

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Faculté des Sciences



كلية العلوم

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Intégration numérique par formules de quadrature :
optimisation de l'estimation d'erreur via la convexité**

Option : AN-EDP

Par :

1. MEDJRAB Ghada

Encadré par : LAKHDARI Abdelghani

MCA ENSTI Annaba

Devant le jury :

Président : NASRI Nassima
Examineur: SACI Fateh

MCB U. SKIKDA
MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Intégration numérique par formules de quadrature : optimisation de l'estimation d'erreur via la convexité

Ghada Medjrab

Dirigé par : Dr. Abdelghani Lakhdari

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Université 20 août 1955, Skikda

Juillet 2023

SSSSSSQ

Dédicace

A ma très chère mère **Saida** Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre ta bienveillance me guide et ta présence à mes coté a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles. A mon très cher père **Tahar** Tu as toujours été à mes cotés pour me soutenir et m'encourager .je vous remercier pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.A mon très cher grand père **Mohamed** Merci de votre soutien et de vos encouragements pour que j'atteigne les plus hauts échelons. Louange à dieu, qui m'a béni avec un grand-père comme vous. A mon oncle **Rabah** je remercie de m'avoir accompagné tout au long de mes études, il m'a aidé soutenu et conseillé merci à mes frères **Asma Anfal Amani Malak Mohamed** .

Merci à l'université qui m'a présenté mon amie **Manal**,
Ma compagne **Kawthar**, et **Marwa, Aya, Assala, Ahlem**

A decorative scroll with a graduation cap and a ribbon. The scroll is light brown with a dark brown border. At the top left, there is a dark brown graduation cap with a tassel. At the bottom right, there is a gold ribbon with a circular seal. The text is written in a cursive font on the scroll.

Remerciement

*Tout d'abord, je voudrais remercier « Allah » qui
m'a éclairé sur le droit chemin et m'a permis de faire cet
humble travail. Je tiens également à exprimer mes sincères
remerciements à mon encadrant M. Sakhdari abdesghani, qui
m'a conduit durant ce travail, merci pour ses précieux
conseils et son suivi sur le déroulement de ce travail
Enfin, je tiens à exprime toute ma gratitude aux
membres du jury pour avoir examiné et jugé
mon travail.*

Résumé

Ce mémoire propose une étude approfondie d'une certaine formule de quadrature de Gauss connue sous le nom de 2-points Left Radau, permettant de déterminer des estimations d'erreurs à la fois dans le cadre classique ainsi que le cadre fractionnaire. Pour cela, nous introduisons deux nouvelles identités clés qui servent de base pour établir des estimations précises pour les fonctions dont la dérivée première en valeur absolue est s -convexe. En utilisant ces identités, nous développons des inégalités spécifiques qui permettent de quantifier l'erreur d'approximation. Enfin, nous présentons quelques applications pratiques pour mettre en évidence l'efficacité de nos résultats.

Abstract :

This thesis proposes an in-depth study of a certain Gaussian quadrature formula known as 2-point Left Radan, allowing to determine error estimates both in the classical Framework as well as the fractional framework. For this, we introduce two new key identities that serve as a basis for establishing precise estimates for functions whose first derivative in absolute value is s -convex. Using these identities, we develop specific inequalities that allow us to quantify the approximation error. Finally, we present some practical applications to highlight the effectiveness of our results.

المخلص :

تقترح هذه الأطروحة دراسة متعمقة لصيغة تربيع غاوسية معينة تعرف باسم نقطتي لافت رادو, مما يسمح بتحديد تقديرات الخطأ في كل من الإطار الكلاسيكي وكذلك الإطار الكسري . لهذا, نقدم هويتين رئيسيتين جديدتين تعملان كأساس لإنشاء تقديرات دقيقة للوظائف التي يكون مشتقها الأول في القيمة المطلقة هو s المحدب. باستخدام هذه الهويات, نطور تفاوتات محددة تسمح بتحديد الخطأ التقريب. أخيراً نقدم بعض التطبيقات العملية لإبراز فعالية نتائجنا.

Table des matières

1	Notions de base	7
1.1	Introduction	7
1.2	Préliminaires	8
2	Estimation de l'erreur dans le cas classique	11
2.1	Identité relative à la formule Left Radau	11
2.2	Résultats principaux	12
3	Estimation de l'erreur dans le cas fractionnaire	18
3.1	Identité fractionnaire relative à la formule Left Radau	18
3.2	Résultats principaux	19
4	Exemple et Applications	26
4.1	Exemple	26
4.2	Formule de quadrature	26
4.3	Moyennes Spéciales	29

1 Notions de base

1.1 Introduction

La théorie de l'approximation des intégrales traite des méthodes permettant d'estimer la valeur des intégrales définies, qui sont utilisées pour déterminer l'aire sous une courbe. Les méthodes les plus courantes pour approximer les intégrales sont les techniques d'intégration numérique, telles que la méthode des trapèzes, la méthode de Simpson et la quadrature de Gauss. Ces méthodes se basent sur l'approximation de l'intégrale comme une somme de fonctions simples, telles que des rectangles ou des moyennes pondérées, et sont largement utilisées dans diverses applications, notamment la résolution d'équations différentielles et les simulations de Monte Carlo.

L'exactitude de ces approximations peut être estimée à l'aide d'inégalités intégrales (ou bornes d'erreur), qui fournissent des limites supérieures et inférieures pour l'erreur de l'approximation. Le choix de la meilleure méthode d'approximation pour un problème donné dépend de plusieurs facteurs, notamment la nature de l'intégrande, la précision requise et les ressources informatiques disponibles.

L'une des stratégies les plus connues pour l'approximation des intégrales est l'approche de Newton-Cotes. Les règles de quadrature de type Newton-Cotes sont basées essentiellement sur l'interpolation polynomiale par laquelle l'intégrale d'une fonction ψ donnée est approchée à l'aide de l'aire de rectangles ou de courbes paraboliques. Elles sont simples et faciles à mettre en œuvre, et elles sont souvent utilisées comme point de départ pour des méthodes plus avancées. Cependant, elles sont généralement moins précises et moins efficaces que la quadrature de Gauss. L'exactitude des règles de Newton-Cotes est limitée par le degré du polynôme utilisé pour approximer l'intégrande, et elles ne conviennent pas bien à l'approximation des intégrales de fonctions présentant des singularités ou des discontinuités.

En revanche, la quadrature de Gauss utilise un ensemble de points et de poids soigneusement choisis pour approcher l'intégrale, et elle est particulièrement adaptée à l'approximation des intégrales de fonctions régulières. La quadrature de Gauss nécessite généralement plus de calcul que les règles de Newton-Cotes, mais elle fournit une approximation plus précise et est souvent utilisée dans la résolution d'équations différentielles et d'autres applications nécessitant une grande précision.

En outre, la théorie convexe est un sujet remarquable qui a été utilisé dans de nombreux domaines de la théorie de l'optimisation, de la physique, des systèmes énergétiques et des applications de l'ingénierie [18]. Les inégalités possèdent un modèle mathématique intéressant en raison de leurs applications significatives en calcul traditionnel, en calcul fractionnaire, en calcul quantique, en ensembles fractals, etc. Récemment, de nombreux mathématiciens se sont consacrés à l'étude des inégalités et des propriétés associées à la convexité. Cette idée est liée à l'évolution de la théorie des inégalités, qui est un outil clé

pour étudier les estimations d'erreur des formules de quadrature, voir [2, 3, 4, 5, 13, 24, 25].

Enfin, il convient de mentionner que la théorie des inégalités intégrales est étroitement liée à la notion de convexité. La convexité représente un sujet remarquable qui a trouvé des applications dans de nombreux domaines de la théorie de l'optimisation, de la physique, des systèmes énergétiques et des applications de l'ingénierie.

En résumé, cette étude explore les liens entre la théorie des inégalités intégrales et la convexité, mettant en évidence l'importance de la convexité dans la résolution de problèmes d'optimisation et l'analyse des erreurs d'approximation des intégrales. Elle contribue ainsi à une meilleure compréhension des fondements théoriques de ces sujets et à leur application dans divers domaines de la science et de l'ingénierie.

1.2 Préliminaires

Dans cette section, nous allons présenter quelques définitions et propriétés fondamentales liées à la notion de convexité et au calcul fractionnaire, qui sont essentielles pour notre étude.

Nous rappelons qu'une fonction $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, pour tous $\mu, \nu \in I$ et tout $t \in [0, 1]$ (voir [18]), nous avons :

$$\psi(t\mu + (1-t)\nu) \leq t\psi(\mu) + (1-t)\psi(\nu).$$

De plus, pour une valeur fixée $s \in (0, 1]$, une fonction $\psi : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, non négative, est dite s -convexe dans le second sens si

$$\psi(t\mu + (1-t)\nu) \leq t^s\psi(\mu) + (1-t)^s\psi(\nu)$$

est vérifiée pour tous $\mu, \nu \in I$ et $t \in [0, 1]$ (voir [1]).

Cette définition de s -convexité est cruciale pour notre étude. Elle permet de caractériser les propriétés des fonctions que nous examinerons dans le cadre des inégalités intégrales et de leurs applications.

Définition 1.2.1 ([10]). Soit $\psi \in L^1[a, b]$. Les intégrales fractionnaires de type Riemann-Liouville $I_{a+}^\alpha \psi$ et $I_{b-}^\alpha \psi$ d'ordre $\alpha > 0$ avec $a \geq 0$ sont définies par

$$I_{a+}^\alpha \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \psi(t) dt, \quad x > a$$

$$I_{b-}^\alpha \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \psi(t) dt, \quad b > x$$

respectivement, où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, est la fonction Gamma et $I_{a+}^0 \psi(x) = I_{b-}^0 \psi(x) = \psi(x)$.

Définition 1.2.2 ([10]). La fonction beta est définie pour tout nombres complexes x, y tels que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, comme suit

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma.

Définition 1.2.3 ([10]). Pour tout nombres complexes x, y tels que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$. La fonction Beta incomplète est donnée par

$$B_\kappa(x, y) = \int_0^\kappa t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \kappa < 1.$$

Définition 1.2.4 ([10]). La fonction hypergéométrique est définie pour $Re(c) > Re(b) > 0$ et $|z| < 1$, comme suit

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt,$$

où $c > b > 0, |z| < 1$ et $B(\cdot, \cdot)$ est la fonction Beta.

Définition 1.2.5 (Inégalité de Hölder [8]). Soient ψ et ϕ deux fonctions continues sur $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors on a

$$\int_a^b \psi(t)\phi(t)dt \leq \left(\int_a^b \psi(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \phi(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

pour tout $p, q > 1$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.2.6 (Inégalité "Power mean" [8]). Soient ψ et ϕ deux fonctions continues sur $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors on a

$$\int_a^b \psi(t)\phi(t)dt \leq \left(\int_a^b \psi(t)dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \psi(t)\phi(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $p > 1$.

L'objectif de ce mémoire est d'établir des estimations d'erreur pour une règle de quadrature de type Gaussienne, à la fois dans le cadre classique et le cadre fractionnaire. La formule spécifique étudiée est appelée formule de Radau à 2 points, introduite par R. Radau dans l'article [19], et est définie comme suit :

$$\int_a^b \psi(t) dt = \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right) + \mathcal{E}(\psi),$$

où $\mathcal{E}(\psi)$ représente l'erreur d'approximation.

Dans cette optique, nous commençons par démontrer une nouvelle identité intégrale pour la formule considérée. En utilisant cette identité, nous établissons ensuite certaines inégalités de type Radau à 2 points pour les dérivées s -convexes. Des applications aux moyennes spéciales sont fournies à la fin.

Ce mémoire est organisé comme suit : le chapitre 1 est consacré à l'introduction et aux préliminaires, où nous posons les bases nécessaires pour notre étude. Le chapitre 2 est dédié à l'estimation de l'erreur de la formule de Left Radau à deux points dans le cas classique, avec des inégalités spécifiques pour les dérivées convexes. Le chapitre 3 étend cette estimation d'erreur au cas fractionnaire, en développant des techniques adaptées au calcul fractionnaire et en établissant des inégalités pour les dérivées s -convexes. Enfin, le chapitre 4 explore quelques applications pratiques des résultats obtenus, en mettant en évidence l'utilisation de ces estimations d'erreur dans des problèmes tels que le calcul de moyennes spéciales.

2 Estimation de l'erreur dans le cas classique

Nous commençons par introduire une nouvelle identité qui fera l'objet de l'outil principal permettant de démontrer les résultats.

2.1 Identité relative à la formule Left Radau

Lemme 2.1.1. Soit $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° (L'intérieur de I), $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, et $\psi' \in L^1[a, b]$, alors on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \\ &= \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 (8t-3) \psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3}) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (2t-2) \psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb) dt \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient

$$I_1 = \int_0^1 (8t-3) \psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3}) dt$$

et

$$I_2 = \int_0^1 (2t-2) \psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb) dt.$$

Intégrons par parties I_1 , nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3}{2(b-a)} (8t-3) \psi((1-t)a + t\frac{a+2b}{3}) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ & \quad - \frac{12}{(b-a)} \int_0^1 \psi((1-t)a + t\frac{a+2b}{3}) dt \\ &= \frac{9}{2(b-a)} \psi(a) + \frac{15}{2(b-a)} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{18}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+2b}{3}} \psi(t) dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{3}{b-a} (2t - 2) \psi \left((1-t) \frac{a+2b}{3} + tb \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad - \frac{6}{b-a} \int_0^1 \psi \left((1-t) \frac{a+2b}{3} + tb \right) dt \\
&= \frac{6}{b-a} \psi \left(\frac{a+2b}{3} \right) - \frac{18}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+2b}{3}}^b \psi(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

En sommant (2.1)-(2.2), ensuite multiplier les deux membre de l'égalité obtenue par $\frac{b-a}{9}$, nous obtenons le résultat demandé. \square

2.2 Résultats principaux

Théorème 2.2.1. *Soit $\psi : [a, b] \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) telle que $\psi' \in L^1[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. Si pour un certain $s \in (0, 1]$, $|\psi'|$ est s -convexe dans le second sens, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(a)| + \frac{2}{(s+1)(s+2)} |\psi'(b)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{7s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8}\right)^{s+1} \right) \left| \psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right| \right).
\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.1.1, la s -convexité de $|\psi'|$ et les propriétés du module, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 |8t - 3| |\psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3})| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 (2 - 2t) |\psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb)| dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{9} \left(\int_0^{\frac{3}{8}} (3-8t) |\psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3})| dt \right. \\
&\quad + \int_{\frac{3}{8}}^1 (8t-3) |\psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3})| dt \\
&\quad \left. + \int_0^1 (2-2t) |\psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb)| dt \right) \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\int_0^{\frac{3}{8}} (3-8t) ((1-t)^s |\psi'(a)| + t^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})|) dt \right. \\
&\quad + \int_{\frac{3}{8}}^1 (8t-3) ((1-t)^s |\psi'(a)| + t^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})|) dt \\
&\quad \left. + \int_0^1 2(1-t) ((1-t)^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})| + t^s |\psi'(b)|) dt \right) \\
&= \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^{\frac{3}{8}} (3-8t)(1-t)^s dt + \int_{\frac{3}{8}}^1 (8t-3)(1-t)^s dt \right) |\psi'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^{\frac{3}{8}} (3-8t)t^s dt + \int_{\frac{3}{8}}^1 (8t-3)t^s dt + \int_0^1 2(1-t)^{s+1} dt \right) |\psi'(\frac{a+2b}{3})| \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 2(1-t)t^s dt \right) |\psi'(b)| \right) \\
&= \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(a)| + \frac{2}{(s+1)(s+2)} |\psi'(b)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{7s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(\frac{a+2b}{3})| \right).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Corollaire 2.2.2. Si $|\psi'|$ est une fonction convexe, alors selon le Théorème 2.2.1, on a

$$\left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \leq \frac{67(b-a)}{216} \left(\frac{157|\psi'(a)| + 347\left|\psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right| + 32|\psi'(b)|}{536} \right).$$

Théorème 2.2.3. Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable (a, b) telle que $\psi' \in L^1[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. Si pour un certain $s \in (0, 1]$ et $q > 1$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $|\psi'|^q$ est s -convexe dans le second sens, alors on a

$$\left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \leq \frac{b-a}{9^{(p+1)^p}} \left(\left(\frac{5^{p+1} + 3^{p+1}}{8} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\psi'(a)|^q + \left|\psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + 2 \left(\frac{\left|\psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right|^q + |\psi'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 2.1.1, les propriétés du module, l'inégalité de Hölder et la s -convexité de $|\psi'|^q$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \\ & \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^1 |8t - 3|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 (2 - 2t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ & \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^{\frac{5}{8}} (5 - 8t)^p dt + \int_{\frac{5}{8}}^1 (8t - 5)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \left((1-t)^s |\psi'(a)|^q + t^s \left| \psi' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (2-2t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left((1-t)^s \left| \psi' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q + t^s |\psi'(b)|^q \right) dt \right) \\
& = \frac{b-a}{9(p+1)^p} \left(\left(\frac{5^{p+1}+3^{p+1}}{8} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\psi'(a)|^q + \left| \psi' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + 2 \left(\frac{\left| \psi' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q + |\psi'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Corollaire 2.2.4. Si $|\psi'|^q$ est une fonction convexe, alors selon le Théorème 2.2.3, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi \left(\frac{a+2b}{3} \right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9(p+1)^p} \left(\left(\frac{5^{p+1}+3^{p+1}}{8} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\psi'(a)|^q + \left| \psi' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + 2 \left(\frac{\left| \psi' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q + |\psi'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.5. Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) telle que $\psi' \in L^1[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. Si pour un certain $s \in (0, 1]$ et $q \geq 1$, $|\psi'|^q$ est s -convexe dans le second sens, alors on a

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi \left(\frac{a+2b}{3} \right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{17}{8} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8} \right)^{s+1} \right) |\psi'(a)|^q \right. \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8} \right)^{s+1} \right) \left| \psi' \left(\frac{2a+b}{3} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\frac{2}{s+2} \left| \psi' \left(\frac{2a+b}{3} \right) \right|^q + \frac{2}{(s+1)(s+2)} |\psi'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant 2.1.1, les propriétés du module, l'inégalité de power mean et la s -convexité de $|\psi'|$, nous obtenons

$$\left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi \left(\frac{a+2b}{3} \right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^1 |8t-3| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |8t-3| |\psi'((1-t)a + t\frac{2a+b}{3})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 (2-2t) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (2-2t) |\psi'((1-t)\frac{2a+b}{3} + tb)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^{\frac{3}{8}} (3-8t) dt + \int_{\frac{3}{8}}^1 (8t-3) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |8t-3| \left((1-t)^s |\psi'(a)|^q + t^s |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 (2-2t) \left((1-t)^s |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q + t^s |\psi'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&= \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{17}{8} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|\psi'(a)|^q \int_0^1 |8t-3| (1-t)^s dt + |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \int_0^1 |8t-3| t^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(2 |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \int_0^1 (1-t)^{s+1} dt + 2 |\psi'(b)|^q \int_0^1 (1-t) t^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&= \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{17}{8} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8} \right)^{s+1} \right) |\psi'(a)|^q \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8} \right)^{s+1} \right) |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{s+2} |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q + \frac{2}{(s+1)(s+2)} |\psi'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.6. Selon le Théorème 2.2.5, si $|\psi'|^q$ est une fonction convexe, alors on a

$$\left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \psi(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{9} \left(\frac{17}{8} \left(\frac{157|\psi'(a)|^q + 251\left|\psi'\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|^q}{408} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2\left|\psi'\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|^q + |\psi'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

3 Estimation de l'erreur dans le cas fractionnaire

Comme dans le chapitre précédent, nous commençons par introduire une nouvelle identité fractionnaire permettant de démontrer les résultats.

3.1 Identité fractionnaire relative à la formule Left Radau

Lemme 3.1.1. Soit $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° , $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, et $\psi' \in L^1[a, b]$, alors on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2\frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \\ &= \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 (8t^\alpha - 3) \psi' \left((1-t)a + t\frac{a+2b}{3} \right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 2(1-t)^\alpha \psi' \left((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb \right) dt \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient

$$I_1 = \int_0^1 (8t^\alpha - 3) \psi' \left((1-t)a + t\frac{a+2b}{3} \right) dt$$

et

$$I_2 = \int_0^1 2(1-t)^\alpha \psi' \left((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb \right) dt.$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$I_1 = \frac{3}{2(b-a)} (8t^\alpha - 3) \psi \left((1-t)a + t\frac{a+2b}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{12\alpha}{(b-a)} \int_0^1 t^{\alpha-1} \psi \left((1-t)a + t\frac{a+2b}{3} \right) dt \\ &= \frac{15}{2(b-a)} \psi \left(\frac{a+2b}{3} \right) + \frac{9}{2(b-a)} \psi(a) \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8\alpha \left(\frac{3}{2(b-a)} \right)^{\alpha+1} \int_a^{\frac{a+2b}{3}} (u-a)^{\alpha-1} \psi(u) du \\
& = \frac{9}{2(b-a)} \psi(a) + \frac{15}{2(b-a)} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{2^{\alpha-1} (b-a)^{\alpha+1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^{\alpha} \psi(a). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$I_2 = \frac{3}{b-a} 2(1-t)^{\alpha} \psi\left(\left(1-t\right)\frac{a+2b}{3} + tb\right) \Big|_{t=0}^{t=1} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6\alpha}{b-a} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \psi\left(\left(1-t\right)\frac{a+2b}{3} + tb\right) dt \\
& = -\frac{6}{b-a} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2\alpha \left(\frac{3}{b-a}\right)^{\alpha+1} \int_{\frac{a+2b}{3}}^b (b-u)^{\alpha-1} \psi(u) du \\
& = -\frac{6}{b-a} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2 \frac{3^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^{\alpha} \psi(b). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

En soustrayant (3.4) de (3.1) puis multiplier l'égalité obtenue par $\frac{b-a}{9}$, nous obtenons le résultat demeté. \square

3.2 Résultats principaux

Théorème 3.2.1. *Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) telle que $\psi' \in L^1[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|\psi'|$ est s -convexe dans le second sens pour un certain $s \in (0, 1]$, alors on a*

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^{\alpha} \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^{\alpha} \psi(b) \right) \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(8B_{1-\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}(s+1, \alpha+1) - 8B_{\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}(\alpha+1, s+1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{s+1} \left(1 - 2 \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{s+1} \right) \right) |\psi'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{7s+7-3\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} + \frac{6\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{s+1}{\alpha}} \right) |\psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right)| \right. \\
& \quad \left. + 2B(s+1, \alpha+1) |\psi'(b)| \right),
\end{aligned}$$

où $B(., .)$ et $B_x(., .)$ sont la fonction beta et la fonction Beta incomplete respectivement.

Démonstration. En utilisant le Lemme 3.1.1, les propriétés du module et la s -convexité de $|\psi'|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2\frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| |\psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3})| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 2(1-t)^\alpha |\psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb)| dt \right) \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| ((1-t)^s |\psi'(a)| + t^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})|) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 2(1-t)^\alpha ((1-t)^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})| + t^s |\psi'(b)|) dt \right) \\
& = \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| (1-t)^s dt \right) |\psi'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| t^s dt + 2 \int_0^1 (1-t)^{\alpha+s} dt \right) |\psi'(\frac{a+2b}{3})| \right. \\
& \quad \left. + |\psi'(\frac{a+2b}{3})| + \left(2 \int_0^1 t^s (1-t)^\alpha dt \right) |\psi'(b)| \right) \\
& = \frac{b-a}{9} \left(\left(8B_{1-\left(\frac{3}{8}\right)^\frac{1}{\alpha}}(s+1, \alpha+1) - 8B_{\left(\frac{3}{8}\right)^\frac{1}{\alpha}}(\alpha+1, s+1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{s+1} \left(1 - 2 \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^\frac{1}{\alpha} \right)^{s+1} \right) \right) |\psi'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{7s+7-3\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} + \frac{6\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left(\frac{3}{8}\right)^\frac{s+1}{\alpha} \right) |\psi'(\frac{a+2b}{3})| \right. \\
& \quad \left. + 2B(s+1, \alpha+1) |\psi'(b)| \right).
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé le fait que :

$$\int_0^1 |8t^\alpha - 3| (1-t)^s dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{s+1} \left(1 - 2 \left(1 - \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{s+1} \right) - 8B_{\left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} (\alpha + 1, s + 1) \\
&\quad + 8B_{1 - \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} (s + 1, \alpha + 1)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

et

$$\int_0^1 |8t^\alpha - 3| t^s dt = \frac{5s+5-3\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} + \frac{6\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{s+1}{\alpha}}. \tag{3.7}$$

Ceci achève la preuve. □

Corollaire 3.2.2. *Dans le Théorème 3.2.1, si on prend $s = 1$. Alors on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{16-3(\alpha+1)(\alpha+2)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{6\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{3\alpha}{\alpha+2} \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |\psi'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{14-3\alpha}{2(\alpha+2)} + \frac{3\alpha}{\alpha+2} \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |\psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right)| + \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |\psi'(b)| \right),
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.3. *Dans le Théorème 3.2.1, si on prend $\alpha = 1$. On retrouve le résultat établi dans le Théorème 2.2.1.*

De plus, si on prend $s = 1$. on retrouve le résultat du Corollaire 2.2.2.

Théorème 3.2.4. *Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) telle que $\psi' \in L^1[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|\psi'|^q$ est s -convexe dans le second sens pour un certain $s \in (0, 1]$ et $q > 1$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{3^{\frac{p+1}{\alpha}}}{\alpha 8^\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{5^{p+1}}{8\alpha(p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{5}{8}\right) \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{|\psi'(a)|^q + \left| \psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{\left| \psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right|^q + |\psi'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}$$

où $B(.,.)$ et ${}_2F_1(.,.,.;.)$ sont la fonction beta et la fonction hypergéométrique respectivement.

Démonstration. En utilisant le Lemme 3.1.1, les propriétés du module, l'inégalité de Hölder ainsi que la s -convexité de $|\psi'|^q$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \psi(a) + \frac{3}{2} \psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 (2(1-t)^\alpha)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^{\frac{3}{8}} (3-8t^\alpha)^p dt + \int_{\frac{3}{8}}^1 (8t^\alpha-3)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_0^1 \left((1-t)^s |\psi'(a)|^q + t^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_0^1 \left((1-t)^s |\psi'(\frac{a+2b}{3})|^q + t^s |\psi'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& = \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{3^{\frac{p+1}{\alpha}}}{\alpha 8^\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{5^{p+1}}{8\alpha(p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{5}{8}\right) \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\frac{|\psi'(a)|^q + |\psi'(\frac{a+2b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{2}{(\alpha p+1)^p} \left(\frac{|\psi'(\frac{a+2b}{3})|^q + |\psi'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |8t^\alpha - 3|^p dt &= \int_0^{\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} (3 - 8t^\alpha)^p dt + \int_{\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (8t^\alpha - 3)^p dt \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{3}{8}} (3 - 8z)^p z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz + \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{3}{8}}^1 (8z - 3)^p z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz \\
&= \frac{3^{\frac{p+1}{\alpha}}}{\alpha 8^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^1 (1-x)^p x^{\frac{1}{\alpha}-1} dx + \frac{5^{p+1}}{8\alpha} \int_0^1 (1-x)^p \left(1 - \frac{5}{8}x\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \\
&= \frac{3^{\frac{p+1}{\alpha}}}{\alpha 8^{\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{5^{p+1}}{8\alpha(p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{5}{8}\right).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Corollaire 3.2.5. Dans le Théorème 3.2.4, si on prend $s = 1$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{3^{\frac{p+1}{\alpha}}}{\alpha 8^{\frac{1}{\alpha}}} b \left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{5^{p+1}}{8\alpha(p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{5}{8}\right) \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{|\psi'(a)|^q + \left| \psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{\left| \psi'\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right|^q + |\psi'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.6. Pour $\alpha = 1$, le Théorème 3.2.4 se réduit au Théorème 2.2.3.

De plus, si on prend $s = 1$, on retrouve le Corollaire 2.2.4.

Théorème 3.2.7. Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) telle que $\psi' \in L^1[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|\psi'|^q$ est s -convexe dans le second sens pour un certain $s \in (0, 1]$ et $q \geq 1$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2 \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{5-3\alpha}{\alpha+1} + \frac{6\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{3}{s+1} \left(1 - 2 \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{s+1} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8B_{1-\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha} \frac{1}{\alpha} (s+1, \alpha+1) - 8B_{\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha} \frac{1}{\alpha} (\alpha+1, s+1) \Big) |\psi'(a)|^q \\
& + \left(\frac{5s+5-3\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} + \frac{6\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{s+1}{\alpha}} \right) |\psi'\left(\frac{2a+b}{3}\right)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{\alpha+s+1} |\psi'\left(\frac{2a+b}{3}\right)|^q + 2B(s+1, \alpha+1) |\psi'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big),
\end{aligned}$$

où $B(\cdot, \cdot)$ et $B_x(\cdot, \cdot)$ sont les fonctions Beta et Beta incomplète respectivement.

Démonstration. En utilisant le Lemme 3.1.1, les propriétés du module, l'inégalité du power mean et la s -convexité de $|\psi'|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2^{\frac{3\alpha-1}{(b-a)^\alpha}} \Gamma(\alpha+1) \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
& \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 (8t^\alpha - 3) \psi'((1-t)a + t\frac{a+2b}{3}) dt + \int_0^1 2(1-t)^\alpha \psi'((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb) dt \right) \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| |\psi'((1-t)a + t\frac{2a+b}{3})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 2(1-t)^\alpha dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 2(1-t)^\alpha |\psi'((1-t)\frac{2a+b}{3} + tb)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\int_0^{\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha} (3 - 8t^\alpha) dt + \int_{\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha}^1 (8t^\alpha - 3) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \times \left(\int_0^1 |8t^\alpha - 3| \left((1-t)^s |\psi'(a)|^q + t^s |\psi'\left(\frac{2a+b}{3}\right)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 2(1-t)^\alpha \left((1-t)^s |\psi'\left(\frac{2a+b}{3}\right)|^q + t^s |\psi'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{5-3\alpha}{\alpha+1} + \frac{6\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \times \left(|\psi'(a)|^q \int_0^1 |8t^\alpha - 3| (1-t)^s dt + |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \int_0^1 |8t^\alpha - 3| t^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \int_0^1 2(1-t)^{\alpha+s} dt + |\psi'(b)|^q \int_0^1 2t^s (1-t)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&= \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{5-3\alpha}{\alpha+1} + \frac{6\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{3}{s+1} \left(1 - 2 \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{s+1} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 8B_{1-\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} (s+1, \alpha+1) - 8B_{\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} (\alpha+1, s+1) \right) |\psi'(a)|^q \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{5s+5-3\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} + \frac{6\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{s+1}{\alpha}} \right) |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{\alpha+s+1} |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q + 2B(s+1, \alpha+1) |\psi'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé (3.6)-(3.7). □

Corollaire 3.2.8. Dans le Théorème 3.2.7, si on prend $s = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2^{\frac{3\alpha-1\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha \psi(a) - I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha \psi(b) \right) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{5-3\alpha}{\alpha+1} + \frac{6\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{16-3(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{6\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3\alpha}{\alpha+2} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |\psi'(a)|^q + \left(\frac{10-3\alpha}{2(\alpha+2)} + \frac{3\alpha}{\alpha+2} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{\alpha+2} |\psi'(\frac{2a+b}{3})|^q + \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} |\psi'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.9. Pour $\alpha = 1$, le Théorème 3.2.7 se réduit au Théorème 2.2.5. De plus, si on prend $s = 1$, nous retrouvons le résultat du Corollaire 2.2.6.

4 Exemple et Applications

4.1 Exemple

On considère la fonction $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = x^{s+1}$, avec $s \in (0, 1]$. Alors, $|\psi'(x)| = (s+1)x^s$ est s -convexe au second sens sur $[0, 1]$.

D'après le Théorème 2.2.1, nous obtenons le résultat suivant par rapport à s :

$$-\mathcal{K}(s) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^s - \frac{2}{s+2} \leq \mathcal{K}(s),$$

où $\mathcal{K}(s) = \frac{1}{9(s+2)} \left(\left(7s + 4 + 6\left(\frac{3}{8}\right)^{s+1}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^s + 2 \right)$.

Pour valider visuellement les résultats obtenus, le logiciel MATLAB a été utilisé pour tracer les graphiques fonctionnels des côtés gauche (rouge), milieu (vert) et droit (bleu) de l'inégalité mentionnée ci-dessus. La Figure 4.1 illustre que les courbes tracées confirment la justesse des résultats de manière intuitive.

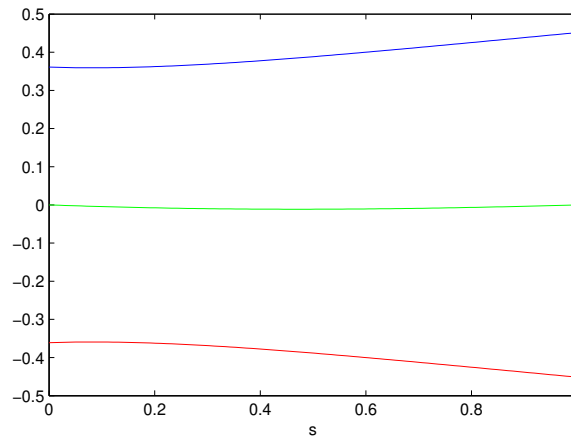


FIGURE 4.1 – Représentation du résultat

4.2 Formule de quadrature

Soit Υ une partition de points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, et considérons la formule de quadrature suivante

$$\int_a^b \psi(u) du = \lambda(\psi, \Upsilon) + R(\psi, \Upsilon),$$

où

$$\lambda(\psi, \Upsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{8} \left(3\psi\left(\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right) + 2\psi\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + 3\psi\left(\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right) \right)$$

et $R(\psi, \Upsilon)$ désigne l'erreur d'approximation.

Proposition 4.2.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) avec $0 \leq a < b$ et $\psi' \in L^1[a, b]$. Si $|\psi'|$ est s -convexe, alors on a

$$\begin{aligned} |R(\psi, \Upsilon)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{18} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{s+1} \left(\frac{5}{8}\right)^s - \frac{16s+22}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(x_i)| \right. \\ &\quad + \left(\frac{7s+4}{8(s+1)(s+2)} + \frac{2}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8}\right)^{s+2} \right) \left(\left| \psi'\left(\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right) \right| + \left| \psi'\left(\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right) \right| \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{3s-2}{4(s+1)(s+2)} + \frac{5}{2(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) \left| \psi'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \right| \right). \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 2.2.1 aux sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de la partition Υ , on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2}\psi(x_i) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) - \frac{2}{x_{i+1}-x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(z) dz \right| \\ &\leq \frac{x_{i+1}-x_i}{9} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{s+1} \left(\frac{5}{8}\right)^s - \frac{16s+22}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(x_i)| \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{7s+4}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8}\right)^{s+1} \right) \left| \psi'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) \right| + \frac{2}{(s+1)(s+2)} |\psi'(x_{i+1})| \right). \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$, et ensuite sommer les inégalités obtenues pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat désiré. \square

Proposition 4.2.2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) avec $0 \leq a < b$ et $\psi' \in L^1[a, b]$. Si $|\psi'|^q$ est s -convexe, alors on a

$$\begin{aligned} |R(\psi, \Upsilon)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{18(p+1)^p} \left(\left(\frac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\psi'(x_i)|^q + \left| \psi'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) \right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\left| \psi'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) \right|^q + |\psi'(x_{i+1})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 2.2.3 aux sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de la partition Υ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2}\psi(x_i) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) - \frac{2}{x_{i+1}-x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(z) dz \right| \\ & \leq \frac{x_{i+1}-x_i}{9(p+1)^p} \left(\left(\frac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\psi'(x_i)|^q + \left| \psi'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) \right|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{\left| \psi'\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) \right|^q + |\psi'(x_{i+1})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$, et ensuite sommer les inégalités obtenues pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat désiré. \square

Proposition 4.2.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) avec $0 \leq a < b$ et $\psi' \in L^1[a, b]$. Si $|\psi'|^q$ est s -convexe, alors on a

$$\begin{aligned} |R(\psi, \Upsilon)| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{18} \\ & \times \left(\left(\frac{17}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{s+1} \left(\frac{5}{8}\right)^s - \frac{16s+22}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(x_i)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8}\right)^{s+1} \right) \left| \psi'\left(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{2}{s+2} \left| \psi'\left(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3}\right) \right|^q + \frac{2}{(s+1)(s+2)} |\psi'(x_{i+1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 2.2.5 aux sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de la partition Υ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2}\psi(x_i) + \frac{3}{2}\psi\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right) - \frac{2}{x_{i+1}-x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(z) dz \right| \\ & \leq \frac{x_{i+1}-x_i}{9} \\ & \times \left(\left(\frac{17}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3s-2}{(s+1)(s+2)} + \frac{10}{s+1} \left(\frac{5}{8}\right)^s - \frac{16s+22}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{5}{8}\right)^{s+1} \right) |\psi'(x_i)|^q \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)} + \frac{6}{(s+1)(s+2)} \left(\frac{3}{8}\right)^{s+1} \right) \left| \psi' \left(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3} \right) \right|^q \frac{1}{q} \\
& + \left(\frac{2}{s+2} \left| \psi' \left(\frac{2x_i+x_{i+1}}{3} \right) \right|^q + \frac{2}{(s+1)(s+2)} \left| \psi' (x_{i+1}) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$, et ensuite sommer les inégalités obtenues pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat désiré. \square

4.3 Moyennes Spéciales

Nous considérons pour les nombres réels arbitraires a, b, c les moyennes suivantes :

La moyenne arithmétique : $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ et $A(a, b, c) = \frac{a+b+c}{3}$.

La moyenne p -Logarithmique : $L_p(a, b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $b > a > 0$ et $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Proposition 4.3.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, et $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\left| a^3 + 3A^3(a, b, b) - 4L_3^3(a, b) \right| \leq \frac{67(b-a)}{36} \left(\frac{157a^2 + 347\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2 + 32b^2}{536} \right).$$

Démonstration. La preuve découle de l'application du Corollaire 2.2.2 à la fonction $\psi(t) = t^3$. \square

Proposition 4.3.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, et $q > 1$, alors on a

$$\begin{aligned}
& \left| a^{\frac{5}{4}} + 3A^{\frac{5}{4}}(a, b, b) - 4L_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{4}}(a, b) \right| \\
& \leq \frac{5(b-a)}{27\sqrt{2}} \left(\left(\frac{157}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+2b}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\sqrt{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt{b}\right)^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve découle de l'application du Théorème 2.2.3 avec $p = q = 2$ à la fonction $\psi(t) = t^{\frac{5}{4}}$ dont la dérivée $|\psi'(t)|^2 = \frac{25}{16}\sqrt{t}$ est $\frac{1}{2}$ -convexe. \square

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à une étude approfondie de la formule de quadrature de Gauss à deux points, connue sous le nom de formule Left Radau, et à son application pour estimer les erreurs dans le cadre classique et fractionnaire. Grâce à l'introduction de deux nouvelles identités clés, nous avons pu établir des estimations précises pour les fonctions dont la dérivée première en valeur absolue est s -convexe.

Les inégalités spécifiques que nous avons développées ont joué un rôle crucial dans la quantification précise de l'erreur d'approximation. Elles ont permis d'évaluer de manière rigoureuse les performances de la formule de quadrature et d'apporter des éclairages importants sur les limites de son utilisation.

De plus, nous avons présenté des applications pratiques illustrant l'efficacité des résultats obtenus. Ces exemples concrets démontrent l'importance et la pertinence des méthodes de quadrature étudiées dans des domaines tels que l'analyse des données, l'optimisation et les statistiques.

En somme, ce mémoire a contribué à l'avancement des connaissances dans le domaine des méthodes de quadrature et de leur utilisation dans le cadre classique et fractionnaire. Les nouvelles identités introduites et les inégalités spécifiques établies offrent des outils précieux pour l'estimation précise des erreurs d'approximation. Les applications pratiques mettent en évidence le potentiel de ces méthodes pour résoudre des problèmes concrets dans différents domaines.

Il convient de souligner que ce travail n'épuise pas toutes les possibilités de recherche dans ce domaine. Des extensions futures pourraient explorer d'autres types d'intégrales, telles que les intégrales multiplicatives, locale fractionnaires, et quantiques. Ces développements pourraient apporter de nouvelles contributions significatives à la théorie des méthodes de quadrature et à leur application.

En conclusion, cette étude approfondie ouvre de nouvelles perspectives passionnantes et offre des bases solides pour de futures recherches et avancées dans le domaine de la quadrature et de son utilisation dans des contextes classiques et fractionnaires.

Bibliographie

- [1] W. W. Breckner, "Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen," (*German*) *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **23**(37), 13–20 (1978).
- [2] H. Budak, F. Ertuğral and E. Pehlivan, "Hermite-Hadamard type inequalities for twice differentiable functions via generalized fractional integrals," *Filomat*, **33**, no. 15, 4967–4979 (2019).
- [3] F. Chen and X. Liu, "On Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose second derivatives absolute values are s -convex," *ISRN Appl. Math.*, Art. ID 829158, 4 pp (2014).
- [4] A. R. Didonato and M. P. Jarnagin, "The efficient calculation of the incomplete β -function ratio for half-integer values of the parameters a, b ," *Math. Comp.*, **21**, 652–662 (1967).
- [5] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, "The Hadamard inequalities for s -convex functions in the second sense," *Demonstratio Math.*, **32**, no. 4, 687–696 (1999).
- [6] S. Erden and M. Z. Sarikaya, "New Hermite Hadamard type inequalities for twice differentiable convex mappings via Green function and application," *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, **2**, no. 2, 107-117 (2016).
- [7] S. Erden, H. Budak and M. Z. Sarikaya, "An Ostrowski type inequality for twice differentiable mappings and applications," *Math. Model. Anal.*, **21**, no. 4, 522-532 (2016).
- [8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*. Cambridge University Press. (1952)
- [9] S. Hussain, M. I. Bhatti and M. Iqbal, "Hadamard-type inequalities for s -convex functions," *I. Punjab Univ. J. Math. (Lahore)*, **41**, 51–60 (2009).
- [10] A. Kilbas, "Theory et applications of fractional differential equations".
- [11] Z. Liu, "More on Ostrowski type inequalities for some s -convex functions in the second sense," *Demonstratio Mathematica*, **49**, no.4, 398-412 (2016).
- [12] W.-J. Liu, Q.-L. Xue and J.-W. Dong, "New generalization of perturbed trapezoid, mid-point inequalities and applications," *Int. J. Pure Appl. Math.*, **41**, no. 6, 761-768 (2007).
- [13] B. Meftah, M. Merad, N. Ouanas and A. Souahi, "Some new Hermite-Hadamard type inequalities whose n^{th} derivatives are convex," *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.*, **23**, no 2, 163-178 (2019).
- [14] M. Merad, B. Meftah and N. Ouanas, "Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for n -times r -convex functions," *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, **21**, no. 2, 253-292 (2018).

- [15] P. O. Mohammed and M. Z. Sarikaya, "On generalized fractional integral inequalities for twice differentiable convex functions," *J. Comput. Appl. Math.*, **372**, 112740, 15 pp (2020).
- [16] M. E. Özdemir, M. Avci and H. Kavurmaci, "Hermite-Hadamard-type inequalities via (α, m) -convexity," *Comput. Math. Appl.*, **61**, no. 9, 2614-2620 (2011).
- [17] M. E. Özdemir and M. A. Ardic, "Some companions of Ostrowski type inequality for functions whose second derivatives are convex and concave with applications," *Arab J. Math. Sci.*, **21**, no. 1, 53-66 (2015).
- [18] J. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*, Mathematics in Science and Engineering, 187, Academic Press, Inc., Boston, MA, (1992).
- [19] R. Radau, *Etude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie*. *J. Math. Pures et Appl.* 6 (1880) pp. 283–336.
- [20] E. D. Rainville, *Special functions*, Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., (1971).
- [21] M. Z. Sarikaya and N. Aktan, "On the generalization of some integral inequalities and their applications," *Math. Comput. Modelling*, **54**, no. 9-10, 2175-2182 (2011).
- [22] M. Z. Sarikaya, A. Saglam and H. Yildirim, "New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex," *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, **238**, no. 1390, 1-14 (2012).
- [23] M. Z. Sarikaya and H. Yildirim, "Some new integral inequalities for twice differentiable convex mappings," *Nonlinear Anal. Forum*, **17**, 81-94 (2012).
- [24] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, "On new inequalities of Simpson's type for functions whose second derivatives absolute values are convex," *J. Appl. Math. Stat. Inform.*, **9**, no. 1, 37-45 (2013).
- [25] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, "On some integral inequalities for twice differentiable mappings," *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, **59**, no. 1, 11-24 (2014).
- [26] E. Set, M. Z. Sarikaya and M. E. Ozdemir, "Some Ostrowski's type inequalities for functions whose second derivatives are s -convex in the second sense," *Demonstr. Math.*, **47**, no. 1, 37-47 (2014).
- [27] H. M. Srivastava and J. Choi, *Zeta and q -Zeta functions and associated series and integrals*, Elsevier, Inc., Amsterdam, (2012).
- [28] M. Vivas-Cortez, T. Abdeljawad, P. O. Mohammed and Y. Rangel-Oliveros, "Simpson's integral inequalities for twice differentiable convex functions," *Math. Probl. Eng.*, Art. ID 1936461, 15 pp (2020).