s)(\nabla_x u(t)-\nabla_x u(s))dsdx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_0^t g(t-s)(\nabla_x u(t)-\nabla_x u(s))ds\Big)^2 dx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)uln|u|^k \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u' \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$-\int_0^t g(s)ds\|u'\|^2_{L^2_\rho} + c(g\circ\nabla_x u)(t)$$

D'après les inégalités de Holder et Young et le lemme 3.1.2,Nous estimons

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u' \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)|u'|^2dx\Big)^{1/2} \times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\Big|\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))ds\Big|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant \sigma\|u'\|^2_{L^2_\rho} + c_\sigma\Big\|\int_0^t -g'(t-s)(u(t)-u(s))ds\Big\|^2_{L^2_\rho}$$

$$\leqslant \sigma\|u'\|^2_{L^2_\rho} - c_\sigma\|\rho\|^2_{L^2}(g'\circ\nabla_x u)(t),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)u' \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \leqslant \sigma\|u'\|^2_{L^2_\rho} + c_\sigma\|\rho\|^2_{L^2}(g\circ\nabla_x u)(t),$$

et par le Lemme 3.1.2 et le Lemme 3.1.3 et les conditions du Lemme 3.2.2,on a

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) ln|u|^k \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$
$$\leqslant k \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\left(ln\left(\frac{|u|}{\|u\|^2_{L^2_\rho}}\right) + ln\|u\|^2_{L^2_\rho}\right) u \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$
$$\leqslant k\left(ln\|u\|^2_{L^2_\rho}\right) - \frac{n(1+c_1)}{2}\Big)\|u\|^2_{L^2_\rho} + k\frac{c_2}{2\pi}\left\|u\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\|^2_{L^2_\rho}$$
$$\leqslant k\left(ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{n(1+c_1)}{2}\right)\|\rho\|^2_{L^2}\|\nabla_x u\|^2_2$$
$$+k\frac{c_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2}\left\|\nabla u\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))ds\right\|^2_{L^2_\rho}$$
$$\leqslant k\left(\sigma\frac{c_2}{2\pi} ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{n(1+c_1)}{2}\right)\|\rho\|^2_{L^2}\|\nabla_x u\|^2_2 + c_\sigma k\frac{c_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2}(g\circ\nabla_x u)\big).$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré et le lemme 3.1.1 pour $\theta = 1/2$, on obtient

$$\psi_2'(t) \leqslant \left[\sigma + k\left(\sigma\frac{c_2}{2\pi} + ln\|u\|^2_{L^2_\rho} - \frac{n(1+c_1)}{2}\right)\right]\|\nabla_x u\|^2_2$$
$$+c_\sigma(1+(k\frac{c_2}{2\pi}+1)\|\rho\|^2_{L^2})(g\circ\nabla_x u) - c_\sigma\|\rho\|^2_{L^2}(g'\circ\nabla_x u)$$
$$+\left(\sigma - \int_0^t g(s)ds\right) ln\|u'\|^2_{L^2_\rho}.$$

Maintenant, définissons

$$L(t) = \xi_1 E(t) + \psi_1(t) + \xi_2\psi_2(t) \tag{4.13}$$

pour $\xi_1, \xi_2 > 1$ Nous avons besoin du lemme suivant, , ce qui signifie qu'il y a équivalence entre les fonctions de Lyapunov et d'énergie, c'est pour $\xi_1, \xi_2 > 1$, on a

$$\beta_1 L(t) \leqslant E(t) \leqslant \beta_2 L(t) \tag{4.14}$$

est valable pour deux constantes positives β_1 et β_2.

■

Lemme 3.3.3 *Pour $\xi_1, \xi_2 > 1$, on a*

$$L(t) \sim E(t) \tag{4.15}$$

Preuve

Par (4.13) nous avons

$$|L(t)-\xi_1 E(t)| \leqslant |\psi_1(t)| + \xi_2 |\psi_2(t)|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x) u u'| dx + \xi_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \rho(x) u' \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right| dx$$

Grace aux inégalités de Holder et Young , on a en utilisant le lemme 3.1.2

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x) u u'| dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) |u'|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) |u|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) |u'|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leqslant c \|u'\|^2_{.L^2_\rho} + c \|\rho\|^2_{L^2} \|\nabla_x u\|^2_2, \tag{4.16}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\rho(x)^{\frac{1}{2}} u' \right) \left(\rho(x)^{\frac{1}{2}} \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right) \right| dx$$

$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) |u'|^2 dx \right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \left| \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right) \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \|u'\|^2_{L^2_\rho} + \frac{1}{2} \left\| \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right\|^2_{L^2_\rho}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \|u'\|^2_{L^2_\rho} + \frac{1}{2} \|\rho\|^2_{L^2} (g \circ \nabla_x u)$$

Puis,

$$|L(t)-\xi_1 E(t)| \leqslant c E(t).$$

Par conséquent , on peut choisir ξ_1 tel que

$$L(t) \sim E(t) \tag{4.17}$$

■

Lemme 3.3.4 *Pour tous $t \geq t_1 > 0$,on a*

$$\int_{t_1}^t (g \circ \nabla_x u)(s) ds \leqslant H_0^{-1} \left(- \int_{t_1}^t H_0(-g'(s)) g'(s) \int_{\mathbb{R}^n} g(s) \left| \nabla_x u(t) - \nabla_x u(t-s) \right|^2 dx ds \right),$$

où H_0 introduit dans (3.9).

Preuve Par (4.1) et (A3),on a pour tout $t \geq t_1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{t_1} g(t-s) |\nabla_x u(t) - \nabla_x u(s)|^2 ds dx \leqslant -\frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{t_1} g(t-s) |\nabla_x u(t) - \nabla_x u(s)|^2 ds dx$$

$$\leqslant -cE'(t)$$

Maintenant, nous définissons

$$I(t) = \int_{t_1}^{t} H_0(-g'(s))(g \circ \nabla_x u)(t) ds. \tag{4.18}$$

Depuis $\int_0^{\infty} H_0(-g'(s))g(s)ds < +\infty$, d'après (4.1)on a

$$I(t) = \int_{t_1}^{t} H_0(-g'(s)) \int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t) - \nabla_x u(t-s)|^2 dxds$$

$$\leq 2 \int_{t_1}^{t} H_0(-g'(s))g(s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(t)|^2 + |\nabla_x u(t-s)|^2 dxds$$

$$\leq cE(0) \int_{t_1}^{t} H_0(-g'(s))g(s)ds < 1. \tag{4.19}$$

Nous définissons à nouveau une nouvelle fonctionnelle $\lambda(t)$ liée à $I(t)$comme

$$\lambda(t) = -\int_{t_1}^{t} H_0(-g'(s))g'(s) \int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t) - \nabla_x u(t-s)|^2 dxds \tag{5.1}$$

De (A1)-(A3), on obtient

$$H_0(-g'(s))g(s) \leqslant H_0(H(g(s)))g(s) = D(g(s))g(s) \leqslant k_0,$$

pour une constante positive k_0.Ensuite, pour tout $t \geq t_1$

$$\lambda(t) \leq -k_0 \int_{t_1}^{t} g'(s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(t) - \nabla_x u(t-s)|^2 dxds$$

$$\leq -k_0 \int_{t_1}^{t} g'(s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(t)|^2 + |\nabla_x u(t-s)|^2 dxds$$

$$\leq -cE(0) \int_{t_1}^{t} g'(s)ds \leqslant cE(0)g(t_1) < min\{r, H(r), H_0(r)\}. \tag{5.2}$$

En utilisant les propriétés de H_0 (strictement convexe en $(0, r], H_0(0) = 0$), alors pour $x \epsilon (0, r], \theta \in [0, 1]$

$$H_0(\theta x) \leqslant \theta H_0(x)$$

En utilisant les hypothèses de (A3), (4.19), (5.2) et l'inégalité de Jensen conduit à

$$\lambda(t)=\frac{1}{I(t)}\int_{t_1}^{t} I(t)H_0[H_0^{-1}(-g'(s))]H_0(-g'(s))g'(s)\int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t)-\nabla_x u(t-s)|^2dxds$$

équation d'onde viscoélastique avec non-linéarités logarithmiques dans $\mathbb{R}^n$

$$\geq \frac{1}{I(t)}\int_{t_1}^{t} H_0[I(t)H_0^{-1}(-g'(s))]H_0(-g'(s))g'(s)\int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t)-\nabla_x u(t-s)|^2dxds$$

$$\geq H_0\Big(\frac{1}{I(t)}\int_{t_1}^{t} I(t)H_0^{-1}(-g'(s))g'(s)\int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t)-\nabla_x u(t-s)|^2dxds\Big)$$

$$\geq H_0\Big(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t)-\nabla_x u(t-s)|^2dxds\Big),$$

ce qui implique

$$\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} g(s)|\nabla_x u(t)-\nabla_x u(t-s)|^2dxds \leqslant H_0^{-1}(\lambda(t))$$

■

Notre prochain résultat principal se lit comme suit.

Théorème 3.3.1 *Soit* $(u_0,u_1)\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ *et supposons que (A1)-(A2) sont valides. Alors il existe des constantes positives* $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *telles que l'énergie de solution donnée par* (3.1), (3.2) *vérifie,*

$$E(t)\leqslant \alpha_3 H_1^{-1}(\alpha_1 t+\alpha_2),\qquad \textit{pour tous } t\geq 0\quad \textit{où}$$

$$H_1(t)=\int_{t_1}^{t}(sH_0'(\alpha_0 s))^{-1}ds.$$

Preuve D'après (4.1), résultats du lemme 3.3.1 et du lemme 3.3.1, on a

$$\begin{aligned}L'(t)&=\xi_1E'(t)+\psi_1'(t)+\xi_2\psi_2'(t)\\&\leqslant(\frac{1}{2}\xi_1-c_\sigma\|\rho\|^2_{L^2}\xi_2)(g'\circ\nabla_x u)+M_0(g\circ\nabla_x u)-M_1\|u'\|^2_{L^2_\rho}-M_2\|\nabla_x u\|_2^2,\end{aligned}$$

où

$$M_0=\Big(\xi_2c_\sigma(1+(k\frac{c_2}{2\pi}+1)\|\rho\|^2_{L^2})+\frac{(1-l)}{4\sigma}\Big)>0,\qquad M_1=\Big(\xi_2\Big(\int_0^{t_1}g(s)ds-\sigma\Big)-1\Big),$$

et

$$\begin{aligned}M_2=\frac{1}{2}\xi_1g(t_1)&-\Big[\Big(\sigma+k\frac{c_2}{2\pi}\|\rho\|^2_{L^2}-l\Big)+k\|\rho\|^2_{L^2}\Big(ln\|u\|^2_{L^2_\rho}-\frac{1}{2}n(1+c_1)\Big)\Big]\\&-\xi_2\Big[\sigma+k\Big(\sigma\frac{c_2}{2\pi}+ln\|u\|^2_{L^2_\rho}-\frac{n(1+c_1)}{2}\Big)\Big]\end{aligned}$$

et t_1 a été introduit en (A3).

On choisit σ assez petit que

$$\xi_1>2c_\sigma\|\rho\|^2_{L^2}\xi_2.$$

Lorsque σ est fixe, on peut choisir

$$\xi_2 > \left(\int_0^{t_1} g(s)ds - \sigma \right)^{-1},$$

et ξ_1 assez grand pour que $M_2 > 0$, ce qui donne

$$L'(t) \leqslant M_0(g \circ \nabla_x u) - cE'(t), \qquad \forall t \geq t_1.$$

Maintenant, nous fixons $F(t) = L(t) + cE(t)$, ce qui équivaut à E(t). Puis,

$$F'(t) = L'(t) + cE'(t)$$

$$\leqslant -cE(t) + c \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t_1}^{t} g(t-s)|\nabla_x u(t) - \nabla_x u(s)|^2 dsdx, \qquad pour tous t \geq t_1 \tag{5.3}$$

En utilisant le lemme 3.3.4, on obtient

$$F'(t) \leqslant -cE(t) + cH_0^{-1}(\lambda(t)), \qquad \text{pour tous } t \geq t_1 .$$

Maintenant, nous allons suivre les étapes de ([12]) et utiliser le fait que $E' \leqslant 0, 0 < H_0', 0 < H_0''$ sur (0,r] pour définir la fonctionnelle

$$F_1(t) = H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) F(t) + cE(t), \qquad \alpha_0 < r, 0 < c,$$

où $F_1(t) \sim E(t)$ et

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= \alpha_0 \frac{E'(t)}{E(0)} H_0''\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) F(t) + H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) F'(t) + cE'(t) \\ &\leqslant -cE(t) H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + cH_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) H_0^{-1}(\lambda(t)) + cE'(t) \end{aligned}$$

Soit H_0^*donné dans (A3) et en utilisant la inégalité de Young (3.11) avec $A = H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$, $B = H_0^{-1}(\lambda(t))$, obtenir

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leqslant -cE(t) H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + cH_0^*\left(H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\right) + c\lambda(t) + cE'(t) \\ &\leqslant -cE(t) H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)} H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) - c'E'(t) + cE'(t). \end{aligned}$$

En choisissant α_0, c, c', tel que pour tout $t \geq t_1$, on ait

$$F_1'(t) \leqslant -k \frac{E(t)}{E(0)} H_0'\left(\alpha_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) = -kH_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right),$$

ou $H_2(t) = tH_0'(\alpha_0 t)$. En utilisant la stricte convexité de H_0 sur (0,r],o trouver que H_2', H_2 sont positifs stricts sur $(0, 1]$, alors

$$R(t) = \tau \frac{k_1 F_1(t)}{E(0)} \sim E(t), \qquad \tau \epsilon (0, 1), \tag{5.4}$$

et

$$R'(t) \leqslant -\tau k_0 H_2(R(t)), \qquad k_0 \epsilon (0,+\infty), t \geq t_1.$$

Puis,une intégration simple et un choix adapté de τ rendement,

$$R'(t) \leqslant H_1^{-1}(\alpha_1 t + \alpha_2), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \epsilon (0,+\infty), t \geq t_1,$$

ici $H_1(t) = \int_t^1 H_2^{-1}(s)ds$. De (5.4), pour une constante positive α_3, on a

$$E(t) \leqslant \alpha_3 H_1^{-1}(\alpha_1 t + \alpha_2) \qquad \alpha_1, \alpha_2 \epsilon (0,+\infty), t \geq t_1,$$

Le fait que H_1 est une fonction strictement décroissante sur (0,1] et du fait des propriétés de H_2, nous avoir

$$\lim_{t \to 0} H_1(t) = +\infty$$

$$E(t) \leq \alpha_3 H_1^{-1}(\alpha_1 t + \alpha_2), pour \qquad tous \qquad t \geq 0.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.3.1.

■

Remarque 3.3.1 *En notant que, nous avons obtenu tous les résultats sans aucune condition sur le exposant k dans les non-linéarités logarithmiques.*

Conclusion et discussion

Dans un mot sous forme d'une conclusion, on peut souligner que nous avons montré quelques éclairassions sur l'équation des ondes avec nonlinéarité logarithmique. Ce la est suffisant pour un étudiant en licence, débutant dans l'étude de ces formes d'équations, où nous avons commencé le travail par une discussion et développement du cours pédagogique des EDPs pour le parcours de licence en mathématique appliquées, et nous avons essayé de le compléter, soudain nous nous retrouvons dans une étude approfondie d'un problème mathématique relativement simple, c'est le prolongement en dimension n.

Il y a d'autres problèmes du même type, mais dans des conditions difficiles comme le cas non linéaire où au moine semi linéaire en prenant en considération les effets d'amortissement. Laissons ce projet devrait être achevé en master en utilisant les connaissances acquises est en mesure d'aller plus loin que ce la.

Si le cas, dans les études de doctorat, et avec ce bagage, on peut plonger directement dans la recherche des problèmes ouverts dans ce domaine, l'existence des solutions et l'interaction entre les différents termes de dissipations non linéaire ainsi que le comportement de la solution s'il existe, cette étude est extrêmement compliquée.

Bibliographie

[1] Brown K. J., Stavrakakis N. M., Global bifurcation results for semilinear elliptic equations on all of Rn. Duke Math. J., 85 (1996), 77-94.

[2] Karachalios N. I., Stavrakakis N. M., Existence of global attractor for semilinear dissipative wave equations on Rn. J. Differential Equations, 157 (1999), 183-205.

[3] Rivera J. E. Munoz, Global solution on a quasilinear wave equation with memory. Boll. Unione Mat. Ital., B 7 (2) (1994), 289-303.

[4] Papadopulos P. G., Stavrakakies N. M., Global existence and blow-up results for an equations of Kirchhoff type on Rn. Topol. Methods Nolinear Anal., 17 (2001), 91-109.

[5] Torrejon R., Yong J. M., On a quasilinear wave equation with memory. Nonlinear Anal., 16 (1) (1991), 61-78.

[6] Zhou Y., A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping and vanishing initial energy in Rn. Appl. Math. Lett., 18 (2005), 281-286. 16 K. Bouhali and F. Ellaggoune / J. Partial Diff. Eqs., 30 (2017), pp. 1-16

[7] Zennir Kh., General decay of solutions for damped wave equation of Kirchhoff type with density in Rn. Ann. Univ Ferrara., 61 (2015), 381-394.

[8] Alabau-Boussouira F., Cannarsa P., A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347, (2009), 867-872.

[9] Kafini M., Uniforme decay of solutions to Cauchy viscoelastic problems with density. Elecron. J. Differential Equations, 2011 (93) (2011), 1-9.

[10] Kafini M., Messaoudi S. A., On the uniform decay in viscoelastic problem in Rn. Appl. Math. Comput., 215 (2009), 1161-1169.

[11] Kafini M., Messaoudi S. A. and Tatar Nasser-eddine, Decay rate of solutions for a Cauchy viscoelastic evolution equation. Indag. Math., 22 (2011), 103-115.

[12] Muhammad I. M., Messaoudi S. A., General stability result for viscoelastic wave equations. J. Math. Phys., 53 053702 (2012).

[13] Arnold V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1989.

[14] Cavalcanti M. M., Oquendo H. P., Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J. Control Optim., 42 (4) (2003), 1310-1324.

[15] Karachalios N. I., Stavrakakis N. M., Global existence and blow-up results for some nonlinear wave equations on Rn. Adv. Differential Equations, 6 (2) (2001), 155-174.

[16] Chen Hua, Luo Peng and Liu Gongwei, Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. J. Math. Anal. Appl., 422 (2015), 84-98.

[17] Lieb E., Loss M., Analysis, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, 2001. [18] Gorka P., Logarithmic Klein-Gordon equation. Acta Physica polonica B., 40 (2009), 59-66.

[18] Cazenave T., Haraux A., Equations d ?evolution avec nonlinearite logarithmique. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 2 (1) (1980), 21-51.

[19] Han X. S., Global existence of weak solutions for a logarithmic wave equation arising from Q-ball dynamics. Bull. Korean Math. Soc., 50 (1) (2013), 275-283.

[20] Han X. S., Global existence of weak solutions for a logarithmic wave equation arising from Q-Ball Dynamics. Bull. Korean Math. Soc., 50 (1) (2013), 275-283.

[21] Liu Y., On potential wells and applications to semilinear hyperbolic equations and parabolic equations. Nonlinear Anal., 64 (2006), 2665-2687.

[22] Zhang H. W., Liu G. W. and Hu Q. Y., Exponential decay of energy for a logarithmic wave equation. J. Part. Diff. Eq., 28 (3) (2015), 269-277.

[23] Gross Leonar, Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math., 97 (4) (1975), 1061-1083.

[24] Liu G., Xia Suxia, Global existence and finite time blow up for a class of semilinear wave equations on Rn. Computers and Math. Appl., 70 (2015), 1345-1356.

[25] Martinez P., A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 4 (1999), 419-444.

[26] Zitouni S., Zennir Kh., On the existence and decay of solution for viscoelastic wave equation with nonlinear source in weighted spaces. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser, 2016, DOI 10.1007/s12215-016-0257-7.