

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynomiaux perturbés

Option : Commande optimale des systèmes dynamiques

Par :
BOUACHA Nadia

Encadré par : MELLAHI. Nawal

MCB U.SKIKDA

Devant le jury :

Président :

BOULFOUL. Amel

MCA U. SKIKDA

Examineur:

DEBZ. Nassima

MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Remerciements

*On tient tout d'abord à remercier Allah qui nous a
Eclairé le bon chemin et qui nous permis de réaliser
modeste travail.*

*Nous tenons à exprimer nos remerciements à notre
encadreur*

*Mme. **MELLAHI NAWAL**, qui a dirigé ce travail
pour ses précieux conseils
et son suivi au cours de ce travail.*

*Aussi nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de
près ou de loin, enseignants et étudiants, à la
réalisation de ce mémoire.*

*Et enfin, nous tenons à exprimer notre parfaite
Considération aux membres de jury pour avoir bien
voulus examiner et juger notre travail.*

*A tout le corps enseignant du département de
Mathématiques pour l'enseignement reçu,*

surtout :

Mlle. Karek Chafia,

Mlle. Boulfoul Amel, Mme. Debz Nassima.

Dedication

To all special persons in my life,

To my miracle...

Nadia..

Résumé

Ce mémoire s'intéresse à l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement, en utilisant la théorie de moyennisation du premier et du deuxième ordre pour étudier le système différentiel de Kukles généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = +y \\ \dot{y} = -x + f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3 \end{cases}$$

Où $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$; $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$; $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ et $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$. Pour chaque $k=1,2$, $f_k(x)$, $g_k(x)$ et $h_k(x)$ sont de degrés n_1, n_2, n_3 respectivement $d_0^k \neq 0$ est un nombre réel et ε est un petit paramètre.

L'étude est illustrée par des exemples.

Mots clé

Cycle limite, Système différentiel, Théorie de moyennisation, Système de Kukles.

Abstract :

This work is interested to the study of the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending of a small parameter. Using the averaging theory of first and second order for studied the generalized polynomial Kukles differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = +y \\ \dot{y} = -x + f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3 \end{cases}$$

Where $h(x)=\varepsilon h_1(x) + h_2(x)$; $g(x)=\varepsilon g_1(x)+\varepsilon^2 g_2(x)$; $f(x)=\varepsilon f_1(x)+\varepsilon^2 f_2(x)$ and $d_0=\varepsilon d_0^1+\varepsilon^2 d_0^2$ where $f_k(x), g_k(x)$ and $h_k(x)$ have degree n_1, n_2, n_3 respectively, $d_0^k \neq 0$ is a real number for each $k=1,2$, and ε is a small parametre.

This study is illustrated by applications.

Keywords:

Limit cycle, Differential systems, Averaging theory, Kukles systems.

ملخص:

تتناول هذه المذكرة دراسة العدد الأكبر للدورات الحدودية الخاصة بالجمل التفاضلية المتعلقة بوسيط صغير. بإستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى والثانية نقوم بدراسة الجمل التفاضلية كثيرات الحدود كيكلاس المعممة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = +y \\ \dot{y} = -x + f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3 \end{cases}$$

حيث

$h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$; $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$; $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$
و $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$ من أجل $k = 1, 2$ و $f_k(x), g_k(x), h_k(x)$ كثيرات حدود من الدرجة n_1, n_2, n_3 بالترتيب، $d_0^k \neq 0$ عدد صحيح و ε وسيط بسيط.

دراسة الجمل التفاضلية بواسطة أمثلة.

الكلمات المفتاحية:

دورة حدودية، ، نظرية المتوسط، جمل كثيرات الحدود، الجمل التفاضلية كثيرات الحدود كيكلاس.

Table des matières

1	Notions préliminaires	12
1.1	Systèmes différentiels polynômiaux	12
1.2	Systèmes dynamiques	13
1.3	Flot d'une équation différentielle	14
1.4	Points d'équilibre et linéarisation	14
1.5	Portrait de phase	16
1.6	Nature des points d'équilibre	16
1.7	Stabilité des points d'équilibre	21
1.8	Orbite périodique et cycle limite	22
2	Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre	26
2.1	Méthode de moyennisation et solutions périodiques	26
2.2	Théorème de la moyennisation du premier ordre	27
2.3	Théorème de la moyennisation du deuxième ordre	30
3	Nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel polynomial généralisés de Kukles	34

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	8
3.1 Preuves des résultats	35
3.1.1 Preuve du théorème 3.1	35
3.1.2 Preuve du théorème 3.2 et certains lemmes	36
Bibliographie	48

Introduction

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, l'écologie, la chimie... Un système dynamique est constitué d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Dans le cadre choisi ici, celui de lois déterministes en temps continu, cette loi d'évolution prend la forme d'une équation différentielle.

On remonte le début de l'histoire des équations différentielles au début de l'analyse avec Ferma, Newton et Leibniz. Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de leurs orbites périodiques leurs existence, leurs nombres et leur stabilité. Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques des équations différentielles .

L'acte de naissance des cycles limites est le Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle écrit par Poincaré en 1881 [10]. L'importance de pouvoir déterminer le nombre des cycles limites fait la seconde partie du 16^{me} problème de Hilbert [6] qui peut être formulée de la façon suivante : Quel est le nombre maximum des cycles limites noté $H(n)$ que peut avoir le système polynomial planaire de degré n

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Ce problème n'est toujours pas résolu 112 ans après son énoncé ! En 1923, Dulac [4] proposa une démonstration assurant que ce nombre est fini pour tout n ; mais cette démonstration comportait une erreur. La résolution du Dulac a été faite d'une façon indépendante par Ecalle, Martinet et Moussu en 1987, Ilyashenko en 1991 et par Ecalle en 1992. Cette résolution permet de prouver que le champ de vecteurs polynomial possède un nombre fini de cycles limites. Mais ils n'ont pas pu trouver une estimation uniforme de ce nombre.

Les chercheurs considèrent une classe spéciale des équations différentielles. C'est la classe des équations de Liénard [8]

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Cette mémoire se compose trois chapitres et une annexe.

Le premier chapitre est un rappel de quelques notions générales que nous avons

utilisé dans ce travail. Nous commençons par définir les systèmes différentiels polynomiaux, les systèmes dynamiques, les points d'équilibre et leur nature, la linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des théorèmes importants de la méthode de moyennisation avec des exemples. On applique ces théorèmes pour la recherche des cycles limites de problème étudiés dans le chapitre trois.

Le troisième chapitre concerne l'étude du nombre maximal des cycles limites de certains systèmes de Kukles généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des polynômes de degrés n_1, n_2 et n_3 respectivement. $d_0 \neq 0$ est un nombre réel. En utilisons la méthode de moyennisation du premier et deuxième ordre.

Notions préliminaires

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes différentiels polynômiaux. On examinera les notions de : points d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibre, le portrait de phase, orbite périodique, cycle limite, nature des points d'équilibre.

1.1 Systèmes différentiels polynômiaux

Définition 1.1 *On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

- *Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on dit que (1.1) est un système différentiel polynômial.*

- Si les fonctions P et Q sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1), le nombre $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Si les polynômes P et Q s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^{n-j} \\ Q(x, y) = \sum_{i+j=n} b_{ij} x^i y^{n-j} \end{cases}$$

on dit que P et Q sont homogènes, dans ce cas le système (1.1) s'appelle Système différentiel polynômial homogène.

Nous supposons que les fonctions P et Q de classe C^1 (donc les conditions de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)).

1.2 Systèmes dynamiques

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, cette évolution est décrite généralement par des équations différentielles.

Définition 1.2 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application*

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ telle que

1. $\phi(., x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $\phi(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $\phi(0, x) = x$.
4. $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3 *Un système dynamique ϕ sur \mathbb{R}^n est linéaire si :*

$$\phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \phi(t, x) + \beta \phi(t, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n$$

1.3 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.4 *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = F(x) \tag{1.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $F(x) \in \mathbb{R}^n$. On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

où $\phi(t, x_0)$ est la solution de (1.2) telle que $\phi(0, x_0) = x_0$.

Remarque 1.1 *Le flot est dit autonome si F ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.*

1.4 Points d'équilibre et linéarisation

Points d'équilibre

Définition 1.5 *On appelle point d'équilibre ou point critique du système (1.2) tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $F(x_0) = 0$.*

linéarisation

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point d'équilibre,

consiste à se ramener au système linéaire associé, puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes.

Définition 1.6 On appelle système linéarisé du système (1.2) au voisinage du point d'équilibre x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax \quad (1.3)$$

où $A = DF(x_0)$ est la matrice jacobienne de F au point x_0 :

$$DF(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (1.4)$$

Exemple 1.1 Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = +4x \\ \dot{y} = -y - x^2 \end{cases} \quad (1.5)$$

L'origine est le seul point d'équilibre de ce système. La matrice Jacobienne associée à (1.5) est

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.6)$$

Définition 1.7 Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $DF(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

1.5 Portrait de phase

Soit le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système ci dessus représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.

Définition 1.8 *Les points critiques du système (1.7) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites du système, ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase. Le plan (x, y) est appelé plan de phase.*

1.6 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibres.

Définition 1.9 *Soit le système différentiel linéaire (1.3), où A est une matrice d'ordre 2. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .*

(i) *Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable. (Voir FIGURE 1.1)*

(ii) *Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :*

(a) *Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable. (Voir FIGURE 1.2)*

- (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable. (Voir FIGURE 1.3)
- (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$. (Voir FIGURE 1.4 et FIGURE 1.5)
- (iii) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$. (Voir FIGURE 1.6 et FIGURE 1.7)
- (iv) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ et $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un centre et il est stable mais pas asymptotiquement stable. (Voir FIGURE 1.8)

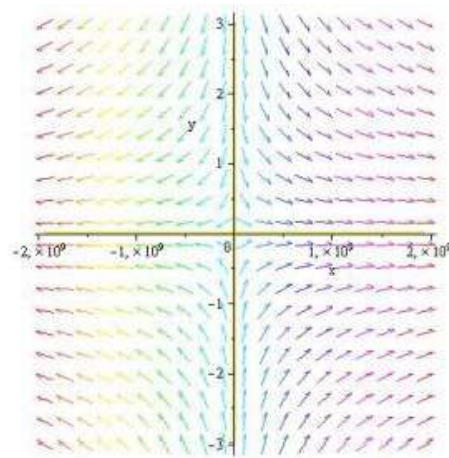
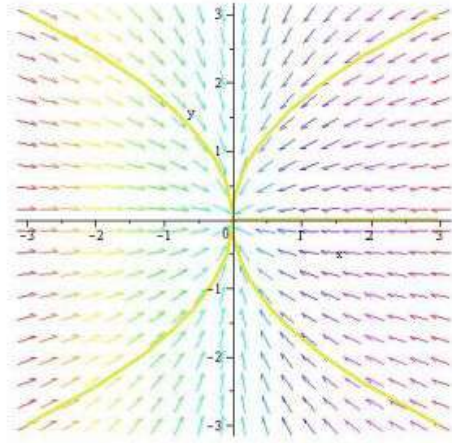
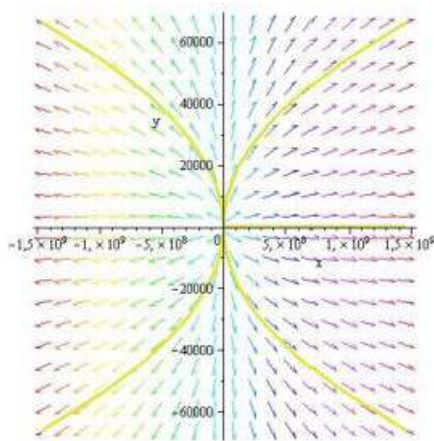
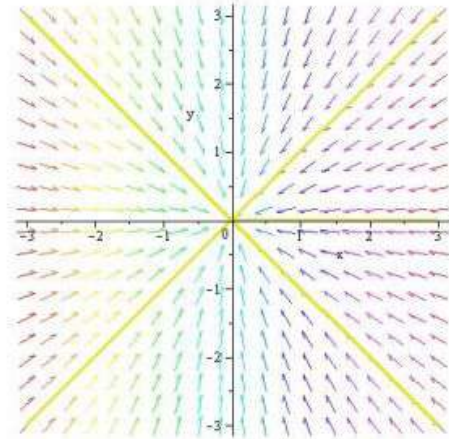
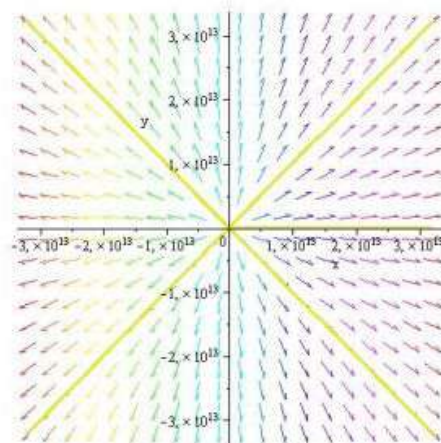
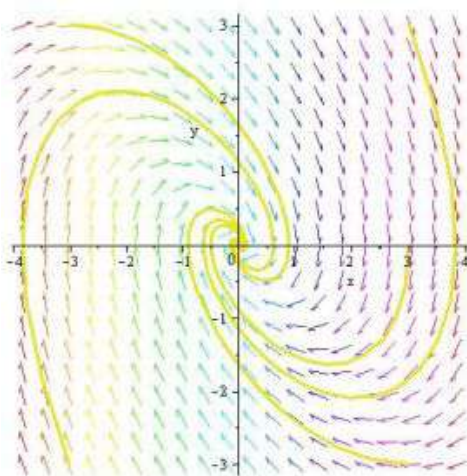
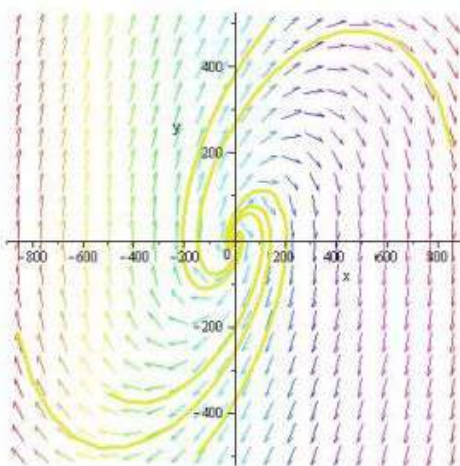
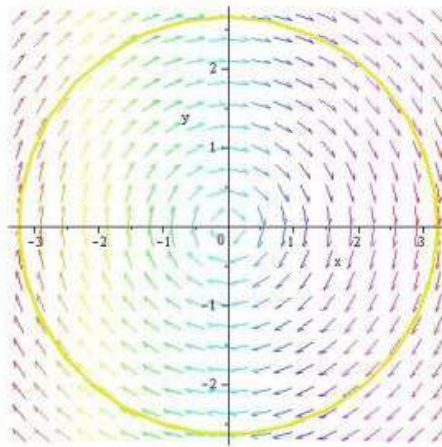


FIGURE 1.1 – (0,0) est un point selle.

FIGURE 1.2 – $(0,0)$ est un noeud stable.FIGURE 1.3 – $(0,0)$ est un noeud instable.

FIGURE 1.4 – $(0,0)$ est un noeud propre stable.FIGURE 1.5 – $(0,0)$ est un noeud propre instable.

FIGURE 1.6 – $(0,0)$ est un foyer stable.FIGURE 1.7 – $(0,0)$ est un foyer instable.

FIGURE 1.8 – $(0,0)$ est un centre.

1.7 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 1.10 Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.8). On dit qu'un point d'équilibre p est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\|\phi(t) - p\| \leq \delta \implies \|\phi(t) - p\| \leq \varepsilon \quad \forall t \leq t_0$$

Définition 1.11 On dit qu'un point d'équilibre p est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = p$.

Théorème 1.1 Soit le système linéaire (1.3). Le point $x = x_0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives.

Si A a au moins une valeur propre avec la partie réelle strictement positive, alors le point $x = x_0$ est instable.

1.8 Orbite périodique et cycle limite

Définition 1.12 On appelle solution périodique toute solution $x = \phi(t)$ du système (1.2) telle qu'il existe un nombre $T > 0$ vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t) \quad (1.9)$$

- Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.9) est appelé période.
- A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phase.

Définition 1.13 Un cycle limite C du système (1.2) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace des phases. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autre courbes fermées.

Remarque 1.2 Si toutes les trajectoires voisines s' s'approchent du cycle limite C lorsque $t \rightarrow +\infty$, il est dit stable ou attractif. Si en revanche toutes les trajectoires voisines s'éloignent du cycle limite C lorsque $t \rightarrow +\infty$, il est dit instable ou non attractif.

Définition 1.14 L'amplitude d'un cycle limite C est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite.

Exemple 1.2 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.10)$$

tel que α est un paramètre. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système (1.10) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Posons

$$f(r) = \dot{r} = \alpha r(1 - r^2).$$

Alors

$$f(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

On a donc un point d'équilibre $(0, 0)$ et un cycle limite d'amplitude $r = 1$

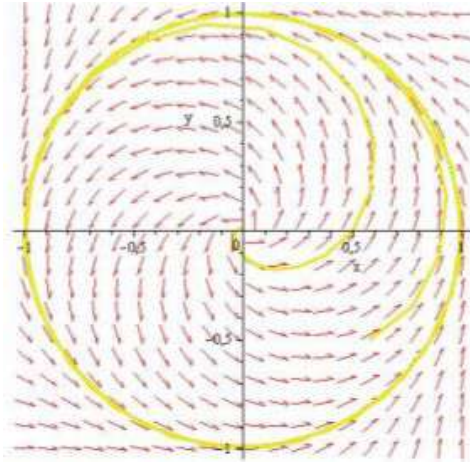
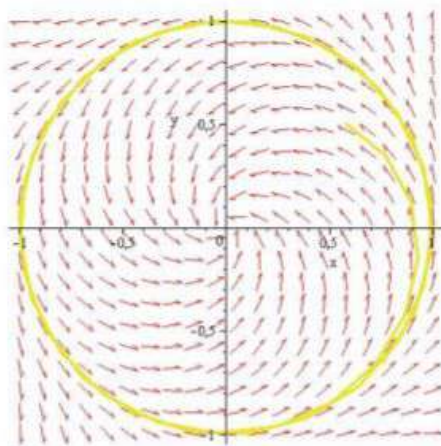
$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)),$$

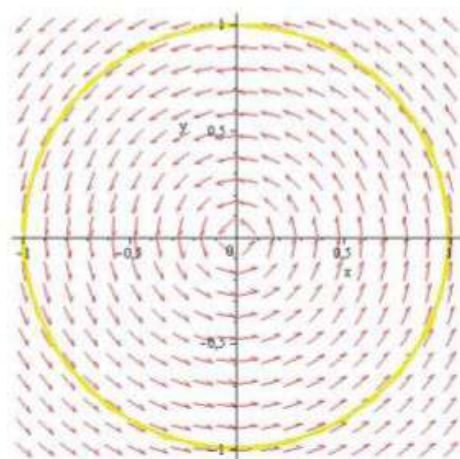
où

$$x^2 + y^2 = 1.$$

- pour $\alpha > 0$ le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est stable (Voir FIGURE 1.9).
- pour $\alpha < 0$ le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est instable (Voir FIGURE 1.10).
- si $\alpha = 0$ le système à une infinité de nombre des orbites et n'ya pas des cycles limites (Voir FIGURE 1.10).

Remarque 1.3 Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

FIGURE 1.9 – Cycle limite stable pour $\alpha = 1$.FIGURE 1.10 – Cycle limite instable pour $\alpha = -1$.

FIGURE 1.11 – Centre pour $\alpha = 0$.

Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre

Dans ce chapitre, nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher le nombre maximum de cycles limites des système différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par des exemples.

2.1 Méthode de moyennisation et solutions périodiques

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et bogoliubov en 1937 [7] et Mitropolskii 1961 [2] . Elle a été ensuite développé par Verhulst [13] , sanders et Verhulst [12], Malkin (1956) [9] , Roseau (1966) [11] et Llibre et Buica (2004) [3] . Dans le cas périodique l'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \tag{2.1}$$

où $t \in D, x \in \mathbb{R}^n, |\varepsilon| \ll 1$ et f est T -périodique en t , l'équation moyennée associée à (2.1) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x)$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt \quad (2.2)$$

La recherche des racines positives de (2.2) réduit le problème de la détermination des solutions T -périodique de (2.1), qui est en général un problème difficile en un problème algébrique moins difficile. On va présenter maintenant les résultats de base du théorème de la moyennisation que nous aurons besoin pour prouver les principaux résultats des chapitres 2 et 3. Le théorème de la moyennisation jusqu'à au deuxième ordre qu'on utilise pour étudier spécifiquement les orbites périodiques, a été développé dans [3]. Il se résume comme suit.

2.2 Théorème de la moyennisation du premier ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques de certains systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.1 [3] *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \quad (2.3)$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la première variable et D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . on définit $F_{10} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) dt \quad (2.4)$$

supposons que :

(i) F_1 et R sont localement lipschitziennes par rapport à x .

(ii) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, il existe un voisinage V de a telle que $F_{10}(z) \neq 0$, pour tout $z \in \bar{V} \setminus a$ et $\det(D_z F_{10}(a)) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.3) tel que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.1 Soit le système perturbé suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon((x^2 - 1)y - x^3) \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

On pose en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \sin(\theta)(r^3 \cos^3(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta)) \end{cases}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

En devisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon \sin(\theta)(r^3 \cos^3(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta))}{1 - \varepsilon \cos(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) - r^2 \cos^3(\theta))} \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Où

$$F_1(r, \theta) = -\sin(\theta)(r^3 \cos^3(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)).$$

On cherche maintenant la fonction moyenné $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + r \sin(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

$$= r \left[\frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{2} \right].$$

Le système moyenné

$$\dot{r} = \varepsilon F_{10}(r) = \varepsilon r \left[\frac{1}{8} r^2 - \frac{1}{2} \right].$$

La racine positive de $F_{10}(r)$ est $r_0 = 2$.

Donc l'équation différentielle a pour ε suffisamment petit un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon $r_0 = 2$ du système perturbé, de plus

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r) = \frac{3}{8} r^2 - \frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{dF_{10}}{dr}(r_0 = 2) = 1 > 0,$$

a un cycle limite instable d'amplitude $r = 2$, ce cycle limite est instable $\frac{dF_{10}}{dr}(2) > 0$.

[Voir(FIGURE 2.1)]

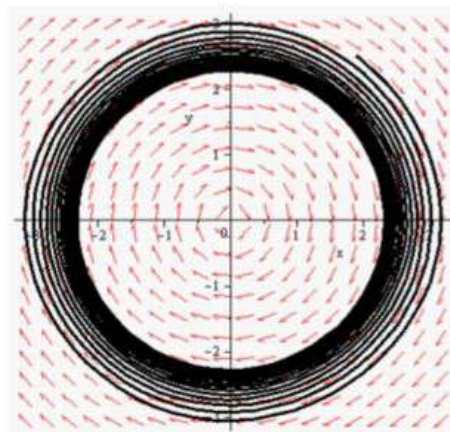


FIGURE 2.1 –

2.3 Théorème de la moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions périodiques de certains systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.2 [3] *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R_3(t, x, \varepsilon) \quad (2.5)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (\varepsilon f, \varepsilon f) \rightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t . D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On suppose que

- (i) $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, F_1, F_2, R et $D_z F_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à x , et R est différentiable par rapport à ε .

On définit $F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) dt \quad (2.6)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z) \right] ds \quad (2.7)$$

- (ii) Pour $V \subset D$, un sous ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^n , et pour tout $\varepsilon \in]-\varepsilon f, \varepsilon f[\setminus \{0\}$, il existe $a \in V$ tel que : $F_{10}(a) + \varepsilon F_{20}(a) = 0$, et $\det(F'_{10}(a) + \varepsilon F'_{20}(a)) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2.5).

De plus si $F_{10}(z) \equiv 0$, et $J_{F_{20}}(a) \neq 0$ alors il existe une solution T -périodique isolée $\varphi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2.5) tel que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.2 Soit le système différentiel polynomial perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon(y^2 - 2x^2 + 8xy) - \epsilon^2(2x), \\ \dot{y} = x + \epsilon(4xy) - \epsilon^2(2y), \end{cases} \quad (2.8)$$

qui s'écrit en coordonnées polaires sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon(5r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta)) - \epsilon^2(2r), \\ \dot{\theta} = 1 - \epsilon r(\sin^3(\theta) + 8 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin(\theta)), \end{cases}$$

est équivalent l'équation différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \epsilon F_1(r, \theta) + \epsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{\epsilon(5r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2r^2 \cos^3(\theta)) - \epsilon^2(2r)}{1 - \epsilon r(\sin^3(\theta) + 8 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - 6 \cos^2(\theta) \sin(\theta))}, \end{aligned}$$

où

$$F_1(r, \theta) = r^2(5 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^3(\theta)),$$

et

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) &= r^3(5 \cos(\theta) \sin^5(\theta) + 48 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + 32 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) \\ &\quad - 64 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + 12 \cos^5(\theta) \sin(\theta)) - 2r, \end{aligned}$$

$F_{10}(r)$ la fonction moyenné de $F_1(r, \theta)$ est

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi} [5I_{1.2} + 8I_{2.1} - 2I_{3.0}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $F_{10}(r) = 0$ on passe la méthode de la moyenne seconde ordre, on a

$$D_r F_1(r, \theta) = 2r(5 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^3(\theta)),$$

et

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta = r^2 \int_0^s (5 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 8 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos^3(\theta)) d\theta,$$

et

$$\int_0^s \cos^3(\theta) d\theta = \frac{3}{4} \sin s + \frac{1}{12} \sin 3s = \frac{3}{4} \sin s + \frac{1}{4} \cos^3 s \sin s - \frac{1}{12} \cos s \sin^3 s,$$

$$\int_0^s (\cos^2(\theta) \sin(\theta)) d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos^3 s,$$

$$\int_0^s (\cos(\theta) \sin^2(\theta)) d\theta = \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{12} \sin 3s$$

$$= \frac{1}{4} \sin s - \frac{1}{4} \cos^3 s \sin s + \frac{1}{12} \cos s \sin^3 s.$$

Alors

$$y_1(s, z) = r^2 \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cos^3 s - \frac{1}{4} \sin s - \frac{7}{4} \cos^3 s \sin s + \frac{7}{12} \cos s \sin^3 s \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_r F_1(r, s) \cdot y_1(r, s) + F_2(r, s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(2r^3 \left(\frac{40}{3} I_{1.2} - \frac{46}{3} I_{5.1} - \frac{5}{4} I_{1.3} + \frac{35}{12} I_{2.5} + \frac{64}{3} I_{2.1} - 2I_{2.2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 14I_{5.2} + \frac{14}{3} I_{3.4} - \frac{16}{3} I_{3.0} + \frac{16}{3} I_{6.0} + \frac{1}{2} I_{3.1} + \frac{7}{2} I_{6.1} - \frac{119}{12} I_{4.3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{136}{3} I_{4.2} + 24I_{2.4} + 16I_{3.3} + \frac{5}{2} I_{1.5} \right) - 2r \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[2r^3 \left(\frac{16}{3} I_{6.0} - 2I_{2.2} - \frac{136}{3} I_{4.2} + 24I_{2.4} \right) - 2r \right] \\ &= r \left(\frac{1}{6} r^2 - 2 \right), \end{aligned}$$

à au plus une seul racine positive $r_0 = 2\sqrt{3} \simeq 3.46$, de plus

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r) = \frac{1}{2} r^2 - 2.$$

Donc

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r_0 = 2\sqrt{3}) = 4 > 0,$$

par conséquent, le système un cycle limite unique, et ce cycle limite est in- stable d'am- plitude $r_0 = 2\sqrt{3} \simeq 3.46$. [Voir FIGURE 2.2]

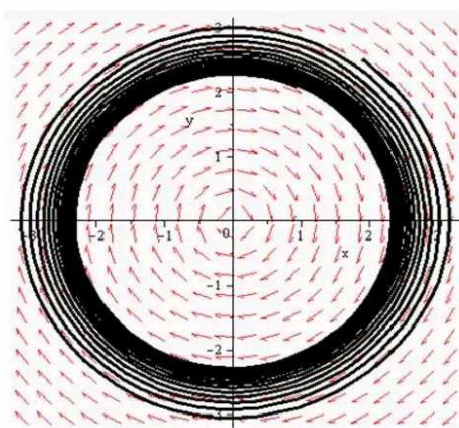


FIGURE 2.2 –

Nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel polynomial généralisés de Kukles

Dans ce chapitre, nous intéressons au nombre maximum des cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Kukles généralisée

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$, $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$. Pour chaque $k = 1, 2$, $f_k(x)$, $g_k(x)$ et $h_k(x)$ sont de degrés n_1, n_2 et n_3 respectivement. d_0^k est un nombre réel et ε est un petit paramètre. A la fin du chapitre nous donnons un exemple. Nos résultats sont les suivants.

Théorème 3.1 *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (3.1) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est*

$$\lambda_1 = \max\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, 1\}.$$

Théorème 3.2 *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (3.1) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre est*

$$\lambda_2 = \max\{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1 + 1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_3 + 3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2 + 1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, 1\}.$$

3.1 Preuves des résultats

3.1.1 Preuve du théorème 3.1

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre. Pour cela nous écrivons le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$. Posons

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x_i; \quad g_1(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x_i; \quad h_1(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x_i. \quad (3.2)$$

Alors le système (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta + d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_0^1 r^3 \cos \theta \sin^3 \theta \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Prenons θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (3.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta + d_0^1 r^3 \sin^4 \theta \right) \\ &= \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^1 r^3 B_{0,4}(\theta) \right), \end{aligned}$$

ou

$$B_{i,j} = \cos^i \theta \sin^j \theta.$$

Calculons maintenant $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i A_{i,1}(2\pi) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} A_{i,2}(2\pi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n_3} a_i r^{i+2} A_{i,3}(2\pi) + d_0^1 r^3 A_{0,4}(2\pi) \right), \end{aligned}$$

ou

$$A_{i,j}(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{i,j} d\theta.$$

Maintenant en utilisant les expressions des intégrales en Annexe, nous obtenons :

$$F_{10}(r) = \sum_{i=0}^{\frac{n_2}{2}} \frac{b_{2i} \alpha_i}{2^{i+1} (i+1)!} r^{2i+1} + \frac{3}{8} d_0^1 r^3, \quad (3.4)$$

on

$$\alpha_i = 1.3.5 \dots (2i-1), \alpha_{i+1} = (2i+1) \alpha_i.$$

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ peut avoir $\lambda = \max\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, 1\}$ positives, par conséquent, le système différentiel (3.1) peut avoir au plus $\lambda = \max\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, 1\}$ cycles limites.

3.1.2 Preuve du théorème 3.2 et certains lemmes

Pour démontrer le théorème (3.2), nous allons appliquer la méthode de moyennisation du deuxième ordre au système (3.1). Si l'on écrit $f_1(x), g_1(x), h_1(x)$ connue

en (3.2), et

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i x^i; \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} q_i x^i; \quad h_2(x) = \sum_{i=0}^{n_3} s_i x^i.$$

Le système (3.1) s'écrit en coordonnées polaires (r, θ) , $r > 0$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^1 r^3 B_{0,4}(\theta) \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left(\sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^2 r^3 B_{0,4}(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i+1,2}(\theta) + d_0^1 r^3 B_{0,3}(\theta) \right) \\ \quad - \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} B_{i+1,2}(\theta) + d_0^2 r^3 B_{0,3}(\theta) \right). \end{cases} \quad (3.5)$$

Prenons θ connue une nouvelle indépendante ce système devient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + 0(\varepsilon^3) \quad (3.6)$$

où

$$F_1(r, \theta) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^1 r^3 B_{0,4}(\theta),$$

et

$$F_2(r, \theta) = I(r, \theta) + II(r, \theta),$$

ou

$$I(r, \theta) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^2 r^3 B_{0,4}(\theta),$$

$$\begin{aligned} II(r, \theta) = & + \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^1 r^3 B_{0,4}(\theta) \right) \\ & \times \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i+1,2}(\theta) + d_0^1 r^3 B_{0,3}(\theta) \right). \end{aligned}$$

Afin d'appliquer la théorie de moyennisation du deuxième ordre, F_{10} doit être identiquement nulle. On a $F_{10} \equiv 0$ ssi

$$\begin{cases} b_2 = -3d_0^1 & i = 1, \\ b_{2i} = 0 & i \neq 1. \end{cases}$$

Nous avons

$$F_1(r, \theta) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} B_{2i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + d_0^1 r^3 \left(B_{0,4}(\theta) - 3B_{2,2}(\theta) \right).$$

$$\frac{dF_1(r, \theta)}{dr} = \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2) b_{2i+1} r^{2i+1} B_{2i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} B_{i,3}(\theta) + 3d_0^1 r^2 \left(B_{0,4}(\theta) - 3B_{2,2}(\theta) \right),$$

et $y_1(r, \theta) = \int_0^\theta F_1(r, t) dt$ pour ce faire, nous réécrivons

$$y_1(r, \theta) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \int_0^\theta B_{i,1}(\theta) dt + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \int_0^\theta B_{2i+1,1}(\theta) dt + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \int_0^\theta B_{i,3}(\theta) dt + d_0^1 r^3 \int_0^\theta \left(B_{0,4}(\theta) - 3B_{2,2}(\theta) \right) dt,$$

en utilisant les intégrale de l'annexe et comme $b_2 = -3d_0^1$ nous obtenons

$$y_1(r, \theta) = \sum_{i=0}^{n_1} \frac{a_i r^i}{i+1} \left(1 - B_{i+1,0}(\theta) \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{b_{2i+1} r^{2i+2}}{2i+3} \left(B_{2i+2,1} + \sum_{l=0}^i r^{i+2} B_{0,2l+1}(\theta) \right) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \left(\frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} B_{i+1,0}(\theta) + \frac{1}{i+3} B_{i+3,0}(\theta) \right)$$

$$-\frac{1}{8}d_0^1 r^3 \left(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta \right).$$

Pour déterminer la fonction

$$F_{20}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dF_1(r, \theta)}{dr} y_1(r, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta,$$

notons par

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dF_1(r, \theta)}{dr} y_1(r, \theta) \right) d\theta \text{ et } II(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta.$$

Maintenant divisons le calcul de la fonction $I(r)$ en quatre morceau. Pour ce leur nous posons

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r) + I_4(r),$$

où

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} B_{i,1}(\theta) y_1(r, \theta) d\theta,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2) b_{2i+1} r^{2i+1} B_{2i+1,1}(\theta) y_1(r, \theta) d\theta,$$

$$I_3(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} B_{i,3}(\theta) y_1(r, \theta) d\theta,$$

$$I_4(r) = 3d_0^1 r^2 \left(B_{0,4}(\theta) - 3B_{2,2}(\theta) \right) y_1(r, \theta) d\theta.$$

Les intégrales seront calculées dans les lemmes suivants :

Lemme 3.1 *L'intégrale $I_1(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$I_1(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} A_{i,j} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{(2i+1) \alpha_{i+1}}{2^{i+3} (i+3)!} a_{2i+1} d_0^1 r^{2i+3}, \quad (3.7)$$

où $A_{i,j}$ est constant non nulle.

Preuve : En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

$$(\alpha_{k+2} = (2k + 3)(2k + 1)\alpha_k)$$

$$(a_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_1} ia_i r^{i-1} B_{i,1}(\theta) \right) \left(\sum_{j=0}^{n_1} \frac{a_j r^j}{j+1} (1 - B_{i+1,0}(\theta)) \right) d\theta = 0.$$

$$(b_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_1} ia_i r^{i-1} B_{i,1}(\theta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2j+3} b_{2j+1} r^{2j+2} (-B_{2j+2,1}(\theta) + \sum_{l=0}^j \gamma_{j,l} B_{0,2l+1}) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} A_{i,j} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1},$$

$$\text{où } A_{i,j} = \frac{i}{2j+3} \left(\sum_{l=0}^j \gamma_{j,l} C_{i,l} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right).$$

$$(c_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_1} ia_i r^{i-1} B_{i,1}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \left(\frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} B_{i+1,0}(\theta) + \frac{1}{i+3} B_{i+3,0}(\theta) \right) \right) d\theta = 0.$$

$$(d_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_1} ia_i r^{i-1} B_{i,1}(\theta) \right) \left(-\frac{1}{8} d_0^1 r^3 \left((2 \sin \theta - \sin 4\theta) \right) \right) d\theta = -\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{3(2i+1)\alpha_{i+1}}{2^{i+3}!} a_{2i+1} d_0^1 r^{2i+3}.$$

On sait que la somme des intégrales (b_1) (d_1) est le polynôme (3.7).

Lemme 3.2 *L'intégrale $I_2(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned} I_2(r) = & \sum_{i=0}^{n_1} \frac{3}{8(i+1)} a_i b_2 r^{i+2} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!} a_{2i+1} b_2 r^{2i+3} \\ & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{(j+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+1)(i+j+2)!} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \\ & + \sum_{i=1}^{n_3} \frac{3}{4(i+1)(i+3)} b_2 c_i r^{i+4} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \frac{(i+1)(10j+4i+15)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+3)(2j+1)(i+j+3)!} \\ & b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} - \sum_{i=0}^{n_3} \frac{3(5i+11)\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!} b_2 c_{2i+1} r^{2i+5}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Preuve : En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

$$(\alpha_{k+3} = (2k + 5)(2k + 3)(2k + 1)\alpha_k)$$

$$(a_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i B_{i,2}(\theta) \right) \left(\sum_{j=0}^{n_1} \frac{a_j}{i+1} r^j (1 - B_{2i+1,0})(\theta) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{n_1} \frac{3}{8(i+1)} a_i b_2 r^{i+2} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!} a_{2i+1} b_2 r^{2i+3} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{(j+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+1)(i+j+2)!} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1}.$$

$$(b_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i B_{i,2}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2i+3} b_{2i+1} r^{2i+2} \left(-B_{2i+2,1}(\theta) + \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} B_{0,2l+1}(\theta) \right) \right) d\theta = 0.$$

$$(c_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i B_{i,2}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2j} r^{2j+2} \left(\frac{2}{(2j+1)(2j+3)} - \frac{1}{2j+1} B_{2j+1,0}(\theta) + \frac{1}{2j+3} B_{2i+3,0}(\theta) \right) \right) d\theta = \sum_{i=1}^{n_3} \frac{3}{4(i+1)(i+3)} b_2 c_i r^{i+4} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \frac{(i+1)(10j+4i+15)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+3)(2j+1)(i+j+3)!} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} - \sum_{i=0}^{n_3} \frac{3(5i+11)\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!} b_2 c_{2i+1} r^{2i+5}.$$

$$(d_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i B_{i,2}(\theta) \right) \left(\frac{-1}{8} d_0^1 r^3 (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \right) d\theta = 0.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_2), (c_2)$ est le polynôme (3.8).

Lemme 3.3 L'intégrale $I_3(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par

$$I_3(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} R_{i,j} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+4)!} 7d_0^1 c_{2i+1} r^{2i+5}, \quad (3.9)$$

où $R_{i,j}$ est constant non nulle.

Preuve : En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

$$(a_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{n_3} (j+2) c_j r^{j+1} B_{j,3}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{n_1} \frac{a_i}{i+1} r^i (1 - B_{i+1,0})(\theta) \right) d\theta = 0.$$

$$(b_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{n_3} (j+2) c_j r^{j+1} B_{j,3}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{2}{2i+3} b_{2i+1} r^{2i+2} \left(-B_{2i+2,1}(\theta) + \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} B_{0,2l+1}(\theta) \right) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} R_{i,j} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3},$$

où $R_{i,j} = \frac{(j+1)}{2i+3} \left(\sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} K_{j,l} - \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right)$.

$$(c_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{n_3} (j+2) c_i r^{j+1} B_{i,3}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \left(\frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} B_{i+1,0}(\theta) + \frac{1}{i+3} B_{i+3,0}(\theta) \right) \right) d\theta = 0.$$

$$(d_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_3} (j+2) c_i r^{j+1} B_{i,3}(\theta) \right) \left(\frac{-1}{8} d_0^1 r^3 (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+4)!} 7 d_0^1 c_{2i+1} r^{2i+5}.$$

On sait que la somme des intégrales (b_3) (d_3) est le polynôme (3.9).

Lemme 3.4 *L'intégrale $I_4(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$I_4(r) = - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{9\alpha_{i+1}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!} a_{2i+1} d_0^1 r^{2i+3} + \sum_{i=0}^{n_1} \frac{9}{8(i+1)!} a_i d_0^1 r^{i+2} + \sum_{i=0}^{n_3} \frac{9}{4(i+1)(i+3)!} c_i d_0^1 r^{i+4} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{9(7i+13)\alpha_{i+1}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!} c_{2i+1} d_0^1 r^{2i+5}. \quad (3.10)$$

Preuve : En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

$$(a_4) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(3d_0^1 r^2 B_{0,4}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{n_1} \frac{a_i}{i+1} r^i (1 - B_{i+1,0}(\theta)) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{n_1} \frac{9}{8(i+1)!}$$

$$a_i d_0^1 r^{i+2} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{9\alpha_{i+1}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!} a_{2i+1} d_0^1 r^{2i+3}.$$

$$(b_4) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(3d_0^1 r^2 B_{0,4}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{2}{2i+3} b_{2i+1} r^{2i+2} \left(- B_{2i+2,1}(\theta) + \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} B_{0;2l+1}(\theta) \right) \right) d\theta = 0.$$

$$(c_4) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(3d_0^1 r^2 B_{0,4}(\theta) \right) \left(\sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \left(\frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} B_{i+1,0}(\theta) + \frac{1}{i+3} B_{i+3,0}(\theta) \right) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{n_3} \frac{9}{4(i+1)(i+3)!} c_i d_0^1 r^{i+4} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{9(7i+13)\alpha_{i+1}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!} c_{2i+1} d_0^1 r^{2i+5}.$$

$$(d_4) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(3d_0^1 r^2 B_{0,4}(\theta) \right) \left(\frac{-1}{8} d_0^1 r^3 \left(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta \right) \right) d\theta = 0.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_4), (c_4)$ est le polynôme (3.10).

En utilisant les lemmes 3.1-3.4, on obtient :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dF_1(r, \theta)}{dr} y_1(r, \theta) \right) d\theta = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r) + I_4(r).$$

Maintenant, nous considérons l'intégrale $II(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta$. On a $b_2 = -3d_0^1$ d'où $I(r)$ est égal à

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} q_{2i} r^{2i+1} + \frac{3}{8} d_0^2 r^3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{i+j+1} a_{2i} b_{2j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} r^{2i+2j+1}. \\ & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{i+j+1} a_{2i} b_{2j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} r^{2i+2j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{i+j+1} b_{2i+1} c_{2j}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} r^{2i+2j+3} \quad (3.11) \\ & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+2}(i+3)!} a_{2i+1} ((i+1)d_0^1) r^{2i+3} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{i+2} d_0^1 c_{2i+1}}{2^{i+3}(i+4)!} r^{2i+5}. \end{aligned}$$

Finalement $F_{20} = I(r) + II(r)$ est égal à :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} E_{i,j} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{i+1} a_{2i+1} d_0^1}{2^{i+2}(i+2)!} r^{2i+3} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{i+1} 3d_0^1 c_{2i+1}}{2^{i+3}(i+3)!} r^{2i+5} \\ & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} F_{i,j} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} q_{2i} r^{2i+1} - \frac{3}{8} d_0^2 r^3, \quad (3.12) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= A_{i,j} - \frac{(2i+j+2)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+1)(i+j+2)!} \\ F_{i,j} &= R_{i,j} - \frac{(4i^2+12j^2+10ij+19i+34j+24)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+3)(2j+1)(i+j+3)!}. \end{aligned}$$

Par conséquent, F_{20} au plus $\max\{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_3+3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, 1\}$ racines positives.

Applications

Dans cette section, nous montrons que dans les exemples suivants, la borne λ_1 (λ_2 respectivement) est atteinte. (les calculs ont été vérifiés à l'aide de Maple).

Exemple 3.1 ($n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$)

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + d_0^1 y^3) \\ -\varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + d_0^2 y^3), \end{cases} \quad (3.13)$$

où

$$f_1(x) = a_0 + a_1x; \quad g_1(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2; \quad h_1(x) = c_0 + c_1x.$$

$$f_2(x) = p_0 + p_1x; \quad g_2(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2; \quad h_2(x) = s_0 + s_1x.$$

Tout d'abord, nous allons étudier les cycles limites de l'équation différentielle (3.13) en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. De (3.4), nous obtenons

$$F_{10}(r) = -\frac{1}{8}r(4b_0 + b_2r^2 + 3r^2d_0^1). \quad (3.14)$$

Maintenant, si nous fixons $b_0 = 1, b_2 = 10, d_0^1 = -4$.

Nous avons $F_{10}(r) = -\frac{1}{8}r(2r^2 + 4)$ a exactement une seule racines positives.

Afin d'appliquer la théorie de moyennisation du second ordre, nous avons besoins que F_{10} sont identiquement nulle.

Puis à partir (3.14) nous considérons $b_0 = 0, b_2 = -3d_0^1$ de l'équation (3.11), nous obtenons

$$F_{20}(r) = -\frac{1}{2}a_0b_1 - \frac{1}{2}q_0 + \left(-\frac{1}{8}c_0b_1 + \frac{3}{8}a_1d_0^1 - \frac{1}{8}q_2 - \frac{3}{8}d_0^1\right)r^2 + \frac{1}{16}d_0^1r^4$$

Maintenant, si nous fixons $a_0 = 0, a_1 = 1, b_1 = 3, c_0 = \frac{1}{3}, c_1 = -1, d_0^1 = -4,$
 $q_0 = -2, q_2 = \frac{-43}{5}, d_0^2 = 2$.

Nous avons que $F_{20}(r) = 1 - \frac{5}{4}r^2 + \frac{1}{4}r^4$, qui a exactement deux racines positives.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié des cycles limites de certaines classes de systèmes différentiels planaires non linéaires. Plus précisément, dans le chapitre 3, notre contribution consiste à étudier un système différentiel de centre linéaire par la méthode de la moyennisation.

En appliquant la méthode de moyennisation, on a réussi à faire apparaître un certain nombre de cycles limites, ce qui est considéré comme une contribution de la résolution du 16^{ème} problème de Hilbert. Nous avons illustré notre étude par un exemple.

Annexe

Dans cette annexe, nous rappelons quelques formules qui seront utilisées au cours de ce mémoire (voir pour plus de détails ([1], [5])). Pour $i \geq 0$ nous avons $\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \neq 0$, si i et j pair,

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair,} \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 0, \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 2, \\ \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 4, \\ \frac{15\pi \alpha_k}{2^{k+2} (k+3)!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 6, \end{cases}$$

où $\alpha_i = 1.3.5 \dots (2i - 1)$.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ impair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin((2l + 1)\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ impair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin((2l + 1)\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair,} \\ \pi C_{i,l}, & \text{si } i \text{ pair et } j = 1, l \geq 0, \\ \pi K_{i,l}, & \text{si } i \text{ pair et } j = 3, l \geq 0, \end{cases}$$

où $C_{i,l}$ et $K_{i,l}$ sont des constantes réels non nul.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ pair,} \\ \frac{\pi(2k+1)\alpha_k}{2^{k+1}(k+3)!}, & \text{si } i = 2k+1, j = 1 \text{ et } l = 1, \\ \frac{\pi k(2k+1)\alpha_k}{2^{k-1}(k+3)!}, & \text{si } i = 2k+1, j = 1 \text{ et } l = 2, \\ \frac{3\pi(2k+1)\alpha_k}{2^{k+1}(k+3)!}, & \text{si } i = 2k+1, j = 3 \text{ et } l = 1, \\ \frac{3\pi(k-1)(2k+1)\alpha_k}{2^{k+1}(k+4)!}, & \text{si } i = 2k+1, j = 3 \text{ et } l = 2, \\ \pi\tilde{C}_{i,l}, & \text{si } i \text{ impair et } j = 1, l \geq 0, \\ \pi\tilde{K}_{i,l}, & \text{si } i \text{ impair et } j = 1, l \geq 0, \end{cases}$$

où $\tilde{C}_{i,l}$ et $\tilde{K}_{i,l}$ sont des constantes réels non nul.

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin^i t dt = \frac{1}{i+1}(1 - \cos^{i+1} \theta),$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i+1} t dt = \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta, \text{ (voir ([5], P153)).}$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i+1} t \sin^2 t dt = \frac{-1}{2i+3} \cos^{2i+2} \theta \sin \theta + \frac{1}{(2i+3)} \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta, \text{ (voir ([5], P151)).}$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i} t dt = \frac{1}{2^i} \binom{2i}{i} \theta + \sum_{l=0}^i \beta_{i,l} \sin(2l\theta), \text{ (voir ([5], P153)),}$$

$$\text{o } \gamma_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1}, \beta_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i+l} \frac{1}{l}.$$

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta,$$

$$\int_0^\theta \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{32}(4\theta - \sin 4\theta),$$

$$\int_0^\theta \sin^4 t dt = \frac{1}{32}(12\theta - 8 \sin 2\theta + \sin 4\theta),$$

$$\int_0^\theta \cos^4 t dt = \frac{1}{32}(12\theta + 8 \sin 2\theta + \sin 4\theta).$$

Bibliographie

- [1] Abramowitz M, Stegun I. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Natl Bureau Stand ApplMath Ser 1972,55. (Cité en page 71.)
- [2] Bogoliubov N- N, Mitropolskii Yu.A. *Bogoliubov N- N, Mitropolskii Yu.A.*
- [3] Buică A, Llibre J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull. Sci. Math. 2004; 128 : 7-22.
- [4] Dulac.H. *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France 5,2 : (1923), 45-188.
- [5] Gradshteyn I S, Ryshik I M. *able of integrals, Series and Products Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger*. Academic Press, New York, 7th edition, 2007. (Cité en pages 71 et 72.)
- [6] Hilbert . D. *Mathematish probleme. Lecture, Second Internat, congr, Math, (Paris,*

- 1900), *Nachn. Ges. Wiss. G" Hingen Math. Phys. kl.* (1900), 253-297. *English transl, Bull. Amer. Math. Soc.* 8 : (1902), 437-479.
- [7] Kryloff .N.M and Bogoliuboff.N.N . *Introduction à la mécanique non linéaire, les méthodes approchés et asymptotiques . vol 1-2 of Ukrainska Akad.Nauk Inst. Mec. Paris, chaires de Phys . Maths Annales* 1937.
- [8] Liénard. A. *Etude des oscillations entretenues. Revue Générale de l'électricité.* 23 : (1928), 946-954.
- [9] Malkin I.G. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations. (Russian)Gostexizdat,Moscow.* 1956
- [10] Poincaré H. *Memoire sur les Courbes Définies par Une Équation Différentielle. Jacques Gabay. Paris (1993) [Edit. Reprinted from the original papers published in the Journal de Mathématiques 7 (1881) 375-422; 8 (1882) 251-296; 1 (1885) 167-244 and 2 (1886) 151-217]. (Cité en page 2.)*
- [11] Roseau.M. *Vibration non linéaire et théorie de la stabilité(French) Springer Tracts in natural, Vol 8 Springer verlag,Berlin, New York, 1966.*
- [12] Sanders J- A, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New york; 1985.*

- [13] Verhulst F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Universitex, Springer-Verlag, Berlin ; 1996.
- [14] Yanqian YE. *Theory of limit cycles*. Transl. Math. Monogr, vol.66, Amer.Math. Soc, Providence. 1984.
- [15] Debz N. *Nombre de cycles limites des systèmes différentiels polynômiaux perturbés à centres linéaires*. Université Frères Mentouri Constantine 1.2021/2022.
- [16] Mellahi N. *Cycles limites des systèmes différentiels ordinaires*. Université Badji Mokhtar Annaba.2016/2017
- [17] Boudraà H. *Etude de cycles limites des champs de vecteurs polynômiaux par la méthode de moyennisation* .Université 18 Mai 1945 Guelma. Juillet 2022.