الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 20 أوث 1955- سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

مبادئ المنطق وطرق البرهان الرياضي

مطبوعة دروس: مرجع لطلاب السنة الثانية رياضيات

إعداد: د. كلثوم بوهالي

2022

المحتويات

الفصل الاول

أوليات في المنطق

مقدمة ولمحة تاريخية:

المنطق الرياضي: (Logique Mathematiques) تدل كلمة المنطق على الكلام أو النطق وهي اشتقاق للكلمة اليونانية لوغوس (Logos) والتي تعني العقل أو الفكر. المنطق هو صورة العلم كما عرفه الفيلسوف اليوناني أرسطو في كتبه الدي جمعها العلماء من بعده. يعتبر أرسطو من مؤسسي المنطق الصوري، إد أنه أرسى قواعد الاستنتاج أو منهجية الاستدلال. نعني بدلك طريقة استنباط نتائج معينة معرفة من معطيات موضوعة متل:

كل إنسان فان، سقراط إنسان، إدن سقراط فان.

الرياضيات والمنطق علمــان متداخلان كل منهما يبرهــن على صحة الاخــر لذا كان تطورهما متلازما. لا يمكن تعلم موضوع في الرياضيات غير منطقي، وبالتالي المنطق الرياضي هو فرع من فروع الرياضيات يهتم باستخدام الرموز المنطقية (أدوات الربط) وهي رموز يتم بواسطتها ربط العبارات ببعضها البعض للحصول على عبارات منطقية جديدة ونستخدم في المنطق الرياضي جداول خاصة تعرف باسم جداول الحقيقة (الصحة) وهي تهدف إلى إثبات صحة قضية ما أو عدم صحتما وهي الطريقة الحسابية الأسهل والأضمن لإيجاد قيم الحقيقة للعبارة الرياضية وكلها تعبر عن المنطق الجملي.

ملاحظة:

قامت الأستادة كلثوم بوهالي بتدريس محتوى هذه المادة لطلاب السنة الثانية رياضيات بجامعة ٢٠ لأوت ١٩٥٥- سكيكدة خلال الفصول التالية:

- الفصل الأول للسنة الدراسية: ٢٠٢١/٢٠٢٠
- الفصل الأول للسنة الدراسية ٢٠٢٢/٢٠٢١

مصطلحات رياضية

عربي	فرنسي	انجليزي	رمزه
المصطلح			
عربي	فرنسي	انجليزي	رمزه
منطق	Logique	Logic	
قضية	Proposition ou assertion	Statement	$p,q,\ldots$
نفي قضية	Négation d’une assertion	Negation of statement	$\bar{p},\bar{q},\ldots$
أدوات الربط المنطقية	Connecteurs logique	Logical connector	
وصل	Conjonction	Conjunction	$\wedge$
p و q	p et q	p and q	$p\wedge q$
فصل	Disjonction	Disjunction	$\vee$
p أو q	p ou q	p or q	$p\vee q$
استلزام	Implication	Implication	$\Rightarrow$
p يستلزم q إذا p فإن q	p implique q si p alors q	p implies q if p then q	$p\Rightarrow q$
تكافؤ	Equivalence	Equivalent	$\Leftrightarrow$
p تكافؤ q p إذا q	p equivaut à q p si et seulement si q	p Equivalent q p if q	$p\Leftrightarrow q$
مكممات	Quantificateurs	Quantifiers	

∀	For any	Quelque soit	مهما يكن
∃	There exists	Il existe au moins	يوجد على الأقل
∃!	There exists a unique	Il existe un seul	يوجد وهو وحيد
	Methods of proofs	Methodes de raisonnements	طرق البرهان
	Direct proof	Raisonnement directe	برهان المباشر
	Proof by contradiction	Raisonnement par l'absurde	برهان بالتناقض
	Proof by contraposition	Raisonnemnt par contraposition	برهان بعكس النقيض
	Proof by induction	Raisonnement par récurence	برهان بالتراجع
	Reasoning on the other hand	Raisonnement par contre exemple	برهان بمثال مضاد

مصطلحات رموز وتعاريف رياضية

رمزه أو تعريفه	المصطلح		
	انجليزي	فرنسي	عربي
A, B,…	Set	Ensemble	مجموعة
x, *y*,…	Element	Elément	عنصر
∈	Belonging	Appartenance	إنتماء
$x \in A$	*x* belongs in A	*x* appartient à A	*x* ينتمي إلى A
∅	Empty set	Ensemble vide	مجموعة خالية

$\subset$	Inclusion	Inclusion	احتواء
$B\subset A$	B is a part of A	B est une partie de A	B جزء من A
P(A)	Power set	Ensemble des parties	مجموعة أجزاء مجموعة
=	Equality	Egalité	مساواة
A=B	A equal B	A est égale à B	A تساوِي B
$\cap$	Intersection	Intersection	تقاطع
$A\cap B$	Intersection	A inter B	A تقاطع B
$\cup$	Union	Union	اتحاد

مفهوم المنطق الرياضي:

هو كتابة العبارات الرياضية بصورة رمزية ووضع قواعد ثابتة سهلة الاستخدام يساعد في معالجة النصوص الرياضية وفق قواعد معينة ويستهدف من خلالها الوصول إلى نتائج انطلاقا من معطيات معينة، وتتميز لغة المنطق الرياضي باستخدام الحروف الأبجدية المستنبطة من اللغات العربية، اللاتينية كما تستخدم الأعداد والعمليات الرياضية وأيضا نستعين برموز خاصة بلغة المنطق التي تلعب دور الروابط المنطقية.

القضية:

القضية هي الجملة الخبرية التي تحتمل الصدق أو الكذب أي التي يمكن الحكم عليما بالصدق أو الكذب مع العلم أن الجمل الإنشائية ليست جملا خبرية وبالتالي ليست قضية منطقية.

"تكون كل قضية إما صادقة أو خاطئة وليس الاثنين معا"

ملاحظة: يتم استبعاد العبارات النحوية، وكذلك البيانات التي لا معنى لها. عبارات التعجب مثل "الجنة زوجي!"، عبارات الاستفهام مثل "كم الساعة؟"، الحتميات مثل "أعطني يدك"، وكذلك العبارات المرجعية الذاتية مثل "أنا أكذب.. ". بالنسبة للأولى، فإن السؤال عما إذا كانت صحيحة أم خطأ لا معنى له، وبالنسبة للأخيرة، فإن السؤال يؤدي إلى مفارقات. هكذا "تتكون هذه الجملة من خمس كلمات". هي عبارة صحيحة، ولكن العبارة المعاكسة "هذه الجملة لا تحتوي على خمس كلمات". هذا صحيح أيضًا.

ملاحظة: تتمثل العبارة البسيطة للقضبة في أنها لا يمكن تقسيمه إلى عدة عبارات.

على سبيل المثال، فإن الافتراض "فلان فيلسوف وعالم رياضيات" يتكون من افتراضين "بطرس فيلسوف"، "بيتر عالم رياضيات" متصل بـ "و".

أمثلة:

1- العبارات الإيجابية مثل "٢ + ٣ = ٥" ، "إنها تمطر" ، "١٦ هي مربع ٣" ، ... لها خاصية إما أن تكون صحيحة أو خاطئة ولكن ليس كلاهما في نفس الوقت. يطلق عليهم المقترحات.

2- قوله تعالى :"**الله الذي لا إله إلاّ هو**" فهذه يمكن اعتبارها قضية لأن التوحيد يقيمه المؤمن وينكره الكافر بما فيه الملحد إذن فهي تحتمل الصدق أو الكذب.

3- قوله تعالى :"**فبأيّ آلاء ربّكُمَا تكذّبَانِّ**" فهذه ليست قضية لأنها لا تحتمل الصدق أو الكذب لاحتوائها على سؤال من الله للمخلوقات لما يكذبون بنعم الله عليهم رغم إدراك بعضهم بذلك.

القضية المركبة:

القضية المركب هي قضية مبنية على افتراضات بسيطة مرتبطة بوصلات منطقية.

مثال: القضايا "الجو مشمس و 5=4+1"، "إذا هطل المطر فسأخذ مظلتي" و "بيتر فيلسوف وعالم رياضيات" هي قضايا مركبة.

يمكن تركيب القضايا فيما بينها للحصول على قضايا مركبة باستخدام الرموز التالية:

$$\exists, \forall, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$$

كما تستعمل الأقواس (المفتوحة والمغلقة) حيث تلعب دور علامات الوقف ونستخدم كذلك الحروف.

جدول الحقيقة (الصحة):

هو ذلك الجدول الذي يصف الدستور المعين لأجل عملية منطقية، أي من اجل كل توفيق من القيم الحقيقية للقضايا البسيطة التي تتألف منها العبارة المدروسة والمشكلة بواسطة العملية. فإن جدول الحقيقة يعطي قيمة الحقيقة للعبارة المذكورة؛ حيث إذا كانت القضية المراد إنشاء جدول الحقيقة لها بها n قضية أولية فإن جدول الحقيقة يتكون من 2^n ويتعامل جدول الحقيقة بالرمزين (1) للقضية الصحيحة و(0) للقضية الخاطئة.

حساب القضايا:

في حساب القضايا نتعامل مع روابط وقضايا حيث في المنطق الرياضي تنقسم الروابط التي تربط قضيتين أو أكثر إلى :

الروابط الأحادية: وهي التي تضم قضية أولية واحدة ومن أمثلتها:

١- النفي المنطقي (‾): النفي المنطقي هو رابط أحادي، ونرمز لنفي القضية p بـ $\bar{p}$ والتي تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و العكس بالعكس. ونلخص ذلك في جدول الحقيقة التالي:

$\bar{p}$	P
1	0
0	1

مثلا: p= الطقس جميل، $\bar{p}$= الطقس غير جميل.

روابط ثنائية:

١- **الوصل** $(\wedge)$ **:** وصل العبارتين p و q نرمز له بالرمز $(p \wedge q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت P صحيحة و q صحيحة ونوضح ذلك في جدول الحقيقة التالي:

$p \wedge q$	Q	P
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

يعبر الوصل على الرابطة اللغوية " و".

مثلا: p= الطقس لطيف

q = الرحلة ممتعة ،

نقول "الطقس لطيف والرحلة ممتعة" ونعبر عنها $p \wedge q$

خواص:

- الوصل تبديلي $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- الوصل تجميعي $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
- الوصل توزيعي على الفصل $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ملاحظة: يشير شكل الرمز ∧ إلى شكل الرمز الذي يشير إلى التقاطع ∩. هذا ليس عن طريق الصدفة: x∈A∩B تعني أن x∈A و x∈B.

٢- **الفصل** $(\vee)$:

فصل العبارتين p و q ونرمز له بالرمز $(p \vee q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت p أو q صحيحة ونوضح ذلك في جدول الحقيقة التالي :

$p \vee q$	Q	P
1	1	1
1	0	1
1	1	0
0	0	0

يعبر الفصل على الرابطة اللغوية " أو".

متلا: p= المثلث قائم

q = المثلث متقايس الساقين ،

نقول " المثلث قائم أو متقايس الساقين" ونعبر عنها $p \vee q$

خواص:

-الفصل تبديلي $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

- الفصل تجميعي $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

-الفصل توزيعي على الوصل $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ملاحظة: يشير شكل الرمز V إلى شكل الرمز الذي يشير إلى الاتحاد U. هذا ليس عن طريق الصدفة: x∈AUB تعني أن x∈A أو x∈B.

٣- **الاستلزام المنطقي** $(\Rightarrow)$:

استلزام العبارتين p و q نرمز له بالرمز $p \Rightarrow q$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة وتقرا p تستلزم q. عموما إن العبارة السابقة تقرا كما يلي:

- إدا كان p فإن q
- p شرط كاف لـ q
- q شرط لازم لـ p
- p تستلزم q

يدل رمز الاستلزام عموما على القضية الشرطية: " إدا كان ...... فإن......"

متلا: p= تحصل الطالب على معدل يفوق العشرة

q = لم يكن له علامة إقصائية

C= ينتقل إلى السنة الموالية ،

نقول " إدا تحصل الطالب على معدل يفوق العشرة ولم يكن له علامة إقصائية فإنه ينتقل إلى السنة الموالية " ونعبر عنها $p \wedge q \Rightarrow C$

ملاحظة:

إن العبارة $p \Rightarrow q$ يمكن كتابتها على الشكل التالي $\bar{p} \vee q$: ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$	q	P
1	0	1	1
0	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	0

مثلا: p = الطالب مريض

$\bar{p}$= الطالب غير مريض

q = الطالب يغيب عن المحاضرة

$\bar{q}$ = الطالب يحضر المحاضرة

نقول: إدا كان الطالب مريض فإنه يغيب عن المحاضرة و نكتب: $p \Rightarrow q$

لكن لا يمكن أن نقول أنه إدا كان الطالب غير مريض فإنه لم يغيب عن المحاضرة لأنه يمكن أن يكون سليم معافى و يتغيب عن المحاضرة. بمعنى $\bar{p}\ \bar{q} \Rightarrow$ كتابة خاطئة.

بل نقول أن الطالب يحضر المحاضرة يستلزم أن الطالب أكيد غير مريض و نكتب $\bar{p}\ \Rightarrow\ \bar{q}$

٤- التكافؤ المنطقي ($\Leftrightarrow$) **:**

تكافؤ العبارتين p و q نرمز له بالرمز $q \Leftrightarrow p$ و يكون صحيحا إذا كانت p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا ونلخص ذلك في جدول الحقيقة التالي:

$p \Leftrightarrow q$	Q	P
1	1	1
0	0	1
0	1	0
1	0	0

ملاحظة:

العبارة $q \Leftrightarrow p$ يمكن التعبير عنها بـ $(p \Rightarrow q)\wedge(q \Rightarrow p)$ و هذا ما يلخصه الجدول التالي:

$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	q	P
1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

يمكن تلخيص نتائج قيم الحقيقة (الصحة) المكونة من قضيتين في الجدول التالي:

$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\bar{p}$	q	P
1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0

خواص:

- $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \wedge (q \Rightarrow p))$
- $\overline{(\exists x \in A, P(x))} \Leftrightarrow (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \overline{p(x)})$
- $\overline{(\forall x \in A, P(x))} \Leftrightarrow (\exists \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \overline{p(x)})$
- $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\mathrm{p} \wedge \bar{q})$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

أمثلة عن القضايا و الروابط المنطقية :

١- لتكن القضية p التالية $X \in Q: \ (X \geq 1/2)$
لتكن القضية q التالية $X \in Q: (X \leq 1/2)$
عندئذ يكون وصل القضيتين $p \wedge q$ هو: $X \in Q: (X = 1/2)$

٢- لتكن القضية p التالية $X \in Q: \ (X > 1/2)$
لتكن القضية q التالية $X \in Q: (X < 1/2)$
عندئذ يكون فصل القضيتين $p \vee q$ هو: $X \in Q: (X \neq 1/2)$

٣- 3– (3=2) $\Rightarrow$ (2 =1) و عبارة عن استلزام يمكن إرجاعه إلى : $\bar{p}q \vee$
حيث القضية p هي2=1 : والقضية q هي2=3 : وعليه $\bar{p}q \vee$ هي:
(3=2) = $\vee$ (1≠2) ونعلم أن صحة الفصل هي من صحة إحدى القضيتين وبالتالي
يمكن اعتبار الاستلزام (3=2) $\Rightarrow$ (2 =1) صحيح.

الفصل الثانـي

المكمان

مقدمة:

القضية الرياضية عبارة عن بيان صحيح أو خاطئ، ولا يوجد بديل آخر. ليس هذا هو الحال بالنسبة لجميع الافتراضات في اللغة اليومية، على سبيل المثال: "مرحبًا" أو "قل لي، ليست صحيحة ولا خاطئة، إذن هما ليس قضيتان رياضيتان. ولكن "إنها تمطر" أو "أنا في محاضرة المنطق" هي عبارات يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة، وبالتالي فهما قضيتان رياضيتان.

غالبًا ما تكون اللغة الشائعة غامضة: هل العبارة: "يتم إغلاق جميع المتاحف في أيام معينة" تعني "إغلاق جميع المتاحف في أيام معينة" أم أنها تعني "كل متحف مغلق في أيام معينة "، بينما هما مختلفان تمامًا؟

في الرياضيات، لكي تكون قادرًا على القول على وجه اليقين أن خاصية ما صحيحة أو خاطئة، لا يمكن أن يكون هناك غموض. هذا هو السبب في أنه من الضروري اعتماد لغة محددة خاصة بـالمنطق الرياضي. ولهدا نحتاج لاستخدام محددان الكمية (المكممان) للإشارة إلى أي قضايا (بعضها، كل) تكون الخاصية صحيحة.

الثوثولوجي (القانون المنطقي):

تعريف: إن الثوثولوجي (أو القانون المنطقي) هو قضية مركبة نكون صحيحًة مهما كانت قيم الحقيقة للقضايا البسيطة التي تتكون منها.

لإثبات أن الاقتراح المركب هو ثوثولوجي، نقوم ببناء جدول الحقيقة الخاص بنا ونرى أن العمود الأخير يتكون فقط من 1 (صحيح).

مثال: القضايا التالية هي ثوثولوجي

$$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$$

$$\overline{(p \wedge \bar{p})}$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

الحل:

جدول الحقيقة للقضيتين: (1)و (2)

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$	$\bar{\bar{p}}$⇔p	$p\wedge\bar{p}$	$\overline{(p\wedge\bar{p})}$
1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1

جدول الحقيقة للقضية: (3)

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$	$(p\wedge q)$⇔(q∧p)
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*

جدول الحقيقة للقضية: (4)

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$	$(p\vee q)$⇔(q∨p)
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*

محددات الكم المنطقية:

ليست الروابط المنطقية الوحيدة المهمة في النصوص الرياضية التي درسناها في الدرس الاول: بل يوجد محددان الكمية "∀" و "∃".

لتكن X مجموعة كيفية غير خالية و لتكن E مجموعة من القضايا المنطقية.

نسمي محمول (قصية بدلالة متغير) كل تطبيق

$$\begin{aligned} P:\quad & X \quad \to E \\ & x \quad \to P(x) \end{aligned}$$

تعريف: إدا كانت القضية $P(x)$ صادقة من أجل كل عنصر $x \in X$، نقول إن القضبة

"$\forall x \in X, P(x)$" صادقة، ونقول إنها خاطئة إدا كان $P(x)$ خاطىء من أجل عنصر واحد على الأقل x من X ونسمي الرمز ∀ بالمكمم الكلي.

متال: $0\forall x \in R: x + 1 >$

تعني مهما يكن x من R، لدينا $x + 1 > 0$.

ملاحظة: القضية "$\forall x \in X, P(x)$" نقرؤها كما يلي " مهما يكن x من X حيث القضية $P(x)$ محققة.

تعريف: إذا وجد على الأقل عنصر x من X بحيث $P(x)$ تكون صادقة، نقول أن القضية "$\exists x \in P(x)$" صادقة، ونقول إنها خاطئة إذا كان $P(x)$ خاطىء من أجل كل عنصر x من X ونسمي الرمز $\exists$ بالمكمم الوجودي.

مثال: $\exists x \in R: x + 30 > 30$

تعني يوجد على الأقل x من R، حيث $x + 1 > 0$.

ملاحظة: القضية "$\exists x \in X, P(x)$" نقرؤها كما يلي " يوجد عنصر x من X حيث القضية $P(x)$ محققة.

مثال:

نعتبر القضية: $P(x) = "x \geq 0"$ إذن:

القضية "$\forall x \in R, x \geq 0$" خاطئة.

- القضية "$\exists x \in R, x \geq 0$" خاطئة.

ترتيب محددان الكم:

عند التعامل مع القضايا باستخدام محددان الكم، من المهم توخي الحذر في ترتيب المحددات الكمية.

مثال: العبارة التالية تعني أن كل رقم حقيقي له نقيض:

$$\forall x \in R, \exists y \in R: x + y = 0.$$

هذه القضية صحيحة تمامًا في R (يكفي أن $y = -x$ ؛ لذلك تختلف y وفقًا لـ x).

من ناحية أخرى، القضية

$$\exists y \in R, \forall x \in R: x + y = 0.$$

هو خطأ. هذا يعني في الواقع أنه سيكون هناك عدد حقيقي y نقيضا بالنسبة للجمع: إذا أضيف إلى أي عدد حقيقي x ، فإنه سيعطي دائمًا مجموعًا يساوي صفرًا.

مثل هذا الرقم الحقيقي غير موجود هناك.

ومع ذلك، يمكننا تبديل ترتيب المحددات الكمية إذا كانت متطابقة أو واحدة بجانب الأخرى.

مثال:

العبارة التالية:

$$\forall n \in N, \forall m \in N: n \neq 0 \Rightarrow n + m > m$$

التي معناها

$$\forall m \in N, \forall n \in N: n \neq 0 \Rightarrow n + m > m$$

نفي المحددات الكمية:

إن نفي المُحدِّد الكلي هو المُحدِّد الوجودي، ونفي المُحدِّد الوجودي هو المُحدِّد الكلي. لذلك، من أجل رفض قضية تحتوي على محددات كمية، فإننا نرفض المحددات الكمية وننفي العبارة التالية:

نفي$\exists x \in X, P(x)$ هو $\forall x \in X, \overline{P(x)}$

نفي$\forall x \in X, P(x)$ هو $\exists x \in X, \overline{P(x)}$

مثال: $\forall x \in R, x \geq 0$ خاطئة ونفيها $\exists x \in R, x \geq 0$**.**

مثال:

١- نفي عبارة "*كل التفاح في السلة أخضر*" هو "*هناك تفاحة في السلة ليست خضراء*"
٢- إن نفي "*الكل (...)*" ليس "*لا شيء (...)*" بل بالأحرى "*يوجد واحد على الأقل ليس لدينا (...)*".

ملاحظة: فرضا فقط

القضية "$\forall x \in \emptyset, P(x)$" هي دائما صحيحة (لا يوجد ما يتحقق في المجموعة الخالية). أما القضية "$\exists x \in \emptyset, P(x)$" فهي دائما خاطئة (لا يوجد عنصر في المجموعة)

خصائص المكممين:

نعرف فيما يلي بعض الخواص للمكممين الكلي والوجودي.

لتكن P و Q محمولين معرفين على مجموعة X.

خواص المكمم الكلي:

١- $\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x,y) \equiv \forall y \in Y, \forall x \in X, P(x,y)$
(المكمم الطلي تبديلي)
٢- $\forall x \in X, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x \in X, P(x) \wedge \forall x \in X, Q(x)$
(المكمم الكلي توزيعي على الوصل)
٣- $(\forall x \in X, P(x) \vee \ \forall xX, \in Q(x)) \Rightarrow \forall xX, \in (P(x) \vee Q(x))$
٤- $\forall x \in X, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall xX, \in P(x) \Rightarrow \forall xX, \in Q(x))$
٥- $\forall x \in X, (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, Q(x))$

خواص المكمم الوجودي:

٦- $\exists x \in X, \exists y \in Y, P(x,y) \equiv \exists y \in Y, \exists x \in X, P(x,y)$
(المكمم الطلي تبديلي)

٧- $\exists x \in X, \big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x \in X, P(x) \vee \exists x \in X, Q(x)$
(المكمم الكلي توزيعي على الفصل)

٨- $\exists x \in X, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow [(\exists x \in X, P(x)) \wedge (\exists x \in X, Q(x))]$

٩- $[\exists x \in X, P(x) \Rightarrow \exists x \in X, Q(x)] \Rightarrow [\exists x \in X, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)]$

الفصل الثالث

أنماط البرهان

البرهان الرياضي:

يعرف البرهان الرياضي على أنه عبارة عن تعليل منطقي لصحة عبارة رياضية أو علاقة رياضية بالاستناد إلى مجموعة من البديهيات. فهو يعرف بأنه عملية تهدف بشكل أساسي أو تبرير صحة عبارة أو علاقة رياضية.

دوره: يتمثل دور البرهان الرياضي في

- التحقق من صحة عبارة ما.
- تعليل سبب صحة عبارة ما.
- توصيل معرفة رياضية.
- اكتشاف أو بناء معرفة رياضية جديدة.
- تنظيم البيانات في نظام بديهي.

١- **طريقة برهان $p \Rightarrow q$:**

نسمي العبارة $p \Rightarrow q$ ، نظرية التأكيد، حيث p هي الفرضيات و q هي الاستنتاجات، مما إثبات النظرية $p \Rightarrow q$ هي اختبار صحة العبارة. فيما يلي طريقة برهانها.

يجب أن نبين أن $p \Rightarrow q$ هي توتولوجي، إذن حسب تعريف الرابط $\Rightarrow$ البرهان يعود إلى أن نبين أن p صحيحة وعليه لابد أن تكون q صحيحة.

٢- **طريقة برهان $p \Leftrightarrow q$:**

العبارة $p \Leftrightarrow q$ تمثل رابط التكافؤ. ومعناها بعبارة أخرى $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$.

لإثبات $p \Leftrightarrow q$ يكفي أن نبين أن $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$.

أنماط البرهان:

١- **الاستنتاج:** (raisonnement déductif)

تعريف: هو استدلال يعتمد على القاعدة التالية:

عندما تكون p قضية صحيحة، و $p \Rightarrow q$ صحيحة، في هده الحالة فقط يمكننا القول أن q هي قضية حقيقية.

هذا هو المنطق الأساسي الذي يستعمل بشكل واسع وسوف يستخدم هذا المنطق عدة مرات بحيث القضية البسيطة "$p \Rightarrow q$ صحيحة " غير كافية والقضية الأكثر اكتمالا هي " p صحيحة و $p \Rightarrow q$ صحيحة " وبالتالي القضة الثانية فقط تؤكد صحة q.

ملاحظة:

بالإضافة إلى ذلك، فأن المعنى الضمني يمكن أن يكون متعدي، ويأخذ الشكل التالي:

إدا كانت القضية p صحيحة و $p \Rightarrow q \Rightarrow R \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow S \Rightarrow T$ صحيحة، فإن القضية T صحيحة.

٢- **<u>البرهان بالخلف:</u>** (Le raisonnement par l’absurde)

نريد أن نبين أن القضية p صحيحة. نفترض أن نفيها $\bar{p}$ هو الصحيح ونبين أن هذا يؤدي إلى قضية خاطئة. نستنتج أن p صحيحة (لأن q خطأ، فإن الاستلزام $p \Rightarrow q$ لا يمكن أن يكون صحيحًا إلا إذا كانت $\bar{p}$ خطأ أو إذا كانت p صحيحة).

بعبارة أخرى: لكي نبرهن على صحةp ، نفرض أن p خاطئة ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض. أي إدا كانت القضية $\bar{p} \Rightarrow q$ صحيحة والقضية q خاطئة فإن القضية p صحيحة.

<u>مثال:</u>

بين أن أي عدد طبيعي مربعًا، له عدد فردي من القواسم.

ليكن:

p : x هو عدد طبيعي، مربع.

q : x له عدد فردي من القواسم.

بفرض أن p صحيحة و q خطأ. ونبين أن هدا غير محقق.

نفرض أن x هو عدد مربع ويقبل $2k$ من القواسم.

ليكن y عدد بحيث $y = y.y$. نستثني 1، x و y . يبقى عدد فردي من القواسم، ومن بينهم z_1 و z_2 مختلفين حيث $x = z_1.z_2$.

وهدا في الاصل عدد زوجي، ويبقى إدن واحد. ليكن a هداالعدد ويختلف عن 1، x و y . لابد إدن أن يحقق $x = a.a$ وهدا تناقض لأن $a \neq y$.

<u>مثال:</u>

نبين أن $\sqrt{2}$ عدد غير منطقية (irrationnel). أي $\sqrt{2} \notin Q$

نستخدم البرهان بالخلف أن $\sqrt{2} \in Q$. يوجد إدن عددين طبيعيين غير منعدمين a, b حيث: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ او بعبارة أخرة $a^2 = 2b^2$. الأن لتجزئة العدد a^2 إلى عوامل أولية، العدد الأولى 2 يظهر كأس زوجي ($a = 2^\alpha \times \dots \Rightarrow a^2 = 2^{2\alpha} \times \dots$)، و بالتالي يظهر كأس فردي في $2b^2$ ($b = 2^\beta \times \dots \Rightarrow 2b^2 = 2^{2\beta+1} \times \dots$) . بما أن التجزئة إلى

عوامل اولية للعدد الطبيعي 2 وحيدة، فإن a^2 و $2b^2$ مستحيلة. وعلية الفرضية $\sqrt{2} \in Q$ غير ممكنة وبالتالي $\sqrt{2} \notin Q$

٣- البرهان باستعمال العكس النقيض: (Le raisonnement par contraposition)

نعلم أن القضيتين $(p \Rightarrow q)$ و $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ متكافئان، إدن البرهان على $p \Rightarrow q$ يعود للبرهان على أن $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

مثال:

أي عدد طبيعي يمثل مربعًا، له عدد فردي من القواسم.

ليكن:

p : x هو عدد طبيعي، مربع.

q : x له عدد فردي من القواسم.

نبين باستعمال العكس النقيض. لهدا وجب علينا تجميع كل قواسم بأزواج مختلفة y, z حيث $x = y.z$. وبالتالي لا يمكن أن يبقى عدد وحيد a حيث $x = a.a$ وبالتالي x ليس مربعا.

متال:

لتكن k, k' عددين طبيعيين غر منعدمين. بين أن $kk' = 1 \Rightarrow \mathrm{k} = \mathrm{k}' = 1$.

نفرض أن $k \neq 1$ أو $k' \neq 1$. إدن لينا $(k \geq 2$ و $k' \geq 1)$ أو $(k \geq 1$ و $k' \geq 2)$.

وفي كلتا الحالتين لدينا $kk' \geq 2$ وبالخصوص $kk' \neq 1$.

إدن $(kk' \neq 1) \Rightarrow (k \neq 1$ أو $k' \neq 1)$.

بالعكس النقيض $kk' = 1 \Rightarrow \mathrm{k} = \mathrm{k}' = 1$.

٤- البرهان بمثال مضاد:

تعريف: لكي نبرهن على خطأ القضية $\forall x \in E, P(x)$ يكفي أن نجد عنصر x_0 من E حيت $P(x)$ غير صحيح.

٥- **البرهان بفصل الحالات:**

تعريف: من صحة القضية $(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{p}\Rightarrow\bar{q})$ نستنتج صحة القضية q.

٦- **البرهان بالتراجع:** (raisonnement par récurrence (ou par *induction*))

تعريف: للبرهان على صحة القضية $P(x)$: $(\forall n \geq n_0)$ $(n \in N)$

نتبع الخطوات التالية:

- نثبت صحة القضية $P(n_0)$.
- نفرض صحة القضية $P(k)$: $n_0 \leq k \leq n$.
- نثبت صحة القضية $P(n+1)$.

مثال:

نريد أن نبين أنه $\forall n \in N$:

$$p(n): 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نستخدم بالبرهان بالتراجع:

- لدينا $p(0)$ محققة.

$$0^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

- نفرض أن القضية $p(k)$ صحيحة من أجل أحد القيم $k \in N$ بحيث:

$$p(k): 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

- ونبين أن القضية $p(k+1)$ صحيحة.

لدينا بالفرض

$$p(k+1): 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

إدن

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4}{4}(k+1)(k+1)^2$$
$$=\frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2+4(k+1)\quad\right)=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

إدن

$$0^3+1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}((k+1)+1)^2$$

وبالتالي $p(k+1)$ صحيحة.

الفصل الرابع

المجموعات

ما هي المجموعة؟
طبعا، ستكون الفكرة الأولى لمحاولة تعريف المجموعة هي العبارة الشهيرة
"جمع أشياء من نفس الطبيعة."

فلا يمكن أن تكوين مجموعة من القمر وقطعة خيار مخلل ما لم تعتبرهم من نفس الطبيعة؟
خيار أخر لشبه تعريف للمجموعة: " جمع أشياء لها نفس الخواص"
فكرة أخرى وهي القول بأن مفهوم المجموعة هي مفهوم بدائي بمعنى غير قابلة للتعريف.
لكن دون تدقيق إضافي سيكون هذا تملص ومراوغة.

البعض يقول "المجموعة هي أي شيء وكل شيء".

لفهم أحسن يجب أن نبين مالا يمكن أن يكون مجموعة ومنه يمكن التصور بأنه غير مقنع القول "مجموعة الأذكياء" لأن كل واحد سيظن نفسه منهم بالرغم من وجود غير الأذكياء في كل مكان.
"مجموعة الصلع" متى يكون أحدنا أصلع .
"أمواج البحر" هل يمكن أن تكون مجموعة ؟
سنوضح في هذا الفصل مفهوم المجموعة وسنبين العلاقة المتينة الموجودة بين مفهوم المجموعة ومنطق القضايا المذكور في الفصول الأولى.
كيف نعرف مجموعة ؟
لأنه لا يمكن اعتبار "جمع الأشياء" مجموعة فأننا سنذكر بعض التعاريف و خواص المجموعات.

تعاريف:

المجموعة هي مجموعة من العناصر التي هي عناصرها.

غالبًا (ولكن ليس بالضرورة) نتبنى أحرفًا كبيرة لتعيين مجموعات وأحرف صغيرة لتعيين العناصر.

تعريف:

إذا كان a عنصرًا من المجموعة A ، فإننا نقول إن a ينتمي إلى A ونكتب $a \in A$

إذا لم تكن b عنصرًا من A ، فإننا نقول إن b لا ينتمي إلى A ونكتب $a \notin A$

نظرية المجموعات هي في الواقع نظرية لعلاقة الانتماء هذه. ومن هنا تأتي أهمية الوصف الدقيق للمجموعة، بحيث لا يكون هناك غموض حول ما إذا كان الكائن ينتمي إلى هذه المجموعة أم لا.

وصف المجموعة:

هناك طريقتان أساسيتان لوصف مجموعة:

- مجموعة معرفة بالامتداد "Ensemble définis en extension".

وهي أسهل طريقة لوصف الكل هي اقتباس عناصره. هذه مكتوبة بين قوسين مفصولة بفاصلات. لا يهم الترتيب الذي تظهر به.

مثال: المجموعة A تتكون من الحروف a, b, c, d , تكتب

$$A = \{a, b, c, d\}$$

- مجموعة معرفة بالسياق "Ensemble définis en extension"

إذا كانت المجموعة تحتوي على عدد كبير من العناصر، فمن المستحيل تعدادها وبالتالي من الضروري اللجوء إلى وصف في شكل معيار الانتماء. في مثل هذه الحالة، من المهم تحديد المجموعة الأولية، التي تسمى المجموعة المرجعية أو المجموعة الشاملة، والتي تأتي منها العناصر.

مثال: مجموعة العناصر x التي تحقق الخاصية $x > 5$ يختلف اعتمادًا على ما إذا كنا نعترف بأن x طبيعي أو صحيح:

$$A = \{x: x\ entier\ et\ x > 5\}$$

$$B = \{x: x\ rationnel\ et\ x > 5\}$$

حيث $\frac{23}{5}$ عنصرمن B وليس من A.

مجموعات خاصة

- المجموعة الخالية التي، بالتعريف، لا تحتوي على عناصر. نرمز لها $\emptyset$. وبالتالي، فإن المجموعة المعرفة من خلال قضية متناقضة تساوي المجموعة الخالية.

مثال: المجموعة $A = \{x: x\ \in R\ et\ \ x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

- المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد فقط تسمى مفردة. هذا هو الحال بالنسبة لكل $A = \{a\}$. لأنه لا يوجد سوى عنصر واحد، وهو a ، يمكننا كتابة $a \in A$.

تعريف:

إذا كانت جميع عناصر المجموعة A هي أيضًا عناصر المجموعة B (يفترض أنها ليست فارغة)، فإننا نقول إن A متضمن في B ونكتب

$$A \subseteq B$$

نقول أيضًا أن A هي مجموعة جزئية من B أو أن A هي جزء من B.

بالتعريف، يمكن كتابة

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

مثال: إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الطبيعية أقل من 10 وإذا كانت B هي مجموعة الأعداد الزوجية بين 2 و 8، فلدينا

$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \qquad B = \{2,4,6,8\}$$

إذن $B \subseteq A$.

- من السهل التحقق من أن كل مجموعة محتواه في نفسها. مهما كانت المجموعة A ، يمكننا الكتابة $A \subseteq A$.
- يسمى الجزء B من A والذي سيكون يختلف عن A مجموعة جزئية من A ونكتب علاقة احتواء تام $B \subset A$.
- المساواة بين المجموعات، $A = B$ إذا كان لديهم نفس العناصر بالضبط. تتحقق هذه الخاصية بمجرد التحقق من أن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ في نفس الوقت.
  وبالتالي، فإن إثبات المساواة بين مجموعتين غالبًا ما يتطلب إظهار هذين العلاقتين بشكل منفصل.

ملاحظة:

من المهم أن نفهم ما يمثله نفي الاحتواء: بمجرد ألا يكون عنصر واحد على الأقل من A عنصرًا من B ، فلن يتم احتواء A في B ، أو بطريقة مكافئة

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \; et \; x \notin B)$$

مثال:

المجموعة $A = \{3,4,5,6,7,8,10\}$ ليست مجموعة جزئية من المجموعة B للأعداد الزوجية لأن A يحتوي على عنصر واحد على الأقل، على سبيل المثال 7 ، مثل $7 \in A$ و $7 \notin B$.

- علاقة الانتماء هي علاقة تربط مجموعة بكل عناصرها. علاقة الاحتواء هي علاقة تربط مجموعتين. وبالتالي، لا معنى لكتابة $3 \subset A$. أو $B \in A$ إذا كانت A و B مجموعتين.

تعريف:

إذا استخرجنا عناصر معينة من مجموعة مرجعية U لتشكيل المجموعة A ، فإننا نحدد في نفس الوقت المجموعة التكميلية لـ A فيما يتعلق بـ U ، ونرمز لها بـ $\bar{A}$. تتكون هذه المجموعة $\bar{A}$ من عناصر U التي لا تنتمي إلى A.

$$\bar{A} = \{x: x \in U \ et \ x \notin A\}.$$

حالة خاصة: $\bar{\emptyset} = U, \quad \bar{U} = \emptyset, \quad \bar{\bar{A}} = A$

عمليات على المجموعات:

يتيح إجراء عمليات على مجموعتين أو أكثر الحصول على مجموعات أخرى. العمليات الرئيسية هي الاتحاد والتقاطع والاختلاف.

الاتحاد وتقاطع المجموعات:

تعريف:

اتحاد مجموعتين A و B ، يرمزان إلى $A \cup B$ ، هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى واحدة على الأقل من هذه المجموعات

$$A \cup B = \{x: x \in A \ ou \ x \in B\}$$

مثال:

$$\{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2\} \cup \emptyset = \{1,2\}$$

تعريف:

تقاطع مجموعتين A و B ، يرمزله $A \cap B$ ، هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من A و B

$$A \cap B = \{x: x \in A \ et \ x \in B\}$$

مثال:

$$\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$$

$$\{1,2,3\} \cap \emptyset = \emptyset$$

تعريف:

إذا لم يكن هناك عنصر مشترك بين مجموعتين، فإننا نقول إنهما منفصلتان

$$A \cap B = \emptyset$$

مثال:

$$\{1,2\} \cap \{3,4,5\} = \{\emptyset\}$$

قانون مورقان:

تخبرنا قوانين مورقان أن تكملة التقاطع هي اتحاد المكملات وتكملة الاتحاد هي تقاطع المكملات:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

الإثبات:

لدينا

$$A \cap B = \{x: x \in A \ et \ x \in B\}$$

إدن

$$\overline{A \cap B} = \{x: x \in U \ et \ x \notin (A \cap B)\}$$

$$= \{x: x \in U \ et \ x \notin A \ ou \ x \notin B\}$$

من جهة أخرى

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{x: x \in U \ et \ x \notin A\} \cup \{x: x \in U \ et \ x \notin B\}$$

$$= \{x: x \in U \ et \ x \notin A \ ou \ x \notin B\}$$

$$= \overline{A \cap B}$$

كدلك لدينا

$$A \cup B = \{x: x \in A \ ou \ x \in B\}$$

إدن

$$\overline{A \cup B} = \{x: x \in U \ et \ x \notin (A \cup B)\}$$

$$= \{x: x \in U \ et \ x \notin A \ et \ x \notin B\}$$

من جهة أخرى

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{x: x \in U \ et \ x \notin A\} \cap \{x: x \in U \ et \ x \notin B\}$$

$$= \{x: x \in U \ et \ x \notin A \ et \ x \notin B\}$$

$$= \overline{A \cup B}$$

الفرق بين المجموعات:

تعريف:

نستخدم الترميز $A \setminus B$ للإشارة إلى مجموعة عناصر A التي لا تنتمي إلى B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ et \ x \notin B\}$$

نظرية: لدينا $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

إثبات:

لدينا بالتعريف

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ et \ x \notin B\}$$

كذلك

$$A \cap \bar{B} = \{x : x \in A \ et \ x \notin B\}$$

إذن $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

الجداء الكارتيزي:

تعريف:

يتم تحديد الجداء الكارتيزي لمجموعتين A و B بواسطة

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ et \ y \in B\}.$$

إنها مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي يمكننا تشكيلها عن طريق أخذ x في A و y في B. وتأتي الترميز × من حقيقة أنه إذا كان A يحتوي على 3 عناصر وإذا كان B يحتوي على 2 ، فإن $A \times B$ سيكون 3 × 2 = 6.

مثال:

لتكن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{c, d\}$ مجموعتان، إذن:

$$A \times B = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$$

لما $A = B = R$، الجداء الكارتيزي لـ A و B هو:

$$A \times B = R \times R = R^2 = \{(x, y) : x \in R \ et \ y \in R\}$$

تجزئة مجموعة:

لتكن A مجموعة، نقول عن العائلة $(E_i)_{i=1,n}$ من المجموعات الجزئية من A بأنها تشكل تجزئة لـ A إدا وفقط إدا تحقق:

- (E_i) ليست مجموعة خالية مهما يكن $i \in \{1, \dots, n\}$
- $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = A$
- $E_i \cap E_j = \emptyset, \ \forall i \neq j, \ i, j \in \{1, \dots, n\}$

مجموعة أجزاء مجموعة:

مهما تكن المجموعة A فإن أجزاء A تشكل مجموعة جديدة، تسمى مجموعة أجزاء المجموعة A ويرمز لها بالرمز: $(P(A))$.

إدن $(P(A))$ معرفة بالاتفاق كما يلي

$$P(A) = \{X, X \subset A\}$$

بعبارة أخرى

$$X \subset A \Leftrightarrow X \in P(A)$$

الفصل الخامس

تمارين محلولة

التمرين الصفر:

أكمل الخطوط المنقطة بالرابط المنطقي المناسب: $\leftarrow, \leftrightarrow, \rightarrow$

1. $x \in R: x^2 = 4 \ldots\ldots\ldots x = 2$
2. $z \in C: z = \bar{z} \ldots\ldots\ldots\ldots z \in R$
3. $x \in R: x = \pi \ldots\ldots\ldots e^{2ix=1}$

الحل:

1. $\leftarrow$
2. $\leftrightarrow$
3. $\rightarrow$

التمرين الاول:

أكتب القضايا التالية باستخدام الرموز المنطقية

- مهما يكن x ينتمي إلى I فإن $f(x)$ يساوي الصفر.
- يوجد x ينتمي إلى I حيث $f(x)$ يساوي الصفر.
- مهما يكن x ينتمي إلى I فإن $f(x)$ أكبر تماما الصفر.
- يوجد k ينتمي إلى I حيث مهما يكن x ينتمي إلى I فإن $f(x)$ يساوي k.
- مهما يكن x ينتمي إلى I، مهما يكن y ينتمي إلى I حيث x أصغر تماما من y فإن $f(x)$ أصغر تماما من $f(y)$.
- مهما يكن M ينتمي إلى R، يوجد x ينتمي إلى I حيث $f(x)$ أكبر أو يساوي M .

الحل:

- $\forall x \in I, f(x) = 0.$
- $\exists x \in I, f(x) = 0.$
- $\forall x \in I, f(x) > 0.$
- $\exists k \in I, \ \forall x \in I, f(x) = k.$
- $\forall x \in I, \forall y \in I, (x < y) \Rightarrow \big(f(x) < f(y)\big).$
- $\exists M \in R, \ \exists x \in I, f(x) \geq M.$

التمرين الثاني:

هل القضايا التالية صحيحة أم خاطئة؟ قم بنفيها

- $(2+2=4) \wedge (1+1=3).$
- $(2+2=4) \vee (1+1=3).$
- $(2+2=4) \Rightarrow (1+1=3).$
- $(1+1=3) \Rightarrow (2+2=4).$

- $\forall x \in R, x^2 = 1.$
- $\exists x \in R, x^2 = 1.$
- $\forall x \in R, \exists y \in R, y = x^2.$
- $\forall x \in R, \exists y \in R, x = y^2.$
- $\exists y \in R, \forall x \in R, y = x^2.$

الحل:

- $(2+2=4) \wedge (1+1=3)$ est fausse, sa negation est $(2+2\neq 4) \vee (1+1\neq 3)$
- $(2+2=4) \vee (1+1=3)$ est vraie, sa negation est $(2+2\neq 4) \wedge (1+1\neq 3)$
- $(2+2=4) \Rightarrow (1+1=3)$ est fausse, sa negation est $(2+2=4) \wedge (1+1\neq 3)$
- $(1+1=3) \Rightarrow (2+2=4)$ est vraie, sa negation est $(1+1=3) \wedge (2+2\neq 4)$
- $\forall x \in R, x^2 = 1$ est fausse, sa negation est $\exists x \in R, x^2 \neq 1$
- $\exists x \in R, x^2 = 1$ est vraie, sa negation est $\forall x \in R, x^2 \neq 1$
- $\forall x \in R, \exists y \in R, y = x^2$ est vraie, sa negation est $\exists x \in R, \forall y \in R, y \neq x^2$
- $\forall x \in R, \exists y \in R, x = y^2$ est fausse, sa negation est $\exists x \in R, \forall y \in R, x \neq y^2$
- $\exists y \in R, \forall x \in R, y = x^2$ est fausse, sa negation est $\forall y \in R, \exists x \in R, y \neq x^2$

التمرين الثالث:

هل القضايا التالية صحيحة أم خاطئة؟ علل كل إجابة

- $\{1\} \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{\emptyset\} = \{1,2,3\}$
- التطبيق f المعرف بالشكل $f: N \to R$، حيث $f(x) = x + 2$ هو غامر.

الحل:

- صحيحة لأن $\{1\}$ مجموعة و هي عنصر من المجموعات $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
- خطأ لأن $\{1,2,3\} \cup \{\emptyset\} = \{1,2,3,\emptyset\}$
- خطأ لأن $y = 1$ ليست له سابقة في N .

التمرين الرابع:

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل

- $\{1\} \cup \{1\} = \{(1,1)\}$
- $\{1\} - \{1\} = \{0\}$
- $\{2\} \times \{5\} = \{10\}$

- $\{\quad\} \in \{\{\quad\}\}$

الحل:

- خطأ لأن $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$ ومنه $\{1\} \cup \{1\} = \{1\}$
- خطأ لأن $A - B = \{\mathrm{x}: \mathrm{x} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{x} \notin \mathrm{B}\}$ ومنه $\{1\} - \{1\} = \emptyset$
- خطأ لأن $A \times B = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}): \mathrm{x} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{y} \in \mathrm{B}\}$ ومنه $\{2\} \times \{5\} = \{(2,5)\}$
- صحيح لأن $\{\{\quad\}\}$ مجموعة مجموعات تحتوي على عنصر واحد وهو $\{\quad\}$.

التمرين الخامس:

أكتب القضايا التالية رياضيا:

- "إذا كان a و b عددان صحيحًان طبيعيًان، فهناك مضاعف لـ a أكبر من b".
- كل عدد حقيقي موجب له جذر تربيعي.

الحل:

- مضاعف a هو عدد على شكل ka مع k∈N.

هذا يعني أنه إذا كان a∈N و b∈N عددين كيفيين، فيوجد عدد من الشكل ka أكبر من b.

أي $\forall a \in N, \forall b \in N, \exists k \in N: ka \geq b$.

- الجدر التربيعي لـ x هوعدد y حيث $x = y^2$

هذا يعني أنه إذا كانت $x \in R^+$ عدد كيفي، فهناك عدد حقيقي y حيث $y = \sqrt{x}$ أو بعبارة أخرى $x = y^2$.

أي $\forall x \in R^+, \exists y \in R: x = y^2$

التمرين السادس:

قم بنفي القضايا التالية:

- في كل السجون، يوجد نزيل لا يحب أي حارس.
- هناك بلد يكون فيها كل حيوان بري فريسة لحيوان أخر.

الحل:

اكتب هذه الجملة كقضية منطقية مع محددات الكم، ثم أنفي هذا الافتراض المنطقي. أخيرًا، اكتب الجملة المقابلة لهذا النفي.

- "يوجد سجن حيث يحب جميع النزلاء حارسًا واحدًا على الأقل".
- "يوجد في كل بلد حيوان بري ليس فريسة لأي بلد آخر."

التمرين السابع:

- اكتب القضايا التالية في شكل قضية مركبة وحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ.

حدد المقترحات البسيطة p و q التي تستخدمها.

"لابد أن تكون 2+2=9 كي تكون 5=5."

- اكتب الجملة التالية في شكل جملة مركبة وحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ.
  حدد المقترحات البسيطة p و q التي تستخدمها.
  "من الخطأ القول أنه (إذا كانت مكة في الجزائر فإن قسنطينة في السعودية)".

- من أجل أي قيم حقيقية لـ p و p تكون القضية "$(p\wedge q) \Rightarrow p$" خاطئةً؟

الحل:

- نضع: "p:2+2=9" وهي قضية خاطئة.

و "q: 5=5" وهي قضية صحيحة.

وبالتالي حسب جدول الحقيقة فإن القضية: "$p\Rightarrow q$" خاطئة.

- نضع: "مكة في الجزائر" وهي قضية خاطئة.

و " قسنطينة في السعودية " وهي قضية صحيحة.

وبالتالي حسب جدول الحقيقة فإن القضية: "$\overline{(p\Rightarrow q)}$" خاطئة.

وبالتالي حسب جدول الحقيقة فإن القضية: "$p\Rightarrow q$" خاطئة.

- يظهر جدول الحقيقة أن القضية صحيح دائمًا وبالتالي فهو غير خاطئ مهما تكون p و q.

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q) \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

التمرين الثامن:

هل القضايا التالية توتولوجيا

- $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\bar{p}\Rightarrow\bar{q})$
- $((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$
- $\overline{(p\vee q)}\Leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})$
- $\overline{(p\wedge q)}\Leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})$

الحل:

قم بإنشاء جدول الحقيقة. إذا كانت القضية عبارة عن توتولوجي، فيجب أن يحتوي كل العمود الأخير على قيمة الحقيقة *1*.

- القضية ليس توتولوجي لأننا عندما ننظر إلى جداول الحقيقة، نلاحظ أن العمود الأخير لا يتكون كله من *1*. وبالتالي فإن هذه القضية يمكن أن تكون صحيحًة أو خاطئًة وفقًا لقيم الحقيقة للافتراضات المختلفة التي تتكون منها.

p	q	$p\Rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}\Rightarrow\bar{q}$	$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\bar{p}\Rightarrow\bar{q})$
1	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

- القضية عبارة عن توتولوجي لأننا عندما ننظر إلى جداول الحقيقة، نلاحظ أن العمود الأخير يتكون فقط من *1*. لذلك فإن هذه القضية دائمًا ما يكون صحيحًة، مهما كانت قيم الحقيقة للقضايا المختلفة التي تتكون منها.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$p\Leftrightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p$	$((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

- القضية ليس توتولوجي لأننا عندما ننظر إلى جداول الحقيقة، نلاحظ أن العمود الأخير لا يتكون كله من *1*. وبالتالي فإن هذه القضية يمكن أن تكون صحيحًة أو خاطئًة وفقًا لقيم الحقيقة للافتراضات المختلفة التي تتكون منها.

p	q	$p\vee q$	$\overline{(p\vee q)}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}\vee\bar{q}$	$\overline{(p\vee q)}\Leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1

- القضية عبارة عن توتولوجي لأننا عندما ننظر إلى جداول الحقيقة، نلاحظ أن العمود الأخير يتكون فقط من *1*. لذلك فإن هذه القضية دائمًا ما يكون صحيحًة، مهما كانت قيم الحقيقة للقضايا المختلفة التي تتكون منها.

p	q	$p\wedge q$	$\overline{(p\wedge q)}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}\vee\bar{q}$	$\overline{(p\wedge q)}\Leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

التمرين التاسع: (البرهان بالخلف)

لتكن $(f_n)_{n\in N}$ سلسلة من التطبيقات من N نحو N. نعرف التطبيق

$$\begin{aligned} f:\quad & N \to \qquad N \\ & n \to \quad f(n) = f_n(n) + 1 \end{aligned}$$

بين أنه لا يوجد أي عدد $p \in N$ بحيث: $f = f_p$.

الحل:

نفرض أنه يوجد $p \in N$ بحيث: $f = f_p$.

تطبيقين متساويين إدا وفقط إدا كان يأخذان نفس القيم: $\forall n \in N: f(n) = f_p(n)$.

لما $n = p, f(p) = f_p(p)$. من تعريف التطبيق f لدينا $f(p) = f_p(p) + 1$. وهدا تناقض لأن $f(p)$ لا يمكن أن يأخذ قيمتين مختلفتين.

إدن $\forall p \in N: f \neq f_p$.

التمرين العاشر: (البرهان بالعكس النقيض)

- لتكن $p_1, p_2, \dots, p_r$ أعداد أولية. بين أن $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ لا يقبل القسمة بأي عدد p_i.
- استخدم السؤال السابق لتوضح بالخلف أن هناك عددًا لا نهائيًا من الأعداد الأولية.

الحل:

- إدا وجد i محدد حيث p_i يقسم $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$، إدن يوجد $k \in Z$ حيث $N = kp_i$، وعليه

$$p_i(k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r) = 1$$

ليكن $p_i q = 1$ حيث $q = k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$ عدد طبيعي. إدن $p_i \in Z$ و $1/p_i = q \in Z$، و عليه p_i يساوي *1* أو *-1* . إدن p_i غير أولي.

إدن بالعكس النقيض صحيح N لا يقبل القسمة على p_i.

- نبين بالخلف، إدا كان لا يوجد أي عدد منته من الأعداد الأولية $p_1, p_2, \dots, p_r$ إدن $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ هو عدد أولي لأنه غير قابل للقسمة سوى على نفسه و *1*.
لكن N أكبر تماما من كل القيم p_i. وبالتالي لدينا عدد أولي N بختلف عن p_i، و عليه يوجد على الأقل $r + 1$ عدد أولي و هدا تناقض.

التمرين الحادي عشر: (البرهان بالتراجع)

نبين أن $\forall n \in N$:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\ (n+1)}{2}$$

الحل:

نستخدم بالبرهان بالتراجع:

$$p(n): 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\ (n+1)}{2}$$

- لدينا من أجل $p(0)$ محققة.

$$0=\frac{0(0+1)}{2}$$

- نفرض أن القضية $p(k)$ صحيحة من أجل أحد القيم $k \in N$ بحيث:

$$p(k): 0+1+2+\cdots+k \quad =\frac{k \quad (k+1)}{2}$$

- ونبين أن القضية $p(k+1)$ صحيحة.

لدينا بالفرض

$$\begin{aligned} p(k+1)&: 0+1+2+\cdots+(k+1) \\ &=0+1+2+\cdots+k \quad +(k+1) \\ &=\frac{k \quad (k+1)}{2}+(k+1) \end{aligned}$$

إدن

$$\begin{aligned} \frac{k \quad (k+1)}{2}+(k+1) \quad &=\frac{k \quad (k+1) \quad +2(k+1)}{2} \\ &=\frac{(k+1) \quad (k+2)}{2} \end{aligned}$$

إدن

$$0+1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1) \quad (k+2)}{2}$$

وبالتالي $p(k+1)$ صحيحة.

التمرين الثاني عشر: (البرهان بالتراجع)

نبين أن $\forall n \in N$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n \quad (n+1) \quad (2n+1)}{6}$$

الحل:

نستخدم بالبرهان بالتراجع:

$$p(n): 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n \quad (n+1) \quad (2n+1)}{6}$$

- لدينا من أجل $p(1)$ محققة.

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6}$$

- نفرض أن القضية $p(k)$ صحيحة من أجل أحد القيم $k \in N$ بحيث:

$$p(k): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)\quad(2k+1)}{6}$$

- ونبين أن القضية $p(k+1)$ صحيحة.

لدينا بالفرض

$$p(k+1): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)\quad(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

إدن

$$\frac{k(k+1)\quad(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)\quad(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\quad(2k^2 + +k + 6k + 6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\quad(k+2)(2k+3)}{6}$$

إدن

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{(k+1)\quad((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

وبالتالي $p(k+1)$ صحيحة.

<u>التمرين الثالث عشر: (البرهان بالتراجع)</u>

لتكن السلسلة $(x_n)_{n\in N}$ معرفة كما يلي:

$$x_0 = 4,\quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}.$$

- بين أن: $\forall n \in N: x_n > 3$
- بين أن: $\forall n \in N: x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$
- بين أن: $\forall n \in N: x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$
- هل السلسلة $(x_n)_{n\in N}$ متقاربة؟

الحل:

١- نستخدم بالبرهان بالتراجع:

$$p(n): \quad \forall n \in N: x_n > 3$$

- لدينا من أجل $p(0)$ محققة.

$$x_0 = 4 > 3$$

- نفرض أن القضية $p(n)$ صحيحة من أجل أحد القيم $n \in N$ بحيث:
ونبين أن القضية $p(n+1)$ صحيحة.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}$$

لدينا بالفرض $x_n > 3$ إذن $x_n + 2 > 0$ و $2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0$ وعليه
$x_{n+1} - 3 > 0$

وبالتالي $p(n+1)$ صحيحة.

٢- نبين أن:

$$\forall n \in N: x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) > 0$$

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2} - \frac{x_n^2 + 3 + 12}{x_n + 2} > 0$$

لأن $x_n > 3$.

٣- نستخدم بالبرهان بالتراجع:

$$p(n):\quad \forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}: x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$$

- لدينا من أجل $p(0)$ محققة.

$$x_0 = 4 \geq 4$$

- نفرض أن القضية $p(n)$ صحيحة من أجل أحد القيم $n \in N$ بحيث:
ونبين أن القضية $p(n+1)$ صحيحة.
من المثال السابق، لدينا

$$x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$$

لدينا بالفرض $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

وبالتالي $p(n+1)$ صحيحة.

٤- السلسلة $(x_n)_{n\in N}$ تؤول إلى $+\infty$ وبالتالي غير متقاربة.

التمرين الرابع عشر:

لتكن E مجموعة. بين باستخدام البرهان بالعكس النقيض ما يلي:

$$* \ \forall A, B \in P(E):\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.$$
$$* \ \forall A, B, C \in P(E):\ (A \cap B = A \cap C \ et\ A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

الحل:

- نحل الجزء الأول فقط. أولاً وقبل كل شيء بطريقة "مباشرة". نفترض أن A و B يكونان $A \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

لتكن $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ ونبين أن $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$. بما أن $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ فإن $\mathrm{x} \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ إذن $\mathrm{x} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

لأن $A \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. وعليه $x \in B$.

التمرين الخامس عشر:

لتكن A, B مجموعتان. بين أن

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \;\; et \;\; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

الحل:

- $x \in \overline{A \cup \mathrm{B}} \Leftrightarrow x \notin \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

$$\Leftrightarrow x \notin \mathrm{A} \text{ et } x \notin \mathrm{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

- $x \in \overline{A \cap \mathrm{B}} \Leftrightarrow x \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

$$\Leftrightarrow x \notin \mathrm{A} \text{ ou } x \notin \mathrm{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$$

التمرين السادس عشر:

لتكن E و F مجموعتان، و $f: E \to F$.

بين أن:

$$* \;\; \forall A, B \in P(E): (A \subset B) \Rightarrow \big(f(A) \subset f(B)\big).$$

$$* \;\; \forall A, B \in P(E): f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

$$* \;\; \forall A, B \in P(E): f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

$$* \;\; \forall A, B \in P(F): f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

$$* \;\; \forall A \in P(F): f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A).$$

الحل:

نحل بعضها فقط.

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

إدا كان $y \in f(A \cap B)$ يوجد $x \in A \cap B$ بحيث $y = f(x)$ أو $x \in A$

إدن $y = f(x) \in f(A)$ وكدلك $x \in B$ إدن $y \in f(B)$. وبالتالي $y \in f(A) \cap f(B)$

كل عنصر من $f(A \cap B)$ هو عنصر من $f(A) \cap f(B)$

إدن $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

- $f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$

لدينا

$$x \in f^{-1}(F \backslash A) \Leftrightarrow f(x) \in F \backslash A$$

$$\Leftrightarrow f(x) \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A)$$

$$x \in E \backslash f^{-1}(A)$$

التمرين السابع عشر:

بين أن كل مجموعة من المجموعات التالية عبارة عن مجال، ربما يكون فارغًا أو مختزلًا إلى نقطة.

$$I_1 = \cap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[\quad et \quad I_2 = \cup_{n=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right[.$$

الحل:

$$I_1 = [0,2] \quad et \quad I_1 = [1, +\infty]$$

التمرين الثامن عشر:

لتكن $A, B \subset E$. أوجد حل المعادلات للمتغير $X \subset E$

$$* \ A \cup X = B.$$
$$* \ A \cap X = B.$$

الحل:

- $B \backslash A \subset X \subset B$
- $B \subset X \subset B \cup \bar{A}$

الفصل السادس

تمارين للحل

<u>اختبار سريع</u>

لتكن $B = \{1,2,3\}$ هل القضية التالي صحيح أم خطأ: $\forall x \in B, \forall y \in B: x^2 < y + 1$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
نفي القضبة "إن المجموعتين A و B لديهما عنصر مشترك واحد على الأقل" هو:	☐ $A \cup B = \emptyset$ ☐ $A \cap B = \{x\}$ ☐ $\exists x: x \in (A \cap B)$ ☐ $A \cap B = \emptyset$
الترجمة الرياضية للقضية "إذا كان a و b رقمين طبيعيين، يوجد مضاعف لـ a أكبر من b" هو:	☐ $\forall a \in N, \exists b \in N: a \geq b$ ☐ $\exists k \in N, \forall a \in N, \forall b \in N: ka \geq b$ ☐ $\forall a \in N, \forall b \in N, \exists k \in N : ka \geq b$ ☐ $\forall a \in N, \forall b \in N, \exists k \in N : ka \leq b$
القضية $((P \wedge Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee R))$ هي توتولوجي	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
نفي القضية: $\forall x \in N, \forall y \in N: x + y > 0$	☐ $\exists x \in N, \exists y \in N: x + y < 0$ ☐ $\exists x \in N, \exists y \in N: x + y \leq 0$ ☐ $\forall x \in N, \forall y \in N: x + y < 0$ ☐ $\forall x \notin N, \exists y \notin N: x + y \leq 0$
نفي القضية: $-2 \leq x \leq 2$	☐ $x < -2, ou\ x > 2$ ☐ $-2 < x < 2$ ☐ $x < -2, et\ x > 2$ ☐ $x \leq -2, ou\ x \geq 2$
لتكن $A = \{0,2,4,6\}$ و $B = \{0,2,4\}$ ما هي القضية الصحيحة؟	☐ $\exists x \in B: x \in A$ ☐ $\forall x \in A: x \in B$ ☐ $\forall x \in R: x \in A$ ☐ $\forall x \in R: x \in (A \cap B)$
معاكس القضية: $x \in N \Rightarrow x \geq 0$	☐ $x \in N \Rightarrow x \geq 0$

هو	☐ $x \geq 0 \Rightarrow x \in N$ ☐ $x < 0 \Rightarrow x \in N$ ☐ $x < 0 \Rightarrow x / \in N$
ضد القضية "إذا كانت f قابلة للاشتقاق فإن f تكون متصلة" هو	☐ إذا كانت f غير متصلة، فإن f غير قابلة للاشتقاق ☐ إذا كانت f متصلة، فإن f تكون قابلة للاشتقاق ☐ إذا كانت f قابلة للاشتقاق، فإن f ليست متصلة ☐ تكون f متصلة فقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق

اختبار مستوى أول

$P \Rightarrow Q$ تكافئ	☐ $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ ☐ $Q \Rightarrow P$ ☐ $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ☐ $Q \Rightarrow \overline{P}$
الترجمة الرياضية للقضية "تشترك المجموعتان A و B على الأقل في عنصر واحد" هي	☐ $A \cap B \neq \emptyset$ ☐ $A \cup B \neq \emptyset$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☐ $A \backslash B \neq \emptyset$
القضية $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$ هي توتولوجي	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
نفي القضية: $\forall x \in N: x > 1$	☐ $\exists x \notin N: x \leq 0$ ☐ $\exists x \in N: x \leq 1$ ☐ $\forall x \in N: x \leq 0$ ☐ $\exists x \in N: x < 0$
لتكن $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $B = \{1,2,3\}$ هل القضية التالية الصحيحة؟ $\forall x \in A: x + 5 < 12$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
اكتب الجملة التالية في شكل جملة مركبة وحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ. حدد المقترحات البسيطة P و Q التي تستخدمها. إذا كان $3 + 2 = 7$ فإن $4 + 4 = 8$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
اكتب الجملة التالية في شكل جملة مركبة وحدد ما إذا كانت صحيحة أم	☐ صحيح ☐ خطأ

خطأ. حدد المقترحات البسيطة P و Q التي تستخدمها. إذا كان $2+2=5$ فإن $4+4=10$	☐ لا أعلم
نفي القضية: $x \in Z$ هو	☐ $x \subset Z$ ☐ $x \in N$ ☐ $x /\in Z$ ☐ $x \in R$
لتكن $A=\{0,2,4,6\}$ و $B=\{0,2,4\}$ ما هي القضية الصحيحة؟	☐ $\exists x \in B: x \in A$ ☐ $\forall x \in A: x \in B$ ☐ $\forall x \in R: x \in A$ ☐ $\forall x \in R: x \in (A \cap B)$
لتكن $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $B=\{1,2,3\}$ هل القضية التالية الصحيحة؟ $\forall x \in A: x+7<10$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم

<u>**اختبار مستوى ثاني**</u>

إن نفي القضية "جميع عناصر المجموعة A هي أرقام حقيقية موجبة"	☐ $\exists x \in A: x<0$ ☐ $\exists x \in A: x=0$ ☐ $\forall x \in A: x<0$ ☐ $\exists x \notin A: x \in R$
الترجمة الرياضية للقضية "إذا كان a و b رقمين طبيعيين، فهناك مضاعف لـ a أكبر من b" هو	☐ $\forall a \in N, \forall b \in N, \exists k \in N: ka \leq b$ ☐ $\forall k \in N, \forall a \in N, \forall b \in N: ka \geq b$ ☐ $\forall a \in N, \forall b \in N, \exists k \in N: ka \geq b$ ☐ $\forall a \in N, \exists b \in N: a \geq b$
القضية $(P \vee (Q \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ هي توتولوجي	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ صحيح وخطأ
لتكن $B=\{1,2,3\}$ هل القضية التالية الصحيحة؟ $\exists x \in B, \forall y \in B: x^2<y+1$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
اكتب الجملة التالية في شكل جملة مركبة وحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ. حدد المقترحات البسيطة P و Q التي تستخدمها. لابد أن تكون $2+2=9$ لكي تكون $5=5$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم

القضية $((P\wedge Q)\vee R)\Rightarrow(P\wedge(Q\vee R))$ هي توتولوجي	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
لأي قيم حقيقية لـ P و Q يكون الاقتراح " $(\mathrm{P}\wedge \mathrm{Q})\Rightarrow \mathrm{P}$ " خاطئًا؟	☐ P صحيح و Q خطأ ☐ P خطأ و Q صحيح ☐ الكل خطأ ☐ الكل صحيح
لتكن $B=\{1,2,3\}$ هل القضية التالية صحيح أم خطأ:؟ $\exists x\in B,\exists y\in B: x^2+y^2<2z^2$	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
لنفترض أن A وB مجموعتان غير خاليتان. هل القضية $A\subseteq \mathrm{B}\Rightarrow \forall \mathrm{x}\in \mathrm{A}: \mathrm{x}\in \mathrm{B}$ صحيح أم خطأ؟	☐ صحيح ☐ خطأ ☐ لا أعلم
الترجمة اللغوية للقضة التالي: $\exists x\in Q,\forall y\in Q: x\neq y^2$	☐ ليس هناك عدد كسري له جذر تربيعي كسري ☐ يوجد عدد كسري ليس له جذر تربيعي كسري ☐ يوجد عدد كسري ليس جذرًا تربيعيًا ☐ هناك عدد كسري ليس له مربع

المراجع:

العربية:

١- يوسف قرقور، المبادئ الأساسية في المنطق الرياضي، المدرسة العليا للأساتذة، القبة ـ الجزائر.

٢- شيماء سهيلي، رندا طحار، شيماء بلفتني- المنطق الرياضي، مــذكـــــرة التخرج، المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي، سكيكدة- إشراف الأستاذ فراق عزوز، ٢٠١٦.

الأجنبية:

1- Sophie Pinchinat, Logique : le calcul de prédicats, IRISA, Université de Remes, 2014-2015

2- Serge Haddad (Pr de l ENS Cachan), Logique de calculabilité, Cache Cedex- France, 23 mai2008

3- Denis Roegel, Logique formelle et modélisation de raisonnements, novembre 1995.

4- Paul Rosière, Logique mathématique : introduction, Paris7- MT 3062, 29 octobre 2004.

5- Groupe liaison lycée post-bac, Quelques éléments de logique mathématique, Iren d’Orléans.