

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 20 أوت 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude d'une classe de systèmes elliptiques quasilineaires

Option : Analyse numérique pour EDP

Par :

- *BOUHADRA Rahma*
- *KHENCHOUL Faiza*

Encadré par : LECHEHEB Samira

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : MAOUNI Messaoud

Prof. U. SKIKDA

Examineur: KAREK Chafia

MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

ETUDE D'UNE CLASSE DE SYSTÈME ELLIPTIQUES QUASI-LINÉAIRES
MEMOIRE DE MASTER
ANALYSE FONCTIONNELLE ET NUMÉRIQUE POUR LES EDPs
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
PAR

BOUHADRA RAHMA ET KHENCHOUL FAIZA

Université 20 Août 1955 - Skikda



ENCADRÉ PAR : LECHEHEB SAMIRA

Faculté des sciences
Département de mathématiques

© 2022



Remerciements

Tout d'abord, nous remercions **Dieu** qui nous a inspiré avec patience et force de volonté pour terminer cet humble travail plus tard.

Nous voudrions exprimer notre profonde gratitude à notre superviseur, le **Dr.Lечеheb Samira**, pour avoir soulevé ce sujet intéressant. Nous la remercions beaucoup pour son temps, ses efforts, ses conseils et ses précieux conseils. Elle nous a fait part de sa passion, de sa curiosité et de sa ouverture aux mathématiques. Elle nous a toujours fourni des pistes de recherche fructueuses. Nous lui sommes particulièrement reconnaissants pour sa compétence et son soutien. Elle nous a été d'une grande aide et une source constante de motivation. Nous la remercions chaleureusement pour ses principes pédagogiques originaux. Et sa rigueur, elle restera pour nous un modèle.

Nous remercions également le **Prof.Maouni Messaoud** d'avoir présidé le Jury, et le **Dr.Karek Chafia** d'avoir accepté l'évaluation de notre travail, et nous sommes honorés d'avoir deux jury pour cette mémoire. Nous avons un profond respect pour leur travail et leur parcours ainsi que pour leurs qualités humaines.

Aussi, un grand merci à tous les professeurs auprès desquels nous avons beaucoup appris durant notre parcours scolaire.

Nous remercions également l'ancien chef de département, le **Dr.Slimani Kamal**, et l'actuel chef de département, le **Dr.Bouzatota Lamine**, et tous les employés du département de mathématiques de l'université 20 août 1995-Skikda.

Enfin, nous tenons à remercier toutes les personnes de près ou de loin qui ont contribué à la réussite de notre mémoire.





Dédicases

Au nom de Dieu, le très miséricordieux, louange è Dieu tout-puissant, prière et paix sur son noble messager Mohammed

A mes chers parents **Yahia** et **Djamila** : je vous dédie cet humble travail qui n'est que le fruit de vos efforts continus, votre amour et votre sacrifice ont été pour moi un soutien infailible, rien au monde ne peut remplacer ce que vous avez donné pour moi et pour mon éducation.

A mes chers frères **Nour el Houda**, **Hiba**, et **Sara** : il n'ya pas de mots qui puissent exprimer mes sentiments chaleureux pour vous, vous m'avez toujours soutenu.

A mon cher **Sami Douida** : je t'adresse mes plus sincères remerciements pour ton soutien, ton amour et ton affection, qui me donne la force d'affronter les difficultés.

À ma chère collègue **Faiza** : nous avons fait un gros effort pour atteindre notre objectif, merci beaucoup.

À tous Mes amis : tout au long de mon cursus je mentionne surtout **Chaima**, **Nour el Imane**, **Ikram**, et **Nawel**, vous avez tout mon respect et ma gratitude.

En mémoire de **Mes grands-parents**, que Dieu leur fasse miséricorde et les place dans son paradis spacieux.

A tous les membres de ma famille, petits et grands, et particulièrement **Imane**, et **Soumia**.

Je vous aime tous.

Rahma



Dédicases

Je dédie le fruit de mes efforts et ma réussite à celui qui m'a appris comment la patience est un chemin vers le succès ...Lien et force, mon cher père **Djamel**.

À la quelle sa satisfaction est mon objectif et mon ambition ..., Elle me donne de la détermination et de la volonté, ma chère maman **Djamila**.

À mon seul frère **Salah**, que Dieu le protège, ainsi qu'à sa femme **Karima** et sa petite fille **Ranim**.

À qui leur amour coule dans mes veines, mes chères sœurs **Lamia, Amel, Amina, Mariam, Horia, Asma** et **Aya**.

Et à tous les enfants de ma famille.

À mon cher binôme **Rahma**.

À toutes, mes amis, en particulier **Aicha, Fairouz**, et **Ilham**.

À toute la chère famille.

Faiza

Notations

Symbole	Signification
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^N	Espace euclidien de dimension N .
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels.
\mathbb{N}^*	Ensemble des entiers naturels non nuls.
Ω	un ouvert borné de \mathbb{R}^N .
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω .
$\partial\Omega$	le bord de Ω .
p'	Exposant conjugué de p , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$L^{p'}$	Exposant dual de $L^p(\Omega)$.
p.p	presque pour tous les points.
∇u	Le gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^t$.
Δu	Le laplacien de la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ c-à-d $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$.
div	Divergence.
$\ \cdot\ $	La norme.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Crochet de dualité.
$D_i f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$	Dérivées partielle de f par rapport à x_i .
B_R	La boule de \mathbb{R}^N de rayon R centrée à l'origine.
\tilde{V}	$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$
$\ (u, v)\ _{\tilde{V}}$	$\ u\ _{H_0^1(\Omega)} + \ v\ _{H_0^1(\Omega)}$.
U	$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
$\ (h_1, h_2)\ _U$	$\ h_1\ _{L^2(\Omega)} + \ h_2\ _{L^2(\Omega)}$.

Table des matières

Introduction Générale	xi
1 Préliminaires mathématiques	1
1.1 Rappels et complément d'analyse	1
1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$	1
1.1.2 Quelques inégalités utiles	2
1.1.3 Quelques résultats sur l'intégration et la dualité	3
1.1.4 Espaces de Sobolev	3
1.2 Degré topologique	5
1.2.1 Degré de Brouwer et propriétés	6
1.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer	6
2 Existence d'un solution faible	7
2.1 Position du problème	7
2.2 Résultats d'existence	7
2.2.1 Preuve du théorème principale	8
3 Résultats d'existence pour un système elliptique quasi-linéaire	15
3.1 Position du problème	15
3.2 Résultats d'existence	16
3.2.1 Preuve du théorème principale	16
Conclusion	
Bibliographie	

Introduction Générale

De nombreux phénomènes naturels sont modélisés par des équations aux dérivées partielles qui sont des équations dont les solutions sont des fonctions inconnues vérifiant certaines conditions. De là, ces équations sont largement utilisées dans divers domaines des mathématiques appliquées et de physique [5, 11].

La topologie algébrique d'espaces de Banach et ses applications aux équations non linéaires, a débuté par le travail de J. Schauder durant la période 1927-1932 [16]. Schauder a identifié une classe importante d'opérateurs non linéaires dans un espace de Banach, les perturbations complètement continues de l'identité, pour lesquelles il pourrait généraliser deux résultats importants de Brouwer dans un espace de dimension finie : un théorème du point fixe et un théorème d'invariance de domaine. Le théorème du point fixe de Schauder est devenu au cours du temps un outil puissant pour étudier l'existence de solutions d'équations différentielles [10].

Puis, en 1963, le concept de la monotonie pour les opérateurs définis sur un espace de Banach dans son dual a été introduit par les célèbres oeuvres de Browder et Minty. Ce concept a été intensément étudié dans le cadre de la solvabilité des équations différentielles partielles non linéaires [3, 4].

Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse mathématique des systèmes et des équations aux dérivées partielles de type elliptique. En règle générale ces équations elliptiques correspondent à des modèles physiques stationnaires c'est à dire indépendant du temps. Les équations différentielles aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes : physiques, dynamique de fluide et mécaniques [13]. Le but de ce travail est d'appliquer la méthode du degré topologique et quelques outils d'analyse fonctionnelle pour montrer l'existence de solutions faibles de problèmes elliptiques quasilineaires.

Description du contenu du mémoire

Ce mémoire est scindé en trois chapitres

Dans le premier nous donnons quelques définitions avec des outils d'analyse fonctionnelle, et de brefs rappels de quelques notions et propriétés de certains espaces fonctionnelles qui nous seront d'une grande utilité, comme les espaces de Banach, Hilbert et de Sobolev et nous mentionnons quelques théorème que nous utilisons dans ces espaces

comme la formule d'intégration par parties de Green, l'inégalité de Poincaré et Holder et le théorème de Lax-Milgram, le théorème de Rellich, théorème de convergence dominée de Lebesgue, et le théorème de point fixe, ...etc

Le deuxième chapitre, est consacré à l'existence de la solution faible de problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u(x), \nabla u(x))) = f(x), & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Sous des hypothèses raisonnables sur les données, nous établissons des résultats d'existence de solutions faibles de problème (1) par **la méthode de compacité** [15, 14], cette dernière est une méthode très générale et très robuste qui concerne les formulations faibles.

Dans le troisième chapitre, nous faisons une extension du problème (1) au système et nous utilisons la même technique pour obtenir les résultats d'existence.

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous traitons deux parties. Dans la première nous rappelons divers résultats généraux qui ont servi dans cette mémoire et qui pour la plupart sont accompagnés de références. Dans la deuxième partie nous introduisons la méthode du degré topologique [8].

1.1 Rappels et complément d'analyse

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels, particulièrement, les espaces L^p et les espaces de Sobolev. Nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats utiles pour les chapitres suivants. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on note

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continue}\},$$

$C^m(\Omega)$: L'espace des fonctions m fois continument différentiables sur Ω

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$$

$C_c(\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\mathbb{R}^m) \text{ telle que } f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^m \setminus K \text{ où } K \text{ est un compact}\}.$
 $D(\mathbb{R}^m)$ L'espace des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^m à support compact dans \mathbb{R}^m (dit aussi, espace des fonctions test).

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0, |f(x)| \leq C, \mu - \text{p.p. sur } \Omega\}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \mu - \text{p.p.}\}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.

Remarque 1.1.1 *En particulier, si $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

L^1_{loc} désigne l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω , i.e

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega\}.$$

Structure des espaces $L^p(\Omega)$

Proposition 1.1.1 [7]

1. L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.
3. L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.1.2 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Holder

Théorème 1.1.1 [6] *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Inégalité de Minkowski

Théorème 1.1.2 [6] *Soient $f, g \in L^p(\Omega)$, avec $p \geq 1$ alors*

$$f + g \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.1.3 [7] *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C_Ω telle que :*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.1.3 Quelques résultats sur l'intégration et la dualité

Théorème 1.1.4 (Convergence dominée de Lebesgue [6]) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f on suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que tout $n \geq 1$ on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω , alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0.$$

Théorème 1.1.5 [6] Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tels que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors il existe sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tels que

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, presque partout sur Ω .
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \forall k$ et presque partout sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

Définition 1.1.2 (Dérivée faible) Soit $1 \leq i \leq n$, on dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens faible s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} D_i f(x) \varphi(x) dx.$$

1.1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c'est à dire des espaces constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). Le fait qu'ils soient complets est très important pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.3 — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N on définit la fonctionnelle $\|\cdot\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

$$\|f\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right\}^{1/p}$$

$$\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{\infty};$$

pour toute fonction f qui donne un sens à cette écriture.

- $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \text{ telle que } D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$.
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \text{la fermeture de } C_0^\infty(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega)$.

Remarque 1.1.2 Si $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Proposition 1.1.2 [7]

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$.
2. $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable, pour $1 \leq p < +\infty$.
3. $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif, pour $1 < p < +\infty$.

Remarque 1.1.3 Dans $W^{1,p}(\Omega)$ l'application

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$$

est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{1,p}$.

Théorème 1.1.6 [12]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N satisfaisant la propriété suivante

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$

1. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ Alors $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec $q \in [p, p^*]$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{m}{N}$
2. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ Alors $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec $q \in [p, \infty]$
3. Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, Alors $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Proposition 1.1.3 (Formule d'intégration par partie[12]) Soient u, v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ et $\partial\Omega \in C^1$, alors pour tout $1 \leq i \leq N$ a lieu la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(s) v(s) n_i ds$$

où $n_i = \cos(n, x_i)$ est le cosinus de l'angle de la normale extérieure à $\partial\Omega$ et de l'axe des x_i .

Si $v \in H^1(\Omega)$ et si les composantes u_i du vecteur \vec{u} appartiennent à $H^1(\Omega)$, alors a lieu l'égalité :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u}(x)) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} (\vec{u}(x), \nabla v(x)) dx + \int_{\partial\Omega} (\vec{u}, \vec{n}) v ds.$$

Enfin, en remarquant que

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla \vec{u}),$$

on obtient la 2^{ème} formule de Green.

Proposition 1.1.4 [12] Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds.$$

Théorème 1.1.7 (Rellich [9]) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.

Le théorème reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.1.8 (Stampacchia [12]) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $1 \leq p < \infty$. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$ et φ' bornée sur \mathbb{R} . Alors $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla \varphi(u) = \varphi'(u) \nabla u$ p.p.

Théorème 1.1.9 (Lax-Milgram [6]) Soit L une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H et a une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction $u \in H$ telle que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \text{ pour tout } v \in H,$$

c.a.d

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \text{ et } J(u) < J(v) \text{ si } u \neq v.$$

Définition 1.1.4 Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable à valeur réelle. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto f(u); \end{aligned}$$

où $f(u)$ est une fonction à valeur réelle définie sur Ω par :

$$f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

L'application f est appelée opérateur de Nemitski associée à f .

Théorème 1.1.10 [2] Soient $\alpha, \beta \geq 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

1. $f(x, t)$ mesurable par rapport à $x \in \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ pour presque partout $x \in \Omega$.
2. Il existe $a_1 \in L^\alpha(\Omega)$ et $a_2 > 0$ tel que

$$|f(x, u)| \leq a_1(x) + a_2(x)|u|^{\frac{\alpha}{\beta}}, \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta \geq 1).$$

Alors l'opérateur de Nemitski f est continue de $L^\alpha(\Omega)$ à $L^\beta(\Omega)$.

Remarque 1.1.4 La condition (1) est appelée condition de Carathéodory et $f(x, t)$ satisfaisant (2) est appelée fonction de Carathéodory.

1.2 Degré topologique

Nous abordons dans cette deuxième partie une méthode de compacité pour obtenir des résultats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires.

1.2.1 Degré de Brouwer et propriétés

Définition 1.2.1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $f(x) = y$. On commence par donner l'existence et l'unicité d'une application, appelée degré topologique, en dimension finie puis on l'étend à la dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir des résultats d'existence de solutions. Soient Ω un ouvert borné et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $x_0 \in \Omega$ est dit point régulier si $J_f(x_0) \neq 0$ (ou $J_f(x_0) = \det Df(x_0)$ avec

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} (x_0).$$

Dans le cas contraire, x_0 est appelé point critique ou point singulier. Désignons par

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega : J_f(x_0) = 0\}$$

l'ensemble des points singuliers de f sur Ω .

Définition 1.2.2 (Cas régulier) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ une fonction définie de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n , pour $y \notin f(\partial\Omega)$ une valeur régulière, on définit le degré de f au point y par

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{f(x_i)=y, i=\overline{1,n}} \operatorname{sgn}(\det D_x f(x_i)).$$

Définition 1.2.3 Soit $N \geq 1$. On note \mathcal{A} l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.

Théorème 1.2.1 (Brouwer, 1933 [9]) Soit $N \geq 1$ et \mathcal{A} donné par la définition 1.2.3 Il existe alors une application de \mathcal{A} dans \mathbb{Z} appelée (degré topologique), vérifiant les trois propriétés suivantes :

Normalisation : $d(\operatorname{Id}, \Omega, y) = 1$, si $y \in \Omega$.

Degré d'une union : $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$, si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\}$.

Invariance par homotopie : Si $h \in C([0, 1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^N)$ et $y(t) \notin \{h(t, x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0, 1]$) on a alors $d(h(t, \cdot), \Omega, y) = d(h(0, \cdot), \Omega, y(0))$, pour tout $t \in [0, 1]$.

1.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Une première conséquence de cette méthode de degré topologique est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

Théorème 1.2.2 [9] Soit $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in C(B_R, B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$ (on a muni \mathbb{R}^N d'une norme noté $\|\cdot\|$). Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.

Existence d'une solution faible pour une équation elliptique quasi-linéaire

2.1 Position du problème

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence des solutions faibles pour un problème quasilineaire elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet. Plus précisément, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u(x), \nabla u(x))) = f(x), & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$.

Sur les fonctions a et f , nous imposons les conditions suivantes :

- **(H1)** $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
- **(H2) (Coercivité)** il existe $\alpha > 0$: $a(x, \eta, \xi)\xi \geq \alpha|\xi|^2$ pour tout $(\eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et tout $x \in \Omega$ p.p.
- **(H3) (Croissance)** il existe $\beta > 0$ telle que : $|a(x, \eta, \xi)| \leq \beta(1 + |\eta| + |\xi|)$ pour tout $(\eta, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ et tout $x \in \Omega$ p.p.
- **(H4) (Monotonie)** pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$ et tout $x \in \Omega$ p.p.
 $(a(x, \eta, \xi_1) - a(x, \eta, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq 0$.
- **(H5)** $f \in L^2(\Omega)$.

2.2 Résultats d'existence

Définition 2.2.1 On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (2.1) si pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.2)$$

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_5)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (2.2).*

2.2.1 Preuve du théorème principale

Soit V un sous espace de dimension fini de $H_0^1(\Omega)$, muni de la norme $H_0^1(\Omega)$, V^* est leur dual. On définit l'application $L : V \times [0, 1] \rightarrow V^*$ par

$$\langle L(u, t), v \rangle = \int_{\Omega} a(x, tu, t\nabla u) \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx,$$

pour tout $v \in V$.

Nous allons montrer le théorème en plusieurs étapes :

Étape 01 : Estimation a priori

Nous allons montrer que toutes les solutions sont dans la boule $\bar{B}^V(R)$, c'est-à-dire $\{u \in V : L(u, t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0, 1] \subset \bar{B}^V(\alpha^{-1}\|f\|_{L^2})\}$.
En effet, si $L(u, t) = 0$ pour tout $(u, t) \in V \times [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} 0 = \langle L(u, t), u \rangle &= \int_{\Omega} a(x, tu, t\nabla u) \nabla u \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx \\ &\geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)} = \alpha^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, pour tout $R > \alpha^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}$, on a

$$L(u, t) \neq 0 \text{ si } (u, t) \in \partial B^V(R) \times [0, 1]. \quad (2.3)$$

Étape 02 : L est borné

On va montrer que L est borné.

Maintenant, si $(u, t) \in \bar{B}^V(R) \times [0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\langle L(u, t), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} a(x, tu, t\nabla u) \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |a(x, tu, t\nabla u) \nabla v| dx + \int_{\Omega} |f v| dx \\
&\leq \beta (C_{\Omega} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \beta \left(C_{\Omega} + C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\underbrace{\beta (C_{\Omega} + CR + R)}_{\tilde{R}} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\tilde{R} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et donc

$$L(\bar{B}^V(R) \times [0, 1]) \subset \bar{B}^{V^*}(\tilde{R} + \|f\|_{L^2(\Omega)}). \quad (2.4)$$

Étape 03 : L est continue

Soit $(u_n, t_n) \in \bar{B}^V(R) \times [0, 1]$ converge vers (u, t) dans $V \times [0, 1]$. c'est-à-dire dans $H_0^1(\Omega) \times [0, 1]$. Comme $L(u_n, t_n)$ est bornée d'après (2.4), pour montrer que $L(u_n, t_n) \rightarrow L(u, t)$, il suffit de montrer que $L(u, t)$ est l'unique ensemble de point de $L(u_n, t_n)$. Soit $g \in V^*$ est une unique ensemble de point, t_{n_k} une sous suite de t_n et u_{n_k} une sous suite de u_n telle que $L(u_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow g$ dans V^* . Comme $u_{n_k} \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc $u_{n_k} \rightarrow u \in L^2(\Omega)$ fortement et $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$ fortement, alors d'après le réciproque de TCD on a $u_{n_k} \rightarrow u$ p.p. dans Ω et $|u_{n_k}| \leq F_1$ telle que $F_1 \in L^2(\Omega)$, $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u$ p.p. dans Ω et $|\nabla u_{n_k}| \leq F_2$, $F_2 \in L^2(\Omega)$, et comme a est continue alors :

$$a(t_{n_k} u_{n_k}, t_{n_k} \nabla u_{n_k}) \rightarrow a(tu, t\nabla u), \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et on a

$$\begin{aligned}
|a(t_{n_k} u_{n_k}, t_{n_k} \nabla u_{n_k})| &\leq \beta (1 + |u_{n_k}| + |\nabla u_{n_k}|) \\
&\leq \beta (1 + F_1 + F_2).
\end{aligned}$$

Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue [6],

$$a(t_{n_k} u_{n_k}, t_{n_k} \nabla u_{n_k}) \nabla v \rightarrow a(tu, t\nabla u) \nabla v, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Nous concluons que,

$$\begin{aligned} \langle L(u_{n_k}, t_{n_k}), v \rangle &= \int_{\Omega} a(x, t_{n_k} u_{n_k}, t_{n_k} \nabla u_{n_k}) \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} a(x, t u, t \nabla u) \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx = \langle L(u, t), v \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent $g = L(u, t)$. Tout ces propriétés nous permettant d'appliquer la propriété d'invariance homotopie

$$\deg_B(L(\cdot, 1), B(R), 0) = \deg_B(L(\cdot, 0), B(R), 0). \quad (2.5)$$

Mais $L(u, 0) = 0$ est équivalent au problème linéaire

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x) v \, dx,$$

pour tout $v \in V$, dont la solution est unique car l'ensemble de ses solutions est bornée. Par conséquent

$$\deg_B(L(\cdot, 0), B(R), 0) = \pm 1,$$

et d'après (2.5) et la propriété d'existence de degré topologique [9], il existe $u \in B^V(R)$ qui satisfait

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a(x, u(x), \nabla u(x)) \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x) v \, dx, \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (2.6)$$

pour tout $v \in V$.

Étape 04 : Passage à la limite

Nous montrons maintenant le passage à la limite.

Pour prouver le passage à la limite, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 [9](convergence forte contre convergence faible)

On suppose que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ et $g_n \rightarrow g$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors :

$$\int_{\Omega} f_n g_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

par contre, on rappelle que si $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ faible et $g_n \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$ faible, on n'a pas en générale convergence de

$$\int_{\Omega} f_n g_n \, dx \quad \text{vers} \quad \int_{\Omega} f g \, dx.$$

Lemme 2.2.2 Si $a \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $a(\eta, \xi) \leq C(1 + |\eta| + |\xi|)$ pour tout $(\eta, \xi) \in (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et si $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ alors $a(u_n, \nabla u_n) \rightarrow a(u, \nabla u)$ dans $L^2(\Omega)$.

Le lemme 2.2.2 se démontre par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Maintenant, on sait que $H_0^1(\Omega) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} V_n}$ ou $V_n \subset V_{n+1}$, ($n \geq 1$) et V_n de dimension n . Par conséquent, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite v_n telle que $v_n \in V_n$ qui converge vers v . D'autre part, par (2.6) appliqués à $V = V_n$, il existe pour chaque $n \geq 1$, $u_n \in V_n$ telle que

$$\int_{\Omega} a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f(x) \phi \, dx, \quad \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $\phi \in V_n$. En particulier, on prend $\phi = v_n$,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla v_n \, dx = \int_{\Omega} f(x) v_n \, dx, \\ \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases} \quad (2.7)$$

pour tout $n \geq 1$. D'après (2.7), on peut extraire une sous-suite notée encore u_n telle que, $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ p.p. dans Ω . Comme $(a(\cdot, u_n, \nabla u_n))$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, il existe $\zeta \in L^2(\Omega)$ telle que,

$$a(u_n, \nabla u_n) \rightarrow \zeta, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),$$

et $\nabla v_n \rightarrow \nabla v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans (2.7) on obtien

$$\int_{\Omega} \zeta \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x) v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Pour terminer, il rest à montrer que

$$\int_{\Omega} \zeta \nabla v \, dx = \int_{\Omega} a(u, \nabla u) \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.9)$$

Pour montrer (2.9), on utilise l'astuce de Minty [9], on commence par étudier la limite de

$$\int_{\Omega} a(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx.$$

En effet,

$$\int_{\Omega} a(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} f(x) u_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) u \, dx,$$

car $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. Mais on sait que u satisfait (2.8) et donc

$$\int_{\Omega} f(x) u \, dx = \int_{\Omega} \zeta \nabla u \, dx.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} a(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} f(x) u \, dx = \int_{\Omega} \zeta \nabla u \, dx. \quad (2.10)$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe (v_n) tel que $v_n \in V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \rightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On va passer à la limite dans le terme $\int_{\Omega} a(u_n, \nabla u_n) \nabla v_n \, dx$, grâce à

l'hypothèse (H_4) .

En effet,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} (a(u_n, \nabla u_n) - a(u_n, \nabla v_n))(\nabla u_n - \nabla v_n) dx = \\
&\int_{\Omega} (a(u_n, \nabla u_n)\nabla u_n dx - \int_{\Omega} a(u_n, \nabla u_n)\nabla v_n dx - \int_{\Omega} a(u_n, \nabla v_n)\nabla u_n dx \\
&\quad + \int_{\Omega} a(u_n, \nabla v_n)\nabla v_n dx \\
&= T_{1,n} - T_{2,n} - T_{3,n} + T_{4,n}.
\end{aligned}$$

On a vu en (2.10) que $T_{1,n} \rightarrow \int_{\Omega} \zeta \nabla u dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Par le lemme 2.2.1, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{2,n} = \int_{\Omega} \zeta \nabla v dx.$$

De même,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{3,n} = \int_{\Omega} a(u, \nabla v)\nabla u dx.$$

Enfin, on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{4,n} = \int_{\Omega} a(u, \nabla v)\nabla v dx.$$

Le passage à la limite dans l'inégalité donne donc :

$$\int_{\Omega} (\zeta - a(u, \nabla v))(\nabla u - \nabla v) dx \geq 0, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit maintenant astucieusement la fonction de test v . On prend $v = u + \frac{1}{n}v^*$, avec $v^* \in H_0^1(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi :

$$-\frac{1}{n} \int_{\Omega} (\zeta - a(u, \nabla u + \frac{1}{n}\nabla v^*))\nabla v^* dx \geq 0,$$

et donc

$$\int_{\Omega} (\zeta - a(u, \nabla u + \frac{1}{n}\nabla v^*))\nabla v^* dx \leq 0.$$

Mais $u + \frac{1}{n}v^* \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc par le lemme 2.2.2,

$$a(u, \nabla u + \frac{1}{n}\nabla v^*) \rightarrow a(u, \nabla u), \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient alors

$$\int_{\Omega} (\zeta - a(u, \nabla u))\nabla v^* dx \leq 0, \quad \forall v^* \in H_0^1(\Omega).$$

Par linéarité (on peut changer v^* en $-v^*$), on a donc

$$\int_{\Omega} (\zeta - a(u, \nabla u)) \nabla v^* \, dx = 0, \quad \forall v^* \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit que

$$\int_{\Omega} \zeta \nabla v^* \, dx = \int_{\Omega} a(u, \nabla u) \nabla v^* \, dx, \quad \forall v^* \in H_0^1(\Omega).$$

On a donc bien démontré que u est solution de (2.1).

Résultats d'existence pour un système elliptique quasi-linéaire

Ce chapitre est consacré à la construction des solutions faibles pour une classe de systèmes elliptiques quasilineaires. Ce résultat peut être considéré comme une généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent.

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'existence des solutions faibles du système suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_1(x, u(x), \nabla u(x))) = h_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}(a_2(x, v(x), \nabla v(x))) = h_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $h = (h_1, h_2)$ est une fonction dans $(L^2(\Omega))^2$. On suppose que $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 1, 2$) est continue satisfait les hypothèses suivantes :

- **(H1)(Coercivité)** il existe $\alpha_i > 0 : a_i(x, \eta_i, \xi_i) \geq \alpha_i |\xi_i|^2 \quad \forall (\eta_i, \xi_i) \in (\mathbb{R}^N)^2$ et $x \in \Omega$ p.p.
- **(H2)(Croissance)** il existe $\beta_i > 0$ telle que : $|a_i(x, \eta_i, \xi_i)| \leq \beta_i(1 + |\eta_i| + |\xi_i|) \quad \forall (\eta, \xi) \in (\mathbb{R}^N)^2$ et $x \in \Omega$ p.p.
- **(H3)(Monotonie)** $\forall \eta_i \in \mathbb{R}, (\xi_{1_i}, \xi_{2_i}) \in \mathbb{R}^N$ et $x \in \Omega$ p.p.
 $(a(x, \eta_i, \xi_{1_i}) - a(x, \eta_i, \xi_{2_i}))(\xi_{1_i}, \xi_{2_i}) \geq 0$.

3.2 Résultats d'existence

Définition 3.2.1 On dit que $(u, v) \in \tilde{V}$ est une solution faible pour le système (3.1) si pour tout $(\varphi, \psi) \in \tilde{V}$ on a

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a_1(x, u(x), \nabla u(x)) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, v(x), \nabla v(x)) \nabla \psi \, dx \\ = \int_{\Omega} h_1(x) \varphi \, dx + \int_{\Omega} h_2(x) \psi \, dx. \end{cases} \quad (3.2)$$

Notre objectif principale maintenant est de prouver le Théorème (2.1) pour obtenir les résultats d'existence du système (3.1).

3.2.1 Preuve du théorème principale

Soit W un sous espace de dimension fini de \tilde{V} muni de la norme \tilde{V} , et W^* leur dual. On définit l'application suivante $E : W \times [0, 1] \rightarrow W^*$ par

$$\begin{aligned} \langle E(u, v, t), (\varphi, \psi) \rangle_{\tilde{V}} &= \int_{\Omega} a_1(x, tu(x), t\nabla u(x)) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, tv(x), t\nabla v(x)) \nabla \psi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} h_1(x) \varphi \, dx - \int_{\Omega} h_2(x) \psi \, dx, \end{aligned}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W$.

Nous allons prouver le théorème en plusieurs étapes :

Étape 01 : Estimation a priori

Nous allons prouver que toutes les solutions sont dans la boule $\bar{B}^W(R)$, c'est-à-dire $\{(u, v) \in W : E(u, v, t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, 1]\} \subset \bar{B}(\frac{2}{c} \|(h_1, h_2)\|_U)$.
En effet, si $E(u, v, t) = 0$ pour tout $(u, v, t) \in W \times [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} 0 = \langle E(u, v, t), (u, v) \rangle &= \int_{\Omega} a_1(x, tu, t\nabla u) \nabla u \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, tv, t\nabla v) \nabla v \, dx - \int_{\Omega} h_1 u \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} h_2 v \, dx \\ &\geq \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} h_1 u \, dx - \int_{\Omega} h_2 v \, dx \\ &\geq \min(\alpha_1, \alpha_2) \|(u, v)\|_{\tilde{V}}^2 - 2 \|(h_1, h_2)\|_U \|(u, v)\|_{\tilde{V}}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|(u, v)\|_{\tilde{V}} \leq \frac{2}{\underbrace{\min(\alpha_1, \alpha_2)}_c} \|(h_1, h_2)\|_U.$$

Donc

$$\|(u, v)\|_{\tilde{V}} \leq \frac{2}{c} \|(h_1, h_2)\|_U.$$

Par conséquent, pour tout $R > \frac{2}{c} \|(h_1, h_2)\|_U$, on a

$$E(u, v, t) \neq 0 \text{ si } (u, v, t) \in \partial B^W(R) \times [0, 1]. \quad (3.3)$$

Étape 02 : E est borné

On va montrer que E est borné.

Si $(u, v, t) \in \bar{B}^W(R) \times [0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \langle E(u, v, t), (\varphi, \psi) \rangle \right| &= \left| \int_{\Omega} a_1(x, tu, t\nabla u) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, tv, t\nabla v) \nabla \psi \, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} h_1 \varphi \, dx - \int_{\Omega} h_2 \psi \, dx \right| \\ &\leq \beta_1 (C_{\Omega} + C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}) \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \beta_2 (C_{\Omega} + C_2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}) \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + \|h_1\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|h_2\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{\left(k_1 + k_2 \|u, v\|_{\tilde{V}} + 2\|h_1, h_2\|_U \right)}_{\tilde{R}} \|(\varphi, \psi)\|_{\tilde{V}} \end{aligned}$$

telle que $k_1 = \max(\beta_1 C_{\Omega}, \beta_2 C_{\Omega})$, $k_2 = \max(\beta_1 C_1 + \beta_1, \beta_2 C_2 + \beta_2)$, alors

$$\left| \langle E(u, v, t), (\varphi, \psi) \rangle \right| \leq \tilde{R} \|(\varphi, \psi)\|_{\tilde{V}}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in \tilde{V}$, et donc

$$E(\bar{B}^W \times [0, 1]) \subset \bar{B}^{W^*}(\tilde{R}). \quad (3.4)$$

Étape 03 : E est continue

Soit $(u_n, v_n, t_n) \in \bar{B}^W(R) \times [0, 1]$ converge vers (u, v, t) dans $W \times [0, 1]$, c'est-à-dire dans \tilde{V} . Comme $E(u_n, v_n, t_n)$ est bornée d'après (3.4), donc pour montrer que

$$E(u_n, v_n, t_n) \rightarrow E(u, v, t),$$

il suffit de montrer que $E(u, v, t)$ est l'unique ensemble de point de $E(u_n, v_n, t_n)$. Soit $M \in W^*$ est l'unique ensemble de point (u_{n_k}, v_{n_k}) et (t_{n_k}) les sous suites de (u_n) , (v_n) et (t_n) respectivement telle que

$$E(u_{n_k}, v_{n_k}, t_{n_k}) \rightarrow M \text{ dans } W^*.$$

Comme $(u_{n_k}, v_{n_k}) \rightarrow (u, v)$ dans \tilde{V} , donc $(u_{n_k}, v_{n_k}) \rightarrow (u, v)$ dans U fortement, et $(\nabla u_{n_k}, \nabla v_{n_k}) \rightarrow (\nabla u, \nabla v)$ dans U fortement, alors d'après le réciproque de TCD on a $(u_{n_k}, v_{n_k}) \rightarrow (u, v)$ p.p. dans Ω , $(\nabla u_{n_k}, \nabla v_{n_k}) \rightarrow (\nabla u, \nabla v)$ p.p. dans Ω , et $|u_{n_k}| \leq l_1$, $|v_{n_k}| \leq l_2$, $|\nabla u_{n_k}| \leq l_3$, $|\nabla v_{n_k}| \leq l_4$, tq $l_i \in U$; $i = \overline{1, 4}$ et comme a_i est continue alors

$$\begin{aligned} a_1(t_{n_k} u_{n_k}, t_{n_k} \nabla u_{n_k}) &\rightarrow a_1(tu, t\nabla u) \quad \text{p.p. dans } \Omega, \\ a_2(t_{n_k} v_{n_k}, t_{n_k} \nabla v_{n_k}) &\rightarrow a_2(tv, t\nabla v) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue [6] on a pour tout $(\varphi, \psi) \in W$,

$$\begin{aligned} a_1(t_{n_k} u_{n_k}, t_{n_k} \nabla u_{n_k}) \nabla \varphi &\rightarrow a_1(tu, t\nabla u) \nabla \varphi \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ a_2(t_{n_k} v_{n_k}, t_{n_k} \nabla v_{n_k}) \nabla \psi &\rightarrow a_2(tv, t\nabla v) \nabla \psi \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned} &\langle E(u_n, v_n, t_n), (\varphi, \psi) \rangle_{\tilde{V}} \\ &= \int_{\Omega} a_1(x, t_n u_n, t_n \nabla u_n) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, t_n v_n, t_n \nabla v_n) \nabla \psi \, dx - \int_{\Omega} h_1 \varphi \, dx - \int_{\Omega} h_2 \psi \, dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} a_1(x, tu, t\nabla u) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, tv, t\nabla v) \nabla \psi \, dx - \int_{\Omega} h_1 \varphi \, dx - \int_{\Omega} h_2 \psi \, dx \\ &= \langle E(u, v, t), (\varphi, \psi) \rangle_{\tilde{V}}. \end{aligned}$$

Donc $M = E(u, v, t)$. Toutes ces propriétés nous permettant d'appliquer la propriété d'invariance d'homotopie

$$\deg_B(E(., ., 1), B(R), 0) = \deg_B(E(., ., 0), B(R), 0). \quad (3.5)$$

Mais $E(u, v, 0) = 0$ est équivalent au problème

$$\int_{\Omega} a_1(x) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x) \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} h_1(x) \varphi + \int_{\Omega} h_2(x) \psi \, dx,$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W$, qui est une solution unique car l'ensemble de ses solutions est bornée. Par conséquent

$$\deg_B(E(., ., 0), B(R), 0) = \pm 1,$$

et d'après (3.5) et la propriété d'existence de degré topologique, il existe $(u, v) \in \bar{B}^W(R)$ satisfait

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a_1(x, u, \nabla u) \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, v, \nabla v) \nabla \psi \, dx \\ = \int_{\Omega} h_1(x) \varphi \, dx + \int_{\Omega} h_2(x) \psi \, dx, \\ \|u, v\|_{\tilde{V}} \leq 2c^{-1} \|h_1, h_2\|_U. \end{cases} \quad (3.6)$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W$.

Étape 04 : passage à la limite

Pour prouver cette étape on va utiliser les deux lemmes 2.2.1 et 2.2.2 mentionnés dans le chapitre précédent.

Maintenant, on sait que $\tilde{V} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} W_n}$ ou $W_n \subset W_{n+1}, (n \geq 1)$ et W_n est de dimension n . Par conséquent, pour tout $(\varphi, \psi) \in \tilde{V}$, il existe une sous suite (φ_n, ψ_n) avec $(\varphi_n, \psi_n) \in W_n$ qui converge vers (φ, ψ) . D'autre part, par (3.6) appliquées $W = W_n$, il existe pour tout $n \geq 1$, $(u_n, v_n) \in W_n$ telle que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a_1(x, u_n, \nabla u_n) \nabla \tilde{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} a_1(x, v_n, \nabla v_n) \nabla \tilde{\psi} \, dx = \int_{\Omega} h_1(x) \tilde{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} h_2(x) \tilde{\psi} \, dx, \\ \|(u_n, v_n)\|_{\tilde{V}} \leq 2c^{-1} \|h_1, h_2\|_U, \end{cases}$$

pour tout $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in W_n$. En particulier on prend $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = (\varphi_n, \psi_n)$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a_1(x, u_n, \nabla u_n) \nabla \varphi_n \, dx + \int_{\Omega} a_2(x, v_n, \nabla v_n) \nabla \psi_n \, dx \\ \int_{\Omega} h_1(x) \varphi_n \, dx + \int_{\Omega} h_2(x) \psi_n \, dx, \\ \|(u_n, v_n)\|_{\tilde{V}} \leq 2c^{-1} \|h_1, h_2\|_U, \end{cases} \quad (3.7)$$

pour tout $n \geq 1$. L'estimation (3.7) implique que on peut extraire une sous suite encore noté $(u_n, v_n) \in \tilde{V}$ telle que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ faiblement dans \tilde{V} , $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ fortement dans U et $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ p.p. dans Ω . Comme $(a_1(u_n, \nabla u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, il existe $\zeta_1 \in L^2(\Omega)$ telle que

$$a_1(u_n, \nabla u_n) \rightarrow \zeta_1 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

De même, on obtient

$$a_2(v_n, \nabla v_n) \rightarrow \zeta_2 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),$$

et

$$(\nabla \varphi_n, \nabla \psi_n) \rightarrow (\nabla \varphi, \nabla \psi) \text{ fortement dans } U,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans (3.7), on obtient

$$\int_{\Omega} \zeta_1 \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \zeta_2 \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} h_1(x) \varphi \, dx + \int_{\Omega} h_2(x) \psi \, dx. \quad (3.8)$$

Il rest à montrer que

$$\int_{\Omega} \zeta_1 \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} a_1(u, \nabla u) \nabla \varphi \, dx, \quad (3.9)$$

et

$$\int_{\Omega} \zeta_2 \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} a_2(v, \nabla v) \nabla \psi \, dx. \quad (3.10)$$

Pour prouver (3.9) et (3.10), on utilise l'astuce de Minty [9], on commence par étudier la limite de

$$\int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx \text{ et } \int_{\Omega} a_2(v_n, \nabla v_n) \nabla v_n \, dx.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx &= \int_{\Omega} h_1(x) u_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} h_1(x) u \, dx, \\ \int_{\Omega} a_2(v_n, \nabla v_n) \nabla v_n \, dx &= \int_{\Omega} h_2(x) v_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} h_2(x) v \, dx.\end{aligned}$$

Car $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ faiblement dans \tilde{V} . Mais on sait que (u, v) satisfait (3.8), et donc

$$\int_{\Omega} h_1(x) v \, dx = \int_{\Omega} \zeta_1 \nabla v \, dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} h_2(x) u \, dx = \int_{\Omega} \zeta_2 \nabla u \, dx.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx = \int_{\Omega} h_1(x) u \, dx = \int_{\Omega} \zeta_1 \nabla u \, dx, \quad (3.11)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a_2(v_n, \nabla v_n) \nabla v_n \, dx = \int_{\Omega} h_2(x) v \, dx = \int_{\Omega} \zeta_2 \nabla v \, dx. \quad (3.12)$$

Soit $(\varphi, \psi) \in \tilde{V}$, il existe $(\varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\varphi_n, \psi_n) \in W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(\varphi_n, \psi_n) \rightarrow (\varphi, \psi)$ dans \tilde{V} lorsque $n \rightarrow +\infty$. Grâce à l'hypothèse de monotonie (H_3) , on va passer à la limite dans les deux termes :

$$\int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla u_n) \nabla \varphi_n \, dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} a_2(v_n, \nabla v_n) \nabla \psi_n \, dx.$$

En effet, pour la première équation

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\Omega} (a_1(u_n, \nabla u_n) - a_1(u_n, \nabla \varphi_n)) (\nabla u_n - \nabla \varphi_n) \, dx = \\ &\int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla u_n) \nabla u_n \, dx - \int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla u_n) \nabla \varphi_n \, dx - \int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla \varphi_n) \nabla u_n \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} a_1(u_n, \nabla \varphi_n) \nabla \varphi_n \, dx \\ &= B_{1,n} - B_{2,n} - B_{3,n} + B_{4,n}.\end{aligned}$$

On a vu dans (3.11) que

$$B_{1,n} \rightarrow \int_{\Omega} \zeta_1 \nabla u \, dx \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{2,n} = \int_{\Omega} \zeta_1 \nabla \varphi \, dx,$$

par produit d'une convergence forte dans $L^2(\Omega)$ et d'une convergence faible dans $L^2(\Omega)$. De même,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{3,n} = \int_{\Omega} a_1(u, \nabla \varphi) \nabla u \, dx.$$

Enfin, on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{4,n} = \int_{\Omega} a_1(u, \nabla \varphi) \nabla \varphi \, dx \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

et ce dernier terme est le plus simple car on a le produit d'une convergence forte dans $L^2(\Omega)$ et d'une convergence forte dans $L^2(\Omega)$.

Le passage à la limite dans l'inégalité donne donc :

$$\int_{\Omega} (\zeta_1 - a_1(u, \nabla \varphi)) (\nabla u - \nabla \varphi) \geq 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

De même, on obtient

$$\int_{\Omega} (\zeta_2 - a_2(v, \nabla \psi)) (\nabla u - \nabla \psi) \, dx \geq 0 \quad \text{pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit maintenant astucieusement les fonctions de teste φ et ψ , on prend

$$\varphi = u + \frac{1}{n} \varphi^*, \text{ avec } \varphi^* \in H_0^1(\Omega) \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$\psi = v + \frac{1}{n} \psi^*, \text{ avec } \psi^* \in H_0^1(\Omega) \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient ainsi :

$$-\frac{1}{n} \int_{\Omega} (\zeta_1 - a_1(u, \nabla u + \frac{1}{n} \nabla \varphi^*)) \nabla \varphi^* \, dx \geq 0,$$

et

$$-\frac{1}{n} \int_{\Omega} (\zeta_2 - a_2(v, \nabla v + \frac{1}{n} \nabla \psi^*)) \nabla \psi^* \, dx \geq 0,$$

et donc

$$\int_{\Omega} (\zeta_1 - a_1(u, \nabla u + \frac{1}{n} \nabla \varphi^*)) \nabla \varphi^* \, dx \leq 0,$$

et

$$\int_{\Omega} (\zeta_2 - a_2(v, \nabla v + \frac{1}{n} \nabla \psi^*)) \nabla \psi^* \, dx \leq 0.$$

Mais $u + \frac{1}{n} \varphi \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, $v + \frac{1}{n} \psi \rightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Donc par le lemme 2.2.2, on obtient

$$a_1(u, \nabla u + \frac{1}{n} \nabla \varphi^*) \rightarrow a_1(u, \nabla u) \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

et

$$a_2(v, \nabla v + \frac{1}{n} \nabla \psi^*) \rightarrow a_2(v, \nabla v) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient alors

$$\int_{\Omega} (\zeta_1 - a_1(u, \nabla u) \nabla \varphi^* \leq 0, \forall \varphi^* \in H_0^1(\Omega),$$

et

$$\int_{\Omega} (\zeta_2 - a_2(v, \nabla v) \nabla \psi^* \leq 0, \forall \psi^* \in H_0^1(\Omega).$$

Par linéarité (on peut changer φ^* par $-\varphi^*$ et ψ^* par $-\psi^*$), on a donc

$$\int_{\Omega} (\zeta_1 - a_1(u, \nabla u) \nabla \varphi^* dx = 0, \forall \varphi^* \in H_0^1(\Omega),$$

et on déduit que

$$\int_{\Omega} \zeta_1 \nabla \varphi^* dx = \int_{\Omega} a_1(u, \nabla u) \nabla \varphi^* dx, \quad \forall \varphi^* \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} \zeta_2 \nabla \psi^* dx = \int_{\Omega} a_2(v, \nabla v) \nabla \psi^* dx, \quad \forall \psi^* \in H_0^1(\Omega).$$

On a donc bien démontré que (u, v) est solution de (3.1).

Conclusion

Dans ce mémoire, en utilisant la méthode de compacité avec l'argument de monotonie, on a étudié l'existence des solutions faibles pour deux problèmes elliptiques quasi-linéaires, le premier est une équation elliptique quasi-linéaire avec conditions aux limites de Dirichlet et le second est un système du même classe. Ce dernier est une généralisation de la première problème.

Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS, *Sobolev space, Academic press*, New york/San Francisco/ London, (1975).
- [2] A. AMBROSETI AND A. MALCHIODI, *Nonlinear Analysis And Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, (2007).
- [3] A.ARAMA *Sur quelques resultats de la theorie des operateurs monotones et applictions aux edp*. Universite Larbi ben M'hidi - oum el bouaghi, 2017.
- [4] A. ATLAS, M. BENDAHMANE, F. KARAMI, D. MESKINE, O. OUBBIH, *A nonlinear fractional reaction-diffusion system applied to image denoising and decomposition*. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B. **26**(9), 4963-4998, 2021.
- [5] I.BOURSAS *Approximation de Galerkin et methode de compacite pour quelques probleme elliptiques et paraboliques*. Universite Larbi ben M'hidi - oum el bouaghi, 2015.
- [6] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York .(2010).
- [7] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*. Dunod, Paris, (1983).
- [8] K. CHING CHANG, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.
- [9] T. GALLOUET, R. HERBIN, *Cours Master 2, Equation aux dérivée partielle*, Université Aix de Marseille, (2020).
- [10] L.GUEDDA *Degré topologique et applications à des problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires de second ordre*. Université Kasdi Merbah Ourghla.
- [11] V. HUTSON, J. S. PYM AND M. J. CLOUD, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Elsevier Science (2005).
- [12] O. KAVIAN, *Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer Verlag, Math. Appl, Vol 13, 1993.
- [13] H.LAKEHAL, *Sur l'existence de solutions non triviales d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires*. Universite Badji Mokhtar-Annaba.
- [14] S. LECHEHEB, M. MAOUNI, H. LAKHAL, *Existence of solutions of a quasilinear problem with Neumann boundary conditions*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 2019. In press.

- [15] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, (1969).
- [16] J. MAWHIN , Leray-Schauder degree : a half century of extensions and applications, J. of the J. Schauder Center, Vol.14 (1999),195- 228.

Abstract

The objective of this work is to study the existence of weak solutions for some classes of quasilinear elliptic equations with a Leray-Lions operator. This existence is obtained by using the compactness method and the monotonicity argument. Then, we generalize the results obtained to the system and we use the same techniques.

Key words : Topological degree, elliptic systems, weak solution, homotopy.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence des solutions faibles pour certaines classes d'équations elliptiques quasilineaires avec un opérateur de Leray-Lions. Cette existence est obtenus en utilisant la méthode de compacité et l'argument de monotonie. Ensuite, on généralise les résultats obtenus au système et on utilise les mêmes techniques.

Mots clés : Degré topologique, systèmes elliptiques, solution faible, homotopie.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود حلول ضعيفة لفئات معينة من المعادلات الإهليلجية شبه الخطية التي تتضمن مؤثر ليري - ليونز. يتم الحصول على هذا الوجود باستخدام طريقة الاكتناز و حجة الرتبة. ثم نقوم بتعميم النتائج المتحصل عليها على نظام و نستعمل نفس التقنية.

كلمات مفتاحية: درجة طوبولوجية، الأنظمة الإهليلجية، الحل الضعيف، التشوه المستمر.