

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2023/2024.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**Nombre de cycles limites des systèmes différentiels  
perturbés par la méthode de la moyennisation**

Option : COSD

Par :

Hamidatou Ines

Encadré par : N. Debz

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : A. Boulfoul

M.C.A U. SKIKDA

Examineur: N. Mellahi

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2023/2024

## *Remerciements*

*En premier lieu et avant tout, je remercie à **ALLAH** qui m'a donnée la force, la patience, la volonté et le courage pour réaliser ce travail.*

*Je remercie vivement **Dr.Debz Nassima** pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*Je remercie les membres de jury **Dr.Boulfoul Amel** et **Dr.Mellahi Nawal** pour avoir accepté examiner ce travail.*

*Je voudrais remercier mes parents, mes frères, mes soeurs aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire .*

*Merci a toutes.*

*Hamidatou Ines.*

---

## Résumé

---

Ce travail de mémoire est consacré à l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement, on étudie deux classes de systèmes différentiels, en utilisant la théorie de moyennisation.

**La première classe** concerne l'étude des systèmes différentiels polynomiaux généralisés de Kukles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + k(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où les polynômes  $k(x) = \varepsilon k_1(x) + \varepsilon^2 k_2(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$  où  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$  et  $h_i(x)$  sont des polynômes de degrés donnés,  $d_0^i \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

**La deuxième classe** concerne l'étude des systèmes différentiels de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x, y) - f_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) - f_2(x, y)y, \end{cases}$$

où  $f_1(x, y)$ ,  $g_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  et  $g_2(x, y)$  sont des polynômes de degrés donnés.

L'étude des deux classes est illustrée par des exemples.

### Mots clés :

Système dynamique - cycle limite - théorie de la moyennisation - système polynômial - Système de Liénard - Système de Kukles.

---

## abstract

---

This work is devoted to study the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending of small parameter. Using the averaging theory of first and second order, we study two classes of generalized differential systems.

**The first class** deals with the generalized polynomial **Kukles** differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + k(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

where  $k(x) = \varepsilon k_1(x) + \varepsilon^2 k_2(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  and  $d_0 = d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$  where  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$  et  $h_i(x)$  are polynomials of given degree,  $d_0^i \neq 0$  a reel number for all  $i = 1, 2$  and  $\varepsilon$  is a small parametre.

**The second class** is studied the generalized polynomial **Lienard** differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x, y) - f_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) - f_2(x, y)y, \end{cases}$$

where  $f_1(x, y)$ ,  $g_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  and  $g_2(x, y)$  are polynomials of given degree.

This study is illustred by examples.

### **Keywords :**

Dynamical system - Limit cycle - Polynomial differential system - Averaging theory - Lienard system - Kukles system.

---

## ملخص

---

ملخص موضوع هذه المذكرة يركز على دراسة عدد الحلول الدورية الخاصة بالجمل التفاضلية المتعلقة بوسيط صغير. باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى و الثانية نقوم بدراسة نوعين من الجمل التفاضلية المعممة :

القسم الأول هو عبارة عن جمل من المعادلات التفاضلية لـ ككلز المعممة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + k(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

حيث  $k(x)$  ،  $f(x)$  ،  $g(x)$  و  $h(x)$  كثيرات حدود بدرجة معطاة،  $d_0 \neq 0$  عدد حقيقي و  $\varepsilon$  وسيط صغير .

القسم الثاني هو عبارة عن جمل من المعادلات التفاضلية لـ لينارد المعممة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x, y) - g_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - f_2(x, y) - g_2(x, y)y, \end{cases}$$

حيث  $f_1(x, y)$  ،  $g_1(x, y)$  ،  $f_2(x, y)$  و  $g_2(x, y)$  كثيرات حدود بدرجة معطاة.

دراسة القسمين السابقين من الجمل التفاضلية تم توضيحهما بواسطة أمثلة .

كلمات مفتاحية:

جمل ديناميكية - حل دوري معزول - جملة معادلات تفاضلية - كثيرات حدود - نظرية المتوسط - معادلات تفاضل لينارد و كيكلز.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Systèmes différentiels polynomiaux . . . . .	6
1.2 Systèmes dynamiques . . . . .	6
1.3 <b>Flot d'une équation différentielle</b> . . . . .	7
1.4 Théorie des systèmes différentiels linéaires autonomes . . . . .	8
1.4.1 <b>Points d'équilibre</b> . . . . .	8
1.4.2 <b>Linéarisation des systèmes</b> . . . . .	8
1.4.3 <b>Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires</b> . . . . .	9
1.4.4 <b>Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires</b> . . . . .	10
1.5 <b>Portrait de phase</b> . . . . .	10
1.6 <b>Orbites périodiques et cycles limites</b> . . . . .	11
1.6.1 Orbites périodiques . . . . .	11
1.6.2 cycles limites . . . . .	11
1.7 Quelques formules mathématiques . . . . .	14
<b>2 Théorème de moyennisation du premier et deuxième ordre</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	17
2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre . . . . .	20
<b>3 Nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes de Kukles généralisés</b>	<b>23</b>

3.1	Introduction et résultats principaux . . . . .	24
3.2	Application de la méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	24
3.3	Application de la méthode de moyennisation du deuxi-ème ordre . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Nombre maximum de cycles limites d'une classe des systèmes différentiels</b>	
	<b>de Liénard via la théorie de moyennisation</b>	<b>41</b>
4.1	Présentation du problème et résultats principaux . . . . .	42
4.2	Preuve du Théorème 4.1 . . . . .	42

# Introduction

Au cours du 17<sup>ème</sup> siècle, **Leibnitz** et **Newton** ont initié l'étude des équations différentielles, initialement liés à la résolution de problèmes géométriques de la physique newtonienne et à la formalisation du calcul différentiel et intégral. Ces équations sont rapidement devenues un outil essentiel pour analyser les phénomènes naturels et pour approfondir la compréhension des concepts mathématiques tels que les fonctions.

L'importance des équations différentielles a inspiré des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques à développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions.

Au tournant du 19<sup>ème</sup> siècle **Henri Poincaré** (1845 – 1912) a révolutionné l'approche des équations différentielles en mettant l'accent non pas sur la résolution directe des équations, mais sur une analyse géométrique approfondie des solutions, en particulier de leurs propriétés. Cette approche qualitative visait à déterminer les caractéristiques des solutions sans nécessairement les obtenir de manière explicite, **Poincaré** [10] a notamment introduit la "Théorie des cycles limites" en utilisant la notion novatrice de "Section de Poincaré" pour déterminer l'existence de courbes fermées particulières appelées "Cycles limites".

En 1900, **David Hilbert** [6] a formulé ses célèbres vingt-trois problèmes mathématiques, dans son sixième problème il aborde la question du nombre et de la disposition des trajectoires périodiques isolées, connues sous le nom de cycles limites dans des systèmes différentiels polynomiaux. Cette question a marqué un jalon important dans la recherche mathématique et a suscité de nombreuses réflexions sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles. Ce mémoire a pour objet l'étude qualitative des systèmes différentiels planaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de variables réelles  $x$  et  $y$ .

La structure de notre travail est la suivante

- **Le premier chapitre** introduit les bases essentiels des systèmes différentiels planaires, nécessaires à la compréhension ultérieure.
- **Dans le deuxième chapitre**, nous exposant la théorie de la moyennisation du premier et second ordre.
- **Dans le troisième chapitre**, nous analysons les cycles limites d'une catégorie plus élaborée de systèmes différentiels de **Kukles**, représentés par

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + k(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où les  $k(x) = \varepsilon k_1(x) + \varepsilon^2 k_2(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$  où  $k_i(x)$ ,  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$  et  $h_i(x)$  sont de degrés  $\ell$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0^i \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

- **Dans le quatrième chapitre**, nous avons étudié les cycles limites de systèmes différentiels de **Liénard** généralisé, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x, y) - f_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) - f_2(x, y)y, \end{cases}$$

où  $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y)$ ,  $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y)$ ,  $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y)$ ,  $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y)$  sont des polynômes de degré  $k$ ,  $\ell$ ,  $m$  et  $n$  respectivement, et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Pour chaque approche, nous illustrons nos analyses par des exemples.

Pour mener à bien nos calculs nous utilisons le logiciel **Maple 13**.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur les systèmes dynamiques et les systèmes différentiels qui seront utiles pour la suite .

## 1.1 Systèmes différentiels polynomiaux

**Définition 1.1** On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

- Si  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réelles, on dit que (1.1) est un système différentiel polynômial .
- Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, on appelle alors le degré du système (1.1) le nombre  $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .
- Si les polynômes  $P$  et  $Q$  s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{i+j=0}^{i+j=n} a_{ij} x^i y^{n-j}, \\ Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^{i+j=n} b_{ij} x^i y^{n-j}, \end{cases}$$

on dit que  $P$  et  $Q$  sont homogènes, dans ce cas le système (1.1) s'appelle système différentiel polynômiales homogène .

Nous supposons que les fonctions  $P$  et  $Q$  de classe  $\mathbb{C}^1$  (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)).

## 1.2 Systèmes dynamiques

**Définition 1.2** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que

1.  $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
2.  $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
3.  $U(0, x) = x$ .
4.  $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est linéaire si*

$$\varphi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(t, x) + \beta \varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Exemple 1.1** *Soit le système*

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

où  $A$  est une matrice constante,  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . La solution de (1.2) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

le système (1.2) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$U(t, x) = e^{tA}x.$$

## 1.3 Flot d'une équation différentielle

**Définition 1.4** *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $F(x) \in \mathbb{R}^n$ . On appelle flot du système différentiel (1.3), l'ensemble des applications  $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

où  $\phi(t, x_0)$  est la solution de (1.3) telle que  $\phi(0, x_0) = x_0$

**Remarque 1.1** *Le flot est dit autonome si  $F$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , sinon il est dit non autonome.*

## 1.4 Théorie des systèmes différentiels linéaires autonomes

### 1.4.1 Points d'équilibre

**Définition 1.5** On appelle point d'équilibre ou point critique du système (1.3) tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  telle que

$$F(x_0) = 0.$$

**Remarque 1.2** Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

### 1.4.2 Linéarisation des systèmes

Les systèmes qui modélisent des phénomènes naturels sont non linéaires. Afin d'étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, on se ramène à l'étude de ses systèmes linéarisé associés.

**Définition 1.6** Considérons le système différentiel non linéaire du système (1.3), le système

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.4}$$

où  $A = DF(x_0) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ , est appelé système linéarisé associé au système (1.3) en  $x_0$ .

**Remarque 1.3** La matrice  $A$  est dite matrice jacobienne associée au système (1.3).

**Exemple 1.2** Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y), \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \tag{1.5}$$

Les points d'équilibre de ce système sont :  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

Le système linéarisé est

$$\begin{pmatrix} 2 - 2x - 2y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne associée à (1.5) calculée en  $(0, 0)$  est

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et la matrice jacobienne associée à (1.5) calculée en  $(1, 1)$  est

$$DF(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéarisés du système (1.5) sont :

- au point  $(0, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$$

- au point  $(1, 1)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

**Définition 1.7** Le point critique  $x_0$  est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  n'a de partie réelle nulle.

**Remarque 1.4** La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.

### 1.4.3 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibre.

**Définition 1.8** Soit le système différentiel linéaire (1.4), où  $A$  est une matrice constante inversible, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique  $x = x_0$  est un point selle, il est toujours instable.
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :

1. Si  $\lambda_i < 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le point critique  $x = x_0$  est un noeud stable.
  2. Si  $0 < \lambda_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud instable
  3. Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud propre, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes conjuguées avec  $Im(\lambda_i) \neq 0$  et  $i = 1, \dots, n$  alors le point critique  $x = x_0$  est un foyer. Il est stable si  $Re(\lambda_i) < 0$  et instable si  $Re(\lambda_i) > 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
  - Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont imaginaires pures avec  $Im(\lambda_i) \neq 0$  et  $Re(\lambda_i) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un centre et il est stable mais pas asymptotiquement stable.

#### 1.4.4 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires

On considère le système non linéaire autonome (1.3) et son système linéarisé associé (1.4), le point  $x_0$  est appelé :

- **Puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles négatives.
- **Source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles positives.
- **Selle** s'il est hyperbolique et si la matrice  $A$  a au moins une valeur propre à partie réelle négative et au moins une valeur propre avec la partie réelle positives.

### 1.5 Portrait de phase

Soit le système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels de degré  $d$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système ci dessus représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites.

**Définition 1.9** Les points critiques du système (1.6) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites du système, ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase. Le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

## 1.6 Orbites périodiques et cycles limites

### 1.6.1 Orbites périodiques

**Définition 1.10** On appelle solution périodique toute solution  $x = \phi(t)$  du système (1.3) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$  vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t). \quad (1.7)$$

- Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie (1.7) est appelé période.
- A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phase.

**Exemple 1.3** L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  qui équivaut au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque  $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$  ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C.$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan de phase par des ellipses.

### 1.6.2 cycles limites

**Définition 1.11** *Un cycle limite  $C$  du système (1.3) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace des phases. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de  $C$  dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.*

**Remarque 1.5** *Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite  $C$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , il est dit stable ou attractif. Si en revanche toutes les trajectoires voisines s'éloignent du cycle limite  $C$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , il est dit instable ou non attractif.*

**Définition 1.12** *L'amplitude d'un cycle limite  $C$  est la valeur maximale de la variable  $x$  de ce cycle limite*

**Remarque 1.6** *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

**Exemple 1.4** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

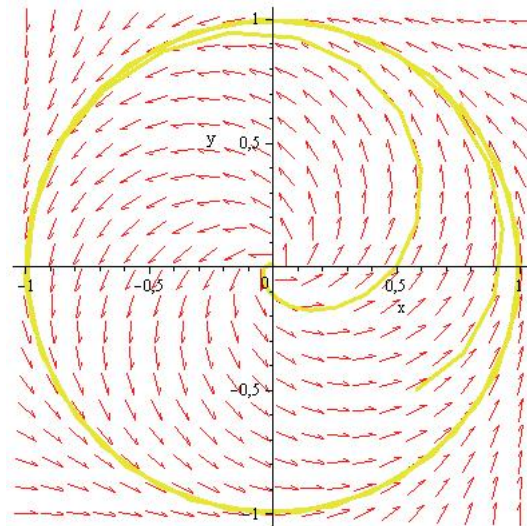
telle que  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un paramètre.

En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

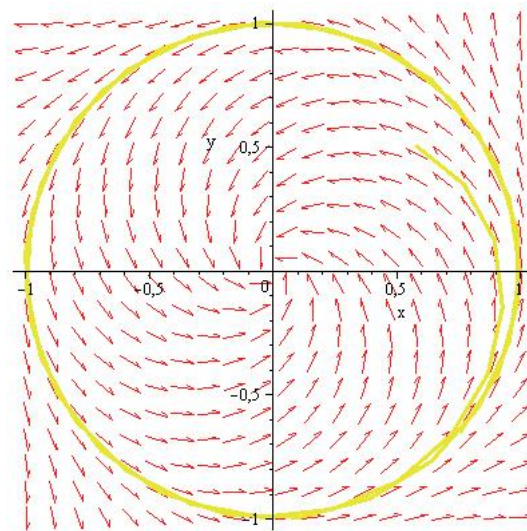
$r = 1$  correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour  $\alpha > 0$ , et instable pour  $\alpha < 0$ . Si  $\alpha = 0$  le système a une infinité de nombre des orbites périodiques et il n'y a pas des cycles limites.

**(Voir figures (1.1), (1.2) et (1.3)).**



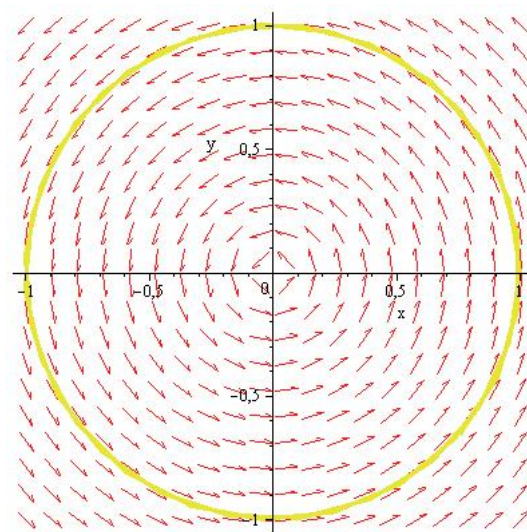
figure(1.1)

Cycle limite stable pour  $\alpha = 1$ .



figure(1.2)

Cycle limite instable pour  $\alpha = -1$ .



figure(1.3)

Centre pour  $\alpha = 0$ .

## 1.7 Quelques formules mathématiques

Dans notre étude, nous allons utiliser les formules suivantes et pour plus de détails voir [1].

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \begin{cases} \neq 0, & \text{si } i \text{ et } j \text{ pair,} \\ = 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair,} \\ = \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=0, \\ = \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=2, \\ = \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=4, \\ = \frac{15\pi \alpha_k}{2^{k+2} (k+3)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=6, \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\alpha_k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$ ,  $\alpha_{k+1} = (2k+1)\alpha_k$ .

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta \begin{cases} \neq 0, & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ = 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair,} \\ = \pi C_{i,l}, & \text{i pair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ = \pi \tilde{C}_{i,l}, & \text{i pair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta \begin{cases} \neq 0, & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ = 0, & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ impair,} \\ = \pi K_{i,l}, & \text{i impair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ = \pi \tilde{K}_{i,l}, & \text{i impair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $C_{i,l}$ ,  $\tilde{C}_{i,l}$ ,  $K_{i,l}$ ,  $\tilde{K}_{i,l}$  sont des constantes non nulles .

$$\bullet \int_0^\theta \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta). \quad (1.11)$$

$$\bullet \int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta. \quad (1.12)$$

$$\bullet \int_0^\theta \cos^{2i+1} t \sin^2 t dt = \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta, \quad (1.13)$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l} & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,l} & l = i+1. \end{cases}$$

$$\bullet \int_0^\theta \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{8}\theta - \frac{1}{32} \sin(4\theta). \quad (1.14)$$

$$\bullet \int_0^\theta \sin^4 t dt = \frac{3}{8}\theta - \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{1}{32} \sin(4\theta). \quad (1.15)$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{4}. \quad (1.16)$$

## Chapitre 2

### Théorème de moyennisation du premier et deuxième ordre

## 2.1 Introduction

La théorie de la moyennisation est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaire et en particulier, de leurs orbites périodiques.

En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. La méthode de la moyennisation réduit ce problème difficile des systèmes différentiels à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire. Cette méthode est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par **Krylov** et **Bogoliubov** en (1937) [3] et **Bogoliubov** et **Mitropolskii** (1961) [2]. Elle a été développée par **Verhulst** [13], **Sanders** et **Verhulst**[12], **Malkin** (1956)[9], **Roseau** (1966) [11], **Llibre** et **Buica** (2004) [4].

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où  $t \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon < 1$  et  $f$  est T-périodique en  $t$ , et de déterminer l'équation moyennée associée à cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x), \quad (2.2)$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt,$$

et chercher les solutions périodiques de l'équation (2.1).

Dans ce chapitre nous allons introduire les résultats principaux sur la théorie de la moyennisation utilisés pour accomplir les travaux de ce mémoire.

## 2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

Ce théorème donne une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques des systèmes différentiels périodiques.

**Téorème 2.1**

Soit le système différentiel suivant

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.3)$$

où  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues, T-périodiques en la première variable et  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous définissons  $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme suit

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2.4)$$

Supposons que

- (i)  $F_1$  et  $R$  sont localement lipschitziennes par rapport à  $x$ .
- (ii) Pour  $a \in D$  avec  $F_{10}(a) = 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $F_{10}(z) \neq 0$ , pour tout  $z \in \bar{V}a$  et  $\det(D_z F_{10}(a)) \neq 0$ .

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.3) T-périodique isolée telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve du Théorème 2.1** Voir ([12], [13]).

**Exemple 2.1** Soit l'équation de **Van Der Pol** :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad (2.5)$$

l'équation peut s'écrire sous la forme du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.6)$$

En coordonnées polaires  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$ , le système perturbé (2.6) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (2.7)$$

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2) \quad , |x| < 1.$$

On pose

$$x = \varepsilon (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

De (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8} r (r^2 - 4). \end{aligned}$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.6) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{1}{8} r (r^2 - 4) = 0. \quad (2.9)$$

Alors

$$F_{10}(r) = 0 \Rightarrow r = 2 > 0,$$

et

$$F'_{10}(r) = \frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow F'_{10}(2) = 1 \neq 0.$$

D'après le Théorème 2.1 le système (2.6) possède un seul cycle limite, pour,  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit.

## 2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions des certains systèmes différentiels périodiques.

### Théorème 2.2

Soit le système différentiel suivant

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.10)$$

où  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à  $t$ .  $D$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On définit  $F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.11)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, s) dt + F_2(s, z)] dz. \quad (2.12)$$

Supposons que :

- (i) Pour tout  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1 \in C^1$ ,  $F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement lipschitziennes par rapport à  $x$ .  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ .
- (ii) Pour  $V \subset D$ , un sous ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\forall \varepsilon \in ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \setminus \{0\}$ , il existe  $a_\varepsilon \in V$  tel que :  $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$ , et  $\det(F'_{10} + \varepsilon F'_{20})(a) \neq 0$ .

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique isolée  $\varphi(0, \varepsilon)$  de l'équation (2.10) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$ .

**Preuve du Théorème 2.2** Voir([12], [13]).

**Remarques 2.1**

- Si  $F_{10}$  n'est pas identiquement nulle, alors les racines simples positives de  $F_{10} + \varepsilon F_{20}$  sont principalement les racines simples positives de  $F_{10}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit la théorie de la moyennée du premier ordre.
- Si  $F_{10}$  est identiquement nulle et  $F_{20}$  n'est pas identiquement nulle, alors les racines simples positives de  $F_{10} + \varepsilon F_{20}$  sont principalement les racines simples positives de  $F_{20}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit la théorie de la moyennée du second ordre.

**Exemple 2.2** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x = -y + \varepsilon(y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax, \\ y = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \quad (2.13)$$

En coordonnées polaires, le système (2.13) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta},$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \varepsilon + r (-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta \\ & + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta \\ & + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.10) avec

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5), \\ F_2(\theta, r) &= r (-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ &\quad + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a). \end{aligned}$$

Donc nous allons appliquer le théorème précédent

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5), \\ \int_0^\theta F_1(s, r) ds &= \frac{r^2}{3} (8 - 8 \cos^3 \theta - 7 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) \int_0^\theta F_1(s, r) ds + F_2(\theta, r) \right] d\theta. \\ &= r (a - r^2). \end{aligned}$$

L'équation  $F_{20}(r) = 0$  a une seule racine positive  $r = +\sqrt{a}$  et on a  $\frac{d}{dr} F_{20}(r) = a - 3r^2$ .

1. Si  $a > 0$ , alors le système différentiel (2.13) a un cycle limite stable d'amplitude  $r = \sqrt{a}$  car  $\frac{d}{dr} F_{20}(\sqrt{a}) = -2a < 0$ .

2. Si  $a \leq 0$ , alors l'équation  $r(a - r^2)$  n'a pas de racine positive, donc le système différentiel (2.13) n'a pas de cycle limite.

## Chapitre 3

Nombre maximum de cycles limites  
pour une classe des systèmes de Kukles  
généralisés

### 3.1 Introduction et résultats principaux

Dans l'article [7], les auteurs ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodique d'un centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  du système différentiel polynômial de **Kukles** de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

où les polynômes  $f(x), g(x)$  et  $h(x)$  sont de degrés  $n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0 \neq 0$  est un nombre réel. Ils ont prouvé que ce système peut avoir  $\lambda_1^* = \max \left\{ \left[ \frac{n_2}{2} \right], 1 \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre et

$\lambda_2^* = \max \left\{ \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2 - 1}{2} \right], \left[ \frac{n_1 + 1}{2} \right], \left[ \frac{n_3 + 3}{2} \right], \left[ \frac{n_2 + 1}{2} \right] + \left[ \frac{n_3}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{n_1 - 1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{n_3 + 1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2}{2} \right], 1 \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels de **Kukles** plus généralisé que (3.1) de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + k(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.2)$$

où les  $k(x) = \varepsilon k_1(x) + \varepsilon^2 k_2(x)$ ,  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$  où  $k_i(x), f_i(x), g_i(x)$  et  $h_i(x)$  sont de degrés  $\ell, n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0^i \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Nos principaux résultats sont les deux Théorèmes 3.1 et 3.2 .

### 3.2 Application de la méthode de moyennisation du premier ordre

Dans cette section, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximale de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire

$\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  d'une classe de systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon k_1(x)y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon \left( f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + d_0^1 y^3 \right), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $k_1(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$  et  $h_1(x)$  sont de degré  $\ell$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0^1 \neq 0$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

### Théorème 3.1

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre est

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[ \frac{n_2}{2} \right], 1 \right\}.$$

### Preuve du Théorème 3.1

Pour appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, on écrit le système (3.3) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  et  $r > 0$ .

Nous prenons

$$k_1(x) = \sum_{i=0}^{\ell} e_i x^i, \quad f_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i, \quad g_1(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i, \quad h_1(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i.$$

Le système (3.3) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=0}^{\ell} r^{i+1} e_i \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} r^{i+1} b_i \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 \cos \theta \sin^3 \theta \right). \end{cases} \quad (3.4)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, le système (3.4) s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + o(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\ & - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) d\theta, \end{aligned}$$

pour calculer l'expression exacte de  $F_{10}(r)$  nous utilisons les deux expressions (1.8) et (1.16). Nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) d\theta \\ &= -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3}{8} d_0^1 r^2 \right), \end{aligned}$$

où  $\alpha_i = 3.5 \dots (2i - 1)$ .

Donc le polynôme  $F_{10}(r)$  possède au plus  $\lambda_1 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, 1 \right\}$  racines réelles positives, alors le système (3.3) a  $\lambda_1$  cycles limites. Par conséquent, le **Théorème 3.1** est démontré.

**Exemple 3.1**

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y + xy + x^2y), \\ \dot{y} = x - \varepsilon(x - 12y + 10x^2y - 16x^4y + xy^2 + 10y^3). \end{cases} \quad (3.6)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et  $r > 0$ .

Le système (3.6) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 12r \sin^2 \theta - 10r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \quad + 16r^5 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 10r^3 \sin^4 \theta), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r}(r + 2r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin^2 \theta - 12r \cos \theta \sin \theta \\ \quad + 10r^3 \cos^3 \theta \sin \theta - 16r^5 \cos^5 \theta \sin \theta + 10r^3 \cos \theta \sin^3 \theta). \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on resout l'équation

$$F_{10}(r) = r(-5r^2 + 6 + r^4). \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) possède deux racines positives  $r_1 = \sqrt{2}$  et  $r_2 = \sqrt{3}$ .

D'après le **Théorème 2.1** le système (3.6) a exactement deux cycles limites qui bifurques des orbites périodique du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ .

### 3.3 Application de la méthode de moyennisation du deuxième ordre

Dans cette section, en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, nous étudions le nombre maximale de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  d'une classe des systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon k_1(x)y + \varepsilon^2 k_2(x)y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon (f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + d_0^1 y^3) \\ \quad - \varepsilon^2 (f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + d_0^2 y^3), \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $k_i(x), f_i(x), g_i(x)$  et  $h_i(x)$  sont des polynômes de degré  $\ell$ ,  $n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0^i \neq 0$  telle que  $1 \leq i \leq 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

#### Théorème 3.2

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ , en utilisant la méthode de moyennisation du second ordre est

$$\lambda_2 = \max \left\{ 1, \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{\ell - 1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2 + 1}{2} \right], \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2 - 1}{2} \right], \left[ \frac{n_2 + 1}{2} \right] + \left[ \frac{n_3}{2} \right], \left[ \frac{\ell + 2}{2} \right], \left[ \frac{n_1 + 1}{2} \right], \left[ \frac{n_3 + 3}{2} \right] \right\}.$$

#### Preuve du Théorème 3.2

Pour appliquer la méthode de moyennisation du second ordre, on écrit le système (3.8) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$  et  $r > 0$ .

Nous prenons

$$k_2(x) = \sum_{i=0}^{\ell} v_i x^i, \quad f_2(x) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i x^i, \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} q_i x^i, \quad h_2(x) = \sum_{i=0}^{n_3} s_i x^i.$$

Le système (3.8) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) + \varepsilon^2 \left( \sum_{i=0}^{\ell} v_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^2 r^3 \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. + d_0^1 r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \right) - \frac{\varepsilon^2}{r} \left( \sum_{i=0}^{\ell} v_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_0^2 r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \right). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, le système (3.9) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^3),$$

où :

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\ & - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 \sin^4 \theta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned}
 F_2(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\ell} v_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n1} p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n3} s_i r^{i+2} \cos^i \theta \\
 & \times \sin^3 \theta - d_0^2 r^3 \sin^4 \theta + \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n1} a_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n2} b_i r^i \cos^i \theta \right. \\
 & \times \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n3} c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^2 \sin^4 \theta \left. \right) \times \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n1} a_i r^i \right. \\
 & \times \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 \sin^3 \theta \cos \theta \left. \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pour calculer  $F_{20}(r)$ , prenant  $F_{10}(r)$  identiquement nulle ce qui equivalent à

$$\begin{cases} b_2 = -3d_0^1, & \text{si } i = 1, \\ b_{2i} = 0, & \text{si } 0 \leq i \leq, \left[ \frac{n_2}{2} \right] \text{ et } i \neq 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

En remplaçant les expressions (3.12) dans (3.10) et (3.11) on obtient

$$\begin{aligned}
 F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\left[ \frac{n_2-1}{2} \right]} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \\
 & - \sum_{i=0}^{n3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^3 (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\ell} v_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n1} p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n3} s_i r^{i+2} \\
 & \times \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^2 r^3 \sin^4 \theta + \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n1} a_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\
 & \left. - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n3} c_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta - d_0^1 r^2 (\sin^4 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \right) \\
 & \times \left( \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+2} \theta \sin \theta \right. \\
 & \left. + \sum_{i=0}^{n3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 (\sin^3 \theta \cos \theta - 3 \cos^3 \theta \sin \theta) \right).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\ell} e_i (i+1) r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{n1} a_i i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} (2i+2) r^{2i+1} \\
 & \times \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^{n3} c_i (i+2) r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta - 3r^2 d_0^1 (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Et

$$y_1(\theta, r) = \int_0^{\theta} F_1(s, r) ds,$$

pour calculer l'expression exacte de  $y_1(\theta, r)$  nous utilisons les expressions (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 y_1(\theta, r) = & \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+1} \left( \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) \right) + \sum_{i=0}^{n1} a_i r^i \left( \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta) \right) \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta - \sum_{i=0}^{n3} c_i r^{i+2} \left( \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta \right. \\
 & \left. + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta \right) - r^3 d_0^1 \left( \frac{\sin(4\theta)}{8} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l} & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,l} & l = i + 1. \end{cases}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r),$$

telle que

$$F_{20}^1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(\theta, r) d\theta,$$

$$F_{20}^2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta.$$

Dans les Lemmes qui suivent, nous calculons les intégrales  $F_{20}^1(r)$  et  $F_{20}^2(r)$ .

### Lemme 3.1

L'intégrale  $F_{20}^1(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par

$$F_{20}^1(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} M_1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} M_2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} M_3$$

$$+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} r^{2i+3} M_4 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} r^{2i+3} M_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} r^{2i+5} M_6, \quad (3.17)$$

où

$$M_1 = e_{2i+1} b_{2j+1} \left( \frac{(j+1)\alpha_{i+j+2}}{(2i+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} - (i+1) \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} \right),$$

$$M_2 = a_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{-(j+1)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + i \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} \right),$$

$$M_3 = c_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{-(j+1)(10i+4j+15)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (i+1) \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \tilde{C}_{i,l} \right),$$

$$M_4 = e_{2i} (2i+1) d_0^1 \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \frac{2K_{2i+1,1} - K_{2i+1,2}}{16} \right),$$

$$M_5 = a_{2i+1} (2i+1) d_0^1 \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \frac{K_{2i+1,2} - 2K_{2i+1,2}}{16} \right),$$

$$M_6 = c_{2i+1} d_0^1 \left( \frac{(90i+45)\alpha_i}{2^{i+4}(i+4)!} + (2i+3) \left( \frac{\tilde{K}_{2i+1,2} - 2\tilde{K}_{2i+1,1}}{16} \right) \right).$$

**Preuve 1** Des expressions (3.15) et (3.16) nous avons

$$\begin{aligned}
 F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(\theta, r) y_1(\theta, r) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} e_i e_j \frac{r^{i+1}(j+1)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_1} e_i a_j \frac{r^{i+j} j}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta d\theta \right. \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+2}(2j+2)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_3} e_i c_j \frac{r^{i+j+2}(j+2)}{(i+2)} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\ell} e_i \frac{3r^{i+3}}{(i+2)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} e_i e_j \\
 &\quad \times \frac{r^{i+j+1}(j+1)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_1} e_i a_j \frac{r^{i+1} j}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin \theta d\theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+2}(2j+2)}{(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_3} e_i c_j \frac{r^{i+j+2}(j+2)}{(i+2)} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin^3 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\ell} e_i \frac{3r^{i+3}}{(i+2)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+4} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+2} \theta \sin^4 \theta) d\theta \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\ell} a_i e_j \frac{r^{i+j}}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_1} a_i a_j \frac{r^{i+j-1} j}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta d\theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+1}(2j+1)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_3} a_i c_j \frac{r^{i+j+1}(j+2)}{(i+1)} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i \frac{3r^{i+2}}{(i+1)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\ell} a_i e_j \frac{r^{i+j}(j+1)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_1} a_i a_j \frac{r^{i+j-1} j}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin \theta d\theta \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+1}(2j+2)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_3} a_i c_j \frac{r^{i+j+1}(j+2)}{(i+1)} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_i \frac{3r^{i+2}}{(i+1)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+3} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta) d\theta \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\ell} b_{2i+1} e_j \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} r^{2i+j+2}(j+1) \int_0^{2\pi} \sin(2l+1)\theta \sin \theta \cos^{j+1} \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} b_{2i+1} a_j \\
 &\quad \times \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} r^{2i+j+1} j \int_0^{2\pi} \sin(2l+1)\theta \sin \theta \cos^j \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} b_{2j+1} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} r^{2i+2j+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (j+2) \int_0^{2\pi} \sin(2l+1)\theta \sin^2 \theta \cos^{2j+1} \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} b_{2i+1} c_j \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} r^{2i+j+3} (j+2) \int_0^{2\pi} \sin(2l+1) \\
 & \times \theta \sin^3 \theta \cos^j \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} 3r^{2i+4} d_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(2l+1)\theta (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\
 & - 2 \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\ell} c_i 4e_j \frac{r^{i+j+2}(j+1)}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta d\theta + 2 \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_1} c_i a_j \frac{r^{i+j+1} j}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta d\theta \\
 & + 2 \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \frac{r^{i+2j+2}(2j+2)}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta + 2 \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_3} c_i c_j \frac{r^{i+j+1}(j+2)}{(i+1)(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \\
 & \times \sin^3 \theta d\theta + 6 \sum_{i=0}^{n_3} c_i \frac{r^{i+4}}{(i+1)(i+3)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\ell} c_i e_j \frac{r^{i+j+2}(j+1)}{(i+1)} \\
 & \times \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2j+2} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_1} c_i a_j \frac{r^{i+j+1} j}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \\
 & \times \frac{r^{i+2j+3}(2j+2)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_3} c_i c_j \frac{r^{i+j+3}(j+2)}{(i+1)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
 & - \sum_{i=0}^{n_3} c_i \frac{3r^{i+4}}{(i+1)} d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+3} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta) d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\ell} c_i e_j \frac{r^{i+j+3}(j+1)}{(i+3)} \\
 & \times \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+4} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_1} c_i a_j \frac{r^{i+j+1} j}{(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} \\
 & \times \frac{r^{i+2j+3}(2j+2)}{(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+4} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_3} c_i c_j \frac{r^{i+j+3}(j+2)}{(i+3)} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta \\
 & + \sum_{i=0}^{n_3} c_i \frac{r^{i+4}}{(i+3)} 3d_0^1 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^{i+5} \theta \sin^2 \theta + \cos^{i+3} \theta \sin^4 \theta) d\theta - \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{\ell} e_j (j+1) r^{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \\
 & \times \sin(4\theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{n_1} a_j j r^{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin(4\theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} (2j+2) r^{2j+4} \\
 & \times \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin(4\theta) \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{n_3} c_j (j+2) r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin(4\theta) \sin^3 \theta d\theta + \frac{3}{8} d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \\
 & \times (-3 \cos^2 \theta \sin(4\theta) \sin^2 \theta + \sin(4\theta) \sin^4 \theta) d\theta + \frac{1}{4} d_0^1 \sum_{i=0}^{\ell} e_j (j+1) r^{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin \theta \sin(2\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} d_0^1 \sum_{i=0}^{n_1} a_{ij} r^{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin \theta \sin(2\theta) d\theta - \frac{1}{4} d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} (2j+2) r^{2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+1} \theta \sin^2 \theta \\
 & \times \sin(2\theta) d\theta - \frac{3}{4} d_0^1 \sum_{i=0}^{n_3} c_j (j+2) r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^3 \theta \sin(2\theta) d\theta - \frac{3}{4} d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin(2\theta) \\
 & + \sin^4 \theta \sin(2\theta)) d\theta.
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'expression de  $F_{20}^1(r)$ , nous utilisons les expressions (1.8), (1.9) et (1.10) on obtient

$$\begin{aligned}
 F_{20}^1(r) = & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{(2j+2)}{(2i+3)} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} - d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+3} \frac{9(2i+1)\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \frac{(2j+2)}{(2i+1)} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} + d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+3} \frac{9(2i+1)\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} e_{2j+1} \frac{(2j+2)}{2} r^{2i+2j+3} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} \frac{(2j+2)}{2} r^{2i+2j+3} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \tilde{C}_{i,l} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{(2j+2)}{2^{i+j+2}(2i+1)} \\
 & \times \frac{\alpha_{i+j+1}}{(i+j+2)!} + d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+5} \frac{9(2i+1)\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{(2j+2)}{2^{i+j+3}(2i+3)} \\
 & \times \frac{\alpha_{i+j+2}}{(i+j+3)!} - d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+5} \frac{9(2i+3)(2i+1)\alpha_i}{2^{i+4}(i+3)!} - \frac{1}{16} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2j} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,2} \\
 & + \frac{1}{16} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,2} + \frac{1}{16} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2j+1} (2j+3) r^{2j+5} \tilde{K}_{2j+1,2} + \frac{1}{8} d_0^1 \\
 & \times \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2j} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,1} - \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} (2j+1) r^{2j+3} K_{2j+1,1} - \frac{1}{8} d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2j+1} \\
 & \times (2j+3) r^{2j+5} \tilde{K}_{2j+1,1},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

où  $C_{i,l}, \tilde{C}_{i,l}, K_{i,l}, \tilde{K}_{i,l}$  sont des constantes non nulles .

Pour une expression plus simplifiée de (3.18), on obtient le polynôme (3.17)

**Lemme 3.2**

L'intégrale  $F_{20}^2(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par

$$\begin{aligned}
 F_{20}^2(r) = & -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3}{8} d_0^2 r^2 \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} N_1 \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} N_2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} N_3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} r^{2i+3} N_4 \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} r^{2i+3} N_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} r^{2i+5} N_6,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

où

$$\begin{aligned}
 N_1 &= e_{2i+1} b_{2j+1} \left( \frac{(i+j)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
 N_2 &= a_{2i} b_{2j+1} \left( \frac{-\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right), \\
 N_3 &= b_{2i+1} c_{2j} \left( \frac{-3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
 N_4 &= e_{2i} \left( \frac{-6d_0^1(i^2+1)\alpha_i}{2^{i+2}(i+3)!} \right), \\
 N_5 &= a_{2i+1} \left( \frac{d_0^1(6i+6)\alpha_{i+1}}{2^{i+2}(i+3)!} \right), \\
 N_6 &= c_{2i+1} \left( \frac{6d_0^1(18i+12)\alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+4)!} \right).
 \end{aligned}$$

**Preuve 2** De l'expression (3.14) on a

$$\begin{aligned}
 F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\ell} v_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} q_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta d\theta - d_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} e_i e_j r^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_1} e_i a_j r^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_3} e_i c_j r^{i+j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta + d_0^1 \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2} \theta \sin^4 \theta d\theta - 3d_0^1 \sum_{i=0}^{\ell} e_i r^{i+3} \\
& \times \int_0^{2\pi} \cos^{i+4} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\ell} a_i e_j r^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_1} a_i a_j r^{i+j-1} \int_0^{2\pi} \sin \theta \\
& \times \cos^{i+j+1} \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_i b_{2j+1} r^{i+2j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_3} a_i c_j r^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \\
& \times \sin^3 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+3} \theta \sin^2 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\ell} \\
& \times b_{2i+1} e_j r^{2i+j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+1} \theta \sin^4 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} b_{2i+1} a_j r^{2i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta \\
& - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_3} b_{2i+1} c_j r^{2i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \\
& \times \sin^4 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2} \theta \sin^5 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\ell} c_i e_j r^{i+j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j} \theta \sin^5 \theta d\theta \\
& - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_1} c_i a_j r^{i+j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1} \theta \sin^3 \theta d\theta - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} r^{i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
& - \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_3} c_i c_j r^{i+j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+2} \theta \sin^5 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+4} \int_0^{2\pi} \cos^{i+3} \theta \sin^4 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+4} \\
& \times \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^6 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{j=0}^{\ell} e_j r^{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^6 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
& - d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} r^{2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+2} \theta \sin^5 \theta d\theta - d_0^1 \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} \theta \sin^6 \theta d\theta - d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \\
& \times \cos \theta \sin^7 \theta d\theta + 3d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin^5 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{j=0}^{\ell} e_j r^{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2} \\
& \times \int_0^{2\pi} \cos^{j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} r^{2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2j+4} \theta \sin^3 \theta d\theta + 3d_0^1 \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{j+3} \theta \\
& \times \sin^4 \theta d\theta - d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta - 3d_0^1 r^5 \int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \sin^3 \theta d\theta),
\end{aligned}$$

nous utilisons les deux expressions (1.8) et (1.16) nous trouvons

$$\begin{aligned}
 F_{20}^2(r) = & -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3}{8} d_0^2 r^2 \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left( \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+3} \left( \frac{3d_0^1 \alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+3} \left( \frac{3d_0^1 \alpha_{i+2}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \\
 & \times \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+3} \left( \frac{3d_0^1 \alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+3} \left( \frac{3d_0^1 \alpha_{i+2}}{2^{i+3}(i+3)!} \right) \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} e_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left( \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \\
 & \times \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} \left( \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \\
 & \times c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left( \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+5} \left( \frac{9d_0^1 \alpha_{i+2}}{2^{i+4}(i+5)!} \right) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} \\
 & \times r^{2i+5} \left( \frac{15d_0^1 \alpha_{i+1}}{2^{i+4}(i+4)!} \right) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2j} r^{2j+3} \left( \frac{15d_0^1 \alpha_j}{2^{j+3}(j+3)!} \right) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} r^{2j+3} \left( \frac{3d_0^1 \alpha_{j+1}}{2^{j+3}(j+3)!} \right) \\
 & - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2j} r^{2j+5} \left( \frac{15d_0^1 \alpha_{j+1}}{2^{j+4}(j+4)!} \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} e_{2j} r^{2j+3} \left( \frac{9d_0^1 \alpha_{j+1}}{2^{j+3}(j+3)!} \right) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} r^{2j+3} \\
 & \times \left( \frac{3d_0^1 \alpha_{j+2}}{2^{j+3}(j+3)!} \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2j+1} r^{2j+5} \left( \frac{9d_0^1 \alpha_{j+2}}{2^{j+4}(j+4)!} \right).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pour une expression simplifiée de (3.20), on obtient le polynôme (3.19).

D'après le Lemme 3.1 et le Lemme 3.2 nous avons

$$\begin{aligned}
 F_{20}(r) = & F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r), \\
 = & -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \frac{3}{8} d_0^2 r^2 \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} T_1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} T_2 \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} T_3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} r^{2i+3} T_4 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} r^{2i+3} T_5 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} r^{2i+5} T_6,
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

où

$$\begin{aligned}
 T_1 &= e_{2i+1}b_{2j+1} \left( \frac{(j+1)\alpha_{i+j+2}}{(2i+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} - (i+1) \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} + \frac{(i+j)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
 T_2 &= a_{2i}b_{2j+1} \left( \frac{-(j+1)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + i \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} C_{i,l} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right), \\
 T_3 &= c_{2i}b_{2j+1} \left( \frac{-(j+1)(10i+4j+15)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (i+1) \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \tilde{C}_{i,l} - \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right), \\
 T_4 &= e_{2i}d_0^1 \left( (2i+1) \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \frac{2K_{2i+1,1} - K_{2i+1,2}}{16} \right) - \frac{6(i^2+1)\alpha_i}{2^{i+2}(i+3)!} \right), \\
 T_5 &= a_{2i+1}d_0^1 \left( (2i+1) \left( \frac{9\alpha_i}{2^{i+3}(i+3)!} + \frac{K_{2i+1,2} - 2K_{2i+1,1}}{16} \right) + \left( \frac{(6i+6)\alpha_{i+1}}{2^{i+2}(i+3)!} \right) \right), \\
 T_6 &= c_{2i+1}d_0^1 \left( \frac{(90i+45)\alpha_i}{2^{i+4}(i+4)!} + (2i+3) \left( \frac{\tilde{K}_{2i+1,2} - 2\tilde{K}_{2i+1,1}}{16} \right) + \frac{6(18i+12)\alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+4)!} \right).
 \end{aligned}$$

Donc le polynôme  $F_{20}(r)$  possède au plus

$$\lambda_2 = \max \left\{ 1, \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{\ell-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2+1}{2} \right], \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2+1}{2} \right] + \left[ \frac{n_3}{2} \right], \left[ \frac{\ell+2}{2} \right], \left[ \frac{n_1+1}{2} \right], \left[ \frac{n_3+3}{2} \right] \right\}.$$

racines réelles positives, alors le système **(3.8)** a  $\lambda_2$  cycles limites .

Par conséquent, le **Théorème 3.2** est démontré.

**Exemple 3.2**

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon \left( y + \frac{1}{8}xy + \frac{27}{32}x^2y \right) + \varepsilon^2(xy), \\ \dot{y} = x - \varepsilon \left( \frac{1}{32} + \frac{32}{27}x - 32xy - 3x^2y - x^3y + y^2 + xy^2 + \frac{32}{27}x^2y^2 + y^3 \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left( y - \frac{4343}{96}x^2y - \frac{10403}{2592}x^4y + x^2y^2 + y^3 \right). \end{cases} \quad (3.22)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et  $r > 0$ . Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{20}(r) = r \left( \frac{1}{36}r^6 - \frac{7}{18}r^4 + \frac{49}{36}r^2 - 1 \right). \quad (3.23)$$

L'équation (3.23) possède trois racines positives  $r_1 = 1, r_2 = 2$  et  $r_3 = 3$ .

D'après le **Théorème 2.2** le système (3.22) a exactement trois cycles limites qui bifurquent des orbites périodique du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ .

## Chapitre 4

Nombre maximum de cycles limites  
d'une classe des systèmes différentiels  
de Liénard via la théorie de  
moyennisation

## 4.1 Présentation du problème et résultats principaux

Dans l'article [8], les auteurs ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x) - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $g_1(x) = \varepsilon g_{11}(x)$ ,  $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x)$ ,  $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x)$  et  $f_2(x) = \varepsilon f_{21}(x)$  sont des polynômes de degrés  $k$ ,  $\ell$ ,  $m$  et  $n$  respectivement, et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Ils ont prouvé que le système (4.1) peut avoir  $\max \left\{ \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre.

Dans ce chapitre, on va utiliser le **Théorème 2.1** du chapitre 2 afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x, y) - f_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) - f_2(x, y)y, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y)$ ,  $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y)$ ,  $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y)$ ,  $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y)$  sont des polynômes de degré  $k$ ,  $\ell$ ,  $m$  et  $n$  respectivement de variable  $x$  et  $y$ , et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Notre résultat est le suivant

### Théorème 4.1

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.2) qui bifurquent un centre linéaire  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$  en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est

$$\lambda_3 = \max \left\{ \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{\ell}{2} \right], \left[ \frac{m-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}.$$

## 4.2 Preuve du Théorème 4.1

Pour démontrer le **Théorème 4.1**, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre.

Nous écrivons le système (4.2) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  et  $r > 0$ . On écrit les polynômes  $g_{11}(x, y), g_{21}(x, y), f_{11}(x, y), f_{21}(x, y)$  apparaissant dans (4.2) comme

$$\begin{aligned} g_{11}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^k a_{ij} x^i y^j, & g_{21}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^m c_{ij} x^i y^j \\ f_{11}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} x^i y^j, & f_{21}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^n d_{ij} x^i y^j. \end{aligned}$$

Telle que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x(y - \varepsilon g_{11}(x, y) - \varepsilon f_{11}(x, y)y) + y(-x - \varepsilon g_{21}(x, y) - \varepsilon f_{21}(x, y)y)}{r} \\ &= \frac{-\varepsilon(xg_{11}(x, y) + xyf_{11}(x, y) + yg_{21}(x, y) + y^2g_{11}(x, y))}{r} \\ &= -\varepsilon(\cos \theta g_{11}(x, y) + r \cos \theta \sin \theta f_{11}(x, y) + \sin \theta g_{21}(x, y) + r \sin^2 \theta g_{11}(x, y)) \\ &= -\varepsilon\left(\sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{x(-x - \varepsilon g_{21}(x, y) - \varepsilon f_{21}(x, y)y) - y(y - \varepsilon g_{11}(x, y) - \varepsilon f_{11}(x, y)y)}{r^2} \\ &= \frac{-x^2 - y^2 - \varepsilon(xg_{21}(x, y) + xyf_{21}(x, y) - yg_{11}(x, y) - y^2f_{11}(x, y))}{r^2} \\ &= -1 - \frac{\varepsilon}{r^2}(xg_{21}(x, y) + xyf_{21}(x, y) - yg_{11}(x, y) - y^2f_{11}(x, y)) \\ &= -1 - \frac{\varepsilon}{r}\left(-\sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta - \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, le système (4.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( - \sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta - \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right). \end{array} \right.$$

D'après le développement de Taylor on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x^2) \quad , |x| < 1,$$

où

$$x = \frac{\varepsilon}{r} \left( - \sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta - \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right. \\ \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right),$$

donc

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = \varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right).$$

Soit  $F_{10}(r)$  l'équation moyennée du premier ordre associée au système (4.2).

En utilisant la notation introduite dans le chapitre 2, on calcule

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta,$$

alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i+j=0}^k a_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{\ell} b_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ \left. + \sum_{i+j=0}^m c_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n d_{ij} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right) d\theta.$$

Avec

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta d\theta = \begin{cases} \pi \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \beta_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \delta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \gamma_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair, } j \text{ pair}}}^k a_{ij} \alpha_{ij} r^{i+j} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair, } j \text{ impair}}}^{\ell} b_{ij} \beta_{ij} r^{i+j+1} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^m c_{ij} \delta_{ij} r^{i+j} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^n d_{ij} \gamma_{ij} r^{i+j+1} \right).$$

Donc le polynôme  $F_{10}(r)$  possède au plus

$$\lambda_3 = \max \left\{ \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{\ell}{2} \right], \left[ \frac{m-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$$

racines réelles positives.

Alors le système (4.2) a  $\lambda_3$  cycles limites. Ceci complète la preuve du **Théorème 4.1**.

**Exemple 4.1**

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (-2x + 10xy^2 - 5x^3y^2 + xy^4), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon xy, \end{cases} \quad (4.3)$$

L'équation moyennée du premier ordre est

$$F_{10}(r) = \frac{1}{4}r (r^4 - 5r^2 + 4),$$

qui a exactement deux racines positives  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2$ . Nous concluons donc que le système (4.3) a deux cycles limites.

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail, la méthode de moyennisation d'ordre 1 et 2 a été utilisée pour analyser le nombre maximum de cycles limites dans certains systèmes différentiels polynomiaux en deux dimension .

Cet effort s'inscrit dans la résolution du 16<sup>ème</sup> problème de **Hilbert** qui porte sur la détermination de ce nombre de cycles limites .

A l'avenir, la méthode de moyennisation d'ordre 2 sera appliquée à un système différentiel perturbé, formulé par l'ensemble d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = y - g_1(x, y) - f_1(x, y)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) - f_2(x, y)y, \end{cases}$$

où  $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y) + \varepsilon^2 g_{12}(x, y)$ ,  $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$ ,  $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$ ,  $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$  sont des polynômes de degré  $k, \ell, m$  et  $n$  respectivement de variable  $x$  et  $y$ , et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

# Références

- [1] Abramowitz. M, Stegun. I. *Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC :US Government, Printing Office ; 1964.
- [2] Bogoliubov. N-N, Mitropolskii YU,A. *Asymtotic methods in the theory of non linear oscillations*. Gordon and Breach, New York,1961.
- [3] Bogoliubov. N and Krylov N.M. *Introduction à la mécanique non linéaire, les méthodes approchée et asymtotiques*. Vol 1-2 of Ukrainaska Akad. Nauk Inst. Mec. Paris, chaires de Phys. Math Annales 1937.
- [4] Buicã. A, Llibre. J. *Averaging methods for finding periodic differential systems with a small parameter*. Comm pure Appl.Anal.6 N 1.2007 :103-11.
- [5] Debz. N, Boulfoul. A and Berkane. A. *Limit cycles of a class of planar polynomial differential systems*. Mathematical Methods in The Applied Sciences 2021 ; pp 1-26.
- [6] Hilbert. D, *Mathematische Problems*, Lecture in : Second Internat. Congr. Math. Paris, 1900, Nachr. Ges.Wiss. Gttingen Math. Phys. Ki (1900), 253-297 ; English transl. Bull. Amer. Soc. 8 (1902), 437-479.
- [7] Llibre. J, Mereu. A.C. *Limit cycles for generalized Kukles polynomial differentiel systems*. Nonlinear Anal.**74**, 1261-1271 (2011).
- [8] Llibre. J, Valls. C. *On the number of Limit cycles of a class of polynomial differential systemes*. Proc A :R SOC,2012 ;468 :2347-60.
- [9] Malkin I.G. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. (Russian) Gostexizdat,Moscow. 1956.
- [10] Poincaré. H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. J.Math.Pures, Appl(3) 7 (1881), 375-422.
- [11] Roseau. M. *Vibration non linéaire et théorie de la stabilité*. (French) Springer Tractes in natural, Vol 8 Springer verlag, New York, 1966.

# Références

- [12] Sanders. J-A, Verhulst. F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New york ; 1985.
- [13] Verhulst. F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitex, Springer-Verlag, Berlin, 1996.