République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 20 Août 1955 -Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 -سكيكدة
كلية العـلوم
قسم الرياضيات

Ref :..................

المرجع:..........

Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat de 3° cycle (LMD) en Mathématiques

Option : ***Mathématiques***

Les applications des morphismes universels de FL-TOP (la catégorie de tous les espaces topologiques flous)

Présentée par :

Latreche Abdelkrim

Soutenue publiquement : 19/ 6 / 2019.

Devant la commission du jury composé de:

GUESMIA Amar	Professeur,	Université 20 Août 1955 - Skikda,	Président
LEKHAL Hakim	MC 'A',	Université 20 Août 1955 - Skikda,	Examinateur
ARDJOUNI Abdelouaheb	MC 'A',	Université M.C. Messaidia-Souk Ahras,	Examinateur
BOULARES Hamid	MC 'A',	Université 8 Mai 1945 - Guelma,	Examinateur
ISMAIL Farhan	Professeur,	Université Sakarya – Turquie,	Directeur de thèse
LALLOUCHE Abdallah	MC 'B',	Université 20 Août 1955- Skikda,	Invité

Année Universitaire : 2018/2019

ملخص:

قمنا في هذه الأطروحة باستخراج المورفيزمات الشاملة لفئة الفضاءات الطبولوجية المشوشة انطلاقا من ثلاث تعريفات مختلفة للفضاء الطبولوجي المشوش : تعريف Chang (1968) و تعريف Lowen (1976) و تعريف Shostak (1985).

قادتنا هذه الدراسة إلى لمس خواص كل فئة من هذه الفئات و بذلك إيجاد العلاقة بينها و بين فئة الفضاءات الطبولوجية العادية.

قمنا في النهاية بوضع حوصلة على العمل المنجز بالتعليق على تأثير كل تشويش من ناحية القوة و الضعف و المقارنة بينهم .

الكلمات المفتاحية:

الفئة، التشاكل الفئوي، الفضاء الطبولوجي، فئة الفضاءات الطبولوجية ,

الفضاء الطبولوجي المشوش، المورفيزم الشامل.

(MSC2010): 03E72-18B30-18A30.

Abstract:

In this thesis, we have extracted the universal morphisms in the category of all fuzzy topological spaces from three different definitions of the fuzzy topological space: Chang's definition (1968), Lowen's definition (1976), and the definition from Shostak (1985).

This study has led us to touch the characteristics of each of these categories and thus to find the relation between them and between the category of topological spaces.

Finally, we linked to the work done by commenting on the effect of each fuzziness in terms of strength and weakness and comparing them.

keywords: Category, Fonctor , Topological space, Category of all topological spaces, Fuzzy topological space,

Morphism universal.

(MSC2010): 03E72-18B30-18A30.

Résume :

Dans cette thèse, nous avons extrait les morphismes universels dans la catégorie de tous les espaces topologiques flous à partir de trois définitions différentes de l'espace topologique flou : La définition de Chang (1968), la définition de Lowen (1976) et celle de Shostak (1985) .

Cette étude nous a conduits à toucher les caractéristiques de chacune de ces catégories, et trouver notamment, les relient avec la catégorie des espaces topologiques ordinaires .

Finalement, nous avons fait une récapitulation sur le travail effectué en commentant l'effet de chaque brouillage en termes de force et de faiblesse suivi d'une comparaison entre eux.

Mots clés: Catégorie , Foncteur, Espace topologique, Catégorie de tous les espaces topologiques, Espace topologique flou ,

Morphisme universel.

(MSC2010) :03E72-18B30-18A30.

Table des matières

0.1 Introduction

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune. Elle émerge au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique.
La théorie des catégories est une branche des mathématiques qui a été développée dans les années 1940 par les mathématiciens Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane [13], puis propagée par Alexander Grothendieck durant les années 1960 [16]. Elle permet de généraliser le concept de structures mathématiques et les applications conservant ces structures, qu'il s'agisse d'espaces vectoriels et d'applications linéaires ou de groupes et de leurs homomorphismes. Cette théorie abstraite est devenue un outil indispensable dans les mathématiques théoriques modernes, notamment en algèbre, en géométrie algébrique, en topologie algébrique ...etc. Comme la théorie des ensembles, elle est considérée comme fondement des mathématiques.
Il est beaucoup plus facile de dire si une personne est un homme ou une femme, si une personne est en classe terminale ou pas, mais il est difficile de dire si quelqu'un est beau (la notion de beauté est sujette à plusieurs discussions). C'est là où intervient la théorie des ensembles flous. En effet, la théorie des ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite développée par Lotfi Zadeh [1] en 1965 afin de représenter mathématiquement l'imprécision relative à certaines classes d'objets.
Concernant l'importance d'applications floues et la théorie des catégories, il paraît plus intéressant de joindre les deux ensembles. Cela nous amène à parler des applications des morphismes universels de la catégorie floue.
Cette thèse est composée de six chapitres. Le premier chapitre est consacré aux rappels sur la topologie générale, la théorie des catégories et la théorie des ensembles flous. Dans le deuxième chapitre, nous allons collecter les morphismes universels principaux [Co-product, Co- equalizer, Push-out, Product, Equalizer, Pull-back] de la catégorie <u>TOP</u> (la catégorie de tous les espaces to-

1. Né en Azerbaïdjan en 4 février 1921 et mort le 6 septembre 2017, Lofti Zadeh a grandi en Iran. Il a étudié à l'université de Téhéran avant de poursuivre ses études aux États-Unis, au MIT et à l'université de Columbia. Il est considéré comme l'un des pionniers des mathématiques appliquées et de l'électrotechnique. En 1965, il a publié un article concernant la théorie des ensembles flous, qui a participé au développement de l'intelligence artificielle.

pologiques ordinaire) avec les démonstrations.
Les résultats de nos travaux se trouvent dans les chapitres [3, 4, 5], dans les quels nous trouvons les morphismes universels de la catégorie F-TOP la catégorie de tous les espaces topologiques flous d'après trois définitions différentes de l'espace topologique flou (Chang- Lowen- Shostak).
Nous terminons ce travail par une conclusion générale qui contient une comparaison entre les trois cas de brouillage.

Chapitre 1

Rappels et notations générales

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec notre travail. Il est divisé en trois parties. La première partie est consacrée à quelques rappels sur la topologie générale : La Topologie, Topologie induite, Topologie produit...ect.
La deuxième partie, quant à elle, est consacrée à quelques rappels sur la théorie des catégorie.
Enfin, dans la troisième partie nous regroupons quelques définitions et des opérations sur la théorie des ensembles flous.

1.1 Rappels sur la topologie générale

1.1.1 La topologie

Définition 1.1 *[25]*
Soit X un ensemble non vide et désignons par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. ***Une topologie*** *sur X est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ noté τ, qui vérifie :*

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. *Si* A_1, $A_2 \in \tau$, *alors* $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
3. *Si* $A_i \in \tau$ *pour tout* $i \in I$, *alors* $\cup_I A_i \in \tau$, *I est un ensemble d'indices quelconque.*

Les éléments de τ sont appelés les ouverts de la topologie. On notera parfois (X, τ) pour préciser que l'on considère l'ensemble X muni de la topologie τ.
Le couple (X, τ) dit ***espace topologique****.*

Exemples :

1. X un ensemble quelconque, $\tau = \{\varnothing, X\}$. On l'appelle topologie grossière ; elle contient le minimum possible d'ouverts. Les axiomes de topologie sont trivialement satisfaits.
2. X un ensemble quelconque, $\tau = \mathcal{P}(X)$. On l'appelle topologie discrète ; elle contient le maximum possible d'ouverts. Les axiomes de topologie sont évidemment satisfaits.
3. $X = \{0,1\}$, $\tau = \{\varnothing, \{0,1\}, \{0\}\}$. Ce n'est ni la topologie discrète, ni la topologie grossière. On vérifie facilement que les axiomes de topologie sont satisfaits.

Définition 1.2 *[5]*
*Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **continue** sur X si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X.*

Exemples :

1. L'application identique d'un espace topologique X sur lui-même est continue.
2. Toute application constante d'un espace topologique dans un espace topologique est continue.
3. Toute application d'un espace discret dans un espace topologique est continue.

1.1.2 Topologie induite

Définition 1.3 *[11] [25]*
Si (X, τ_X) est un espace topologique, et si $Y \subset X$, alors $\tau_Y = \{U \cap Y, U \in \tau_X\}$ est une topologie sur Y est appelée la topologie induite. Autrement dit, tout sous-ensemble d'un espace topologique est naturellement un espace topologique.

1.1.3 Topologie quotient

Définition 1.4 *[11] [25]*
Soit (X, τ_X) un espace topologique, $\sim$ une relation d'équivalence sur X et $P : X \longrightarrow X/\sim$ la projection associée, on pose :

$$U \subset X/\sim \text{ est ouvert} \Longleftrightarrow P^{-1}(U) \in \tau_X.$$

Définition 1.5 *[25]*

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On dit que f est compatible avec la relation $\sim$ si :

$$x \sim x' \Longrightarrow f(x) = f(x'), \quad \forall x,\, x' \in X$$

Théorème 1.1 *[11] [25]*

Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques, $\sim$ une relation d'équivalence sur X et $P : X \longrightarrow X/\sim$ la projection associée, si $h : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ est une application continue compatible avec $\sim$, on pose :

$$\begin{aligned} h' : (X/\sim, \tau_{X/\sim}) &\longrightarrow (Y, \tau_Y) \\ \overline{x} &\longmapsto h'(\overline{x}) = h(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donc :

$$h = h' \circ P \text{ est continue} \Longleftrightarrow h' \text{ est continue.}$$

1.1.4 Topologie somme disjointe

Définition 1.6 *[25]*

La topologie somme disjointe sur $X \uplus Y = \{X \times \{1\}\} \cup \{Y \times \{2\}\}$ est définie par :

$$\tau_{X \uplus Y} = \{U \subseteq X \uplus Y;\ \varphi_1^{-1}(U) \in \tau_X \text{ et } \varphi_2^{-1}(U) \in \tau_Y\}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (X, \tau_X) &\longrightarrow (X \uplus Y, \tau_{X \uplus Y}) \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = (x, 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : (Y, \tau_Y) &\longrightarrow (X \uplus Y, \tau_{X \uplus Y}) \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = (x, 2) \end{aligned}$$

Théorème 1.2 *[25]*

Soient Z un espace topologique et $f : (X \uplus Y, \tau_{X \uplus Y}) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ une application, alors :

$$f \text{ est continue} \Longleftrightarrow (f \circ \varphi_1) \text{ et } (f \circ \varphi_2) \text{ sont continues.}$$

1.1.5 Topologie produit

Définition 1.7 *[24]*
Soient (X, τ_X) un espace topologique et B une famille des ouverts de X. On dit que B est une base de τ_X si :

$$\forall \theta \in \tau_X,\ \exists B_\alpha \subset B;\ \theta = \cup_{\alpha \in I} B_\alpha,\ \ I \text{ un ensemble d'indices quelconque.}$$

Proposition 1.1 *[24]*
Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques, la famille :

$$B = \{X_i \times Y_i;\ X_i \in \tau_X,\ Y_i \in \tau_Y,\ i \in I\}$$

est une base de $X \times Y$. Alors :

$$\tau_{X \times Y} = \{\theta \subseteq (X \times Y);\ \ \theta = \cup_{i \in I}(X_i \times Y_i),\ \ X_i \in \tau_X \text{ et } Y_i \in \tau_Y\ ,\ \ \forall i \in I\}$$

est une topologie sur $X \times Y$.

Théorème 1.3 *[24] [25]*
Soient (Z, τ_Z) un espace topologique et $f : (Z, \tau_Z) \longrightarrow (X \times Y, \tau_{X \times Y})$ une application, alors :

$$f \text{ est continue } \iff P_1 \circ f \text{ et } P_2 \circ f \text{ sont continues.}$$

Avec P_1 et P_2 sont les projections canoniques.

1.2 Rappels sur la théorie des catégories

Ce paragraphe est une brève introduction au langage des catégories utile dans toutes les branches des mathématiques. On introduit seulement les notions minimales pour nos besoins.

1.2.1 Catégorie : Définitions et exemples

Définition 1.8 *[23] [30]*
Une catégorie *$\underline{C}$ se compose de deux ensembles : un ensemble d'objets noté par "$ob(\underline{C})$" et un ensemble de flèches (dit aussi l'ensemble des morphismes) noté par "$mor(\underline{C})$". Avec deux fonctions :*

- *Domaine : noté par (dom) qui associe à chaque $f \in mor(\underline{C})$ un objet $X \in ob(\underline{C})$ tel que : $X = dom f$.*
- *Codomaine : noté par (cod) qui associe à chaque $f \in mor(\underline{C})$ un objet $Y \in ob(\underline{C})$ tel que : $Y = cod\, f$.*

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Muni des opérations suivantes :

⋆ *À tout objet X on lui associé une flèche (notée 1 ou 1_X) ayant cet objet comme source et cible en même temps et appelée la flèche identité de X.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop right, "1_X"] \end{tikzcd}$$

⋆ *Si la cible d'une flèche f est la source d'une flèche g, on dit que f et g sont «composables », et on peut « composer » ces deux flèches, ce qui donne une flèche notée $g \circ f$ ayant même source que f et même cible que g.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Enfin, ces opérations vérifient les axiomes suivants :

• *Les flèches identités sont neutres pour la composition : pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$, on a :*

$$1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

• *La composition des flèches est associative : pour toutes flèches $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ et $h : Z \longrightarrow T$,* *on a :*

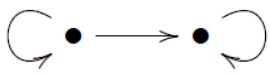
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & T \end{tikzcd}$$

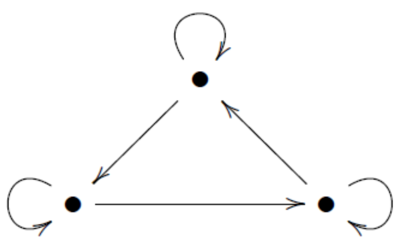
Exemples des catégories finis

1. La catégorie vide (sans objets , sans morphismes).
2. la catégorie $\underline{1}$: qui possède un objet unique a et un morphisme unique 1_a.

3. La catégorie $\underline{2}$: qui possède deux objets avec un morphisme unique sans compter les morphismes d'identités $(1_a, 1_b)$.



4. La catégorie $\underline{3}$: qui possède trois objets avec deux morphismes f, g et leurs composés, sauf les morphismes d'identités et un autre morphisme $g \circ f$.



Et ainsi du suite....

5. La catégorie $\bullet \rightrightarrows \bullet$: qui possède deux objets avec deux morphismes f et g parallèles sauf les morphismes d'identités.

Exemples des catégories infinis

1. La catégorie $\underline{Set}$ dont les objets sont les ensembles, et dont les morphismes sont les applications d'ensembles.
2. La catégorie $\underline{TOP}$ dont les objets sont les espaces topologiques, et dont les morphismes sont les applications continues.
3. La catégorie $\underline{Grp}$ dont les objets sont les groupes, et dont les morphismes sont les morphismes de groupes.
4. La catégorie $\underline{Ab}$ dont les objets sont les groupes abéliens, et dont les morphismes sont les morphismes de groupes.
5. La catégorie $\underline{Rng}$ dont les objets sont les anneaux, et dont les morphismes sont les morphismes d'anneaux.
6. La catégorie $\underline{CRng}$ dont les objets sont les anneaux abéliens, et dont les morphismes sont les morphismes de ces anneaux.
7. La catégorie $\underline{Vect_K}$ dont les objets sont les espaces vectoriels sur le corps K, et dont les morphismes sont les applications linéaires.

Remarque 1.1 *On désigne souvent une catégorie par le nom de ses objets. En fait l'essentiel de l'information est contenue dans les morphismes.*

Définition 1.9 *[23]*
On appelle petite catégorie la catégorie dont les objets forment un petit ensemble, et pour tous objets A et B les flèches de $A \longrightarrow B$ forment un petit ensemble.

1.2.2 Les foncteurs

La notion de catégorie est elle-même une structure [1] et ses morphismes (aussi appelés « foncteurs ») sont définis comme suit :

Définition 1.10 *[23] [30]*
Soient $\underline{C}$ et $\underline{D}$ deux catégories. ***Un foncteur*** *F de $\underline{C}$ vers $\underline{D}$ est donné comme suit :*
• *Pour tout $X \in \underline{C}$, on l'associé un objet $F(X) \in \underline{D}$.*
• *Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\underline{C}$, on l'associé un morphisme $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ de $\underline{D}$.*
On impose de plus les propriétés suivantes :

1. $F(1_X) = 1_{F(X)}$, *pour tout $X \in \underline{C}$.*

2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, *pour tout couple (f, g) des flèches composables de $\underline{C}$.*

Exemple 1.1 *Sur toute catégorie $\underline{C}$ on dispose d'un foncteur identité $1_{\underline{C}} : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$ défini par les égalités $1_{\underline{C}}(X) = X$ et $1_{\underline{C}}(f) = f$, pour tout objet X et toute flèche f de $\underline{C}$.*

Exemple 1.2 *Le foncteur $\mathcal{P} : \underline{Set} \longrightarrow \underline{Set}$ associe à un ensemble A, l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ de ses parties, et à une fonction $f : A \longrightarrow B$ la fonction qui fait correspondre à une partie X de A la partie $f(X)$ de B.*

Définition 1.11 *[6]*
Deux catégories $\underline{C}$ et $\underline{C'}$ sont dites isomorphes s'il existe des foncteurs $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{C'}$ et $G : \underline{C'} \longrightarrow \underline{C}$ tels que :

$$F \circ G = 1_{\underline{C'}} \text{ et } G \circ F = 1_{\underline{C}}$$

On dit alors que F et G sont des isomorphismes et on note $\underline{C} \cong \underline{C'}$.

1.2.3 Transformations naturelles

Les catégories et les foncteurs ne sont pas en réalité les concepts les plus importants de la théorie des catégories. Il y a un troisième concept, qui est d'ailleurs la notion pour la formalisation

1. En mathématique, une structure désigne toute théorie " plus forte" que la théorie des ensembles, c'est-à-dire une théorie qui contient tous les axiomes, signes et règles. C'est donc une théorie « fondée » sur la théorie des ensembles, mais contenant également des contraintes supplémentaires, qui lui sont propres, et qui permettent également de définir de nouvelles structures qu'elle inclut.

de laquelle Eilenberg et Mac Lane [13] ont introduit les deux précédentes. Il s'agit de la notion de « transformation naturelle ». Elle joue un rôle très important en topologie algébrique.

Définition 1.12 *[2] [23]*
Soient $\underline{C}$ et $\underline{D}$ des catégories, et soient $F, G : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ deux foncteurs. ***Une transformation naturelle*** *T entre F et G (dit aussi morphisme de foncteurs de F vers G) est la donnée d'un morphisme $T_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ pour chaque objet A de $\underline{C}$, on a pour tout $f : A \longrightarrow B$:*

$$G(f) \circ T_A = T_B \circ F(f)$$

c'est-à-dire le diagramme[2] *suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "T_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Exemple 1.3 *Soit $** : \underline{Vect_k} \longrightarrow \underline{Vect_k}$ un foncteur qui envoie tout espace vectoriel E sur son bidual E^{**} (c'est-à-dire le dual du dual de E) et toute application linéaire f sur sa double transposée f^{**} (rappelons que f^* est définie par $f^*(l) = l \circ f$). Il y a une transformation naturelle (notée* ***i*** *ci-dessous) bien connue du foncteur identité $1 : Vect_k \longrightarrow Vect_k$ vers le foncteur $**$. C'est celle qui est définie par la formule :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad i_E \quad} & E^{**} \\ x & \longmapsto & (\, l \to l(x)\,) \end{array}$$

En effet, pour toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ le carré suivant est commutatif :

2. En mathématiques, et plus spécialement dans les applications de la théorie des catégories, un diagramme commutatif est un diagramme d'objets et de morphismes tels que, si l'on suit à travers le diagramme un chemin d'un objet à un autre, le résultat par composition des morphismes ne dépend que de l'objet de départ et de l'objet d'arrivée.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_E"] \arrow[d, "f"'] & E^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ F \arrow[r, "i_F"'] & F^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (l \to l(x)) \arrow[d, mapsto] \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & (l \to l(f(x))) \end{tikzcd}$$

1.2.4 La catégorie des foncteurs

Soient $\underline{C}$ et $\underline{D}$ deux catégories. On définit la catégorie de foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{D}$, notée $\underline{D}^{\underline{C}} = funct(\underline{C}, \underline{D})$ comme suit :

⋆ Les objets de $\underline{D}^{\underline{C}}$ sont les foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{D}$.

⋆ Les morphismes sont les transformations naturelles.

Foncteur diagonal

Définition 1.13 *[23] Soit $\underline{C}$ une catégorie quelconque et $\underline{J}$ une petite catégorie (La plupart finie), on définit le foncteur diagonal Δ par :*

$$\begin{tikzcd} \Delta : \underline{C} \arrow[r] & \underline{C}^{\underline{J}} \\ c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \Delta(c) \arrow[d, "\Delta(f)"] \\ c' \arrow[r, mapsto] & \Delta(c') \end{tikzcd}$$

Avec $\Delta(c) : \underline{J} \longrightarrow \underline{C}$ est le foncteur constant ($\Delta(c)(i) = c$, $\forall i \in \underline{J}$ et $\Delta(c)(l) = 1_c$, $\forall l$ de $\underline{J}$) et $\Delta(f) : \Delta(c) \longrightarrow \Delta(c')$ la transformation naturelle définie par f, pour tout $i \in \underline{J}$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "l"'] & \Delta(c)(i) = c \arrow[r, "\Delta(f)(i) = f"] \arrow[d, "\Delta(c)(l) = 1_c"'] & \Delta(c')(i) = c' \arrow[d, "\Delta(c')(l) = 1_{c'}"] \\
j & \Delta(c)(j) = c \arrow[r, "\Delta(f)(j) = f"'] & \Delta(c')(j) = c
\end{tikzcd}$$

1.2.5 Les morphismes universels

Définition 1.14 *[23]*

Soient $S : \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ *un foncteur et* $c \in \underline{C}$*. On définie* ***le morphisme universel*** *de* c *vers* S *par* $\langle r, u \rangle$ *tel que*[3] *:*

$$r \in \underline{D}\,, \quad u : c \longrightarrow Sr \text{ de } \underline{C}$$

Qui vérifie, pour tout : $\langle d, f \rangle$ *(* $d \in \underline{D}$ *,* $f : c \longrightarrow Sd$ *de* $\underline{C}$ *), il existe un morphisme unique* $f' : r \longrightarrow d$ *tel que :*

$$Sf' \circ u = f.$$

3. On dit que r est l'élément de morphisme universel.

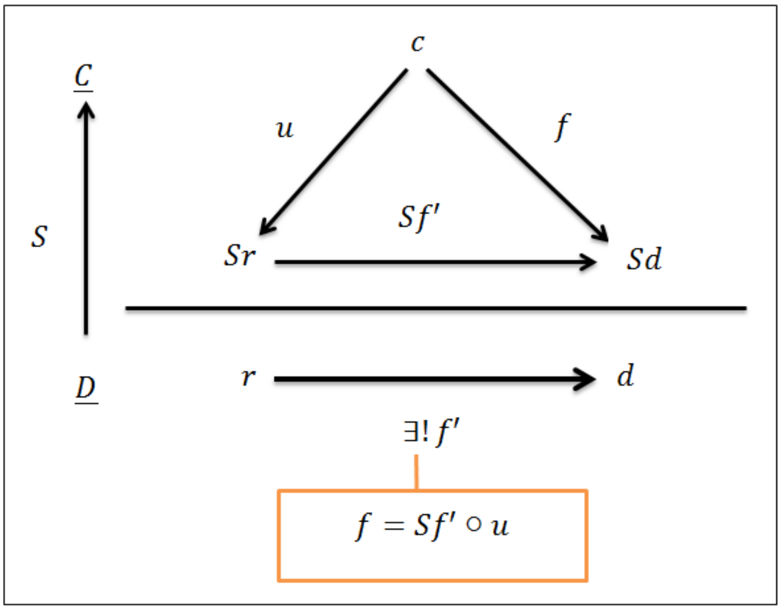


FIGURE 1.1 – Le morphisme universel.

Exemples :

1. Le Co-product de deux objets A et B d'une catégorie $\underline{C}$ est un morphisme universel de l'objet $< A, B >$ dans $\underline{C} \times \underline{C}$ vers le foncteur diagonal Δ, avec :

$$\begin{array}{cccc} \Delta: \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C} \times \underline{C} & \\ c & \longmapsto & \langle c, c \rangle & \\ f \downarrow & & \downarrow & \Delta(f) = \langle f, f \rangle \\ c' & \longmapsto & \langle c', c' \rangle & \end{array}$$

2. Le Co-equalizer de la paire $< f, g >$, avec f et g deux morphismes dans $\underline{C}^{\bullet \rightrightarrows \bullet}$ est le morphisme universel de l'objet $< f, g >$ vers le foncteur diagonal $\Delta : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^{\bullet \rightrightarrows \bullet}$.
3. Le Push-out de la paire $< f, g >$, avec f et g deux morphismes dans $\underline{C}^{\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet}$ est le morphisme universel de l'objet $< f, g >$ vers le foncteur diagonal $\Delta : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^{\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet}$.

Définition 1.15 *[23] (le morphisme universel dual)*

Soient $S : \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ un foncteur et $c \in \underline{C}$. On définie le morphisme universel de S vers c (le morphisme *universel dual) par le couple* $\langle r, v\rangle$ *tel que*[4] *:*

$$r \in \underline{D}\,, \quad v : Sr \longrightarrow c \text{ de } \underline{C}$$

Vérifiant, pour tout : $\langle d, f\rangle$ ($d \in \underline{D}$, $f : Sd \longrightarrow c$ *de* $\underline{C}$) *il existe un morphisme unique* $f' : d \longrightarrow r$ *tel que :*

$$v \circ Sf' = f.$$

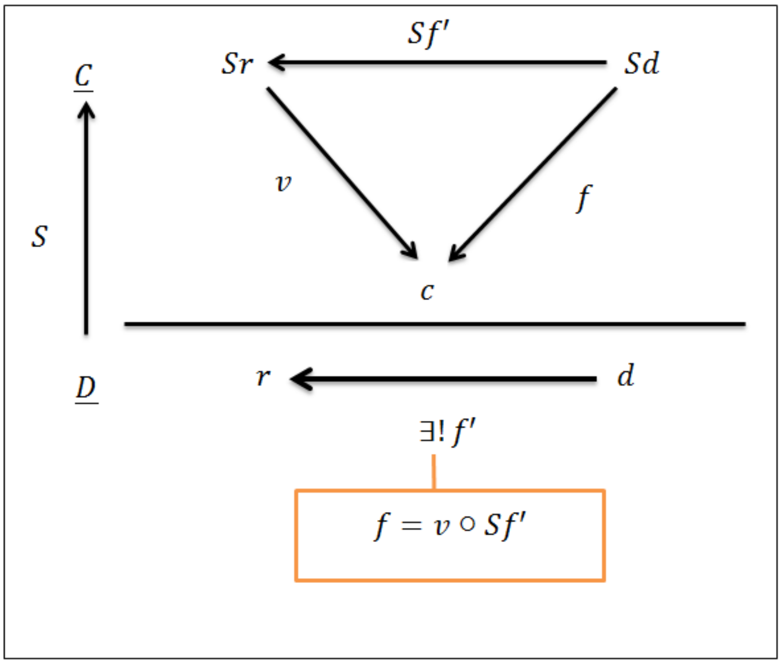


FIGURE 1.2 – Le morphisme universel dual.

Exemple : Le Product de deux objets A et B d'une catégorie $\underline{C}$ est le dual de Co-product[5].

Remarque 1.2 *Remarquons bien que la définition de morphisme universel (morphisme universel dual) dans les exemples précédents sont compliqués et dans le chapitre qui suit on va décortiquer ces définitions, lorsque nous étudierons les morphismes universels de la catégorie de tous les espaces topologiques ordinaires (*$\underline{TOP}$*).*

4. On dit que r est l'élément de morphisme universel dual.
5. Le Equalizer et Pull-back sont le dual de Co-equalizer et Push-out respectivement.

1.3 Rappels sur la théorie des ensembles flous

Dans la théorie des ensembles, un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble. La notion d'ensemble est à l'origine de nombreuses théories mathématiques. Cette notion essentielle ne permet cependant pas de rendre compte de situations pourtant simples et rencontrées fréquemment. Parmi les fruits, il est facile de définir l'ensemble des pommes. Par contre, il sera plus difficile de définir l'ensemble des pommes mûres. On conçoit bien que la pomme mûrit progressivement... la notion de pomme mûre est donc graduelle.
C'est pour prendre en compte de telles situations qu'a été crée la notion d'ensemble flou. La théorie des ensembles flous repose sur la notion d'appartenance partielle : chaque élément appartient partiellement ou graduellement aux ensembles flous qui ont été définis.

1.3.1 Les ensembles flous

Définition 1.16 *[1] [10] [29] [37]*
Soit X un ensemble non vide. ***Un ensemble flou*** *A de X est défini comme l'ensemble des couples :*

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ \ x \in X\}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mu_A(x) \end{aligned}$$

Ainsi, un ensemble flou A de X est caractérisé par une fonction d'appartenance μ_A*, qui associe à chaque point x de X un réel dans l'intervalle* $I = [0,1]$*.* $\mu_A(x)$ *représente le degré d'appartenance de x à A. On observe les trois cas possibles suivants :*

1. $\mu_A(x) = 0$ *si x n'appartient pas A.*
2. $0 < \mu_A(x) < 1$ *si x appartient partiellement A.*
3. $\mu_A(x) = 1$ *si x appartient entièrement à A.*

On peut faire remarquer que si A est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 *et* 1*.*
On a dans ce cas :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si :\ x \in A. \\ 0 & si :\ x \notin A. \end{cases}$$

Remarque 1.3 1. *Un ensemble flou est défini par sa « fonction d'appartenance », qui correspond à la notion de « fonction caractéristique » en logique classique.*

2. *Une catégorie de chercheurs (voir [14] [22] [30]) définissaient l'ensemble flou de X comme l'ensemble des couples :*

$$A = \{(x, A(x)),\ \ x \in X\}$$

tel que $A(x)$ représente le degré d'appartenance de x à A.

Exemple 1.4 *Soit $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ une fonction, avec $\mu_A(x) = |sinx|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors A est un ensemble flou de $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.5 *Soit $\mu_B : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ une fonction, avec $\mu_B(n) = \frac{1}{1+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors B est un ensemble flou de $\mathbb{N}$.*

Exemple 1.6 *"L'ensemble flou des nombres réels beaucoup plus grand que 10" est un ensemble flou de $\mathbb{R}$ défini par la fonction continue suivante :*

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 10. \\ \frac{x-10}{90} & si\ 10 < x < 100. \\ 1 & x \geq 100. \end{cases}$$

On peut représenter D par le graphe suivant :

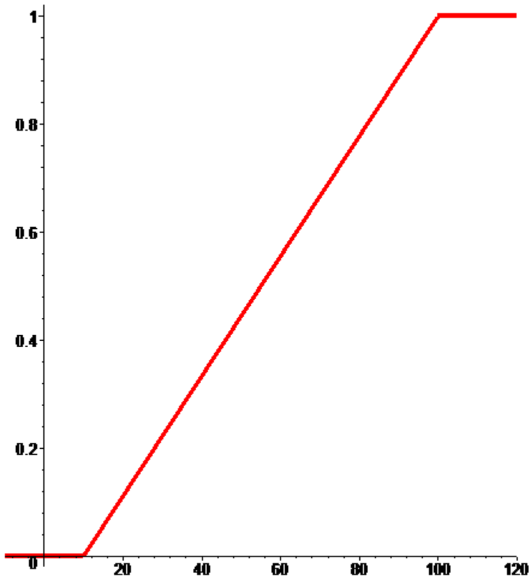


FIGURE 1.3 – L'ensemble flou des nombres réels beaucoup plus grand que 10.

Exemple 1.7 *Considérons l'expression "jeune". Dans le contexte "une personne jeune " peut être modélisée en utilisant les ensembles flous, cet ensemble flou est défini par :*

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x \leq 20. \\ \frac{40-x}{20} & si\ 20 < x < 40. \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

L'âge 1 *est certainement jeune et* 100 *non jeune.*

Exemple 1.8 *La figure suivante montre graphiquement la différence entre un ensemble classique et un ensemble flou :*

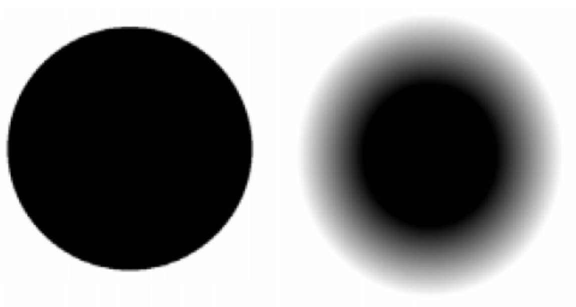


FIGURE 1.4 – La déférence entre l'ensemble classique (gauche) et l'ensemble flou (droite).

Exemple 1.9 *Considérons les expressions (Petit, Moyen, Grand). Dans les contextes "une personne petite " "une personne moyenne " et "une personne grande " peut être modélisées en utilisons les ensembles flous :*

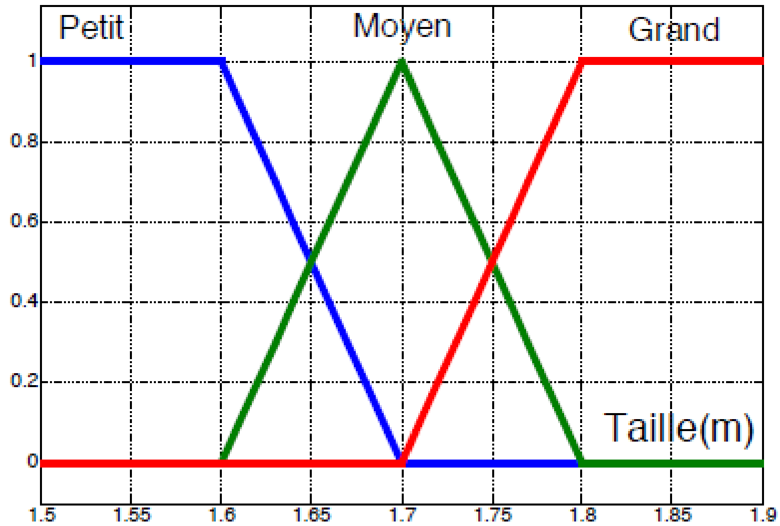


FIGURE 1.5 – Les ensembles flous (Petit, Moyen, Grand).

Mohamed mesure 1 m 625 se traduit en logique floue par :
- « Mohamed est petit » à un degré de 75%.
- « Mohamed est moyen » à 25%.
- « Mohamed est grand » à 0%.

1.3.2 Opérations sur les ensembles flous

Étant donné que le concept de ensemble flou peut être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles [6] lorsque on est à faire à des fonctions d'appartenance à valeur 0 ou 1. On présente ici les opérations couramment utilisées.

6. Ceci n'est pas totalement toujours vrai pouvons voir ça ultérieurement.

Inclusion :

Soient A et B deux ensembles flous de X, A est inclus dans B noté $A \subseteq B$ si et seulement si :

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Égalité :

Deux ensembles flous A et B de X sont égaux si :

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Remarque : Si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ n'est pas satisfaite pour un élément $x \in X$ alors on dit que A n'est pas égal B.

Union :

L'union de deux ensembles flous A et B noté $A \vee B$ est défini par :

$$\mu_{A \vee B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Exemples :

1. L'union de A et B, avec :
   $A = \{(1,1),(2,0),(3,0.9),(4,0.1),(5,0.7),(6,0.5)\}$
   $B = \{(1,0.2),(2,1),(3,0.4),(4,0),(5,0.8),(6,0.2)\}$
   est :
   $$A \bigvee B = \{(1,1),(2,1),(3,0.9),(4,0,1),(5,0.8),(6,0.5)\}$$
2. L'union de A et B, avec : $\mu_A(x) = 0,6$ et $\mu_B(x) = 0,4$, $\forall x \in X$.
   est :
   $$\mu_{A \vee B}(x) = max\{0.6, 0.4\} = 0.6$$

L'intersection :

L'intersection de deux ensembles flous A et B noté $A \wedge B$ est défini par :

$$\mu_{A \wedge B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Exemples :

1. L'intersection de A et B, avec :
   $A = \{(1,1),(2,0),(3,0.9),(4,0.1),(5,0.7),(6,0.5)\}$
   $B = \{(1,0.2),(2,1),(3,0.4),(4,0),(5,0.8),(6,0.2)\}$
   est :
   $$A \bigwedge B = \{(1,0.2),(2,0),(3,0.4),(4,0),(5,0.7),(6,0.2)\}$$
2. L'intersection de A et B, avec : $\mu_A(x) = 0,6$ et $\mu_B(x) = 0,4$, $\forall x \in X$ est :
   $$\mu_{A \wedge B}(x) = min\{0.6, 0.4\} = 0.4$$

Complément :

Le complémentaire d'un ensemble flou A de X noté A^c est défini par :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad\qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Exemple :
Soit A un ensemble flou de $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, avec :
$A = \{(1,1),(2,1),(3,0.9),(4,0.6),(5,0.4),(6,0.3),(7,0.2),(8,0.1),(9,0),(10,0)\}$.
L'ensemble flou A^c défini par :
$A^c = \{(1,0),(2,0),(3,0.1),(4,0.4),(5,0.6),(6,0.7),(7,0.8),(8,0.9),(9,1),(10,1)\}$.

Avec les définitions usuelles des opérateurs flous, nous trouvons toujours la propriété de commutativité, distributivité et associativité des opérateurs classiques...
Cependant, relevons deux exceptions notables :

1. En logique flou, le principe du tiers exclu est contredit : $A \bigvee A^c \neq X$, autrement dit $\mu_{A \vee A^c} \neq 1$.
2. En logique flou, un élément peut appartenir à A et non A en même temps : $(A \wedge A^c \neq \emptyset)$, autrement dit $\mu_{A \wedge A^c} \neq 0$.

Exemple générale :

Nous concéderons les ensembles flous A_1, A_2. Avec :

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & si\ 40 \leq x < 50. \\ 1 - \frac{x-50}{10} & si\ 50 \leq x < 60. \\ 0 & si\ 60 \leq x \leq 100. \end{cases} \quad \text{et } \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & si\ 40 \leq x < 50. \\ \frac{x-50}{10} & si\ 50 \leq x < 60. \\ 1 - \frac{x-60}{10} & si\ 60 \leq x < 70. \\ 0 & si\ 70 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Alors :

$$\mu_{A_1 \vee A_2}(x) = \begin{cases} 1 & si\ 40 \leq x < 50. \\ 1 - \frac{x-50}{10} & si\ 50 \leq x < 55. \\ \frac{x-50}{10} & si\ 55 \leq x \leq 60. \\ 1 - \frac{x-60}{10} & si\ 60 \leq x \leq 70. \\ 0 & si\ 70 < x \leq 100. \end{cases}$$

$A_1 \bigvee A_2$ est représenté graphiquement par :

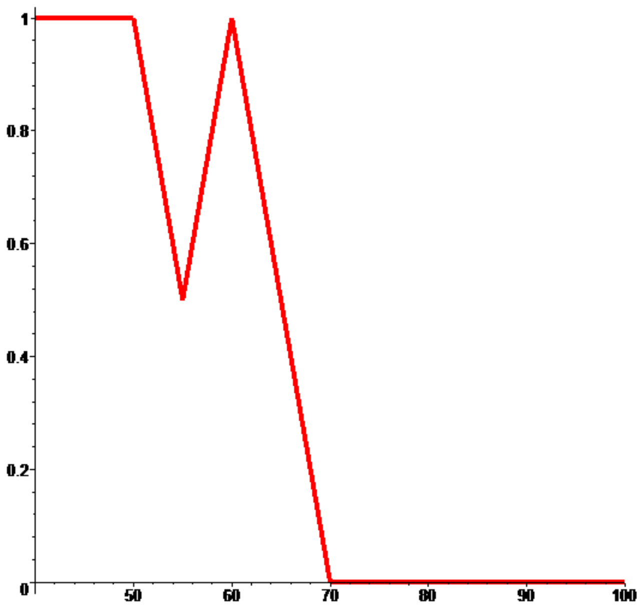


FIGURE 1.6 – Union de A_1 et A_2.

Et l'intersection de A_1 et A_2 est :

$$\mu_{A_1 \wedge A_2}(x) = \begin{cases} 0 & si\ 40 \leq x < 50. \\ \frac{x-50}{10} & si\ 50 \leq x < 55. \\ 1 - \frac{x-50}{10} & si\ 55 \leq x \leq 60. \\ 0 & si\ 60 < x \leq 100. \end{cases}$$

La représentation graphique de $A_1 \wedge A_2$ est :

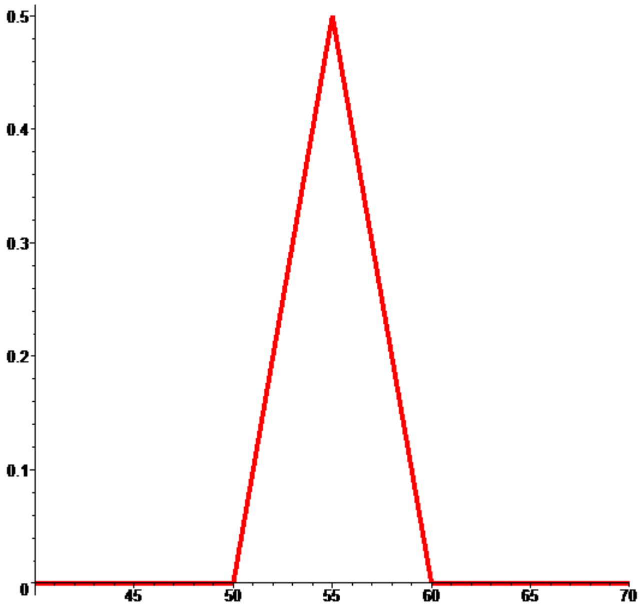


FIGURE 1.7 – Intersection de A_1 et A_2.

Et le complémentaire de A_1 est donné par :

$$\mu_{A_1^c}(x) = \begin{cases} 0 & si\ 40 \leq x < 50. \\ \frac{x-50}{10} & si\ 50 \leq x < 60. \\ 1 & si\ 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Le graphe de A_1^c est :

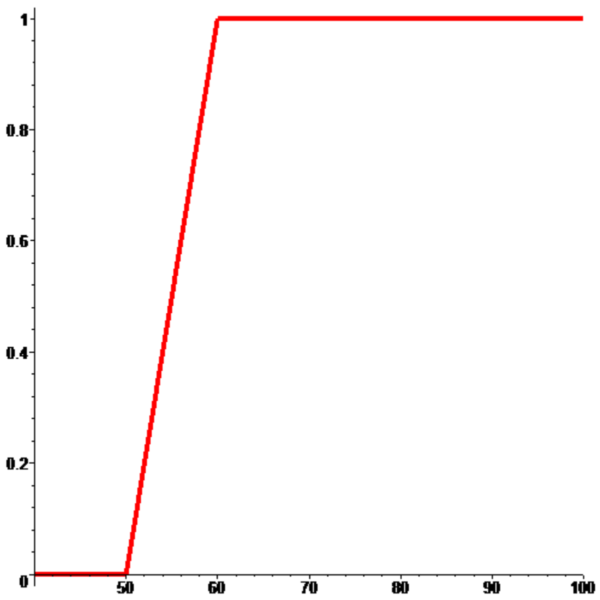


FIGURE 1.8 – Complémentaire de A_1.

Plus généralement, pour une famille d'ensembles flous, $A = \{A_i,\ i \in I\}$ l'union $C = \bigvee_I A_i$, et l'intersection $D = \bigwedge_I A_i$ sont définies par :

$$\mu_C(x) = sup_I\{\mu_{A_i}(x)\} \qquad \textit{pour tout } x \in X.$$

$$\mu_D(x) = inf_I\{\mu_{A_i}(x)\} \qquad \textit{pour tout } x \in X.$$

Définition 1.17 *[10] [37]*
Le symbole ϕ sera utilisé pour noter l'ensemble flou vide défini par $\mu_\phi(x) = 0$, pour tout $x \in X$.
Pour X, nous avons par définition $\mu_X(x) = 1$, pour tout $x \in X$.

Définition 1.18 *[31]*
Soient A et B deux ensembles flous de X et Y respectivement. Le produit cartésien de A et B ($A \times B$) est un ensemble flou de $X \times Y$ défini par :

$$\mu_{A\times B}(x,y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \ \ \textit{pour tout } (x,y) \in X \times Y.$$

Définition 1.19 *[36]*
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. La fonction floue $f : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]^Y$ est définie par :

Pour un ensemble flou A de X, $f(A)$ est un ensemble flou de Y défini par :

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} sup_{z\in f^{-1}(y)}\{\mu_A(z)\} & si\ f^{-1}(y) \neq \varnothing. \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

$\forall y \in Y$.

Définition 1.20 *[10] [15] [29]*

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. B un ensemble flou de Y. Alors l'inverse de B par f est un ensemble flou de X tel que :

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)), \ \ pour\ tout\ x \in X.$$

Exemple :

Soient $X = \{a,b,c\}$ et $Y = \{d,e,g\}$ deux ensembles. A et B deux ensembles flous de X et Y respectivement, avec $A = \{(a,0.5),(b,0.3),(c,0.9)\}$ et $B = \{(d,0.2),(e,0.7),(g,0.11)\}$.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction définie par $f(a) = d,\ f(b) = d,\ f(c) = e$, alors :

1. Comme $f^{-1}(d) = \{a,b\} \neq \varnothing$, nous avons :
   $\mu_{f(A)}(d) = sup\{\mu_A(x) : x \in f^{-1}(d)\} = sup\{\mu_A(a),\mu_A(b)\} = sup\{0.5,0.3\} = 0.5$.
   Et $f^{-1}(e) = \{c\} \neq \varnothing$, nous avons :
   $\mu_{f(A)}(e) = sup\{\mu_A(x) : x \in f^{-1}(e)\} = sup\{\mu_A(c)\} = 0.9$.
   Comme $f^{-1}(g) = \varnothing$, alors $\mu_{f(A)}(g) = 0$. Donc, $f(A) = \{(d,0.5),(e,0.9),(g,0)\}$.
2. Comme $\mu_{f^{-1}(B)}(a) = \mu_B(f(a)) = \mu_B(d) = 0.2,\ \ \mu_{f^{-1}(B)}(b) = \mu_B(f(b)) = \mu_B(d) = 0.2,$
   $\mu_{f^{-1}(B)}(c) = \mu_B(f(c)) = \mu_B(e) = 0.7$. Alors, $f^{-1}(B) = \{(a,0.2),(b,0.2),(c,0.7)\}$.

Théorème 1.4 *[10]*

Soient X,Y,Z des ensembles, et $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ deux applications, alors :

$$(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

Pour tout ensemble flou C de Z.

Preuve : Il suffit de montrer que :

$$\forall x \in X,\ \mu_{(g\circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x).$$

Soit $x \in X$:

$$\mu_{(g\circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_C((g\circ f)(x)) = \mu_C(g(f(x))) = \mu_{g^{-1}(C)}(f(x)) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x).$$

Théorème 1.5 *[10]*

Soit f une fonction de X à Y, alors :

1. $f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$, *pour tout ensemble flou B de Y.*

2. *Si $B_1 \subseteq B_2$, alors $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, où B_1, B_2 sont des ensembles flous de Y.*

3. *Si $A_1 \subseteq A_2$, alors $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, où A_1, A_2 sont des ensembles flous de X.*

4. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, *pour tout ensemble flou B de Y.*

5. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, *pour tout ensemble flou A de X.*

Chapitre 2

Les morphismes universels de TOP (La catégorie de tous les espaces topologiques)

Dans ce chapitre, nous étudions les morphismes universels de la catégorie des espaces topologiques ordinaires [TOP]. Cette étude de ces morphismes nous permettra de les comparer avec les morphismes universels des catégories des espaces topologiques flous [à savoir CF-TOP- LF-TOP – SF-TOP [1]].

2.1 Co-product

Théorème 2.1 *[23]*
Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux espaces topologiques. L'élément de Co-product de (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) est l'espace topologique $(X_1, \tau_1) \uplus (X_2, \tau_2)$ (Défini dans la définition (1.6)).

Preuve : Soient $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (C, \tau_C)$ et $g : (X_2, \tau_2) \longrightarrow (C, \tau_C)$ deux applications continues, alors il existe une application continue unique h définie par :

$$\begin{array}{rcl} h : (X_1 \uplus X_2, \tau_{X_1 \uplus X_2}) & \longrightarrow & (C, \tau_C) \\ (x, k) & \longmapsto & h(x,k) = \begin{cases} f(x) & si\, k = 1. \\ g(x) & si\, k = 2. \end{cases} \end{array}$$

⋆ Il est clair que : $f = h \circ \varphi_1$ et $g = h \circ \varphi_2$.
⋆ Suite au théorème (1.2), h est continue.

1. le travail en cours de finalisation.

Preuve d'unicité de h :

Soit $h' : (X_1 \uplus X_2, \tau_{X_1 \uplus X_2}) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application continue, avec $f = h' \circ \varphi_1$ et $g = h' \circ \varphi_2$. Nous avons :

$$(h' \circ \varphi_1)(x) = h'(\varphi_1(x)) = h'(x,1) = f(x), \ \forall x \in X_1.$$

et

$$(h' \circ \varphi_2)(x) = h'(\varphi_2(x)) = h'(x,2) = g(x), \ \forall x \in X_2.$$

Par conséquent h est unique.

□

Cela est illustré par le diagramme commutative suivant :

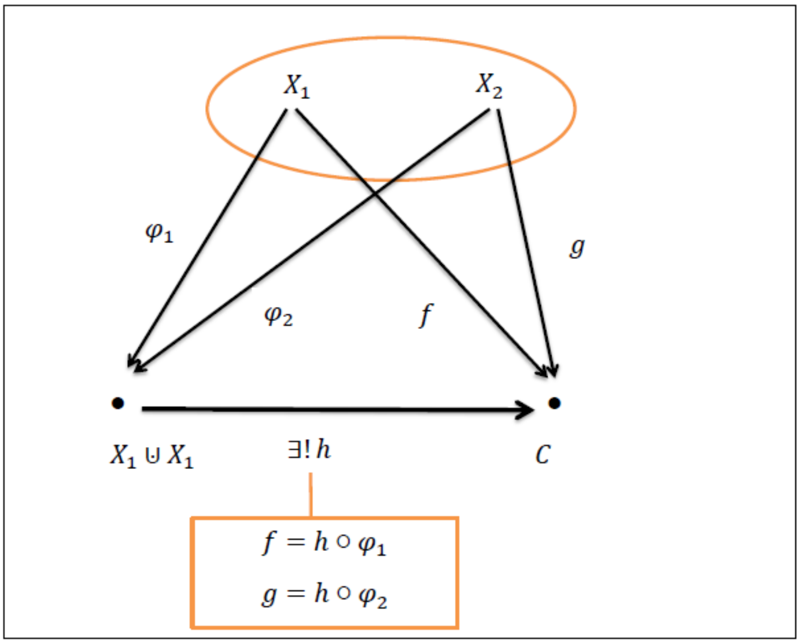


FIGURE 2.1 – Co-product.

2.2 Co-equalizer

Théorème 2.2 *[23]*

Soient $f, g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de TOP. L'élément de Co-equalizer de $< f, g >$ est l'espace topologique $(A/\sim, \tau_{A/\sim})$ (Définition (1.4)), avec $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< f(x), g(x) >$, tel que $x \in B$.

Preuve : Soit $h : (A, \tau_A) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une application continue, avec $h \circ f = h \circ g$.
Suite au théorème (1.1), il suffit de prouver que h est compatible avec $\sim$ pour prouver l'existence d'une application h' définie par la formule (1.1) qui vérifie $h = h' \circ P$.
Soient $x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists b \in B,\ x_1 = f(b)\ \ et\ \ x_2 = g(b)$.
Et $h(x_1) = h(f(b)) = (h \circ f)(b) = (h \circ g)(b) = h(g(b)) = h(x_2)$, alors h est compatible avec $\sim$.

$\square$

Cela est illustré par le diagramme commutative suivant :

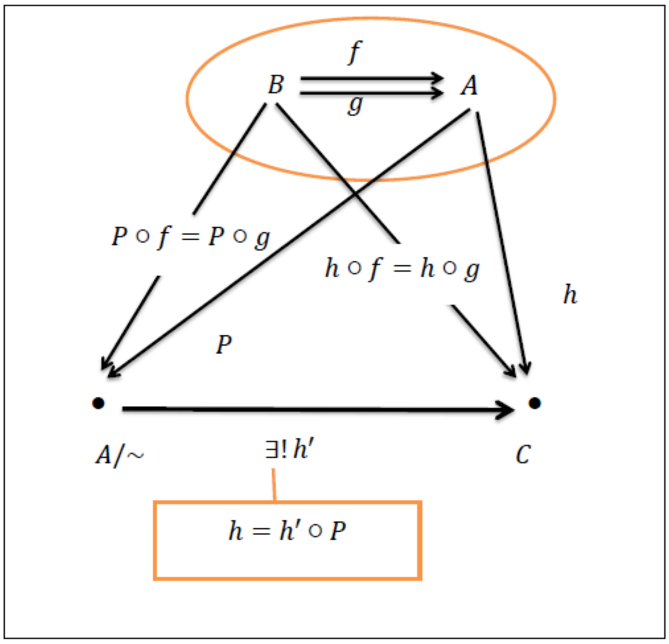


FIGURE 2.2 – Co-equalizer.

2.3 Push-out

Définition 2.1 *Soient (A, τ_A) et (B, τ_B) deux espaces topologiques, $\sim$ une relation d'équivalence sur $A \cup B$, soit également $X_0 = (A \cup B)/\sim$, nous définissons τ_{X_0} par :*

$$\tau_{X_0} = \{\theta\,,\, \theta \subseteq X_0,\ \varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta)) \in \tau_A \text{ et } \varphi_2^{-1}(P^{-1}(\theta)) \in \tau_B\}$$

avec :

$$P : A \cup B \longrightarrow X_0$$
$$(x, k) \longmapsto P(x, k) = \overline{(x, k)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (A, \tau_A) &\longrightarrow (A \uplus B, \tau_{A \uplus B}) \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = (x, 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : (B, \tau_B) &\longrightarrow (A \uplus B, \tau_{A \uplus B}) \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = (x, 2) \end{aligned}$$

Proposition 2.1 *(X_0, τ_{X_0}) est un espace topologique.*

Proposition 2.2 *Les applications N et M sont continues, avec :*

$$\begin{aligned} N : (A, \tau_A) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto N(x) = \overline{(x, 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M : (B, \tau_B) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto M(x) = \overline{(x, 2)} \end{aligned}$$

Preuve : Nous prouvons que N est continue :
Soit $\theta \in \tau_{X_0}$, alors $\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta)) \in \tau_A$, ainsi, $(P \circ \varphi_1)^{-1}(\theta) \in \tau_A$. Mais :
$(P \circ \varphi_1)(x) = P(\varphi_1(x)) = P((x,1)) = \overline{(x,1)} = N(x), \quad \forall x \in A$. Par conséquent $N^{-1}(\theta) \in \tau_A$.
Ce qui prouve que N est continue.
De même pour M.

Théorème 2.3 *Soient $f : (C, \tau_C) \longrightarrow (A, \tau_A)$ et $g : (C, \tau_C) \longrightarrow (B, \tau_B)$ deux applications continues. L'élément de Push-out de $< f, g >$ est (X_0, τ_{X_0}), avec $X_0 = (A \uplus B)/ \sim$, et $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient les paires $< (\varphi_1 \circ f)(c), (\varphi_2 \circ g)(c) >$, pour tout $c \in C$.*

Preuve : Soient $U : (A, \tau_A) \longrightarrow (D, \tau_D)$ et $V : (B, \tau_B) \longrightarrow (D, \tau_D)$ deux applications continues, avec $V \circ g = U \circ f$. La preuve d'existence d'une application continue unique $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (D, \tau_D)$ qui vérifie $U = h \circ N$, $V = h \circ M$, exige d'abord les étapes suivantes :

Étape 1 : Nous savons que l'élément de Co-product de (A, τ_A) et (B, τ_B) est l'union disjoint $(A \uplus B, \tau_{A \uplus B})$, alors pour $\{N, \ M\}$ il existe une application continue $\pi : (A \uplus B, \tau_{A \uplus B}) \longrightarrow (X_0, \tau_{X_0})$, avec $N = \pi \circ \varphi_1$ *et* $M = \pi \circ \varphi_2$.

Étape 2 : Nous définissons la nouvelle application $U \uplus V$ par :

$$\begin{aligned} U \uplus V : (A \uplus B, \tau_{A \uplus B}) &\longrightarrow (D, \tau_D) \\ (x, k) &\longmapsto (U \uplus V)(x, k) = \begin{cases} U(x) & si \ \ k = 1. \\ V(x) & si \ \ k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $U \uplus V$ est compatible avec $\sim$, alors il existe une application continue unique $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (D, \tau_D)$, avec $U \uplus V = h \circ \pi$ (Théorème (1.1)).

Soient (x,k), $(x',k') \in A \uplus B$, alors :

$(x,k) \sim (x',k') \Longrightarrow \exists c \in C,\ (x,k) = (\varphi_1 \circ g)(c)\ et\ (x',k') = (\varphi_2 \circ f)(c).$

$(U \uplus V)(x,k) = (U \uplus V)(\varphi_1 \circ f)(a) = (U \uplus V)(f(c),1) = U(f(c)) = (U \circ f)(c).$

$(U \uplus V)(x',k') = (U \uplus V)(\varphi_2 \circ g)(c) = (U \uplus V)(g(c),2) = V(g(c)) = (V \circ g)(c).$

Comme $V \circ g = U \circ f$, alors $U \uplus V$ est compatible avec $\sim$.

Étape 3 : Nous allons prouver que $U = h \circ N, V = h \circ M$.

$(h \circ N)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_1))(x) = (h \circ \pi)(x,1) = (U \uplus V)(x,1) = U(x), \forall x \in A.$

$(h \circ M)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_2))(x) = (h \circ \pi)(x,2) = (U \uplus V)(x,2) = V(x), \forall x \in B.$

□

Cela est illustré par le diagramme commutative suivant :

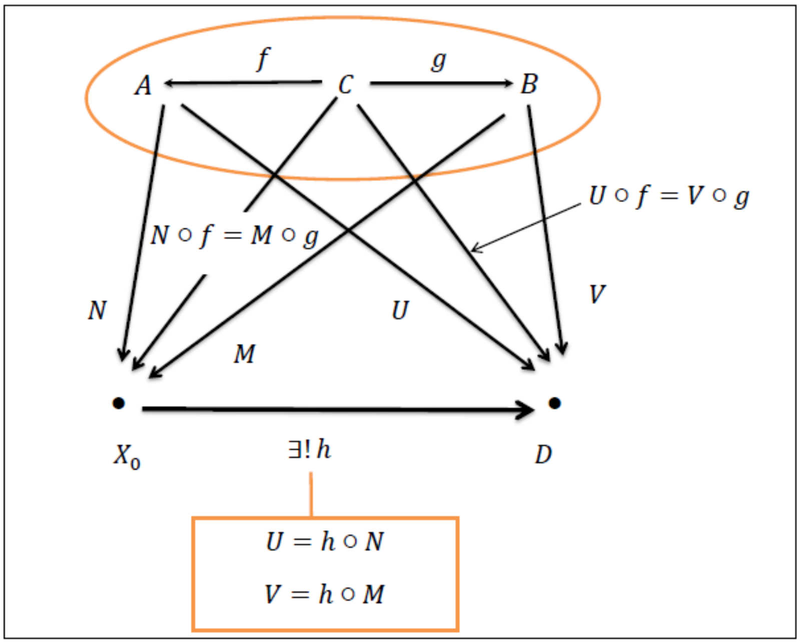


FIGURE 2.3 – Push-out.

2.4 Product

Théorème 2.4 *[23]*

Soient $(A, \tau_A), (B, \tau_B) \in$ TOP. L'élément de Product de (A, τ_A) et (B, τ_B) est l'espace topologique

$(A \times B, \tau_{A\times B})$. *($(A \times B, \tau_{A\times B})$ est défini dans la proposition (1.1)).*

Preuve : Si $f_1 : (C, \tau_C) \longrightarrow (A, \tau_A)$ et $f_2 : (C, \tau_C) \longrightarrow (B, \tau_B)$ deux applications continues. On définit l'application f par :

$$\begin{aligned} f : (C, \tau_C) &\longrightarrow (A \times B, \tau_{A\times B}) \\ x &\longmapsto h(x) = (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

⋆ Il est clair que $f_1 = P_1 \circ f$ et $f_2 = P_2 \circ f$.

⋆ Suite au théorème (1.3), f est continue.

Preuve d'unicité de f :

Soit $f' : (C, \delta) \longrightarrow (A \times B, \tau_{A\times B})$ une autre application continue, avec $f_1 = P_1 \circ f'$, $f_2 = P_2 \circ f'$.

Supposons que : $f'(x) = (a, b)$.

$a = P_1(a, b) = (P_1 \circ f')(x) = f_1(x)$, $b = P_2(a, b) = (P_2 \circ f')(x) = f_2(x)$.

Alors $f'(x) = (f_1(x), f_2(x)) = h(x)$, donc f est unique.

□

Cela est illustré par le diagramme commutative suivant :

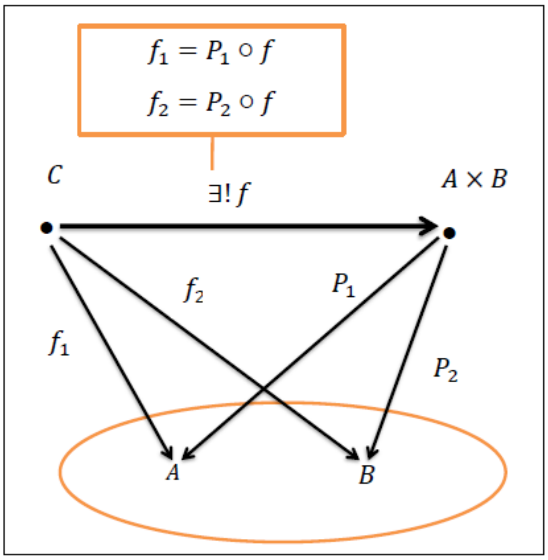


FIGURE 2.4 – Product.

2.5 Equalizer

Théorème 2.5 *[23]*

Soient f et $g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ deux applications continues. L'élément de Equalizer de $< f, g >$ est l'espace topologique (D, τ_D), avec $D = \{x \in B,\ f(x) = g(x)\} \subseteq B$ et τ_D est la topologie induite.

Preuve : Premièrement, il est claire que l'application d'identité $e : (D, \tau_D) \longrightarrow (B, \tau_B)$ est continue. Deuxièmement, soit $h : (C, \tau_C) \longrightarrow (B, \tau_B)$ une application continue, avec $f \circ h = g \circ h$, alors il existe une application continue h' définie par :

$$\begin{aligned} h' : (C, \tau_C) &\longrightarrow (D, \tau_D) \\ x &\longmapsto h'(x) = h(x) \end{aligned}$$

⋆ h' est continue de fait, h est continue.
⋆ Soit $x \in C$: $(e \circ h')(x) = e(h'(x)) = e(h(x)) = h(x)$, alors $e \circ h' = h$.
Preuve d'unicité de h' :
Soit $h'' : (C, \tau_C) \longrightarrow (D, \tau_D)$ une autre application continue, avec $e \circ h'' = h$, alors
$(e \circ h'')(x) = (e \circ h')(x) \Longrightarrow e(h''(x)) = e(h'(x)) \Longrightarrow h''(x) = h'(x),\ \forall x \in C$, donc h' est unique.

□

Cela est illustré par le diagramme commutative suivant :

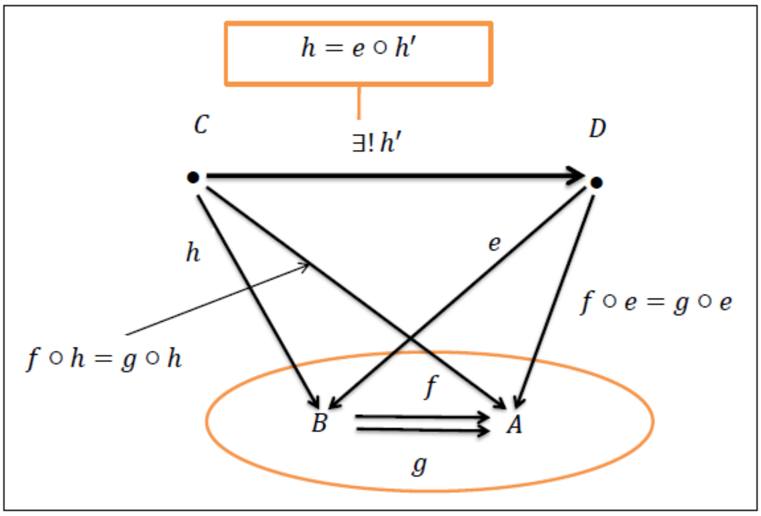


FIGURE 2.5 – Equalizer.

2.6 Pull-back

Définition 2.2 *Soient* $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ *et* $g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ *deux applications continues.*
C est un ensemble défini par :
$C = \{(x, y) \in B \times D,\ f(x) = g(y)\} \subseteq B \times D$. *On définit* τ_C *par :* $\tau_C = \{\theta \subseteq C, \theta = C \cap \theta',\ \theta' \in \tau_{B\times D}\}$.

Proposition 2.3 *Les projections p et q sont continues, avec :*

$$\begin{aligned} p : (C, \tau_C) &\longrightarrow (B, \tau_B) \\ (x, y) &\longmapsto p(x, y) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q : (C, \tau_C) &\longrightarrow (D, \tau_D) \\ (x, y) &\longmapsto q(x, y) = y \end{aligned}$$

Preuve : On montre que p est continue :
Soit $B_i \in \tau_B$ et comme $p^{-1}(B_i) = B_i \times D$.
Nous prenons $p^{-1}(B_i) = (B_i \times D) \cap C$, alors p est continue.
Par la même méthode, nous prouvons que q est continue.

Théorème 2.6 *Soient* $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ *et* $g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ *deux applications continues. Si* $h : (E, \tau_E) \longrightarrow (B, \tau_B)$ *et* $k : (E, \tau_E) \longrightarrow (D, \tau_D)$ *deux applications continues, avec* $f \circ h = g \circ k$*. On définit l'application r par :*

$$\begin{aligned} r : (E, \tau_E) &\longrightarrow (C, \tau_C) \\ x &\longmapsto r(x) = (h(x), k(x)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Alors :

$$h, k \text{ sont continues } \Longrightarrow r \text{ est continues}$$

Preuve : Soit $\theta \in \tau_C$, nous avons :

$$\begin{aligned} r^{-1}(\theta) &= r^{-1}((C) \cap (\cup_{i\in I} B_i \times D_i)) \\ &= r^{-1}(C) \cap r^{-1}(\cup_{i\in I} B_i \times D_i) \\ &= r^{-1}(C) \cap (\cup_{i\in I} r^{-1}(h^{-1}(B_i) \cap k^{-1}(D_i))) \in \tau_E. \end{aligned}$$

Comme h, k sont continues et $r^{-1}(C) = E$.

Théorème 2.7 *Soient* $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A), g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ *de TOP. L'élément de Pull-back de* $\langle f, g\rangle$ *est un espace topologique* (C, τ_C) *(Définition (2.2)).*

Preuve : Premièrement, par la définition de C, il est clair que $f \circ p = g \circ q$.

Deuxièmement, si $h : (E, \tau_E) \longrightarrow (B, \tau_B)$ et $k : (E, \tau_E) \longrightarrow (D, \tau_D)$ deux applications continues avec $f \circ h = g \circ k$, alors il existe une application continue r définie par la formule (2.1).

⋆ Il est clair que $k = q \circ r$ et $h = p \circ r$.

Preuve d'unicité de r :

Soit $r' : (E, \tau_E) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application continue, avec $k = q \circ r'$ *et* $h = p \circ r'$.

Supposons que $r'(x) = (a, b)$, nous avons :

$a = p(a, b) = (p \circ r')(x) = h(x)$ *et* $b = q(a, b) = (q \circ r')(x) = k(x)$.

Alors $r = r'$ et r est unique.

□

Cela est illustré par le diagramme commutative suivant :

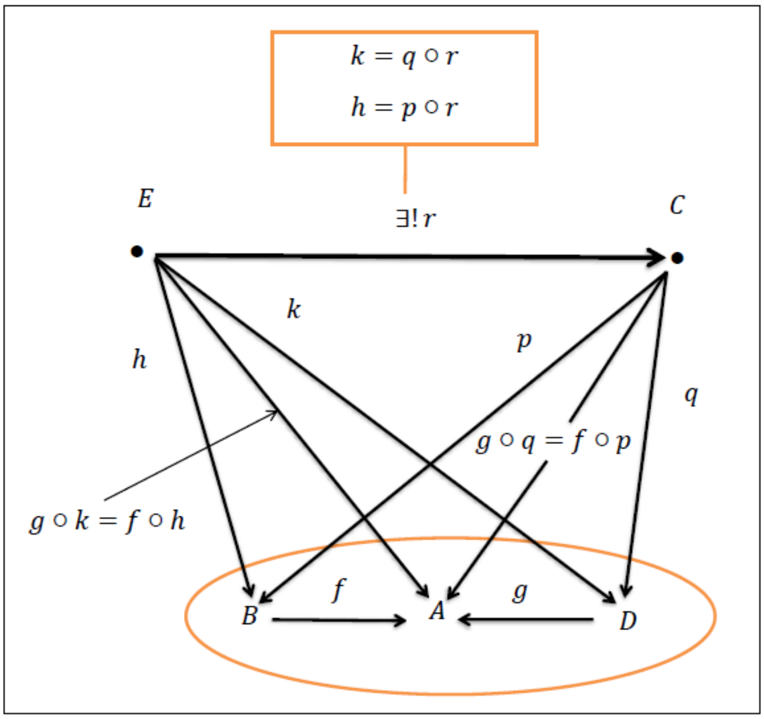


FIGURE 2.6 – Pull-back.

Chapitre 3

Les morphismes universels de CF-TOP

Chang [10] a été le premier à introduire la notion de topologie floue en tant qu'application d'ensembles flous. Il à utilisé la même définition de la topologie ordinaire pour définir la topologie floue, mais en utilisant des ensembles flous et non des ensembles ordinaires.

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1 *[10]*
Soit X un ensemble non vide. ***Une topologie floue*** *T sur X est une famille des ensembles flous de X avec :*

1. *$\varnothing$, $X \in T$.*
2. *Si A_1, $A_2 \in T$, alors $A_1 \wedge A_2 \in T$.*
3. *Si $A_i \in T$ pour tout $i \in I$, alors $\bigvee_I A_i \in T$, I est un ensemble d'indices quelconque.*

La structure (X, T) est dite ***espace topologique flou*** *et on la note (CF-TOP).*
$*$ Chaque élément de T est un ensemble flou ouvert.
$*$ Un ensemble flou est fermé si son complémentaire est un ensemble flou ouvert.

Exemple 3.1 *Comme la topologie ordinaire, la topologie floue grossière contient seulement $\varnothing$, X, cependant la topologie floue discrète contient tous les ensembles flous de X.*

Exemple 3.2 *Soient $X = \{x, y\}$, $A = \{(x, 0.6), (y, 0.3)\}$, $B = \{(x, 0.2), (y, 0.7)\}$, $A \wedge B = \{(x, 0.2), (y, 0.3)\}$ et $A \vee B = \{(x, 0.6), (y, 0.7)\}$, la collection :*

$$T = \{\varnothing, X, A, B, A \bigwedge B, A \bigvee B\}$$

est une topologie floue sur X.

Définition 3.2 *[10] [15]*

Soient X un ensemble non vide et τ_1 et τ_2 deux topologies floues sur X. La topologie τ_1 est dite plus fine que τ_2 lorsque $\tau_2 \subseteq \tau_1$ et moins fine que τ_2 lorsque $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Définition 3.3 *[10] [12] [19]*

Soient (X,T) et (Y,U) deux CF-TOP et $f:(X,T) \longrightarrow (Y,U)$ une application. On dit que f est ***continue floue (CF-continuous)*** *si l'inverse par f de chaque ensemble flou ouvert de Y est un ensemble flou ouvert de X.*

Exemple 3.3 *Pour (X, I^X) l'espace topologique flou discret et (Y,τ_Y) un CF-TOP quelconque, soit $f:(X,I^X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$, alors f est CF-continuous.*

Exemple 3.4 *Soient (X,τ) et (X,γ) deux CF-TOP, μ et μ' sont les fonctions d'appartenance de τ et τ' respectivement. Soit $id_X:(X,\tau) \longrightarrow (X,\gamma)$ avec id_X est la fonction d'identité $id_X(x)=x$, alors τ est plus fine que γ si est seulement si id_X est CF-continuous.*
En effet, supposons τ est plus fine que γ, soit B un ensemble flou ouvert dans γ. Alors $\mu_{id_X^{-1}(B)}(x) = \mu'_B id_X(x) = \mu'_B(x)$. Donc, $id_X^{-1}(B) = B$. Comme $\gamma \subseteq \tau$, $id_X^{-1}(B) = B \in \tau$ et donc id_X est CF-continuous.
Inversement, si id_X est CF-continuous, et $B \in \gamma$, alors $B = id_X^{-1}(B) \in \tau$. Donc $\gamma \subseteq \tau$, et τ est plus fine que γ.

Notation : Les espaces topologiques flous CF-TOP et les applications continues flous forment une catégorie qui nous notons par CF-TOP.

Définition 3.4 *[8] [35]*

(a) Soit τ une topologie floue au sens de Chang. Une sous-famille T de τ est une base pour τ si et seulement si chaque élément de τ peut s'écrire comme l'union de quelques éléments de T.

(b) Soit S une sous-famille de T. S est une sous-base pour τ si et seulement si la famille d'intersections finies des éléments de S forme une base pour τ.

(c) La sous-base de produit topologique flou sur $(X,T) = (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ est donné par $S = \{P_i^{-1}(\theta_i);\ \theta_i \in \tau_i,\ i \in I\}$ (P_i la projection de X sur X_i) alors la base de T est donnée par $B = \{\bigwedge_{j=1}^{n} P_{i_j}^{-1}(\theta_{i_j});\ \theta_{i_j} \in \tau_{i_j},\ i_j \in I,\ j = 1...n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

3.2 Les morphismes universels

3.2.1 Co-product

Définition 3.5 *Soient (X_1,τ_1) et (X_2,τ_2) deux CF-TOP, notons par μ et μ' les fonctions d'appartenances des éléments de τ_1 et τ_2 respectivement. L'union disjoint de (X_1,τ_1) et (X_2,τ_2) est défini comme suit :*

$$(X_1,\tau_1)\dot{\bigvee}(X_2,\tau_2)=(X_1\dot{\bigvee}X_2,\tau_{X_1\dot{\vee}X_2}).$$

avec

$$X_1\dot{\bigvee}X_2=\{X_1\times\{1\}\}\cup\{X_2\times\{2\}\}.$$

et

$$\tau_{X_1\dot{\vee}X_2}=\{\theta,\ \theta\, \textit{est un ensemble flou de}\, X_1\dot{\bigvee}X_2\}.$$

La fonction d'appartenance des éléments de $\tau_{X_1\dot{\vee}X_2}$ est définie par :

$$\begin{aligned}(\mu\dot{\vee}\mu')_\theta : X_1\dot{\vee}X_2 &\longrightarrow [0,1]\\ (x,k)&\longmapsto (\mu\dot{\vee}\mu')_\theta(x,k)=\begin{cases}\mu_{\varphi_1^{-1}(\theta)}(x) & si\ k=1.\\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\theta)}(x) & si\ k=2.\end{cases}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_1 : (X_1,\tau_1)&\longrightarrow (X_1\dot{\vee}X_2,\tau_{X_1\dot{\vee}X_2})\\ x&\longmapsto \varphi_1(x)=(x,1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_2 : (X_2,\tau_2)&\longrightarrow (X_1\dot{\vee}X_2,\tau_{X_1\dot{\vee}X_2})\\ x&\longmapsto \varphi_2(x)=(x,2)\end{aligned}$$

Proposition 3.1 *L'union disjoint $(X_1\dot{\vee}X_2,\tau_{X_1\dot{\vee}X_2})$ est un CF-TOP.*

Preuve :

(1) Nous avons :

$$(\mu\dot{\vee}\mu')_\varnothing(x,k)=\begin{cases}\mu_{\varphi_1^{-1}(\varnothing)}(x) & \text{si } k=1\\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\varnothing)}(x) & \text{si } k=2\end{cases}=\begin{cases}\mu_\varnothing(x) & \text{si } k=1\\ \mu'_\varnothing(x) & \text{si } k=2\end{cases}=0.$$

$$\begin{aligned}(\mu\dot{\vee}\mu')_{X_1\dot{\vee}X_2}(x,k) &=\begin{cases}\mu_{\varphi_1^{-1}(X_1\dot{\vee}X_2)}(x) & \text{si } k=1\\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(X_1\dot{\vee}X_2)}(x) & \text{si } k=2\end{cases}\\ &=\begin{cases}\mu_{X_1}(x) & \text{si } k=1\\ \mu'_{X_2}(x) & \text{si } k=2\end{cases}=1.\end{aligned}$$

Donc $\varnothing$, $X_1\dot{\vee}X_2\in\tau_{X_1\dot{\vee}X_2}$.

(2) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$, alors $\theta_1 \wedge \theta_2$ est un ensemble flou de $X \veebar X'$, la fonction d'appartenance de $\theta_1 \wedge \theta_2$ notée par $\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}$. Par définition de l'intersection de deux ensembles flous, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2} : \quad & X \veebar X' \longrightarrow [0,1] \\ & (x,k) \longmapsto \lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,k) = min\{\lambda_{\theta_1}(x,k), \lambda_{\theta_2}(x,k)\} \end{aligned}$$

Nous aurons aussi deux cas :

Cas (1) : Si $k = 1$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,1) &= min\{\lambda_{\theta_1}(x,1), \lambda_{\theta_2}(x,1)\} = min\{(\mu \veebar \mu')_{\theta_1}(x,1), (\mu \veebar \mu')_{\theta_2}(x,1)\} \\ &= min\{\mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1)}(x), \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_2)}(x)\} = \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1) \wedge \varphi_1^{-1}(\theta_2)}(x) = \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x). \end{aligned}$$

Cas (2) : Par la même méthode nous prouvons que :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,2) = \mu'_{\varphi_1^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x).$$

alors $\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x) & \text{si } k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x) & \text{si } k = 2 \end{cases}$

donc $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$.

(3) Soient $\theta_h \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$, $\forall h \in \Delta$, alors $\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h$ est un ensemble flou de $X \veebar X'$, la fonction d'appartenance de $\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h$ est notée par $\lambda_{\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h}$. Par définition d'union des ensembles flous nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_{\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h} : & X \veebar X' \longrightarrow [0,1] \\ & (x,k) \longmapsto \lambda_{\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h}(x,k) = sup_{h \in \triangle}\{\lambda_{\theta_h}(x,k)\} \end{aligned}$$

nous avons deux cas :

Cas (1) : Si $k = 1$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h}(x,1) &= sup_{h \in \triangle}\{\lambda_{\theta_h}(x,1)\} = sup_{h \in \triangle}\{(\mu \veebar \mu')_{\theta_h}(x,1)\} \\ &= \mu_{\bigvee_{h \in \triangle} \varphi_1^{-1}(\theta_h)}(x) = \mu_{\varphi_1^{-1}(\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h)}(x). \end{aligned}$$

Cas (2) : Par la même méthode nous prouvons que :

$$\lambda_{\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h}(x,2) = \mu'_{\varphi_2^{-1}(\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h)}(x)$$

alors $\lambda_{\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h}(x,k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h)}(x) & \text{si } k = 1. \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h)}(x) & \text{si } k = 2. \end{cases}$

donc $\bigvee_{h \in \triangle} \theta_h \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$.

Proposition 3.2 *Les applications φ_1 et φ_2 sont CF-continuous.*

Preuve : Montrons que φ_1 est CF-continuous.
Soit $\theta \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$, d'après la définition (1.20), l'inverse de θ par φ_1 est un ensemble flou de X_1, telle que $\lambda_{\varphi_1^{-1}(\theta)}$ représente la fonction d'appartenance de $\varphi_1^{-1}(\theta)$, alors :

$$\lambda_{\varphi_1^{-1}(\theta)}(x) = \lambda_\theta\, \varphi_1(x) = (\mu \dot{\bigvee} \mu')_\theta(x,1) = \mu_{\varphi_1^{-1}(\theta)}(x).$$

Donc $\varphi_1^{-1}(\theta) \in \tau_1$. Par conséquent φ_1 est CF-continuous.
Par la même méthode nous démontrons que φ_2 est CF-continuous.

Théorème 3.1 *Soient $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (C, \tau_C)$ et $g : (X_2, \tau_2) \longrightarrow (C, \tau_C)$ deux applications CF-continuous (μ'' est la fonction d'appartenance des éléments de τ_C), alors il existe une application CF-continuous $h : (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2}) \longrightarrow (C, \tau_C)$, tel que $f = h \circ \varphi_1$ et $g = h \circ \varphi_2$.*

Preuve : h est défini par :

$$\begin{aligned} h : (X_1 \dot{\bigvee} X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2}) &\longrightarrow (C, \tau_C) \\ (x,k) &\longmapsto h(x,k) = \begin{cases} f(x) & \text{si } k = 1. \\ g(x) & \text{si } k = 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

⋆ Il est clair que : $f = h \circ \varphi_1$ *et* $g = h \circ \varphi_2$.
Soit $\theta_k \in \tau_C$, par la définition (1.20), nous avons :

$$\lambda_{h^{-1}(\theta_k)}(x,k) = \lambda_{\theta_k} h(x,k) = \mu''_{\theta_k} h(x,k) = \begin{cases} \mu''_{\theta_k} f(x) & \text{si } k = 1. \\ \mu''_{\theta_k} g(x) & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

Comme f et g sont CF-continuous, alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{h^{-1}(\theta_k)}(x,k) &= \begin{cases} \mu_{f^{-1}(\theta_k)}(x) & \text{si } k = 1 \\ \mu'_{g^{-1}(\theta_k)}(x) & \text{si } k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_{(h\circ\varphi_1)^{-1}(\theta_k)}(x) & \text{si } k = 1 \\ \mu'_{(h\circ\varphi_2)^{-1}(\theta_k)}(x) & \text{si } k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(h^{-1}(\theta_k))}(x) & \text{si } k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(h^{-1}(\theta_k))}(x) & \text{si } k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $h^{-1}(\theta_k) \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$, d'où h est CF-continuous.

Corollaire 3.1 *Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux objets de CF-TOP. L'élément de Co-product de (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) est l'espace topologique flou $(X_1, \tau_1) \veebar (X_2, \tau_2)$ (Définition (3.5)).*

Preuve : D'après la proposition (3.1), $(X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2}) \in$ CF-TOP. Aussi par la proposition (3.2) φ_1, φ_2 sont CF- continuous.

⋆ Soient $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (C, \tau_C)$ et $g : (X_2, \tau_2) \longrightarrow (C, \tau_C)$ deux applications CF-continuous, alors il existe une application CF-continuous h définie par la formule (3.1), vérifiant $f = h \circ \varphi_1$, $g = h \circ \varphi_2$, (Théorème (3.1)).

Preuve d'unicité de h :

Soit $h' : (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2}) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application CF-continuous, avec $f = h' \circ \varphi_1$ et $g = h' \circ \varphi_2$. Nous avons :

$$(h' \circ \varphi_1)(x) = h'(\varphi_1(x)) = h'(x, 1) = f(x).$$

et

$$(h' \circ \varphi_2)(x) = h'(\varphi_2(x)) = h'(x, 2) = g(x).$$

Par conséquent h est unique.

3.2.2 Co-equalizer

Définition 3.6 *Soit (X, τ_X) un CF-TOP, notons par μ la fonction d'appartenance des éléments de τ_X, $\sim$ est une relation d'équivalence sur X. $P : X \longrightarrow X/\sim$ est l'application de projection naturelle, on définit $\tau_{X/\sim}$ par :*

$$\tau_{X/\sim} = \{\theta\,,\ \theta \text{ est un ensemble flou de } X/\sim\}.$$

La fonction d'appartenance des éléments de $\tau_{X/\sim}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \overline{\mu_\theta} : X/\sim &\longrightarrow [0, 1] \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{\mu_\theta}(\overline{x}) = \mu_{P^{-1}(\theta)}(x) \end{aligned}$$

Proposition 3.3 *L'espace $(X/\sim, \tau_{X/\sim})$ est un CF-TOP.*

Preuve :

(1) Nous avons :

$$\overline{\mu_\varnothing}(\overline{x}) = \mu_{P^{-1}(\varnothing)}(x) = \mu_\varnothing(x) = 0.$$

$$\overline{\mu_{X/\sim}}(\overline{x}) = \mu_{P^{-1}(X/\sim)}(x) = \mu_X(x) = 1.$$

Alors $\varnothing$, $X/\sim\ \in \tau_{X/\sim}$.

(2) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \tau_{X/\sim}$, alors :

$$\begin{aligned}\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(\overline{x}) &= min\{\lambda_{\theta_1}(\overline{x}),\ \lambda_{\theta_2}(\overline{x}\} = min\{\overline{\mu_{\theta_1}}(\overline{x}),\ \overline{\mu_{\theta_2}}(\overline{x})\}\\ &= min\{\mu_{P^{-1}(\theta_1)}(x),\ \mu_{P^{-1}(\theta_2)}(x)\} = \mu_{P^{-1}(\theta_1)\wedge P^{-1}(\theta_2)}(x)\\ &= \mu_{P^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x).\end{aligned}$$

Donc $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_{X/\sim}$.

(3) Soient $\theta_k \in \tau_{X/\sim},\ \forall k \in \Delta$, alors :

$$\begin{aligned}\lambda_{\bigvee_{k\in\Delta}\theta_k}(\overline{x}) &= sup_{k\in\Delta}\{\lambda_{\theta_k}(\overline{x})\} = sup_{k\in\Delta}\{\mu_{P^{-1}(\theta_k)}(x)\ \}\\ &= \mu_{\bigvee_{k\in\Delta}P^{-1}(\theta_k)}(x) = \mu_{P^{-1}(\bigvee_{k\in\Delta}\theta_k)}(x).\end{aligned}$$

Donc $\bigvee_{k\in\Delta}\theta_k \in \tau_{X/\sim}$.

Proposition 3.4 *L'application P est un CF-continuous.*

Preuve : Évident (par la définition de $\tau_{X/\sim}$).

Théorème 3.2 *Soient $(A,\tau_A),(B,\tau_B) \in$ <u>CF-TOP</u>, notons par μ et μ' les fonctions d'appartenances d'éléments de τ_A et τ_B respectivement, $\sim$ est la relation d'équivalence sur A et $P : A \longrightarrow A/\sim$ est la projection associée. Si $h : (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ est une application CF-continuous compatible avec $\sim$, alors il existe une application CF-continuous unique h', avec $h = h' \circ P$. De plus :*

$$h \text{ est CF-continuous} \Longrightarrow h' \text{ est CF-continuous.}$$

Preuve : Nous définissons h' par :

$$\begin{aligned} h' : (A/\sim,\tau_{A/\sim}) &\longrightarrow (B,\tau_B)\\ \overline{x} &\longmapsto h'(\overline{x}) = h(x)\end{aligned}$$

$\star$ Il est claire que h' est unique et $h = h' \circ P$.

Soit $B_i \in \tau_B$, alors :

$\lambda_{h'^{-1}(B_i)}(\overline{x}) = \lambda_{B_i}h'(\overline{x}) = \mu'_{B_i}h(x) = \mu_{h^{-1}(B_i)}(x) = \mu_{(h'\circ P)^{-1}(B_i)}(x) = \mu_{P^{-1}(h'^{-1}(B_i))}(x).$

Alors h' est CF-continuous.

Corollaire 3.2 *Soient f et $g : (X,\tau) \longrightarrow (X',\tau')$ deux morphismes dans <u>CF-TOP</u>. L'élément de Coequalizer de $< f,g >$ est l'espace topologique flou $(X'/\sim,\tau'')$ (Définition 3.6), avec $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< f(x),g(x) >$, tel que $x \in X$.*

Preuve : Soit $h : (X',\tau') \longrightarrow (C,\tau_C)$ une application CF-continuous, avec $h \circ f = h \circ g$.

Pour l'existence d'une application h' unique qui vérifie $h = h' \circ P$, il suffit de prouver que h est compatible avec $\sim$ [Théorème (3.2)] :

Soient $x_1, x_2 \in X'$, $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists a \in X$, $x_1 = f(a) \ \wedge \ x_2 = g(a)$.

et $h(x_1) = h(f(a)) = (h \circ f)(a) = (h \circ g)(a) = h(g(a)) = h(x_2)$, alors h est compatible avec $\sim$.

3.2.3 Push-out

Définition 3.7 *Soient (A, τ_A) et (B, τ_B) deux CF-TOP, μ et μ' dénote la fonction d'appartenance des éléments de τ_A et τ_B respectivement, $\sim$ est une relation d'équivalence sur $A \veebar B$, soit également $X_0 = (A \veebar B)/\sim$, on définit τ_{X_0} par :*

$$\tau_{X_0} = \{\theta \,,\, \theta \text{ est un ensemble flou de } X_0\}.$$

La fonction d'appartenance des éléments de τ_{X_0} est définie par :

$$\begin{aligned} \overline{(\mu \veebar \mu')}_\theta : X_0 &\longrightarrow [0,1] \\ \overline{(x,k)} &\longmapsto \overline{(\mu \veebar \mu')}_\theta(\overline{x,k}) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta))}(x) & si\ k = 1. \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\theta))}(x) & si\ k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P : A \veebar B &\longrightarrow X_0 \\ (x,k) &\longmapsto P(x,k) = \overline{(x,k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (A, \tau_A) &\longrightarrow (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = (x,1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : (B, \tau_B) &\longrightarrow (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = (x,2) \end{aligned}$$

Proposition 3.5 *L'espace (X_0, τ_{X_0}) est CF-TOP.*

Preuve :

(1) $\varnothing, X_0 \in \tau_{X_0}$:

$$\begin{aligned} \overline{(\mu \veebar \mu')}_\varnothing(\overline{x,k}) &= \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\varnothing))}(x) & si\ k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\varnothing))}(x) & si\ k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu_\varnothing(x) & si\ k = 1 \\ \mu'_\varnothing(x) & si\ k = 2 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\overline{(\mu \dot{\bigvee} \mu')}_{X_0}(\overline{x,k}) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(B \dot{\vee} C)}(x) & si\ k=1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(B \dot{\vee} C)}(x) & si\ k=2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \mu_B(x) & si\ k=1 \\ \mu'_C(x) & si\ k=2 \end{cases}$$
$$= 1.$$

(2) Soient $\theta_1,\ \theta_2 \in \tau_{X_0}$, alors :

$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(\overline{x,k}) = min\{\lambda_{\theta_1}(\overline{x,k}), \lambda_{\theta_2}(\overline{x,k})\} = min\{\overline{(\mu \dot{\vee} \mu')}_{\theta_1}(\overline{x,k}), \overline{(\mu \dot{\vee} \mu')}_{\theta_2}(\overline{x,k})\}$

Nous avons deux cas :

Cas (1) : Si $k = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}\overline{(x,1)} &= min\{\lambda_{\theta_1}(\overline{x,1}), \lambda_{\theta_2}(\overline{x,1})\} \\ &= min\{\overline{(\mu \dot{\vee} \mu')}_{\theta_1}(\overline{x,1}), \overline{(\mu \dot{\vee} \mu')}_{\theta_2}(\overline{x,1})\} \\ &= min\{\mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_1))}(x),\ \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_2))}(x)\} \\ &= \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_1)) \wedge \varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_2))}(x) \\ &= \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2))}(x). \end{aligned}$$

Cas (2) : Par la même méthode, nous aurons :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,2) = \mu'_{\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2))}(x)$$

Donc $\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,k) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2))}(x) & si\ k=1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\theta_2 \wedge \theta_2))}(x)) & si\ k=2 \end{cases}$

Alors $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_{X_0}$.

(3) Soient $\theta_i \in \tau_{X_0}$, $\forall i \in I$, alors :

$\lambda_{\bigvee_{i\in I}\theta_i}$ la fonction d'appartenance de $\bigvee_{i\in I}\theta_i$, nous avons :

$\lambda_{\bigvee_{i\in I}\theta_i}(\overline{x,k}) = sup_{i\in I}\{\lambda_{\theta_i}(\overline{x,k})\} = sup_{i\in I}\{\overline{(\mu \dot{\vee} \mu')}_{\theta_i}(\overline{x,k})\}$

Nous aurons aussi deux cas :

Cas (1) : Si $k = 1$, alors :

$$\begin{aligned}\lambda_{\bigvee_{i\in I}\theta_i}(\overline{x,1}) &= sup_{i\in I}\{\lambda_{\theta_i}(\overline{x,1})\} = sup_{i\in I}\{\overline{(\mu \,\dot\vee\, \mu')}_{\theta_i}(\overline{x,1})\} \\ &= sup_{i\in I}\{\mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_i))}(x)\} = \mu_{\bigvee_{i\in I}\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta_i))}(x) \\ &= \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\bigvee_{i\in I}\theta_i))}(x).\end{aligned}$$

Cas (2) : Si $k = 1$, de même nous aurons :

$$\lambda_{\bigvee_{i\in I}\theta_i}(\overline{x,2}) = \mu'_{\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\bigvee_{i\in I}\theta_i))}(x)$$

Alors : $\lambda_{\bigvee_{i\in I}\theta_i}(\overline{x,k}) = \begin{cases} \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\bigvee_{i\in I}\theta_i))}(x) & si\ k = 1 \\ \mu'_{\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\bigvee_{i\in I}\theta_i))}(x) & si\ k = 2 \end{cases}$

Donc : $\bigvee_{i\in I}\theta_i \in \tau_{X_0}$.

Proposition 3.6 *Les applications suivantes :*

$$\begin{aligned}\alpha : (A, \tau_A) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto \alpha(x) = \overline{(x,1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta : (B, \tau_B) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto \beta(x) = \overline{(x,2)}\end{aligned}$$

sont CF-continuous.

Preuve : Prouvons que α est CF-continuous.

Pour $\theta \ \in \tau_{X_0}$, nous avons :

$$\lambda_{\alpha^{-1}(\theta)}(x) = \lambda_\theta \alpha(x) = \lambda_\theta\overline{(x,1)} = \overline{(\mu \,\dot\bigvee\, \mu')}_\theta\overline{(x,1)} = \mu_{\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta))}(x).$$

et comme $\alpha = P \circ \varphi_1$, alors :

$$\lambda_{\alpha^{-1}(\theta)}(x) = \mu_{(P\circ\varphi_1)^{-1}(\theta)}(x) = \mu_{\alpha^{-1}(\theta)}(x).$$

Donc α est CF-continuous.

Par la même méthode nous prouvons que β est CF-continuous.

Corollaire 3.3 *L'élément de Push-out de $< f, g >$, avec $f : (A, \tau_A) \longrightarrow (C, \tau_C), g : (A, \tau_A) \longrightarrow (B, \tau_B)$ de <u>CF-TOP</u> est l'espace topologique flou (X_0, τ_{X_0}), avec $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< (\varphi_1 \circ g)(a), (\varphi_2 \circ f)(a) >$, tel que $a \in A$.*

Preuve : Suite à la proposition (3.5), $(X_0, \tau_{X_0}) \in$ CF-TOP. Aussi, à partir de la proposition (3.6) α, β sont CF-continuous.

Soient $U : (B, \tau_B) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, $V : (C, \tau_C) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ deux applications CF-continuous, avec $V \circ f = U \circ g$.

$\star$ Pour démontrer l'existence d'une application CF-continuous unique $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ qui vérifie $U = h \circ \alpha$, $V = h \circ \beta$, exige d'abord les étapes suivantes :

Étape 1 : L'élément de Co-product de (B, τ_B) et (C, τ_C) est l'union disjoint $(B \dot{\vee} C, \tau_{B \dot{\vee} C})$, alors pour $\{\alpha, \ \beta\}$ il existe une application CF-continuous $\pi : (B \dot{\vee} C, \tau_{B \dot{\vee} C}) \longrightarrow (X_0, \tau_{X_0})$ avec $\alpha = \pi \circ \varphi_1$, $\beta = \pi \circ \varphi_2$.

Étape 2 : Nous définissons la nouvelle application $U \dot{\vee} V$ par :

$$U \dot{\vee} V : (B \dot{\vee} C, \tau_{B \dot{\vee} C}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$$
$$(x,k) \longmapsto (U \dot{\vee} V)(x,k) = \begin{cases} U(x) & si\ k = 1. \\ V(x) & si\ k = 2. \end{cases}$$

Si $U \dot{\vee} V$ est compatible avec $\sim$, alors il existe une application unique CF-continuous $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ avec : $U \dot{\vee} V = h \circ \pi$ (Théorème (3.2).

Soient (x,k), $(x',k') \in B \dot{\vee} C$ alors :

$(x,k) \sim (x',k') \Longrightarrow \exists a \in A,\ (x,k) = (\varphi_1 \circ g)(a)$ et $(x',k') = (\varphi_2 \circ f)(a)$.

$$(U \dot{\bigvee} V)(x,k) = (U \dot{\bigvee} V)(\varphi_1 \circ g)(a) = (U \dot{\bigvee} V)(g(a),1) = U(g(a)) = (U \circ g)(a).$$

$$(U \dot{\bigvee} V)(x',k') = (U \dot{\bigvee} V)(\varphi_2 \circ f)(a) = (U \dot{\bigvee} V)(f(a),2) = V(f(a)) = (V \circ f)(a).$$

Comme $V \circ f = U \circ g$, alors $U \dot{\vee} V$ est compatible avec $\sim$.

Étape 3 : Montrons que : $U = h \circ \alpha, V = h \circ \beta$.

$(h \circ \alpha)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_1))(x) = (h \circ \pi)(x,1) = (U \dot{\vee} V)(x,1) = U(x), \forall x \in B.$

$(h \circ \beta)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_2))(x) = (h \circ \pi)(x,2) = (U \dot{\vee} V)(x,2) = V(x), \forall x \in C.$

d'où le résultat.

3.2.4 Product

Définition 3.8 *Soient (X_1, δ_1) et (X_2, δ_2) deux CF-TOP, notons μ et μ' les fonctions d'appartenance des éléments de δ_1 et δ_2 respectivement, on définit $\tau_{X_1 \times X_2}$ par :*

$$\tau_{X_1 \times X_2} = \{\theta\ ,\ \theta = \bigvee_{i \in I} ((\theta_1)_i \times (\theta_2)_i) \textit{ est un ensemble flou de } X_1 \times X_2,\ (\theta_1)_i \in \delta_1, (\theta_2)_i \in \delta_2,\ \forall i \in I\}.$$

La fonction d'appartenance des éléments de $\tau_{X_1 \times X_2}$ est définie par :

$$(\mu \times \mu')_\theta(x,y) = sup_{i \in I}\{min\{\mu_{(\theta_1)_i}(x), \mu'_{(\theta_2)_i}(y)\}\}, \text{ pour tout } (x,y) \in X_1 \times X_2.$$

Proposition 3.7 *[9] L'espace $(X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$ est un CF-TOP.*

Proposition 3.8 *[9] Les applications P_1 et P_2 sont CF-continuous, avec :*

$$\begin{aligned} P_1 : (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2}) &\longrightarrow (X_1, \delta_1) \\ (x,y) &\longmapsto P_1(x,y) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 : (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2}) &\longrightarrow (X_2, \delta_2) \\ (x,y) &\longmapsto P_2(x,y) = y \end{aligned}$$

Théorème 3.3 *[9] Soit (Y, τ_Y) un CF-TOP et soit f une fonction de Y vers $X_1 \times X_2$. Alors f est CF-continuous si est seulement si $P_1 \circ f$ et $P_2 \circ f$ sont CF-continuous.*

Corollaire 3.4 *Soient $(X_1, \delta_1), (X_2, \delta_2) \in$ CF-TOP. L'élément de Product de (X_1, δ_1) et (X_2, δ_2) est l'espace topologique flou $(X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$ (Définition (3.8)).*

Preuve : Soient $f : (C, \delta_3) \longrightarrow (X_1, \delta_1)$ et $g : (C, \delta_3) \longrightarrow (X_2, \delta_2)$ deux applications CF-continuous, alors il existe une application CF-continuous unique définie par :

$$\begin{aligned} h : (C, \delta_3) &\longrightarrow (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2}) \\ x &\longmapsto h(x) = (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

avec $f = P_1 \circ h$ et $g = P_2 \circ h$.

⋆ Il est clair que : $f = P_1 \circ h$ *et* $g = P_2 \circ h$.

⋆ Suite au théorème (3.3), h est CF-continuous.

Preuve d'unicité de h :

Soit $h' : (C, \delta) \longrightarrow (X_1 \times X_2, \tau_{X_1 \times X_2})$ une autre application CF-continuous, avec : $f = P_1 \circ h'$, $g = P_2 \circ h'$.

Supposons que : $h'(x) = (a, b)$, alors :

$a = P_1(a,b) = (P_1 \circ h')(x) = f(x),\ b = P_2(a,b) = (P_2 \circ h')(x) = g(x)$.

Donc $h'(x) = (f(x), g(x)) = h(x)$. Par conséquent h est unique.

3.2.5 Equalizer

Définition 3.9 *Soient (A, τ_A) et (B, τ_B) deux CF-TOP, notons μ' la fonction d'appartenance des éléments de τ_B, et soient $f, g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ deux applications CF-continuous. D est un sous-ensemble de B défini par : $D = \{x \in B,\ f(x) = g(x)\}$, on définit τ_D par :*
$\tau_D = \{\theta\ ,\ \theta = F(D) \wedge B_i$ est un ensemble flou de D, $B_i \in \tau_B$ et $F(D)$ est un ensemble flou de B avec $\mu'_{F(D)}(x) = \chi_D(x)\}$.
La fonction d'appartenance des éléments de τ_D est définie par :

$$\begin{aligned} \mu''_\theta : D &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mu''_\theta(x) = min\{\mu'_{F(D)}(x),\ \mu'_{B_i}(x)\} \end{aligned}$$

Proposition 3.9 *L'espace (D, τ_D) est un CF-TOP.*

Preuve :

(1) Nous prenons : $(\varnothing = F(D) \wedge \varnothing)$ et $(D = F(D) \wedge B)$, alors :
$\mu''_\varnothing(x) = min\{\mu'_{F(D)}(x)\ ,\ \mu'_\varnothing(x)\}) = min\{1\ ,\ 0\} = 0.$
$\mu''_D(x) = min\{\mu'_{F(D)}(x)\ ,\ \mu'_B(x)\} = min\{1\ ,\ 1\} = 1.$
Donc $\varnothing$, $D \in \tau_D$.

(2) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \tau_D$, avec $\theta_1 = F(D) \wedge B_1$, $B_1 \in \tau_B$ et $\theta_2 = F(D) \wedge B_2$, $B_2 \in \tau_B$, on a :

$$\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x) = \lambda_{F(D) \wedge B_1 \wedge F(D) \wedge B_2}(x) = \lambda_{F(D) \wedge (B_1 \wedge B_2)}(x) = min\{\mu'_{F(D)}(x), \mu'_{(B_1 \wedge B_2)}(x)\}.$$

Alors $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_D$ (de fait $B_1 \wedge B_2 \in \tau_B$).

(3) Soient $\theta_i \in \tau_D$, $\forall i \in I$, avec : $\theta_i = F(D) \wedge B_i$, $B_i \in \tau_D$, alors :

$$\lambda_{\bigvee_{i\in I}(F(D) \wedge B_i)}(x) = \lambda_{F(D) \wedge (\bigvee_{i\in I} B_i)}(x) = min\{\mu'_D(x),\ \mu'_{(\bigvee_{i\in I} B_i)}(x)\}.$$

Donc $\bigvee_{i\in I} \theta_i \in \tau_D$ (de fait $\bigvee_{i\in I} B_i \in \tau_B$).

Proposition 3.10 *L'application e est CF-continuous, telle que :*

$$\begin{aligned} e : (D, \tau_D) &\longrightarrow (B, \tau_B) \\ x &\longmapsto e(x) = x \end{aligned}$$

Preuve : Évident

Corollaire 3.5 *Soient $f,g : (B,\tau_B) \longrightarrow (A,\tau_A)$ de CF-TOP. L'élément de Equalizer de $< f,g >$ est l'espace topologique flou (D,τ_D) (Définition (3.9)).*

Preuve : Soit $h : (C,\tau_C) \longrightarrow (B,\tau_B)$ une application CF-continuous, avec : $f \circ h = g \circ h$, alors il existe une application CF-continuous h' définie par :

$$h' : (C,\tau_C) \longrightarrow (D,\tau_D)$$
$$x \longmapsto h'(x) = h(x)$$

⋆ h' est CF-continuous de fait, h est CF-continuous.
⋆ Soit $x \in C$, on a : $(e \circ h')(x) = e(h'(x)) = e(h(x)) = h(x)$, alors $e \circ h' = h$.
Montrons que h' est unique :
Soit $h'' : (C,\tau_C) \longrightarrow (D,\tau_D)$ une autre application CF-continuous, avec $e \circ h'' = h$, on a :
$(e \circ h'')(x) = (e \circ h')(x) \Longrightarrow e(h''(x)) = e(h'(x)) \Longrightarrow h''(x) = h'(x),\ \forall x \in C.$
d'où le résultat.

3.2.6 Pull-back

Définition 3.10 *Soient (A,τ_A) et (B,τ_B) deux CF-TOP, μ et μ' dénote la fonction d'appartenance d'éléments de τ_A et τ_B respectivement, et $f : (B,\tau_B) \longrightarrow (A,\tau_A)$, $g : (D,\tau_D) \longrightarrow (A,\tau_A)$ deux applications CF-continuous. C est un sous-ensemble de $B \times D$ défini par : $C = \{(x,y) \in B \times D,\ f(x) = g(y)\}$. On définit τ_C par :*
$\tau_C = \{\theta,\ \theta = F(C) \wedge \theta'$ est un ensemble flou de C, $\theta' \in \tau_{B\times D}$ et $F(C)$ est un ensemble flou de $B \times D$, avec : $(\mu \times \mu')_{F(C)}(x,y) = \chi_C(x,y)\}$.
La fonction d'appartenance des éléments de τ_C est définie par :

$$\Gamma_\theta(x,y) = min\{(\mu \times \mu')_{F(C)}(x,y),\ sup_{i\in I}\{min\{\mu_{B_i}(x),\ \mu'_{D_i}(y)\}\},\ \theta' = \bigvee_{i\in I}(B_i \times D_i),\ \forall (x,y) \in C.$$

Proposition 3.11 *L'espace (C,τ_C) est un CF-TOP.*

Preuve :

(1) Nous prenons : $(\emptyset = F(C) \wedge (\emptyset \times \emptyset)$ et $(C = F(C) \wedge (B \times D))$, ce qui donne :
$\Gamma_\emptyset(x,y) = min\{(\mu \times \mu')_{F(C)}(x,y),\ min\{\mu_\emptyset(x),\ \mu'_\emptyset(y)\} = min\{1\ ,\ 0\} = 0.$
$\Gamma_C(x,y) = min\{(\mu \times \mu')_{F(C)}(x,y),\ min\{\mu_B(x),\ \mu'_D(y)\} = min\{1\ ,\ 1\} = 1.$
Donc $\emptyset$, $C \in \tau_C$.

(2) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \tau_C$, avec $\theta_1 = F(C) \wedge (\vee_{i\in I}(B_i \times D_i))$ et $\theta_2 = F(C) \wedge (\vee_{j\in J}(B_j \times D_j))$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lambda_{\theta_1 \wedge \theta_2}(x,y) &= \lambda_{(F(C)\wedge(\vee_{i\in I}(B_i\times D_i)))\wedge(F(C)\wedge(\vee_{j\in J}(B_j\times D_j)))}(x,y) \\
&= \lambda_{F(C)\wedge(\vee_{i\in I}(B_i\times D_i))\wedge(\vee_{j\in J}(B_j\times D_j)))}(x,y) \\
&= \lambda_{F(C)\wedge(\vee_{i\in I\times J}(B_i\wedge B_j)\times(D_i\wedge D_j))}(x,y) \\
&= min\{(\mu\times\mu')_{F(C)},\ sup_{(i,j)\in(I\times J)}\{min\{\mu_{(B_i\wedge B_j)}(x,y),\ \mu'_{(D_i\wedge D_j)}(x,y)\}\}.
\end{aligned}$$

Alors $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_D$ (de fait $B_1 \wedge B_2 \in \tau_B$).

(3) Soient $\theta_i \in \tau_D$, $\forall i \in I$, avec : $\theta_i = F(D) \wedge B_i$, $B_i \in \tau_D$, alors :

$$\lambda_{\vee_{i\in I}(F(D)\wedge B_i)}(x) = \lambda_{F(D)\wedge(\vee_{i\in I} B_i)}(x) = min\{\mu'_D(x),\ \mu'_{(\vee_{i\in I} B_i)}(x)\}.$$

Alors $\vee_{i\in I}\theta_i \in \tau_D$ (de fait $\vee_{i\in I} B_i \in \tau_B$).

Proposition 3.12 *Les applications p et q sont CF-continuous, avec :*

$$\begin{aligned}
p : (C,\tau_C) &\longrightarrow (B,\tau_B) \\
(x,y) &\longmapsto p(x,y) = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q : (C,\tau_C) &\longrightarrow (D,\tau_D) \\
(x,y) &\longmapsto q(x,y) = y
\end{aligned}$$

Preuve : Nous montrons que p est CF-continuous :

Soit $B_i \in \tau_B$: $\lambda_{p^{-1}(B_i)}(x,y) = \mu'_{B_i}p(x,y) = \mu'_{B_i}(x) = min\{(\mu\times\mu')_{F(C)}(x,y),\ min\{\mu'_{B_i}(x),\ \mu'_D(y)\}\}$.

Alors $p^{-1}(B_i) \in \tau_C$, donc p est CF-continuous.

Par la même méthode nous montrons que q est CF-continuous.

Théorème 3.4 *Soient $f : (B,\tau_B) \longrightarrow (A,\tau_A)$ et $g : (D,\tau_D) \longrightarrow (A,\tau_A)$ deux applications CF-continuous et (E,τ_E) un CF-TOP, notons μ'' la fonction d'appartenance des éléments de τ_E, et $h : (E,\tau_E) \longrightarrow (B,\tau_B)$, $k : (E,\tau_E) \longrightarrow (D,\tau_D)$ deux applications CF-continuous, avec $f\circ h = g\circ k$. r une application définie par :*

$$\begin{aligned}
r : (E,\tau_E) &\longrightarrow (C,\tau_C) \\
x &\longmapsto r(x) = (h(x),k(x))
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Alors :

$$h,\ k \text{ sont CF-continuous} \Longrightarrow r \text{ est CF-continuous}.$$

Preuve : Soit $\theta \in \tau_C$, alors $\theta = F(C)\wedge\theta'$ et $\theta' = \vee_{i\in I}(B_i\times D_i) \in \tau_{B\times D}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lambda_{r^{-1}(F(C)\wedge(\vee_{i\in I}(B_i\times D_i))}(x) &= \Gamma_{F(C)\wedge(\vee_{i\in I}(B_i\times D_i))}(h(x),k(x)) \\
&= min\{(\mu\times\mu')_{F(C)}(h(x),k(x)),\ sup_{i\in I}\{min\{\mu_{B_i}h(x),\ \mu'_{D_i}k(x)\}\}\}
\end{aligned}$$

Comme $(\mu \times \mu')_{F(C)}(h(x), k(x)) = 1$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{r^{-1}(F(C) \wedge (\vee_{i \in I}(B_i \times D_i))}(x) &= \Gamma_{F(C) \wedge (\vee_{i \in I}(B_i \times D_i))}(h(x), k(x)) \\ &= sup_{i \in I}\{min\{\mu_{B_i} h(x),\ \mu'_{D_i} k(x)\}\} \\ &= sup_{i \in I}\{min\{\mu''_{h^{-1}(B_i)}(x),\ \mu''_{k^{-1}(D_i)}(x)\}\} \\ &= \mu''_{\vee_{i \in I}\{k^{-1}(D_i) \wedge h^{-1}(B_i)\}}(x). \end{aligned}$$

D'où r est CF-continuous.

Corollaire 3.6 *Soient $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A), g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de CF-TOP.*
L'élément de Pull-back de $\langle f, g \rangle$ est l'espace topologique flou (C, τ_C) (Définition (3.10)).

Preuve : Premièrement, il est clair que $f \circ p = g \circ q$.

Deuxièmement, pour $h : (E, \tau_E) \longrightarrow (B, \tau_B)$ et $k : (E, \tau_E) \longrightarrow (D, \tau_D)$ deux applications CF-continuous, avec $f \circ h = g \circ k$, alors il existe une application CF-continuous unique r définie par la formule (3.2).

$\star$ Il est clair que $k = q \circ r$ et $h = p \circ r$.

Preuve d'unicité de r :

Soit $r' : (E, \tau_E) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application CF-continuous, avec $k = q \circ r'$, $h = p \circ r'$.

Supposons que $r'(x) = (a, b)$.

Nous avons :

$a = p(a, b) = (p \circ r')(x) = h(x)$ et $b = q(a, b) = (q \circ r')(x) = k(x)$.

Donc $r = r'$ d'où r est unique.

3.3 Les relations entre TOP et CF-TOP

Théorème 3.5 *[15]*

Soit (X, τ_X) un espace topologique, alors l'espace $(X, F(\tau_X))$, avec :

$F(\tau_X) = \{F(\theta)\ ,\ F(\theta)$ est un ensemble flou de $X,\ \theta \in \tau_X\}$, et la fonction d'appartenance de $F(\theta)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mu_{F(\theta)} : X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mu_{F(\theta)}(x) = \chi_\theta(x) \end{aligned}$$

est un espace topologique flou.

Preuve :

1. Soit $x \in X$:

   $\mu_{F(\varnothing)}(x) = \chi_{\varnothing}(x) = 0$, et $\mu_{F(X)}(x) = \chi_X(x) = 1$.

   Donc $\varnothing$, $X \in F(\tau_X)$.

2. Soient $F(\theta_1)$, $F(\theta_1) \in F(\tau_X)$, avec θ_1, $\theta_1 \in \tau_X$, pour $x \in X$, on a :

   $\lambda_{F(\theta_1) \wedge F(\theta_1)}(x) = min\{\mu_{F(\theta_1)}(x), \mu_{F(\theta_2)}(x)\} = min\{\chi_{\theta_1}(x), \chi_{\theta_2}(x)\} = \mu_{F(\theta_1 \wedge \theta_2)}(x)$

3. Soient $F(\theta_i) \in F(\tau_X)$, $\forall i \in I$ avec $\theta_i \in \tau_X$, $\forall i \in I$. Soit $x \in X$, on a :

   $\lambda_{\bigvee_{i\in I} F(\theta_i)}(x) = sup\{\mu_{F(\theta_i)}(x), i \in I\} = sup\{\chi_{\theta_i}(x), \ i \in I\} = \mu_{F(\bigvee_I \theta_i)}(x)$.

Théorème 3.6 *[4]*

Soit (X,τ) un CF-TOP, pour $\alpha \in [0,1[$, la famille ι_α :

$$\iota_\alpha = \{\alpha(\theta), \ \theta \in \tau\}$$

avec :

$$\alpha(\theta) = \{x \in X, \ \mu_\theta(x) > \alpha\}$$

est une topologie sur X.

Preuve :

1. Comme $X \in \tau$, alors $\alpha(X) \in \iota_\alpha$. Comme $\alpha(X) = \{x \in X : X(x) > \alpha\} = X$ donc $X \in \iota_\alpha$. De plus, $\varnothing \in \tau$, alors $\alpha(\varnothing) \in \iota_\alpha$et comme $\alpha(\varnothing) = \varnothing$. Alors, $\varnothing \in \iota_\alpha$.

2. Supposons que $\alpha(A), \alpha(B) \in \iota_\alpha$. Alors $A, B \in \tau$. Donc, $A \wedge B \in \tau$ ce qui donne, $\alpha(A \wedge B) \in \iota_\alpha$.

   $$\begin{aligned}\alpha(A \wedge B) &= \{x, (A \wedge B)(x) > \alpha\} = \{x, min\{A(x), B(x)\} > \alpha\} \\ &= \{x, A(x) > \alpha, B(x) > \alpha\} = \{x, A(x) > \alpha\} \cap \{x, B(x) > \alpha\} \\ &= \alpha(A) \cap \alpha(B).\end{aligned}$$

   Par conséquent $\alpha(A) \cap \alpha(B) \in \iota_\alpha$.

3. Soient $\alpha(A_\beta) \in \iota_\alpha$, pour $\beta \in \Delta$. Alors $A_\beta \in \tau$, $\forall \beta \in \Delta$ et d'où $\bigvee_{\beta\in\Delta} A_\beta \in \tau$ ceci implique que :

   $$\begin{aligned}\alpha(\textstyle\bigvee_{\beta\in\Delta} A_\beta) &= \{x, (\textstyle\bigvee_{\beta\in\Delta} A_\beta)(x) > \alpha\} \\ &= \{x, sup\{A_\beta(x), \beta \in \Delta\} > \alpha\} \\ &= \{x, A_\beta(x) > \alpha, \text{pour quelques } \ \beta \in \Delta\} = \cup_{\beta\in\Delta}\{x, A_\beta(x) > \alpha\} \\ &= \cup_{\beta\in\Delta}\alpha(A_\beta).\end{aligned}$$

   Alors $\cup_{\beta\in\Delta}\alpha(A_\beta) \in \iota_\alpha$.

   Par conséquent ι_α est une topologie sur X.

Proposition 3.13 *[32]*
Soit (X,τ) un CF-TOP. L'espace $(X,\iota(\tau))$ tel que : pour $A \in \tau$, $\iota(A) = \{\alpha(A): \ \alpha \in [0,1[\}$ et $\iota(\tau) = \{\iota(A); \ A \in \tau\}$ est un espace topologique sur X.

3.4 Les relations entre TOP et CF-TOP

On peut construire plusieurs foncteurs entre TOP et CF-TOP [voir [3] [7] [28]], nous choisirons deux foncteurs le premier est compatible avec notre travail.

Définition 3.11 *[30]*
Soit e un foncteur définie comme suit :
Pour chaque $f : (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ une application continue, on a :

$$
\begin{array}{cccc}
e: & \underline{TOP} & \longrightarrow & \underline{CF-TOP} \\
 & (A,\tau_A) & \longmapsto & (A,F(\tau_A)) \\
 & f \downarrow & & \downarrow e(f)=f \\
 & (B,\tau_B) & \longmapsto & (B,F(\tau_B))
\end{array}
$$

Proposition 3.14 *Si $f : (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ une application continue, alors $f : (A,F(\tau_A)) \longrightarrow (B,F(\tau_B))$ est CF-continuous.*

Preuve :
Supposons que :
$F(\tau_A) = \{F(A_i), \ F(A_i)$ est un ensemble flou de $A, \ A_i \in \tau_A\}$, et la fonction d'appartenance de $F(A_i)$ est définie par :

$$
\begin{aligned}
\mu_{F(A_i)} : A &\longrightarrow [0,1] \\
x &\longmapsto \mu_{F(A_i)}(x) = \chi_{A_i}(x)
\end{aligned}
$$

$F(\tau_B) = \{F(B_i), \ F(B_i)$ est un ensemble flou de $B, \ B_i \in \tau_B\}$, et la fonction d'appartenance de $F(B_i)$ est définie par :

$$
\begin{aligned}
\mu'_{F(B_i)} : B &\longrightarrow [0,1] \\
y &\longmapsto \mu'_{F(B_i)}(y) = \chi_{B_i}(y)
\end{aligned}
$$

⋆ Soit $F(B_i) \in F(\tau_B)$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda_{f^{-1}(F(B_i))}(x) &= \mu'_{F(B_i)}(f(x)) = \chi_{B_i}(f(x)) = \begin{cases} 1 & si : f(x) \in B_i \\ 0 & si : f(x) \notin B_i \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & si : x \in f^{-1}(B_i) \\ 0 & si : x \notin f^{-1}(B_i) \end{cases} \\ &= \chi_{f^{-1}(B_i)}(x) = \mu_{F(f^{-1}(B_i))}(x).\end{aligned}$$

donc :

$$f^{-1}(B_i) \in F(\tau_A).$$

Proposition 3.15 *e est un foncteur.*

Proposition 3.16 *Le foncteur e n'est pas isomorphisme.*

Preuve :

Supposons que e est surjective sur les objets, soit $(X,\tau) \in$ CF-TOP, avec $X = \{a,b\}$ et $\tau = \{X,\varnothing,\theta\}$ avec :

$$\begin{cases} \mu_X(a) = 1 \\ \mu_X(b) = 1 \end{cases}, \begin{cases} \mu_\varnothing(a) = 0 \\ \mu_\varnothing(b) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mu_\theta(a) = 0.8. \\ \mu_\theta(b) = 0.7. \end{cases}$$

Prenons la topologie $T = \{X,\varnothing,B\}$ (B est un sous-ensemble de X non vide), avec $e(X,T) = (X,F(T))$, mais $F(T) \neq \tau$ (Comme $\mu_{F(B)} = \chi_B \neq \mu_\theta$). Alors e n'est pas surjective sur les objets. Par conséquent e n'est pas isomorphisme.

Définition 3.12 *On définit le foncteur ι_α entre CF-TOP et TOP par :*
Pour $\alpha \in [0,1[$ et $f : (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ une application CF-continuous, on a :

$$\begin{array}{rccc} \iota_\alpha : & \underline{CF-TOP} & \longrightarrow & \underline{TOP} \\ & (A,\tau_A) & \longmapsto & (A,\iota_\alpha(\tau_A)) \\ & f \big\downarrow & & \big\downarrow \iota_\alpha(f) = f \\ & (B,\tau_B) & \longmapsto & (B,\iota_\alpha(\tau_B)) \end{array}$$

Proposition 3.17 *Si* $f : (A, \tau_A) \longrightarrow (B, \tau_B)$ *une application CF-continuous, alors :*
$f : (A, \iota_\alpha(\tau_A)) \longrightarrow (B, \iota_\alpha(\tau_B))$ *est continue.*

Preuve :
Avant de commencer la démonstration, nous montrons que pour tout $\theta \in \tau_B$, $f^{-1}(\alpha(\theta)) = \alpha(f^{-1}(\theta))$, $\forall \alpha \in [0, 1[$.
En effet :

$$x \in f^{-1}(\alpha(\theta)) \Longleftrightarrow f(x) \in \alpha(\theta) \Longleftrightarrow \theta(f(x)) > \alpha \Longleftrightarrow f^{-1}(\theta(x)) > \alpha \Longleftrightarrow x \in \alpha(f^{-1}(\theta))$$

Donc $f^{-1}(\alpha(\theta)) = \alpha(f^{-1}(\theta))$.

□

Soit $\iota_\alpha(\theta) \in \iota_\alpha(\tau_B)$ alors $f^{-1}(\iota_\alpha(\theta)) = \alpha(f^{-1}(\theta))$ et comme $f^{-1}(\theta) \in \tau_A$, alors $\alpha(f^{-1}(\theta)) \in \iota_\alpha(\tau_A)$ et $f^{-1}(\iota_\alpha(\theta)) \in \iota_\alpha(\tau_A)$.

Proposition 3.18 ι_α *est un foncteur, pour tout* $\alpha \in [0, 1[$.

3.5 Conclusion

Au cours de notre recherche sur les morphismes universels de la catégorie CF-TOP, nous avons pu constater le brouillage au sens de Chang sur l'espace topologique ordinaire. Il s'avère que ce brouillage est faible pour plusieurs raisons :

1. La définition de Chang de l'espace topologique flou n'est pas très éloignée de l'espace topologique ordinaire sauf le changement des sous-ensembles de X par des ensembles flous de X.
2. Le brouillage de Chang sur l'espace topologique ordinaire n'est pas complet, l'ensemble X a gardé son état d'origine : il n'a pas été brouillé.
3. La définition de Chang sur la continuité floue est restée comme dans le cas ordinaire. Il a seulement changé l'ensemble ouvert par l'ensemble flou ouvert.
4. L'existence d'une inclusion naturelle (le foncteur e) entre les deux catégories TOP et CF-TOP indique la faiblesse du brouillage.

Chapitre 4

Les morphismes universels de LF-TOP

Question : Pourquoi Lowen a changé la définition de Chang ? [15] Cela parce que certains résultats intuitifs bien connus dans la topologie ordinaire ne sont pas satisfait au sens de Chang. Par exemples :

1. Certaines fonctions constantes de CF-TOP dans CF-TOP ne sont pas continues.
2. Certains produits de nombre de CF-TOP compacts ne sont pas compacts ; ce qui est considéré une contradiction dans la topologie ordinaire.

La définition de Lowen ajoute à celle de Chang une condition. En posant tous les ensembles flous constants comme des ouverts.

4.1 Définitions et notations

Définition 4.1 *[22]*
Une topologie floue *de Lowen, ou simplement (LF-TOP) est une famille τ d'ensembles flous de X vérifiant les conditions suivantes :*

1. *τ contient tous les ensembles flous constants de X.*
2. *Si A, $B \in \tau$, alors $A \bigwedge B \in \tau$.*
3. *Si $A_i \in \tau$ pour tout $i \in I$, alors $\bigvee_I A_i \in \tau$, I est un ensemble d'indices quelconque.*

Exemple 4.1 *Dans l'exemple (3.2), τ est une topologie floue au sens de Chang mais pas de Lowen. Ainsi, nous pouvons ajouter à τ tous les ensembles flous constants et ses intersections et unions avec les ensembles flous dans τ est une topologie flou au sens de Lowen.*

Exemple 4.2 *Considérons l'exemple suivant proposé par Lowen. Soit X un ensemble non vide et les ensembles flous ouverts de X sont donnés par :*

$$[\frac{1}{2},1]^X \cup \{\alpha,\ \alpha \text{ est une fonction constante avec valeur } \alpha \leq \frac{1}{2}\}.$$

En effet :

1. *Par définition, il est clair que tout constant flou de X est dans τ.*
2. *Soient $A, B \in \tau$:*
   Si $A, B \in [\frac{1}{2},1]^X$, alors $A \wedge B \in [\frac{1}{2},1]^X$.
   Si A, B sont constants, alors $A \wedge B = min\{A, B\} = A$ où $B \in \tau$.
   Et si $A = \alpha \leq \frac{1}{2}$, $B \in [\frac{1}{2},1]^X$, alors $B(x) \geq \frac{1}{2}$, Donc $A \wedge B = A \in \tau$.
3. *Si $\forall i \in \Delta,\ A_i \in \tau$. Si $\forall i,\ A_i$ est un ensemble constant flou inférieur au égal à $\frac{1}{2}$, alors $\bigvee A_i$ est un constant $\in \tau$.*
   Si $\exists A_j, A_j \in [\frac{1}{2},1]^X$, alors $\bigvee A_i = sup\{A_i : i \in \Delta\} = sup\{A_j : A_j \in [\frac{1}{2},1]^X\} \in [\frac{1}{2},1]^X$.

Alors τ est une topologie floue au sens de Lowen.

Définition 4.2 *[10] [30] (La définition de la continuité flou)*
*Soient (X,T) et (Y,U) deux espaces topologiques flous (LF-TOP) et soit $f : (X,T) \longrightarrow (Y,U)$ une fonction. f est **continue flou (F-continuous)** si l'inverse par f de chaque ensemble flou ouvert de Y est un ensemble flou ouvert de X.*

Définition 4.3 *[25] Soit (X,τ) un LF-TOP. On définit l'espace topologique $(X,\iota(\tau))$ par :*

$$\iota(\tau) = \{\iota(A),\ A \in \tau\}$$

Avec :

$$\iota(A) = \{\alpha(A),\ \alpha \in [0,1)\},\ \alpha(A) = \{x \in X : A(x) > \alpha\}$$

Définition 4.4 *[22] (La continuité flou au sens de Lowen)*
Soit f une fonction d'un espace LF-TOP (X,T) vers un autre espace LF-TOP (Y,S). Alors f est continue flou (LF-continuous) si et seulement si $f : (X,\iota(T)) \longrightarrow (Y,\iota(S))$ est continue.

Proposition 4.1 *[8] Si $f : (X,\tau_1) \longrightarrow (Y,\tau_2)$ est une application F-continuous sur deux espaces topologiques flous (LF-TOP), alors $f : (X,\iota(\tau_1)) \longrightarrow (Y,\iota(\tau_2))$ est continue.*

Preuve : Soit $\alpha(B) \in \iota(\tau_2)$, avec $\alpha \in [0,1[$ et $B \in \tau_2$. Comme f est F-continuous, alors $f^{-1}(B) \in \tau_1$, donc $\alpha(f^{-1}(B)) \in \iota(\tau_1)$, de plus $f^{-1}(\alpha(B)) = \alpha(f^{-1}(B))$.
Par conséquent $f^{-1}(\alpha(B)) \in \iota(\tau_1)$.

Remarque 4.1 *Dans la suite de ce chapitre nous utilisons la définition (4.2) au lieu la définition (4.4), pour plusieurs raisons :*

1. *Si une fonction est continue au sens de Chang, elle est continue au sens de Lowen.*
2. *La rareté de l'utilisation de la continuité flou au sens de Lowen, et même la recherche qui dépendent de la topologie floue on utilise la continuité au sens de Chang comme Shostak [30].*
3. *La définition de la continuité au sens de Chang est une extension naturelle de la continuité au sens topologique ordinaire.*

Définition 4.5 *[8] [35]*

(a) Soit τ une topologie floue au sens de Lowen. Une sous-famille T de τ est une base pour τ si et seulement si chaque élément de τ peut s'écrire comme l'union de quelques éléments de T.

(b) Soit S une sous-famille de T, elle définie une sous-base pour τ si et seulement si la famille d'intersections finies des éléments de S forme une base pour τ.

(c) La sous-base de produit topologique flou sur $(X,T) = (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i)$ est donné par $S = \{P_i^{-1}(\theta_i);\ \theta_i \in \tau_i,\ i \in I\}$ (P_i la projection de X sur X_i) alors la base de T est donnée par $B = \{\bigwedge_{j=1}^{n} P_{i_j}^{-1}(\theta_{i_j});\ \theta_{i_j} \in \tau_{i_j},\ i_j \in I,\ j = 1...n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

4.2 Les morphismes universels

4.2.1 Co-product

Définition 4.6 *Soient (X_1,τ_1) et (X_2,τ_2) deux LF-TOP. L'union disjoint de (X_1,τ_1) et (X_2,τ_2) est défini par :*

$$(X_1,\tau_1) \dot{\bigvee} (X_2,\tau_2) = (X_1 \dot{\bigvee} X_2, \tau_{X_1 \dot{\vee} X_2})$$

avec

$$X_1 \dot{\bigvee} X_2 = \{X_1 \times \{1\}\} \cup \{X_2 \times \{2\}\}$$

$$\tau_{X_1 \dot{\vee} X_2} = \{\theta,\ \theta \text{ est un ensemble flou de } X_1 \dot{\bigvee} X_2,\ \varphi_1^{-1}(\theta) \in \tau_1 \text{ et } \varphi_2^{-1}(\theta) \in \tau_2\}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 : (X_1, \tau_1) &\longrightarrow (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})\\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = (x, 1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_2 : (X_2, \tau_2) &\longrightarrow (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})\\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = (x, 2)\end{aligned}$$

Proposition 4.2 *L'union disjoint $(X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})$ est LF-TOP.*

Preuve :

1. Soit $C \in [0,1]^{X_1 \veebar X_2}$ un ensemble flou constant, d'après la définition (1.20), $\varphi_1^{-1}(C)$ est un ensemble flou de X_1 et $\varphi_1^{-1}(C)(x) = C(\varphi_1(x)) = C((x,1)) = C$, comme (X_1, τ_1) est un espace topologique flou, donc $\varphi_1^{-1}(C) \in \tau_1$.
   Par la même méthode nous montrons que $\varphi_2^{-1}(C) \in \tau_2$. Par conséquent $C \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$.
2. Soient θ_1, $\theta_2 \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$, alors $\theta_1 \wedge \theta_2$ est un ensemble flou de $X_1 \veebar X_2$ et $\varphi_1^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2) = \varphi_1^{-1}(\theta_1) \wedge \varphi_1^{-1}(\theta_2) \in \tau_1$ (de même $\varphi_2^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2) = \varphi_2^{-1}(\theta_1) \wedge \varphi_1^{-1}(\theta_2) \in \tau_2$).
   D'où $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$.
3. Soient $\theta_i \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$, $\forall i \in I$, alors $\bigvee_{i \in I} \theta_i$ est un ensemble flou de $X_1 \veebar X_2$, et $\varphi_1^{-1}(\bigvee_{i \in I} \theta_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi_1^{-1}(\theta_i) \in \tau_1$ (de même $\varphi_2^{-1}(\bigvee_{i \in I} \theta_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi_2^{-1}(\theta_i) \in \tau_2$).
   Alors $\bigvee_{i \in I} \theta_i \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$.

Donc $\tau_{X_1 \veebar X_2}$ est un LF-TOP.

Proposition 4.3 *Les applications φ_1 et φ_2 sont F-continuous.*

Preuve : Évident (par définition de $\tau_{X_1 \veebar X_2}$).

Théorème 4.1 *Soit h une fonction d'un espace topologique flou $(X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})$ dans (C, τ_C), si $(h \circ \varphi_1)$ et $(h \circ \varphi_2)$ sont F-continuous alors h est F-continuous*

Preuve : Soit $\theta \in \tau_C$. Comme $h \circ \varphi_1$ et $h \circ \varphi_2$ sont F-continuous, alors $(h \circ \varphi_1)^{-1}(\theta) \in \tau_1$ et $(h \circ \varphi_2)^{-1}(\theta) \in \tau_2$, donc $\varphi_1^{-1}(h^{-1}(\theta)) \in \tau_1$ et $\varphi_2^{-1}(h^{-1}(\theta)) \in \tau_2$.
Alors $h^{-1}(\theta) \in \tau_{X_1 \veebar X_2}$. D'où h est F-continuous.

Corollaire 4.1 *Soient $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in$ LF-TOP. L'élément de Co-product de (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) est l'espace topologique flou $(X_1, \tau_1) \veebar (X_2, \tau_2)$ (Définition (4.6)).*

Preuve : D'après la proposition (4.2), $(X_1 \dot{\vee} X_2, \tau_{X_1 \dot{\vee} X_2}) \in$ LF-TOP et d'après la proposition (4.3) φ_1, φ_2 sont F-continuous.

$\ast$ Soient $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (C, \tau_C)$ et $g : (X_2, \tau_2) \longrightarrow (C, \tau_C)$ deux applications F-continuous, alors il existe une application F-continuous unique h définie par :

$$\begin{array}{rcl} h : (X_1 \dot{\bigvee} X_2, \tau_{X_1 \dot{\vee} X_2}) & \longrightarrow & (C, \tau_C) \\ (x,k) & \longmapsto & h(x,k) = \begin{cases} f(x) & si\, k = 1. \\ g(x) & si\, k = 2. \end{cases} \end{array}$$

$\star$ Il est clair que : $f = h \circ \varphi_1$ et $g = h \circ \varphi_2$.

$\star$ h est F-continuous (Par le théorème (4.1)).

Preuve d'unicité de h :

Soit $h' : (X_1 \dot{\vee} X_2, \tau_{X_1 \dot{\vee} X_2}) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application F-continuous, avec $f = h' \circ \varphi_1$ et $g = h' \circ \varphi_2$. Nous avons :

$$(h' \circ \varphi_1)(x) = h'(\varphi_1(x)) = h'(x,1) = f(x), \ \forall x \in X_1.$$

et

$$(h' \circ \varphi_2)(x) = h'(\varphi_2(x)) = h'(x,2) = g(x), \ \forall x \in X_2.$$

Par conséquent h est unique.

4.2.2 Co-equalizer

Définition 4.7 *Soit (A, τ_A) un espace topologique flou, $\sim$ est la relation d'équivalence sur A et $P : A \longrightarrow A/\sim$ est l'application de la projection associée, on définit $\tau_{A/\sim}$ par :*

$$\tau_{A/\sim} = \{\theta\,,\ \theta \text{ est un ensemble flou de } A/\sim,\ \text{avec } P^{-1}(\theta) \in \tau_A\}.$$

Proposition 4.4 *$(A/\sim, \tau_{A/\sim})$ est un LF-TOP.*

Preuve :

1. Soit $C \in [0,1]^{A/\sim}$ un ensemble flou constant, de la définition (1.20), $P^{-1}(C)$ est un ensemble flou de A et $P^{-1}(C)(x) = C(P(x)) = C(\overline{x}) = C$, comme τ_A est une topologie floue, donc $P^{-1}(C) \in \tau_A$, alors $C \in \tau_{A/\sim}$.
2. Soient θ_1, $\theta_2 \in \tau_{A/\sim}$, alors $\theta_1 \wedge \theta_2$ est un ensemble flou de $A/\sim$, et $P^{-1}(\theta_1 \wedge \theta_2) = P^{-1}(\theta_1) \wedge P^{-1}(\theta_2) \in \tau_A$. Donc $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \tau_{A/\sim}$.

3. Soient $\theta_i \in \tau_{A/\sim}$, $\forall i \in I$, alors $\bigvee_{i\in I} \theta_i$ est un esemble flou de $A/\sim$, et $P^{-1}(\bigvee_{i\in I} \theta_i) = \bigvee_{i\in I} P^{-1}(\theta_i) \in \tau_A$, donc $\bigvee_{i\in I} \theta_i \in \tau_{A/\sim}$

Par conséquent $\tau_{A/\sim}$ est une topologie sur $A/\sim$.

Proposition 4.5 *P est F-continuous.*

Preuve : Évident (par définition de $\tau_{A/\sim}$).

Théorème 4.2 *Soient $(A, \tau_A), (B, \tau_B) \in$ LF-TOP, $\sim$ est la relation d'équivalence de A et $P : A \longrightarrow A/\sim$ est la projection associée. Si $h : (A, \tau_A) \longrightarrow (B, \tau_B)$ est une application F-continuous compatible avec $\sim$, alors il existe une application unique h', avec $h = h' \circ P$. De plus :*
Si h est F-continuous alors h' est F-continuous.

Preuve : Nous définissons h' par :

$$\begin{aligned} h' : (A/\sim, \tau_{A/\sim}) &\longrightarrow (B, \tau_B) \\ \overline{x} &\longmapsto h'(\overline{x}) = h(x) \end{aligned}$$

$\star$ Il est clair que h' est unique et $h = h' \circ P$.
$\star$ Soit $\theta \in \tau_B$, comme $(h' \circ P)$ est F-continuous, alors $(h' \circ P)^{-1}(\theta) \in \tau_A$, donc $P^{-1}(h'^{-1}(\theta)) \in \tau_A$.
Par conséquent $h'^{-1}(\theta) \in \tau_{A/\sim}$ et h' est F-continuous.

Corollaire 4.2 *Soient $f, g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de LF-TOP. L'élément de Co-equalizer de $< f, g >$ est l'espace topologique flou $(A/\sim, \tau_{A/\sim})$, avec $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< f(x), g(x) >$, tel que $x \in B$.*

Preuve : Soit $h : (A, \tau_A) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une application F-continuous, avec $h \circ f = h \circ g$. Pour l'existence d'une application unique h', d'après le théorème (4.2) il suffit de prouver que h est compatible avec $\sim$:
Soient $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists b \in B, x_1 = f(b) \ \wedge \ x_2 = g(b)$.
Et $h(x_1) = h(f(b)) = (h \circ f)(b) = (h \circ g)(b) = h(g(b)) = h(x_2)$, alors h est compatible avec $\sim$.

4.2.3 Push-out

Définition 4.8 *Soient (A, τ_A), $(B, \tau_B) \in$ LF-TOP, $\sim$ une relation d'équivalence sur $A \veebar B$, soit également $X_0 = (A \veebar B)/\sim$, on définit τ_{X_0} par :*

$$\tau_{X_0} = \{\theta\,,\, \theta \text{ est un ensemble flou de } X_0,\ \varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta)) \in \tau_A \text{ et } \varphi_2^{-1}(P^{-1}(\theta)) \in \tau_B\}$$

avec

$$\begin{aligned} P : A \veebar B &\longrightarrow X_0 \\ (x,k) &\longmapsto P(x,k) = \overline{(x,k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (A, \tau_A) &\longrightarrow (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = (x,1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : (B, \tau_B) &\longrightarrow (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = (x,2) \end{aligned}$$

Proposition 4.6 *L'espace (X_0, τ_{X_0}) est un LF-TOP.*

Proposition 4.7 *Les deux applications suivantes :*

$$\begin{aligned} N : (A, \tau_A) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto N(x) = \overline{(x,1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M : (B, \tau_B) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto M(x) = \overline{(x,2)} \end{aligned}$$

sont F-continuous.

Preuve : Montrons que N est F-continuous.
Soit $\theta \in \tau_{X_0}$, alors $\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\theta)) \in \tau_A$. Donc, $(P \circ \varphi_1)^{-1}(\theta) \in \tau_A$. Pour $x \in A$, on a : $(P \circ \varphi_1)(x) = P(\varphi_1(x)) = P((x,1)) = \overline{(x,1)} = N(x)$. Par conséquent $N^{-1}(\theta) \in \tau_A$.
Par la même méthode, nous prouvons que M est F-continuous.

Corollaire 4.3 *Soient $f : (C, \tau_C) \longrightarrow (A, \tau_A)$, $g : (C, \tau_C) \longrightarrow (B, \tau_B)$ de <u>LF-TOP</u>. L'élément de Push-out de $< f, g >$ est (X_0, τ_{X_0}), avec $X_0 = (A \veebar B)/ \sim$. $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< (\varphi_1 \circ f)(c), (\varphi_2 \circ g)(c) >$, tel que $c \in C$.*

Preuve : Suite à la proposition (4.6), $(X_0, \tau_{X_0}) \in$ <u>LF-TOP</u>, notamment d'après la proposition (4.7), $\{N, M\}$ sont F-continuous.
$\star$ Soient $U : (A, \tau_A) \longrightarrow (D, \tau_D)$ et $V : (B, \tau_B) \longrightarrow (D, \tau_D)$ deux applications F-continuous, avec $V \circ g = U \circ f$.
Pour l'existence d'une application F-continuous unique $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (D, \tau_D)$ qui vérifie $U = h \circ N$, $V = h \circ M$, exige d'abord les étapes suivantes :

Étape 1 : On sait que l'élément de Co-product de (A, τ_A) et (B, τ_B) est l'union disjoint $(A \veebar B, \tau_{A \veebar B})$, alors pour $\{N,\ M\}$ il existe une application F-continuous $\pi : (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \longrightarrow (X_0, \tau_{X_0})$, avec $N = \pi \circ \varphi_1$ *et* $M = \pi \circ \varphi_2$.

Étape 2 : On définit la nouvelle application $U \veebar V$ par :

$$U \veebar V : (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \longrightarrow (D, \tau_D)$$
$$(x,k) \longmapsto (U \veebar V)(x,k) = \begin{cases} U(x) & si\ k = 1. \\ V(x) & si\ k = 2. \end{cases}$$

Si $U \veebar V$ est compatible avec $\sim$, alors il existe une application unique F-continuous $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (D, \tau_D)$, avec $U \veebar V = h \circ \pi$ (Théorème (4.2)).

Soient (x,k), $(x',k') \in A \veebar B$, alors :

$(x,k) \sim (x',k') \Longrightarrow \exists c \in C,\ (x,k) = (\varphi_1 \circ g)(c)\ et\ (x',k') = (\varphi_2 \circ f)(c)$.

$(U \veebar V)(x,k) = (U \veebar V)(\varphi_1 \circ f)(a) = (U \veebar V)(f(c),1) = U(f(c)) = (U \circ f)(c)$.

$(U \veebar V)(x',k') = (U \veebar V)(\varphi_2 \circ g)(c) = (U \veebar V)(g(c),2) = V(g(c)) = (V \circ g)(c)$.

et comme $V \circ g = U \circ f$, alors $(U \veebar V)(x,k) = (U \veebar V)(x',k')$ et $U \veebar V$ compatible avec $\sim$.

Étape 3 : Montrons que $U = h \circ N, V = h \circ M$.

$(h \circ N)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_1))(x) = (h \circ \pi)(x,1) = (U \veebar V)(x,1) = U(x), \forall x \in A$.

$(h \circ M)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_2))(x) = (h \circ \pi)(x,2) = (U \veebar V)(x,2) = V(x), \forall x \in B$.

4.2.4 Product

Définition 4.9 *Soient (A, τ_A) et (B, τ_B) deux LF-TOP. On définit $\tau_{A \times B}$ par :*
$\tau_{A\times B} = \{\theta,\ \theta$ *est un ensemble flou de* $A \times B$ *avec* $\theta = \bigvee_{i \in I} A_i \times B_i\ ,\ A_i \in \tau_A,\ B_i \in \tau_B,\ \forall i \in I\}$

Proposition 4.8 $(A \times B, \tau_{A \times B})$ *est LF-TOP.*

Proposition 4.9 *Les projections P_1, P_2 sont F-continuous, avec :*

$$P_1 : (A \times B, \tau_{A\times B}) \longrightarrow (A, \tau_A)$$
$$(x,y) \longmapsto P_1(x,y) = x$$

$$P_2 : (A \times B, \tau_{A\times B}) \longrightarrow (B, \tau_B)$$
$$(x,y) \longmapsto P_2(x,y) = y$$

Preuve : Montrons que P_1 est F-continuous :
Soit $\theta \in \delta_1$, pour $(x,y) \in A \times B$, alors

$$\begin{aligned} P_1^{-1}(\theta)(x,y) &= \theta(P_1(x,y)) = \theta(x) \\ &= min\{\theta(x),\ 1(y)\} \\ &= (\theta \times 1)(y). \end{aligned}$$

Cela implique que $P_1^{-1}(\theta) \in \tau_{A\times B}$, d'où P_1 est F-continuous.
Par la même méthode, nous prouvons que P_2 est F-continuous.

Théorème 4.3 *Soient $f_1 : (C,\tau_C) \longrightarrow (A,\tau_A)$ et $f_2 : (B,\tau_B) \longrightarrow (C,\tau_C)$ deux applications F-continuous. Si f une application de C dans $A \times B$ définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, alors :*

$$f_1,\ f_2 \text{ sont F-continuous} \Longrightarrow f \text{ est F-continuous}$$

Preuve : *Soit $\theta \in \tau_{A\times B}$, donc $\theta = \bigvee_{i\in I} A_i \times B_i$, avec $A_i \in \tau_A$ et $B_i \in \tau_B$, et $f^{-1}(\theta) = f^{-1}(\bigvee_{i\in I} A_i \times B_i) = \bigvee_{i\in I} f^{-1}(A_i \times B_i)$, et comme $f^{-1}(A_i \times B_i)$ est un ensemble flou de C, on a :*

$$\begin{aligned} f^{-1}(A_i \times B_i)(x) &= (A_i \times B_i)(f(x)) \\ &= (A_i \times B_i)(f_1(x), f_2(x)) \\ &= min\{A_i(f_1(x)),\ B_i(f_2(x))\} \\ &= (f_1^{-1}(A_i) \wedge f_2^{-1}(B_i))(x),\ \forall x \in C. \end{aligned}$$

Alors $f^{-1}(A_i \times B_i) \in \tau_C$ et $f^{-1}(\theta) \in \tau_C$. Par conséquent f est F-continuous.

Corollaire 4.4 *Soient $(A,\tau_A), (B,\tau_B) \in$ LF-TOP. L'élément de Product de (A,τ_A) et (B,τ_B) est l'espace topologique flou $(A \times B, \tau_{A\times B})$ (Définition (4.9)).*

Preuve : Soient $f_1 : (C,\tau_C) \longrightarrow (A,\tau_A)$ et $f_2 : (C,\tau_C) \longrightarrow (B,\tau_B)$ deux applications F-continuous, alors il existe une application F-continuous unique définie par :

$$\begin{aligned} f : (C,\tau_C) &\longrightarrow (A \times B, \tau_{A\times B}) \\ x &\longmapsto h(x) = (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

⋆ Il est clair que $f_1 = P_1 \circ f$ et $f_2 = P_2 \circ f$.

⋆ Suite au théorème (4.3), f est F-continuous.

Preuve d'unicité de f :
Soit $f' : (C,\delta) \longrightarrow (A \times B, \tau_{A\times B})$ une autre application F-continuous, avec $f_1 = P_1 \circ f'$, $f_2 = P_2 \circ f'$.

Supposons que : $f'(x) = (a,b)$, on a :

$a = P_1(a,b) = (P_1 \circ f')(x) = f_1(x),\ b = P_2(a,b) = (P_2 \circ f')(x) = f_2(x)$.

Alors $f'(x) = (f_1(x), f_2(x)) = h(x)$, donc f est unique.

4.2.5 Equalizer

Définition 4.10 *Soient f et $g : (B,\tau_B) \longrightarrow (A,\tau_A)$ deux applications F-continuous. D un sous-ensemble de B défini par $D = \{x \in B,\ f(x) = g(x)\}$, on définit τ_D par :*

$\tau_D = \{\theta\ ,\ \theta = F(D) \bigwedge B_i$ est un ensemble flou de D, $B_i \in \tau_B$ et $F(D)$ est un ensemble flou de B, avec $F(D)(x) = \chi_D(x)\}$

Proposition 4.10 *(D,τ_D) est un LF-TOP.*

Proposition 4.11 *L'application e est F-continuous, avec :*

$$\begin{aligned} e : (D,\tau_D) &\longrightarrow (B,\tau_B) \\ x &\longmapsto e(x) = x \end{aligned}$$

Preuve : Soient $\theta \in \tau_B$ et $x \in D$, nous avons :

$e^{-1}(\theta)(x) = \theta(e(x)) = \theta(x)$, posons $\theta = \theta \bigwedge F(D)$. Donc $e^{-1}(\theta) \in \tau_D$, d'où e est F-continuous.

Corollaire 4.5 *Soient $f,g : (B,\tau_B) \longrightarrow (A,\tau_A)$ de LF-TOP. L'élément de Equalizer de $< f,g >$ est l'espace topologique flou (D,τ_D) (Définition (4.10)).*

Preuve :

Pour $h : (C,\tau_C) \longrightarrow (B,\tau_B)$ une application F-continuous, avec :

$f \circ h = g \circ h$, alors il existe une application F-continuous unique h' définie par :

$$\begin{aligned} h' : (C,\tau_C) &\longrightarrow (D,\tau_D) \\ x &\longmapsto h'(x) = h(x) \end{aligned}$$

$\star$ h' est F-continuous de fait, h est F-continuous.

$\star$ Soit $x \in C$: $(e \circ h')(x) = e(h'(x)) = e(h(x)) = h(x)$ alors $e \circ h' = h$.

Preuve d'unicité de h' :

Soit $h'' : (C,\tau_C) \longrightarrow (D,\tau_D)$ une autre application F-continuous, avec $e \circ h'' = h$, donc

$(e \circ h'')(x) = (e \circ h')(x) \Longrightarrow e(h''(x)) = e(h'(x)) \Longrightarrow h''(x) = h'(x),\ \forall x \in C$. Ce qui donne $h' = h''$.

D'où h' est unique.

4.2.6 Pull-back

Définition 4.11 *Soient $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ et $g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ deux applications F-continuous. C un sous-ensemble de $B \times D$ défini par : $C = \{(x, y) \in B \times D,\ f(x) = g(y)\} \subseteq B \times D$. On définit τ_C par : $\tau_C = \{\theta,\ \theta = F(C) \wedge \theta'$ est un ensemble flou de C, $\theta' \in \tau_{B\times D}$ et $F(C)$ est un ensemble flou de $B \times D$, avec $F(C)(x, y) = \chi_C(x, y)\}$.*

Proposition 4.12 *(C, τ_C) est LF-TOP.*

Proposition 4.13 *Les projections p, q sont F-continuous, avec :*

$$\begin{aligned} p : (C, \tau_C) &\longrightarrow (B, \tau_B) \\ (x, y) &\longmapsto p(x, y) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q : (C, \tau_C) &\longrightarrow (D, \tau_D) \\ (x, y) &\longmapsto q(x, y) = y \end{aligned}$$

Preuve : Nous montrons que p est F-continuous :
Soit $B_i \in \tau_B$, et comme $p^{-1}(B_i) = B_i$. Nous prenons $p^{-1}(B_i) = (B_i \times D) \wedge F(C)$, alors $p^{-1}(B_i) \in \tau_C$ et p est F-continuous.
Par la même méthode nous prouvons que q est F-continuous.

Théorème 4.4 *Soient $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ et $g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ deux applications F-continuous et (E, τ_E) un espace topologique flou.*
Si $h : (E, \tau_E) \longrightarrow (B, \tau_B)$ et $k : (E, \tau_E) \longrightarrow (D, \tau_D)$ deux applications F-continuous avec $f \circ h = g \circ k$ et r une application définie par :

$$\begin{aligned} r : (E, \tau_E) &\longrightarrow (C, \tau_C) \\ x &\longmapsto r(x) = (h(x), k(x)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Alors :

$$h,\ k \text{ sont F-continuous} \Longrightarrow r \text{ est F-continuous.}$$

Preuve : Soit $\theta \in \tau_E$, on a :

$$\begin{aligned} r^{-1}(\theta) &= r^{-1}(F(C) \wedge (\vee_{i\in I} B_i \times D_i) \\ &= r^{-1}(F(C)) \wedge r^{-1}(\vee_{i\in I} B_i \times D_i) \\ &= r^{-1}(F(C)) \wedge \vee_{i\in I}(h^{-1}(B_i) \wedge k^{-1}(D_i)) \in \tau_E. \end{aligned}$$

Comme (h, k sont F-continuous et $r^{-1}(F(C)) = E$) . Par conséquent r est F-continuous.

Corollaire 4.6 *Soient $f : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$, $g : (D, \tau_D) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de LF-TOP.*
L'élément de Pull-back de $\langle f, g \rangle$ est l'espace topologique flou (C, τ_C) (Définition (4.11)).

Preuve : Premièrement, il est clair que $f \circ p = g \circ q$.
Deuxièmement, si $h : (E, \tau_E) \longrightarrow (B, \tau_B)$ et $k : (E, \tau_E) \longrightarrow (D, \tau_D)$ sont deux applications F-continuous avec $f \circ h = g \circ k$, alors il existe une application F-continuous r défini par la formule (4.1).
⋆ Il est clair que $k = q \circ r$ et $h = p \circ r$.
Preuve d'unicité de r :
Soit $r' : (E, \tau_E) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application F-continuous, avec $k = q \circ r'$, $h = p \circ r'$.
Supposons que $r'(x) = (a, b)$, nous avons :
$a = p(a, b) = (p \circ r')(x) = h(x)$ *et* $b = q(a, b) = (q \circ r')(x) = k(x)$.
Alors $r = r'$. Donc r est unique.

4.3 Les relations entre TOP et LF-TOP

Proposition 4.14 *[32]*
Soit (X, τ) un LF-TOP, l'espace $(X, \iota(\tau))$ tel que : pour $A \in \tau$, $\iota(A) = \{\alpha(A) : \alpha \in [0, 1[\}$ et $\iota(\tau) = \{\iota(A);\ A \in \tau\}$ est un espace topologique sur X.

Théorème 4.5 *[22]*
Soit (X, δ) un espace topologique ordinaire. L'espace $(X, \omega(\delta)$ est un LF-TOP, avec :

$$\omega(\delta) = \{A \in I^X : \ \alpha(A) \in \delta, \forall \alpha \in [0, 1[\}$$

Preuve :

1. Soit $C \in [0, 1]^X$ un ensemble flou constant avec dégrée $t \in [0, 1]$. Alors pour tout $\alpha \in [0, 1[$, $\alpha(C) = X$, si $t > \alpha$ et $\alpha(C) = \varnothing$, si $t \leq \alpha$.
   Dans les deux cas, $\alpha(t) \in \delta$ et donc $C \in \omega(\delta)$. Ce qui vent dire que $\omega(\delta)$ contient tout ensemble flou constant.
2. Soient $A, B \in \omega(\delta)$, alors $\alpha(A), \alpha(B) \in \delta$, $\forall \alpha \in [0, 1[$. Comme $\alpha(A \wedge B) = \alpha(A) \cap \alpha(B) \in \delta$, $A \wedge B \in \omega(\delta))$, $\forall \alpha \in [0, 1[$.

3. Soient $A_\beta \in \omega(\delta)$, $\beta \in \Delta$, alors $\forall \alpha \in [0,1[$, et $\beta \in \Delta$, $\alpha(A_\beta) \in \delta$. Comme $\alpha(\bigvee_{\beta\in\Delta} A_\beta) = \cup_{\beta\in\Delta}\alpha(A_\beta) \in \delta$. Cela implique que $\bigvee_{\beta\in\Delta} A_\beta \in \omega(\delta)$ et donc $(X,\omega(\delta))$ est un LF-TOP.

Proposition 4.15 *[8]*
Le lien entre ι,ω : pour une topologie δ sur X est :

$$\iota(\omega(\delta)) = \delta.$$

Preuve : Nous avons : $\omega(A) = \{A \in I^X : \ \alpha(A) \in \delta, \ \forall \alpha \in [0,1[\}$ et $\iota(\tau) = \{\iota(A); \ A \in \tau, \ \alpha \in [0,1[\}$.
Donc, $\iota(\omega(\delta)) = \{\alpha(A) : A \in \omega(\delta), \ \alpha \in [0,1[\} = \{\alpha(A) : \alpha(A) \in \delta, \ \alpha \in [0,1[\} \subseteq \delta$.
Inversement, soit $A \in \delta$ la fonction caractéristique de A est donnée par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si: \ x \in A. \\ 0 & si: \ x \notin A. \end{cases}$$

et $\forall \alpha \in [0,1[, \alpha(\chi_A) = \{x : \chi_A(x) \geq \alpha\} = A$.
Maintenant, $\forall \alpha \in [0,1[, \alpha(\chi_A) = A \in \delta$, alors $\chi_A \in \omega(\delta)$, mais par la définition de $\iota(\tau)$ $\alpha(\chi) \in \iota(\omega(\delta))$, donc $A \in \iota(\omega(\delta))$. Alors $\iota(\omega(\delta)) = \delta$.

Proposition 4.16 *[8]*
Pour toute topologie floue τ sur X, $\omega(\iota(\tau)) \neq \tau$. En effet :
Soit $X = \{a,b\}$ et $\tau = \{\varnothing, X, \{(a,13),(b,12)\}\}$, nous avons : $\iota(\tau) = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ et donc
$\omega(\iota(\tau)) = \{\varnothing, X, \{(a,r),(b,s) : r,s \in [0,1], r \leq s\}\}$ lequel contient τ mais ne sont pas égale .

4.4 La relation entre TOP et LF-TOP

Proposition 4.17 *[30]*
Soit ω un foncteur entre TOP et LF-TOP défini par :
Pour $f : (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ est une application continue, on a :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\omega: \underline{TOP} \arrow[r] & \underline{LF-TOP} \\
(A,\tau_A) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (A,\omega(\tau_A)) \arrow[d, "\omega(f)=f"] \\
(B,\tau_B) \arrow[r, mapsto] & (B,\omega(\tau_B))
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.18 *Si* $f:(A,\tau_A)\longrightarrow(B,\tau_B)$ *est une application continue, alors :*
$f:(A,\omega(\tau_A))\longrightarrow(B,\omega(\tau_B))$ *est F-continuous.*

Preuve : posons :

$$\omega(\tau_A)=\{A_i\in I^A,\ \alpha(A_i)\in\tau_A,\ \forall\alpha\in[0,1[\}$$

et

$$\omega(\tau_B)=\{B_i\in I^B,\ \alpha(B_i)\in\tau_B,\ \forall\alpha\in[0,1[\}$$

Soit $B_i\in\omega(\tau_B)$, alors $\alpha(B_i)\in\tau_B$, et comme f est continue alors $f^{-1}(\alpha(B_i))\in\tau_A$, donc $\alpha(f^{-1}(B_i))\in\tau_A$, et $f^{-1}(B_i)\in\omega(\tau_A)$. Par conséquent f est F-continuous.

Proposition 4.19 *ω est un foncteur.*

4.5 Conclusion

1. D'après la définition de Lowen, tout LF-TOP est CF-TOP et l'inverse n'est pas forcément vrai car le CF-TOP ne contient pas nécessairement les ensembles flous constants. En général, nous pouvons convertir tout CF-TOP en LF-TOP en ajoutant au CF-TOP tous les ensembles flous constants et les intersections et unions avec les ensembles flous ouverts pour en faire une topologie floue au sens de Lowen.

2. Au cours de notre recherche sur les morphismes universels de la catégorie LF-TOP, nous avons pu constater l'effet du brouillage au sens de Lowen sur l'espace topologique ordinaire. Il s'avère que ce brouillage est fort pour plusieurs raisons :

   (a) La définition de l'espace topologique flou au sens de Lowen s'est changé de l'état ordinaire.

   (b) Toutes les propositions et les théorèmes utilisées pour prouver les morphismes universels de la catégorie LF-TOP est une généralisation de celles dans la catégorie TOP, comme le théorème fondamental du produit et le théorème fondamental du quotient.

   (c) Les morphismes universels de TOP sont des projections de ceux de LF-TOP.

3. Si nous considérons la définition de continuité au sens de Lowen (Définition (4.4)), les théorèmes les plus fondamentaux deviennent faux (ex : Théorème (4.2)), car chaque fonction f d'un LF-TOP (X, T) à un LF-TOP (Y, U) est F-continuous implique f est LF-continuous et l'inverse est faux.

Chapitre 5

Les morphismes universels de SF-TOP

Le concept de la topologie floue a été défini pour la première fois en 1968 par Chang. La topologie floue au sens de Chang est une famille d'ensembles flous vérifiant les trois axiomes donnés dans le chapitre [3]. En 1976, Lowen a pris l'initiative de changer la première condition de Chang en posant les ensembles flou constants comme des ensembles flous ouverts.
Mais ces deux derniers concepts de topologie floue n'ont pas pris en considération le degré de l'ouverture des ensembles flous, ceci, est considéré par Shostak [29] le point faible des deux brouillages.
A partir de là, que Shostak a définit en 1985 un autre espace topologique flou en prolongeant les deux notions précédent (Chang et Lowen).
En supposons la topologie floue au sens de Chang comme application $\tau : I^X \longrightarrow \{0,1\}$, vérifiant :

1. $\tau(0) = \tau(1) = 1$.
2. Si $\tau(A) = \tau(B) = 1$, alors $\tau(A \wedge B) = 1$.
3. Si $\tau(A_\alpha) = 1$, pour tout $\alpha \in \Delta$, alors $\tau(\bigvee A_\alpha) = 1$.

et en supposons la topologie floue au sens de Lowen comme application $\tau : I^X \longrightarrow [0,1]$, vérifiant :

1. $\tau(c) = 1$, pour tout ensemble flou constant.
2. Si $\tau(A) = \tau(B) = 1$, alors $\tau(A \wedge B) = 1$.
3. Si $\tau(A_\alpha) = 1$, pour tout $\alpha \in \Delta$, alors $\tau(\bigvee A_\alpha) = 1$.

5.1 Définitions et notations

Définition 5.1 *[29]*
*On appelle **topologie floue** sur X toute application τ définie de $[0,1]^X$ dans $[0,1]$, vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. $\tau(0) = \tau(1) = 1$.
2. *Si* μ, $\vartheta \in [0,1]^X$, *alors* $\tau(\mu \wedge \vartheta) \geq \tau(\mu) \wedge \tau(\vartheta)$.
3. *Si* $\mu_i \in [0,1]^X$, *pour tout* $i \in I$, *alors* $\tau(\bigvee_I A_i) \geq \bigwedge_I \tau(A_i)$, *$I$ est un ensemble d'indices quelconque.*

⋆ *Le nombre réel $\tau(\mu)$ sera appelé le degré d'ouverture de l'ensemble flou μ.*

⋆ *Un espace topologique flou (SF-TOP) est une paire (X, τ), avec X est un ensemble et τ est une topologie flou sur X.*

Exemple 5.1 *Soit X un ensemble non vide. L'application $\tau : I^X \longrightarrow [0,1]$ définie par :*

$$\tau(\theta) = \begin{cases} 1 & si\ \theta = X\ ou\ \theta = \varnothing. \\ 0 & si\ \theta \notin \{X, \varnothing\}. \end{cases}$$

est une topologie floue sur X.

Exemple 5.2 *Soit $X = \{a, b\}$. On définit les ensembles flous A, B de X par :*

$$A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = a. \\ 0 & si\ x = b. \end{cases} \quad , \quad B(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = a. \\ 1 & si\ x = b. \end{cases}$$

L'application $\tau : I^X \longrightarrow [0,1]$ par :

$$\tau(\theta) = \begin{cases} 1 & si\ \theta = X\ ou\ \theta = \varnothing. \\ 0.15 & si\ \theta = A. \\ 0.80 & si\ \theta = B. \\ 0.1 & si\ \theta \notin \{X, \varnothing, A, B\}. \end{cases}$$

est une topologie floue sur X.

Définition 5.2 *[29]*
Soient τ_1 et τ_2 deux topologies flous sur X. La topologie τ_1 est dite plus fine que τ_2 lorsque $\tau_1(\mu) \geq \tau_2(\mu)$, pour tout $\mu \in I^X$.

Définition 5.3 *[29]*

Soient (X,τ) et (Y,δ) deux SF-TOP et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Cette application est appelée ***continue floue (SF-continuous)*** *si $\tau(f^{-1}(\vartheta)) \geq \delta(\vartheta)$ pour tout $\vartheta \in [0,1]^Y$.*

Exemple 5.3 *Soit $X = \{a,b,c,d\}$. On définit les ensembles flous A, B de X par :*

$$A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = b,d. \\ 0 & si\ x = a,c. \end{cases} \quad , \quad B(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = a,c. \\ 0 & si\ x = b,d. \end{cases}$$

Pour tout $i = \overline{1,2}$, on définit les applications $\tau_i : I^X \longrightarrow [0,1]$ par :

$$\begin{cases} \tau_i(X) = \tau_i(\varnothing) = 1 \ , \ i \in \{1,2\} \\ \tau_1(A) = \tau_1(B) = \frac{1}{2} \\ \tau_2(A) = \tau_2(B) = 1 \\ \tau_i(C) = 0, \forall C \in \{\varnothing, X, A, B\}, \ i \in \{1,2\} \end{cases}$$

L'application d'identité $id : (X,\tau_1) \longrightarrow (X,\tau_2)$ est SF-continuous.

Proposition 5.1 *[23]*

Les espaces topologiques flous (SF-TOP) et les applications continues floues (SF-continuous) forment une catégorie qu'on note par SF-TOP.

5.2 Les morphismes universels

5.2.1 Co-product

Théorème 5.1 *[29]*

Soient $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in$ SF-TOP. L'élément de Co-product de (X_1,τ_1) et (X_2,τ_2) est l'espace topologique flou $(X_1,\tau_1) \veebar (X_2,\tau_2) = (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})$, avec $X_1 \veebar X_2 = \{X_1 \times \{1\}\} \cup \{X_2 \times \{2\}\}$ et :

$$\tau_{X_1 \veebar X_2} : I^{X_1 \veebar X_2} \longrightarrow I$$
$$\mu \longmapsto \tau_{X_1 \veebar X_2}(\mu) = min\{\tau_1(\varphi_1^{-1}(\mu)), \ \tau_2(\varphi_2^{-1}(\mu))\}$$

avec

$$\varphi_1 : (X_1,\tau_1) \longrightarrow (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})$$
$$x \longmapsto \varphi_1(x) = (x,1)$$

et

$$\varphi_2 : (X_2,\tau_2) \longrightarrow (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})$$
$$x \longmapsto \varphi_2(x) = (x,2)$$

Preuve : Avant de commencer la démonstration nous devons d'abord voir une proposition ainsi qu'un théorème.

Proposition 5.2 *Les applications φ_1 et φ_2 sont SF-continuous.*

Preuve :
Soit $\mu \in [0,1]^{X_1 \veebar X_2}$, et comme $\tau_{X_1 \veebar X_2}(\mu) = min\{\tau_1(\varphi_1^{-1}(\mu)), \tau_2(\varphi_2^{-1}(\mu))\}$ donc
$\tau_1(\varphi_1^{-1}(\mu)) \geq \tau_{X_1 \veebar X_2}(\mu)$. Par conséquent φ_1 est SF-continuous.
De même pour φ_2.

□

Théorème 5.2 *Soit h une fonction d'un espace topologique flou $(X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2})$ dans (C, τ_C), si $(h \circ \varphi_1)$ et $(h \circ \varphi_2)$ sont SF-continuous alors h est SF-continuous.*

Preuve :
Soit $\mu_3 \in I^C$, $\tau(h^{-1}(\mu_3)) = min\{\tau_1(\varphi_1^{-1}(h^{-1}(\mu_3))), \tau_2(\varphi_2^{-1}(h^{-1}(\mu_3)))\}$.
Comme $h \circ \varphi_1$ et $h \circ \varphi_2$ sont SF-continuous, alors
$\tau_1(\varphi_1^{-1}(h^{-1}(\mu_3))) \geq \tau_3(\mu_3)$ et $\tau_2(\varphi_2^{-1}(h^{-1}(\mu_3))) \geq \tau_3(\mu_3)$, donc
$min\{\tau_1(\varphi_1^{-1}(h^{-1}(\mu_3))), \tau_2(\varphi_2^{-1}(h^{-1}(\mu_3)))\} \geq \tau_3(\mu_3)$. D'où $\tau(h^{-1}(\mu_3) \geq \tau_3(\mu_3)$.
Par conséquent h est SF-continuous.

□

⋆ Soient $f : (X_1, \tau_1) \longrightarrow (C, \tau_C)$ et $g : (X_2, \tau_2) \longrightarrow (C, \tau_C)$ deux applications SF-continuous, alors il existe une application SF-continuous unique h définie par :

$$\begin{aligned} h : (X_1 \bigvee\!\!\!\cdot\; X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2}) &\longrightarrow (C, \tau_C) \\ (x,k) &\longmapsto h(x,k) = \begin{cases} f(x) & \text{si } k = 1. \\ g(x) & \text{si } k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

⋆ Il est clair que : $f = h \circ \varphi_1$ et $g = h \circ \varphi_2$.
⋆ Suite au théorème (5.2), h est SF-continuous.
Preuve d'unicité de h :
Soit $h' : (X_1 \veebar X_2, \tau_{X_1 \veebar X_2}) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une autre application SF-continuous, avec $f = h' \circ \varphi_1$ et $g = h' \circ \varphi_2$. Nous avons :

$$(h' \circ \varphi_1)(x) = h'(\varphi_1(x)) = h'(x,1) = f(x), \ \forall x \in X_1.$$

et

$$(h' \circ \varphi_2)(x) = h'(\varphi_2(x)) = h'(x,2) = g(x), \ \forall x \in X_2.$$

et par conséquent h est unique.

5.2.2 Co-equalizer

Définition 5.4 *Soit (A, τ_A) un SF-TOP, $\sim$ est une relation d'équivalence de A et $P : A \longrightarrow A/\sim$ est l'application de projection associée, on définit une topologie sur $A/\sim$ par :*

$$\begin{aligned} \tau_{A/\sim} : I^{A/\sim} &\longrightarrow I \\ \overline{\mu} &\longmapsto \tau_{A/\sim}(\overline{\mu}) = \tau_A(P^{-1}(\overline{\mu})) \end{aligned}$$

Proposition 5.3 *$(A/\sim, \tau_{A/\sim})$ est un SF-TOP.*

Preuve :

C_1. $\tau_{A/\sim}(0) = \tau_A(P^{-1}(0)) = \tau_A(0) = 1$ et $\tau_{A/\sim}(1) = \tau_A(P^{-1}(1)) = \tau_A(1) = 1$.

C_2. Pour chaque $\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2} \in I^{A/\sim}$, alors $\tau_{A/\sim}(\overline{\mu_1} \wedge \overline{\mu_2}) = \tau_A(P^{-1}(\overline{\mu_1} \wedge \overline{\mu_2})) = \tau_A(P^{-1}(\overline{\mu_1}) \wedge P^{-1}(\overline{\mu_2}))$, comme τ_A est une topologie floue alors :
$\tau_A(P^{-1}(\overline{\mu_1}) \wedge P^{-1}(\overline{\mu_2})) \geq \tau_A(P^{-1}(\overline{\mu_1})) \wedge \tau_A(P^{-1}(\overline{\mu_2})) = \tau_{A/\sim}(\overline{\mu_1}) \wedge \tau_{A/\sim}(\overline{\mu_2})$.
Donc :

$$\tau_{A/\sim}(\overline{\mu_1} \bigwedge \overline{\mu_2}) \geq \tau_{A/\sim}(\overline{\mu_1}) \bigwedge \tau_{A/\sim}(\overline{\mu_2}).$$

C_3. Pour chaque $\overline{\mu_i} \in I^{A/\sim}$, $i \in \Delta$, nous avons :
$\tau_{A/\sim}(\vee_\Delta \overline{\mu_i}) = \tau_A(P^{-1}(\vee_\Delta \overline{\mu_i}) = \tau_A(\vee_\Delta P^{-1}(\overline{\mu_i}))$, comme τ_A est une topologie floue, alors :
$\tau_A(\vee_\Delta P^{-1}(\overline{\mu_i})) \geq \wedge_\Delta \tau_A(P^{-1}(\overline{\mu_i})) = \wedge_\Delta \tau_{A/\sim}(\overline{\mu_i})$. Donc :

$$\tau_{A/\sim}(\bigvee_\Delta \overline{\mu_i}) \geq \bigwedge_\Delta \tau_{A/\sim}(\overline{\mu_i}).$$

Par conséquent $(A/\sim, \tau_{A/\sim})$ est SF-TOP.

Proposition 5.4 *P est SF-continuous.*

Preuve : Évident par la définition de $\tau_{A/\sim}$.

Théorème 5.3 *Soient $(A, \tau_A), (B, \tau_B) \in$ SF-TOP, $\sim$ est une relation d'équivalence sur A et $P : A \longrightarrow A/\sim$ est la projection associée. Si $h : (A, \tau_A) \longrightarrow (B, \tau_B)$ est une application SF-continuous compatible avec $\sim$, alors il existe une application SF-continuous unique h', avec $h = h' \circ P$. De plus :*

$$h \text{ est SF-continuous} \Longrightarrow h' \text{ est SF-continuous}.$$

Preuve : Nous définissons h' par :

$$h' : (A/\sim, \tau_{A/\sim}) \longrightarrow (B, \tau_B)$$
$$\overline{x} \longmapsto h'(\overline{x}) = h(x)$$

⋆ Il est claire que h' est unique et $h = h' \circ P$.

⋆ Soit $\mu \in I^B$, comme $h' \circ P$ est SF-continuous, alors $\tau_A((h' \circ P)^{-1}(\mu)) \geq \tau_B(\mu)$. Donc : $\tau_A(P^{-1}(h'^{-1}(\mu))) \geq \tau_B(\mu)$. Cela implique que $\tau_{A/\sim}(h'^{-1}(\mu)) \geq \tau_B(\mu)$.

Par voix de conséquence h' est SF-continuous.

Corollaire 5.1 *Soient $f, g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de* SF-TOP*. L'élément de Co-equalizer de $< f, g >$ est l'espace topologique flou $(A/\sim, \tau_{A/\sim})$, avec $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< f(x), g(x) >$, tel que $x \in B$.*

Preuve :

Soit $h : (A, \tau_A) \longrightarrow (C, \tau_C)$ une application SF-continuous avec $h \circ f = h \circ g$.

Pour l'existence d'une application unique h', il suffit de prouver que h est compatible avec $\sim$ [Théorème (5.3)].

Soient $x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists b \in B,\ x_1 = f(b)\ \ \wedge\ \ x_2 = g(b)$.

et $h(x_1) = h(f(b)) = (h \circ f)(b) = (h \circ g)(b) = h(g(b)) = h(x_2)$, alors h est compatible avec $\sim$.

5.2.3 Puch-out

Définition 5.5 *Soient (A, τ_A), $(B, \tau_B) \in$* SF-TOP *et $\sim$ relation d'équivalence sur $A \veebar B$, soit également $X_0 = (A \veebar B)/\sim$, on définit la topologie flou τ_{X_0} par :*

$$\tau_{X_0} : I^{A/\sim} \longrightarrow I$$
$$\mu \longmapsto \tau_{X_0}(\mu) = min\{\tau_A(\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\mu))),\ \tau_B(\varphi_2^{-1}(P^{-1}(\mu)))\}$$

avec

$$P : A \veebar B \longrightarrow X_0$$
$$(x, k) \longmapsto P(x, k) = \overline{(x, k)}$$

$$\varphi_1 : (A, \tau_A) \longrightarrow (A \veebar B, \tau_{A \veebar B})$$
$$x \longmapsto \varphi_1(x) = (x, 1)$$

et

$$\varphi_2 : (B, \tau_B) \longrightarrow (A \veebar B, \tau_{A \veebar B})$$
$$x \longmapsto \varphi_2(x) = (x, 2)$$

Proposition 5.5 *L'espace (X_0, τ_{X_0}) est SF-TOP.*

Proposition 5.6 *Les applications suivantes :*

$$\begin{aligned} N : (A, \tau_A) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto N(x) = \overline{(x,1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M : (B, \tau_B) &\longrightarrow (X_0, \tau_{X_0}) \\ x &\longmapsto M(x) = \overline{(x,2)} \end{aligned}$$

sont SF-continuous.

Preuve :

Soit $\mu \in I^{X_0}$, on a : $\tau_A(N^{-1}(\mu)) = \tau_A((P \circ \varphi_1)^{-1}(\mu)) = \tau_A(\varphi_1^{-1}(P^{-1}(\mu))) \geq \tau_{X_0}(\mu)$.

Par conséquent N est SF-continuous.

Par la même méthode, nous prouvons que M est SF-continuous.

Corollaire 5.2 *Soient $f : (C, \tau_C) \longrightarrow (A, \tau_A)$, $g : (C, \tau_C) \longrightarrow (B, \tau_B)$ de SF-TOP. L'élément de Push-out de $< f, g >$ est (X_0, τ_{X_0}), avec $X_0 = (A \veebar B)/\sim$, $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence qui contient toutes les paires $< (\varphi_1 \circ f)(c), (\varphi_2 \circ g)(c) >$, pour tout $c \in C$.*

Preuve : Par la proposition (5.5), $(X_0, \tau_{X_0}) \in$ SF-TOP. Aussi, à partir de la proposition (5.6), $\{N, M\}$ sont SF-continuous.

Soient $U : (A, \tau_A) \longrightarrow (D, \tau_D)$ et $V : (B, \tau_B) \longrightarrow (D, \tau_D)$ deux applications SF-continuous, avec $V \circ g = U \circ f$.

La preuve d'existence d'une application SF-continuous unique $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (D, \tau_D)$, qui vérifiée $U = h \circ N$, $V = h \circ M$, exige d'abord les étapes suivantes :

Étape 1 : Nous savons que le Co-product de (A, τ_A) et (B, τ_B) est l'union disjoint $(A \veebar B, \tau_{A \veebar B})$, alors pour $\{N, M\}$ il existe une application SF-continuous $\pi : (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) \longrightarrow (X_0, \tau_{X_0})$ avec $N = \pi \circ \varphi_1$, $M = \pi \circ \varphi_2$.

Étape 2 : Nous définissons la nouvelle application $U \veebar V$ par :

$$\begin{aligned} U \veebar V : (A \veebar B, \tau_{A \veebar B}) &\longrightarrow (D, \tau_D) \\ (x, k) &\longmapsto (U \veebar V)(x, k) = \begin{cases} U(x) & si\ k = 1. \\ V(x) & si\ k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $U \dot{\vee} V$ est compatible avec ~, alors il existe une application SF-continuous unique $h : (X_0, \tau_{X_0}) \longrightarrow (D, \tau_D)$, avec $U \dot{\vee} V = h \circ \pi$ (Théorème (5.3)).
Soient (x,k), $(x',k') \in A \dot{\vee} B$, alors :

$$(x,k) \sim (x',k') \Longrightarrow \exists c \in C,\ (x,k) = (\varphi_1 \circ g)(c) \text{ and } (x',k') = (\varphi_2 \circ f)(c).$$

$$(U \dot{\bigvee} V)(x,k) = (U \dot{\bigvee} V)(\varphi_1 \circ f)(a) = (U \dot{\bigvee} V)(f(c),1) = U(f(c)) = (U \circ f)(c).$$

$$(U \dot{\bigvee} V)(x',k') = (U \dot{\bigvee} V)(\varphi_2 \circ g)(c) = (U \dot{\bigvee} V)(g(c),2) = V(g(c)) = (V \circ g)(c).$$

Mais $V \circ g = U \circ f$, alors $U \dot{\vee} V$ est compatible avec ~.

Étape 3 : Preuve que $U = h \circ N, V = h \circ M$.

$$(h \circ N)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_1))(x) = (h \circ \pi)(x,1) = (U \dot{\bigvee} V)(x,1) = U(x), \forall x \in A.$$

$$(h \circ M)(x) = (h \circ (\pi \circ \varphi_2))(x) = (h \circ \pi)(x,2) = (U \dot{\bigvee} V)(x,2) = V(x), \forall x \in B.$$

5.2.4 Equalizer

Définition 5.6 *Soient f et $g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ deux applications SF-continuous. D est un sous-ensemble de B défini par $D = \{x \in B,\ f(x) = g(x)\}$, on définit τ_D par :*

$$\tau_D : I^D \longrightarrow I$$
$$\mu \longmapsto \tau_D(\mu) = sup\{\tau_B(v)),\ v \in I^B,\ \mu = v \wedge F(D)\},\ avec\ F(D) = \chi_D.$$

Proposition 5.7 *Il est clair que (D, τ_D) est un SF-TOP.*

Proposition 5.8 *L'application e est SF-continuous, avec :*

$$e : (D, \tau_D) \longrightarrow (B, \tau_B)$$
$$x \longmapsto e(x) = x$$

Preuve :
Soit $v \in I^B$, et comme $\tau_D(e^{-1}(v)) = sup\{\tau_B(u),\ u \in I^B,\ e^{-1}(v) = u \wedge F(D)\}$. On pose que $u = v$ alors, $\tau_D(e^{-1}(v)) \geq \tau_B(v)$, et e est SF-continuous [car $e^{-1}(v) = v$].

Corollaire 5.3 *Soient $f, g : (B, \tau_B) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de SF-TOP. L'élément de Equalizer de $< f, g >$ est l'espace topologique flou (D, τ_D) (Définition (5.6)).*

Preuve :

Soit $h : (C, \tau_C) \longrightarrow (B, \tau_B)$ une application SF-continuous, avec $f \circ h = g \circ h$, alors il existe une application SF-continuous unique h' définie par :

$$\begin{aligned} h' : (C, \tau_C) &\longrightarrow (D, \tau_D) \\ x &\longmapsto h'(x) = h(x) \end{aligned}$$

⋆ h' est SF-continuous de fait, h est SF-continuous.

⋆ Soit $x \in C$: $(e \circ h')(x) = e(h'(x)) = e(h(x)) = h(x)$ alors $e \circ h' = h$.

Nous allons prouver que h' est unique :

Soit $h'' : (C, \tau_C) \longrightarrow (D, \tau_D)$ une autre application SF-continuous, avec $e \circ h'' = h$, alors :

$(e \circ h'')(x) = (e \circ h')(x) \Longrightarrow e(h''(x)) = e(h'(x)) \Longrightarrow h''(x) = h'(x), \ \forall x \in C.$

Par conséquent h' est unique.

5.2.5 Product

Dans [29]. Shostak définissait le produit de deux espaces topologiques flous (SF-TOP) comme suit :

Définition 5.7 *[29]*

Soient (A, τ_A) et (B, τ_B) deux espaces topologiques flous (SF-TOP). Le produit de (A, τ_A) et (B, τ_B) est l'espace topologique flou $(A \times B, \tau_{A\times B})$, avec :

$$\begin{aligned} \tau_{A\times B} : I^{A\times B} &\longrightarrow I \\ \mu &\longmapsto \tau_{A\times B}(\mu) = min\{\tau_1(\mu),\ \tau_2(\mu)\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_1 : I^{A\times B} &\longrightarrow I \\ \mu &\longmapsto \tau_1(\mu) = \begin{cases} sup\{\tau_A(\mu_1),\ \mu_1 \in P_\mu\} & si\ \mu \in M_1. \\ 0 & si\ \mu \notin M_1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$M_1 = \{\mu = P_1^{-1}(\mu_1),\ \mu_1 \in I^A\}\ et\ P_\mu = \{\mu_1 \in I^A,\ \mu = P_1^{-1}(\mu_1)\}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_2 : I^{A\times B} &\longrightarrow I \\ \mu &\longmapsto \tau_2(\mu) = \begin{cases} sup\{\tau_B(\mu_2),\ \mu_2 \in P'_\mu\} & si\ \mu \in M_2. \\ 0 & si\ \mu \notin M_2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$M_2 = \{\mu = P_2^{-1}(\mu_2),\ \mu_2 \in I^B\}\ et\ P'_\mu = \{\mu_2 \in I^B,\ \mu = P_2^{-1}(\mu_2)\}$$

P_1 et P_2 sont les projections canoniques.

D'après Shostak la topologie flou τ est la plus fine topologie sur $A \times B$ qui puissent rendre les applications P_1 et P_2 SF-continuous. En réalité, ces applications ne sont pas SF-continuous par rapport à cette topologie floue. En effet :

$P_1 : (A \times B, \tau_{A\times B}) \longrightarrow (A, \tau_A)$ est SF-continuous $\Longleftrightarrow \forall \mu_1 \in I^A, \tau_{A\times B}(P_1^{-1}(\mu_1)) \geq \tau_1(\mu_1)$

Soit $\mu_1 \in I^A$, on a :

$$\tau_{A\times B}(P_1^{-1}(\mu_1)) = min\{\tau_1(P_1^{-1}(\mu_1)), \tau_2(P_1^{-1}(\mu_1))\}$$

On remarque que le résultat n'est pas forcement $\tau_1(P_1^{-1}(\mu_1))$, et dans ce cas :

$\tau_{A\times B}(P_1^{-1}(\mu_1)) = 0$, et $0 \geq \tau_1(\mu_1) = 0 \Longrightarrow \tau_1 = 0$. Ce qui contredit la définition de τ_A.

Maintenant nous montrons que $M_1 \neq M_2$, illustrons ceci par un exemple :

Soient $A = \{1,2\}$ et $B = \{a\}$ et si on prend $\mu_1^* \in I^{\{1,2\}}$ définie par : $\mu_1^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$

On pose : $\mu' = P_1^{-1}(\mu_1^*) \in M_1$, alors :

$$\mu' : A \times B \longrightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \longmapsto \mu'(x,y) = P_1^{-1}(\mu_1^*)(x,y) = \mu_1^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

et comme pour toute $\mu_2 \in I^{\{a\}}$, on a :

$$P_2^{-1}(\mu_2) : A \times B \longrightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \longmapsto P_2^{-1}(\mu_2)(x,y) = \mu_2(y) = \alpha.$$

par conséquent $\mu' \notin M_2$.

5.3 La relation entre TOP et SF-TOP

Théorème 5.4 *[34]*

Soit (X, δ) un espace topologique. Alors l'application $\omega_\delta : I^X \longrightarrow I$, définie par :

$$\omega_\delta(A) = sup\{\alpha \in I : A^{-1}(]\alpha, 1]) \in \delta\}$$

est une topologie floue sur X au sens de Shostak.

5.4 Les relations entre CF-TOP et SF-TOP

Théorème 5.5 *[26]*
Soit (X, T) un CF-TOP. Pour tout $\beta \in]0, 1]$, l'application $T^{\beta} : I^X \longrightarrow I$ définie par :

$$T^{\beta}(A) = \begin{cases} 1 & si\ A \in \{\varnothing, X\}. \\ \beta & si\ A \in T - \{\varnothing, X\}. \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

est une topologie floue au sens de Shostak.

Preuve :

1. $T^{\beta}(X) = T^{\beta}(\varnothing) = 1$
2. Soient $A, B \in I^X$, alors si $T^{\beta}(A) = 0$ ou $T^{\beta}(B) = 0$, nous avons $T^{\beta}(A) \wedge T^{\beta}(B) = 0 \leq T^{\beta}(A \wedge B)$. Mais, si $T^{\beta}(A) \neq 0$ et $T^{\beta}(B) \neq 0$ (i.e $A, B \in T, A \wedge B \in T$), nous aurons deux cas :
   (a) Si $A \wedge B = \varnothing$ ou $A \wedge B = X$, alors $T^{\beta}(A \wedge B) = 1$ donc $T^{\beta}(A) \wedge T^{\beta}(B) \leq 1 = T^{\beta}(A \wedge B)$.
   (b) Si A ou $B \in T - \{\varnothing, X\}$, alors $T^{\beta}(A) \wedge T^{\beta}(B) = \beta \leq T^{\beta}(A \wedge B)$.
3. Maintenant, soient $A_i \in I^X$, il y aura trois cas :
   (a) $\bigwedge T^{\beta}(A_i) = 0 \leq \bigvee T^{\beta}(A_i)$.
   (b) $\bigwedge T^{\beta}(A_i) = 1$, donc $\forall i,\ A_i \in \{\varnothing, X\}$, alors $\bigvee A_i \in \{\varnothing, X\}, T^{\beta}(\bigvee A_i) = 1 = \bigwedge T^{\beta}(A_i)$.
   (c) $\bigwedge T(A_i) = \beta$, donc $\forall i,\ T^{\beta}(A_i) \geq \beta$ i.e. $\forall i,\ T^{\beta}(A_i) \in \{1, \beta\}$ c'est $\forall i,\ (A_i) \in T$, et comme T est une topologie floue au sens de Chang, nous avons $\bigvee A_i \in T$, et comme $T^{\beta}(\bigvee A_i) \in \{1, \beta\}$, alors nous aurons $T^{\beta}(\bigvee A_i) \geq \beta = \bigwedge T^{\beta}(A_i)$.
   Par conséquent (X, T^{β}) est SF-TOP.

Théorème 5.6 *[26]*
Soit (X, τ) un SF-TOP, et pour tout $\alpha \in]0, 1]$, soit $\tau_{\alpha} = \{A : A \in I^X, \tau(A) \geq \alpha\}$. Alors (X, τ_{α}) est CF-TOP.

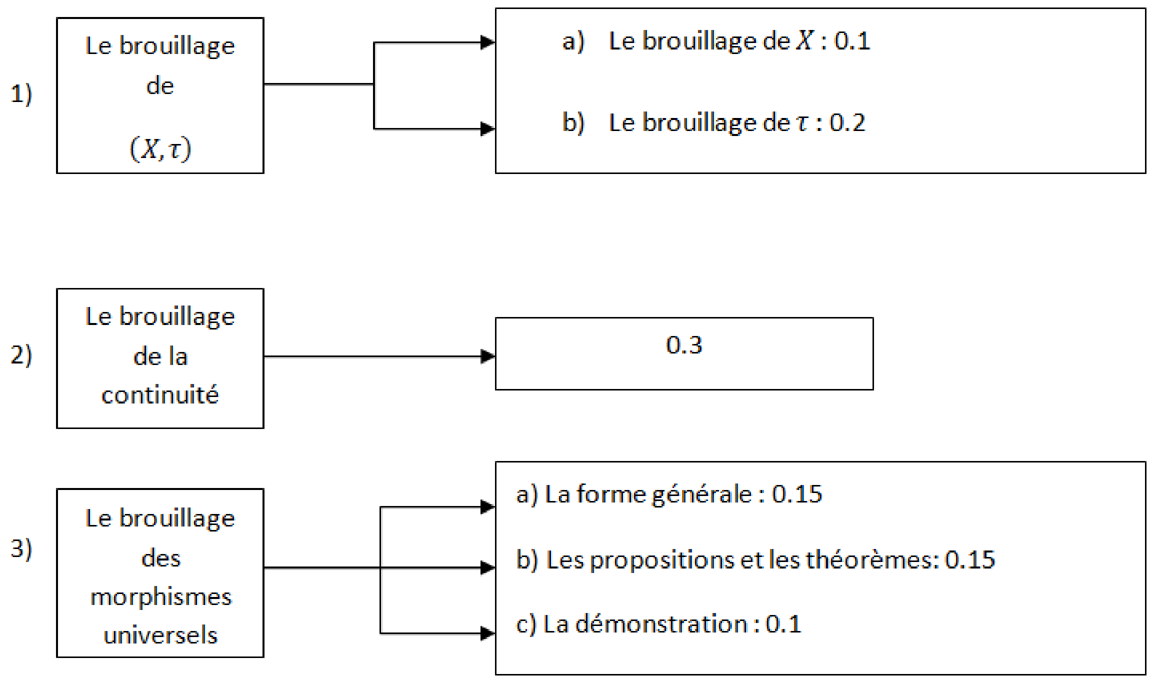
Preuve :
Soit $\tau_{\alpha} = \{A : A \in I^X, \tau(A) \geq \alpha\}$, $\alpha \in]0, 1]$, *nous avons* :
$\tau(\varnothing) = \tau(X) = 1 \geq \alpha$, donc $\varnothing, X \in \tau_{\alpha}$. Pour chaque $A, B \in I^X$, et $A, B \in \tau_{\alpha}$, nous avons $\tau(A) \geq \alpha$ et $\tau(B) \geq \alpha$, alors $\tau(A \wedge B) \geq \tau(A) \wedge \tau(B) \geq \alpha$. Pour $i \in \Delta$, si chaque $A_i \in \tau_{\alpha}$, alors $\tau(A_i) \geq \alpha$, $\forall i$. Alors, $\tau(\bigvee_i A_i) \geq \bigwedge_i \tau(A_i) \geq \bigwedge_i \alpha = \alpha$. Donc $\bigvee A_i \in \tau_{\alpha}$ et (X, τ_{α}) est un CF-TOP.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Passer de l'ensemble $\{0,1\}$ à l'intervalle $[0,1]$ nous conduit à généraliser des concepts qui ont été classiquement étudiés et qui sont fondés sur l'affirmation de la justesse ou de l'erreur. Plus l'étude est générale et globale, plus son importance et sa force deviennent plus grandes et c'est sur cela que se base l'idée de « brouillage ».
Le désaccord entre scientifiques et chercheurs dans le développement d'un concept unique pour définir le brouillage d'un objet mathématique prouve la multitude des méthodes suivies dans l'étude du brouillage [1] et juger de la puissance et de la faiblesse du brouillage est du à donner une nouvelle formule pour cet objet et aussi à s'éloigner, autant que possible, de sa situation classique. Plus nous créons un nouvel espace pour extraire et prouver les concepts mathématiques, plus le brouillage est meilleur.
Au cours de notre recherche sur les morphismes universels des espaces topologiques flous à partir de trois espaces topologiques flous, nous avons pu constater ces nouveaux espaces et perçu les propriétés réalisées. Mais le jugement de la force et de la faiblesse de chaque brouillage reste en soi relatif ; peut-être, les deux brouillages sont forts mais l'un est plus fort que l'autre et il en est de même pour la faiblesse. Et le brouillage est fondé sur cette idée.
Afin de juger les trois états que nous avons pris en termes de force et de faiblesse, on définit un ensemble flou F de l'ensemble $T = \{\underline{\text{CF-TOP}}, \underline{\text{LF-TOP}}, \underline{\text{SF-TOP}}\}$ et nous mettons ces restrictions :

1. Par exemple, F-SET la catégorie de tous les ensembles flous admet plusieurs définitions (Voir [14] [19] [33]).



Et d'après ces restrictions nous construisons ce tableau :

F -TOP		1) CF -TOP	2) LF -TOP	3) SF -TOP
Restriction 1	a	0	0	0
	b	0.1	0.15	0.2
Restriction 2		0.1	0.15	0.3
Restriction 3	a	0.05	0.05	0.05
	b	0.1	0.1	0.15
	c	0.05	0.1	0.1
Total		0.4	0.55	0.8
La remarque Sur Le brouillage		Faible	Fort	Très fort

Le résultat est donné aussi par ce graphe :

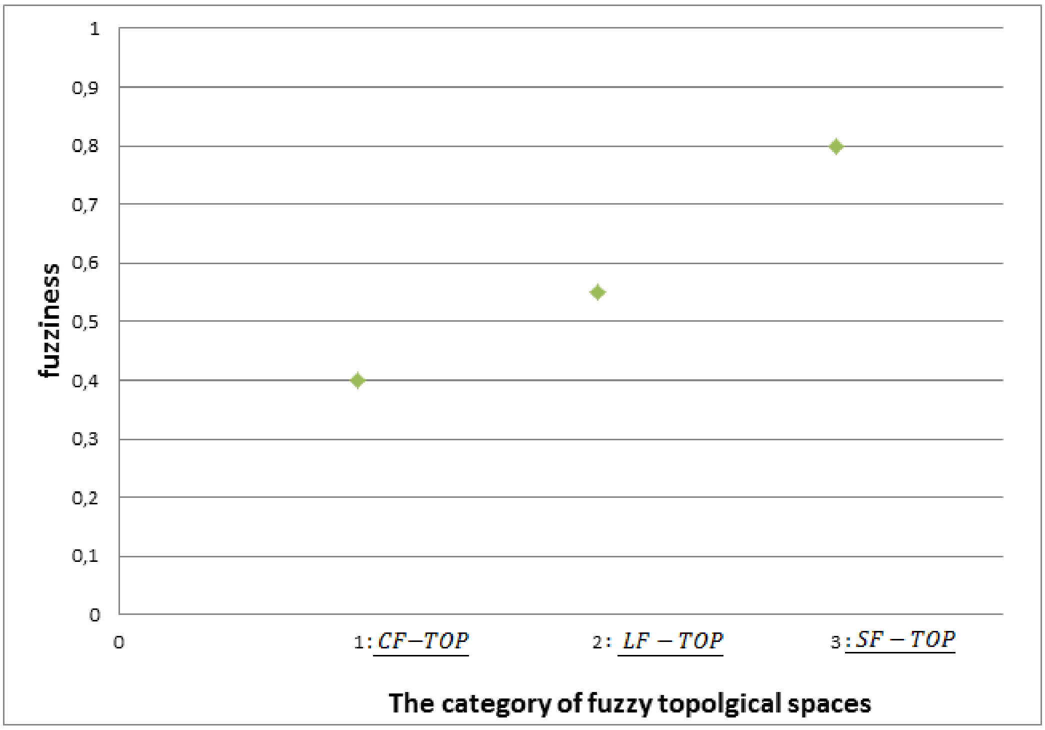


FIGURE 6.1 – Représentation de l'ensemble flou F.

Problèmes ouverts :

1. Le brouillage au sens de Shostak de l'espace topologique ordinaire est plus fort. Mais peut-être plus amélioré. Par exemple, Shostak n'a pas brouillé l'ensemble total X.
2. On peut chercher ces morphismes universels dans la catégorie de tous les espaces métriques flous (bien sûr après avoir trouver le brouillage des espaces métriques et la continuité entre eux)

Bibliographie

[1] **S. Ambapour,** *"Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo"*, DT 16/(2009).

[2] **P. Alain,** *"Catégories pour la Topologie Algébrique"* , 24 janvier (2015).

[3] **K. K. Azad,** *" Fuzzy Hausdorff spaces and fuzzy perfect mappings"* , J. Math. **82**, 297-305, (1981).

[4] **S. S. Benchalli, G. P. Siddapur,** *"On the Level Spaces of Fuzzy Topological Spaces"*, Bulletin of Mathematical analysis et Applications, **2**, 57-65 , (2009).

[5] **C. Berger,** *"Topologie pour la Licence"* , Université de Nice-Sophia Antipolis, 24 Janvier (2004).

[6] **J. Bichon, R. Taillefer,** *"Algèbre homologique"*, Université Blaise Pascal, (2014).

[7] **N. Bourbaki,** *"Topologie generate. Ch. I. Structures topologiques"*, Hermann, Paris, (1961).

[8] **S. Carlson,** *"Fuzzy Topological Spaces"*, Part II (May 17).

[9] **S. Carlson,** *"Fuzzy Topological Spaces"*, Part I (May 10).

[10] **C. Chang,** *" Fuzzy topological spaces"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Anal. Appl. **24** , 182-190, (1968).

[11] **P. Colmez,** *"Éléments d'analyse et d'algèbre"*, Paris. Octobre (2009).

[12] **S. Demiralp, E. Guner,** *"Normality and Its Variants on Fuzzy Isotone Spaces"*, **6**, 111-121, (2014).

[13] **S. Eilenberg, S. Mac Line,** *" General Theory of Natural Equivalences"* . Trans. Am. Math. Soc, **58**, 231-294, (1945).

[14] **P. Eklund, M. A. Galan,** *"Set Fkmctors, L-Fuzzy Set Categories, et Generalized Terms"* , J. Computers et Mathematics with Applications. **43**, 693-705, (2002).

[15] **S. N. El-Diafy,** *"Comparative Study of Fuzzy Topology"*, a thesis submitted in partial fulfilment of the requirement for degree of master of mathematics, the islamic university of Gaza, (2014).

[16] **A. Grothendieck,** *"Categories fibrees et descente. Revetements etales et group fondamental"*, In Seminaire de Gemetrie Algebrique du Bois-Marie (SGA 1), (1960/1961).

[17] **G. Huet,** *"Initiation à théorie des catégories"*, India, 20 décembre (1987).

[18] **F. Ismail, A. Latreche** *" The applications of the universal morphisms of CF-TOP the category of all fuzzy topological spaces"*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III : Mathematics, Informatics, Physics, **11**, (2018).

[19] **F. Ismail, R. Uzbashy,** *"Fuzzy sets category and applications of its universal arrows"*, J. Math. **29**, 349-372, (2013).

[20] **A. Kandil, S. Saleh, M. M Yakout,** *"Fuzzy Topology On Fuzzy Sets : Regularity and Separation Axioms"*, Advances in Pure Mathematics, **2**, 70-83, (2012).

[21] **A. Latreche, F. Ismail** *" The applications of the universal morphisms of LF-TOP the category of all fuzzy topological spaces"*, WSEAS Transactions on Mathematics, **17**, 213-219, (2018).

[22] **R. Lowen,** *"Fuzzy Topological Spaces et Fuzzy Compactness "*, J. Func. Anal 621-633, (1976).

[23] **S. Mac Lane,** *" Categories for the working mathematicaian"*, Springer, (1997).

[24] **A. Nouer,** *"Introduction aux espaces topologiques "*, Algérie, (2007).

[25] **F. Ronga,** *"Topologie et géométrie"*, Genève, MMVI ap. J. C. Décembre (2006).

[26] **A. A. Ramadan,** *"Smooth Topological Spaces"*, Fuzzy sets and Systems, **48**, 371-375, (1992).

[27] **A. A. Ramadan, S. E. Abbas, A. A. Abd El-latif,** *"On Fuzzy Bitopological Spaces in Sostak's Sense"*, Commun. Korean Math, **21**, 497-514, (2006).

[28] **S. E. Rodabaugh,** *"The Hausdorff separation axiom for fuzzy topological spaces"* , J. Math, **11**, 319-334, (1980).

[29] **A. P. Shostak,** *"On a fuzzy topological structure"* , J Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser II, **11**, 89-103, (1985).

[30] **A. P. Shostak,** *"Two Decades of Fuzzy Topology : Basic ideas, Notions, et Results"*, Russian Math., **44 :6**, 125-186, (1989).

[31] **R. Srivastava, S. N. Lal, A. K. Srivastava,** *"Fuzzy Topological T_1 Spaces"*, Journal of mathematical analysis et applications, **102**, 442-448, (1984).

[32] **M. M. Stadler, M. A. P. Vicente,** *"Strong Separation and Strong Countability in Fuzzy Topological Spaces"*, Fuzzy sets and Systems, **43**, 95-116, (1991).

[33] **M. Sugeno, M. Sasaki,** *"L-fuzzy category"*, J. Math. **11**, 31-39, (1983).

[34] **M. Stephen, N. Moses, A. Paul, S. Hezron Were,** *"Normality and Its Variants on Fuzzy Isotone Spaces"*, J. Math. **3**, 639-642, (2013).

[35] **C. K. Wong,** *"Fuzzy Topology : Product et Quotient Theorems "*, J. Math. **45**, 512-521, (1974).

[36] **C. K. Wong,** *" Fuzzy Points and Local Properties of Fuzzy Topology"*, J. Math. **46**, 216-328, (1974).

[37] **L. A. Zadeh,** *"Fuzzy sets"*, Information And Control, **8**, 338-353, (1965).