

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M 2022/2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Étude de problème aux valeurs propres elliptique fortement non-linéaires

Option : Analyse Fonctionnelle Appliquée.

Par :

1. Abdennouri Safa.
2. Lekoui Esma.

Encadré par : Z.BELYACINE

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président: Z.CHOUGI
Examineur: S.BENFERDI

MCB U. SKIKDA
MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Remerciements

On remercie Allah le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire. Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de

Dr. Mme Belyacine Zahia

On la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire. Un grand merci va également aux membres de jury

1. **Mlle. Chougi Zoulikha**, 2. **Mlle. Benferdi Sabrina**, qui ont accepté d'examiner notre mémoire et faire partie de ce jury.

En fin Nos remerciement s'adressent également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

**Abdennouri Safa
Lekoui Esma**

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère.

À mon cher père qui m'ont toujours soutenu.

À mes chères sœurs.

*À tous mes distingués professeurs, sans exception pour leurs utiles
conseils, leur patience, leur persévérance.*

À mon meilleur ami.

*À tous ce qui mon amie et à tous ce qui ma donne l'aide et
l'encouragement de près ou de loin.*

Abdennouri Safa

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

Aux plus chers parents : mon père et ma mère

Aux personnes que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au

long de ce mémoire :

Mes frères et mes sœurs .

et bien sur a toute la famille Le koui

A toutes mes amies.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces

années.

Merci d'être toujours là pour moi.

lekoui Esma

Résumé

Dans ce mémoire. Nous étudions quelques équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptiques Donc : Nous démontrons l'existence de solution pour problème (\mathcal{P}) avec des conditions sur le comportement des rapports $\frac{F(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ et $\frac{pF(x,s)}{|s|^p}$ entre deux valeurs propres consécutives du p-laplacien. L'approche utilisée est basée essentiellement sur le principe de Min-Max.

Mots clés : Valeur propre, Fonction propre, Point critique, Principe Min-Max, P-laplacien, Espace de Sobolev.



Abstract

In this memoir, we study some non linear partial differential equations of the elliptic type so : we prove the existence of solution of the problem (\mathcal{P}) . With conditions on the behaviour of the ratios $\frac{F(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ and $\frac{pF(x,s)}{|s|^p}$ between two consecutive eigenvalue values of the p-laplacien where F is a potential of f . The approach used is essentially based on the principle of Min-Max.

Key words : Eigenvalue values, Proper function, Critical point, Principle Min-Max, p-laplacien, Sobolev space.

$W^{m,p}$: Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre m dans $L^p(\Omega)$.

$W_0^{m,p}$: Espace de Sobolev avec trace nulle.

$W^{1,p'}(\Omega)$: Espace dual de $W^{1,p}$.

$L^p(\Omega)$: $\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$.

X : Espace de Banach.

$C^1(\Omega)$: L'espace de fonction continue et les premières dérivées est continue sur Ω .

Δu : Laplacien de u .

∇u : Gradient de u .

$\Delta_p u = \nabla(|\nabla u|^{p-2})$: P-laplacien.

$p.p$: presque pour tous les points.

$\gamma(F)$: La fonction de genre.

$co(K_0)$: L'enveloppe convexe d'un compact K_0 .

$Sym(X)$: L'ensemble de parties F de X fermées et symétriques.

TABLE DES MATIÈRES

§Notation	iii
§Introduction	1
1 Rappels et préliminaires	3
1.1 définition	3
1.2 Rappels sur les espace de Sobolev	6
1.2.1 Les espace de L^p	7
2 Les méthodes de Résolution des équations aux dérivées partielles	10
2.1 Méthodes variationnelles (méthode de point critiques)	10
2.1.1 Condition de Palais-Smale	11
2.1.2 Théorème du Col	12
2.1.3 Principe du Min -Max	13
3 Existence de solution pour le Problème de Dirichlet	15
3.1 Le cas linéaire $p = 2$	16
3.2 Le cas non linéaire $p \neq 2$	16
3.2.1 Corollaire du théorème :	20
Bibliographie	26

En mathématiques, plus précisément en calcul différentielle, une équation aux dérivées partielles (parfois appelée équation différentielle partielle et abrégée en E.D.P) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Les équations aux dérivées partielles abrégées E.D.P sont les outils mathématiques dont l'importance prime par le fait de modéliser des phénomènes naturels, pour cette raison, elles demeurent fortement sollicitées dans différents contextes telle que : physique, mécanique, chimie, biologie, sociologie,... Les équations de type elliptique interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires(c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Depuis leurs découverte, plusieurs méthodes ont été mises en évidence pour l'existence et les propriétés qualitatives de leurs solutions, notamment les méthodes variationnelle, les méthodes topologiques et les méthodes numériques. Notre approche pour résoudre ce type de problème est basée sur la théorie des points critiques. En clair, les solutions faibles de ces équations sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée à ces équations. Les théories des points critique et fixe sont au coeur de l'analyse non linéaire appliquée aux E.D.P, et E.D.O, car elles fournissent les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaires. L'analyse non linéaire, comme une branche autonome des mathématiques, s'est faite imposer durant les années 1950 par des mathématiciens, comme Browder, c'est le résultat de la combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

Cependant, les premiers résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920, ils sont appliqués à un large éventail de domaines ; en effet plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie peuvent être représentés par des modèles non linéaires. Notre approche pour résoudre ce type de problème est basée sur la théorie des pointes critiques, les solutions faibles

de ces équations sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée à ces équations, dans un premier temps, nous étudions une équation elliptique non-linéaire se forme : le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u) + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons voulu présenter ici les différents résultats concernant le p-Laplacien avec poids. Le p-Laplacien représente une généralisation naturelle du Laplacien. Même s'il paraît que la forme des résultats est analogue dans le cas du Laplacien et du p-Laplacien, les approches elles, sont tout à fait différentes.

Le travail de cette mémoire est structuré comme suit :

Première chapitre : Nous rappelons quelques définitions et quelques notions et résultats sur les espaces de Lebesgue et Sobolev qui seront utilisés tout au long de ce travail.

Deuxième chapitre : Nous avons présenté l'outil principale pour montrer l'existence des solutions pour le problème variationnel.

Troisième chapitre : Nous avons démontré l'existence de la solution non triviale du problème (P).

Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisis à la fin de ce travail un nombre assez restreint permettant au lecteur intéressé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger cette mémoire.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET PRÉLIMINAIRES

1.1 définition

Définition 1.1. (*Point critique*)

Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on dit que $u \in \Omega$ est un point critique de I si

$$I'(u) = 0.$$

Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de I .

Définition 1.2. (*Valeur critique*)

On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de I s'il existe $u \in V$ telle que

$$I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0.$$

Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de I .

Définition 1.3. (*Valeur propre*)

Soient A et B deux opérateurs non linéaires définis sur un espace de Banach X , on dit que λ est une valeur propre de l'opérateur A par rapport à l'opérateur B s'il existe $u \in X$, telle que $u \neq 0$

$$Au = \lambda Bu.$$

Définition 1.4. (Fonction propre)

On dit que f est une fonction propre de l'opérateur A avec la valeur propre λ si

$$Af = \lambda f \quad (\lambda \text{ constante}).$$

Définition 1.5. (Point fixe)

Soit (V, d) un espace de Banach et $M \in V$ un sous ensemble non vide et fermé et $T : M \rightarrow V$ une application. Une solution de l'équation $Tx = x$ est appelée un point fixe de T .

Définition 1.6. (Fonction de Carathéodory)

Soit Ω un ouvert bornée de \mathbb{R}^N , un fonction $f : w \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} est dite d Carathéodory si elle vérifie :

1– L'application : $t \rightarrow f(x, t)$ est continue p p $x \in \Omega$.

2– L'application : $t \rightarrow f(x, t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.7. (Fonction coercive)

Une fonctionnelle I définie in espace de banach séparable X est dite coercive si :

$$\lim_{\|x\|_X \rightarrow +\infty} I(x) = +\infty$$

Définition 1.8. (Opérateur différentiels)

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}u = \overrightarrow{\nabla}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Divergence

$$\text{div}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Laplacien

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \text{div}(\nabla u).$$

Définition 1.9. (L'opérateur p-laplacien)

En mathématique, p-laplacien est un opérateur elliptique partielle différentielle quasi linéaire de deuxième ordre. Il est une généralisation non linéaire de opérateur de laplacien ou p est



autorisé à se situer au dessus de $1 \leq p \leq \infty$

$$\Delta_p u = \nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

lorsque le $|\nabla|^{p-2}$ est définie comme

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Définition 1.10. (Dérivée directionnelle)

Soient Ω une partie d'une espace de Banach X et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction à valeur réelles si $u \in \Omega$ et $y \in$ sont tel que $t > 0$ assez petit on a $u + ty \in \Omega$ on dit que F admet (ou point u) une dérivée dans la direction y si la limite :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + ty) - F(u)}{t} \text{ existe.}$$

On notera cette limite $F'_y(u)$.

Définition 1.11. (Dérivée ou sens de Gâteaux)

Soient Ω une partie d'une espace de Banach X et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si $u \in \Omega$ on dit que F est dérivable ou sens de Gâteaux (on G -dérivable ou encore G - différentiable) en u , s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $y \in X$, on $F(u + ty)$ existe pour $t > 0$.assez petit la dérivés directionnelle $F'_y(u)$ existe et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + ty) - F(u)}{t} = \langle l, y \rangle.$$

On posera $F'_y(u) = l$.

Définition 1.12. (Dérivée ou sens de Fréchet)

Soient Ω un partie ouvert de X , et X un espace de Banach, et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction si $u \in \Omega$, on dit que F est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $l \in X$ tel que :

$\forall v \in \Omega$

$$F(v) - F(u) = \langle l, v - u \rangle + \delta(v - u).$$

Si F est différentiable, l est unique et on note $F'(u) = l$, l'ensemble des fonction différentiable



de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sera noté $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $\delta(v - u)$ désigne une fonction de $(v - u)$ tel que

$$\lim_{\|u-v\| \rightarrow 0} \delta(v - u) \|u, v\| = 0.$$

Définition 1.13. (Solution faible)

On dit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est un solution faible si et seulement si elle vérifiés :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Omega} h v dx,$$

pour tout

$$v \in W^{1,p}(\Omega)$$

Définition 1.14. (Convergence forte)

Soit $1 < p < \infty$. On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$, et on note $f_n \rightarrow f$, si $f_n, f \in L^p(\Omega)$ et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Définition 1.15. (Convergence faible)

Soit $1 < p < \infty$. On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$, et on note $f_n \rightharpoonup f$, si $f_n, f \in L^p(\Omega)$ et si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega)$$

Définition 1.16. (Suite de Palais-Smale)

On dit qu'une suite (U_n) de X est une suite de Palais-Smale s'il existe $c > 0$ tel que

$$I(U_n) \leq c \text{ et } I'(U_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X'.$$

1.2 Rappels sur les espace de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous regroupons, un certain nombre de résultats concernant les espaces de Sobolev qui nous seront utiles par la suite. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev et espace L^p , ou pour la démonstration des résultats que nous énoncé ici.



1.2.1 Les espace de L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On désigne par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

et on définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Pour $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est mesurable et } \forall C \geq 0 / |f(x)| < C, \mu - p.p. \text{ sur } \Omega\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| < M \quad \mu - p.p. \text{ sur } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

- Pour $p = 2$ on note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable :

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty\}.$$

$L^2(\Omega)$ est un espace fonctionnel linéaire.

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω et on écrit

$$L^1_{Loc}(\Omega) = \left\{ f : f \in L^1(K) / \text{sur tout compact } K \text{ dans } \Omega / \text{ou si } \int_K |f(x)| dx < +\infty \right\},$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Remarque 1.1. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.17. (Les espace de Sobolev)

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On définit les espace de Sobolev suivants :

- 1) $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q } D_i u \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \text{ Dans cette définition,}$



lorsqu'on dit $D_i u \in L^2(\Omega)$, on sous-entend.

"Il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $\langle D_i f, \varphi \rangle_{D^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_\Omega g \varphi dx$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty$."

on ne le répétera pas par la suite.

2) Pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } |\alpha| \leq m\}$.

3) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } |\alpha| \leq m\}.$$

noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C_c(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 1.18. (Inégalité de type Pointe Carré)

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $1 \leq p \leq \infty$ alors il existe $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou de façon équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Définition 1.19. (Inégalité de Hölder)

Soit $p, q \in C_+(\bar{\Omega})$, $p : \Omega \rightarrow [1, +\infty]$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pour tout $x \in \Omega$ alors il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a :

$$\left| \int_\Omega uv dx \right| \leq C_p \|u\|_p \|v\|_q.$$

Proposition 1.2. On a :

- 1) $\|u\|_p < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow \varphi(u) < 1 (= 1; > 1)$.
- 2) $\|u\|_p > 1 \Rightarrow \|u\|_p^{p^-} \leq \varphi(u) \leq \|u\|_p^{p^+}$.
- 3) $\|u\|_p < 1 \Rightarrow \|u\|_p^{p^+} \leq \|u\|_p^{p^-}$.

Proposition 1.3. Si $u, u_n \in L_p(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}$ alors les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_p = 0$.



- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(u_n - u) = 0$.
 3) $u_n \rightarrow u$ en mesure dans Ω et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(u_n) = \varphi(u)$.

Théorème 1.1. Supposons que :

- $1 < q^- = \min_{(x) \in (\bar{\Omega})} q \leq q^+ = \max_{(n) \in (\bar{\Omega})} q < \infty$
- 1) Si Ω est un ouvert borné $(L^q(\Omega), | \cdot |_p)$ est un réflexif uniformément convexe et espace séparable.
- 2) Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , alors $\delta^0(\Omega)$ est dense dans l'espace $(L^q(\Omega), | \cdot |_q)$.

Injection de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

Théorème 1.2. (Inégalité de Sobolev)

Soit Ω est un ouvert régulier de \mathbb{R}^N et $1 \leq p \leq N$. Alors il existe une constante C (dépendant de N et p) telle que

$$\| u \|_L^p(\Omega) \leq C \| \nabla u \|_L^p(\Omega), \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.3. Soit Ω est un ouvert régulier de \mathbb{R}^N . Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty[$, alors :

- 1 Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$.
- 2 . Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0$ on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, +\infty[$, (mais pas pour $q = +\infty$).
- 3 Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0$, on a $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Dans ce cas, si $k - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas un entier, alors $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{s,\beta}(\Omega)$, ou $s = k - \frac{N}{p} - s$ les injections restent valables si $k = 1$ et $p \in [1, \infty[$. Toutes ces injections sont continues.

Sans hypothèse de régularité sur Ω les injections sont vraies localement : $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$, elle restent globalement vraies si on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Concernant la compacité des injections précédentes, on a la théorème suivant.

CHAPITRE 2

LES MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Les E.D.P non linéaire sont étudiés par deux méthodes différentes : la méthode topologique et la méthode variationnelle. Tout au long de notre étude nous utiliserons la méthode variationnelle. Les différentes solutions obtenu à partir de cette méthodes peuvent être soit des points critique soit des extremum qui veut dire des points minimum et maximum.

2.1 Méthodes variationnelles (méthode de point critiques)

L'approche variationnelle des équations aux dérivées partielles non-linéaire est basée sur la notation de la solution faible qui est associée a chaque problème. Cette solution est en fait un point critique de la fonctionnelle associée au problème. Les solutions des problèmes différentiels avec une structure variationnelle peuvent être des points critiques autres que les minimums ou les maximums.

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des problèmes est de remplacer les équations aux dérivées partielles par des formulations équivalentes, dite variationnelle ou faible, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dit fonction test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle.

2.1.1 Condition de Palais-Smale

Un outil essentiel dans le calcul de la variation et la compacité des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur les quelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition à priori, à vérifier pour chaque fonctionnelle indépendamment de l'existence ou non de valeur critique. Elle sera par contre un outil essentiel pour montrer cette existence dans plusieurs cas.

Définition 2.1. (La condition de Palais-Smale)

Soit X un espace de Banach et $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On dit que I vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si de toute suite u_n de X telle que :

$I(u_n) \rightarrow c$ dans \mathbb{R} et $DI(u_n) \rightarrow 0$ dans X' .

on peut extraire une sous-suite convergente.

- La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite u_n , celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.
- Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si $c = \inf_X I$, on peut parfaitement avoir une suite minimisante un telle que $DI(u_n) \not\rightarrow 0$.
Il suffit de prendre $X = \mathbb{R}$, $I(u) = \sin(u^2)$, $c = -1$ et $u_n = (\frac{3\pi}{2} + n2\pi + \frac{1}{\sqrt{n2\pi}})^{\frac{1}{2}}$. On a $I(u_n) \rightarrow -1$ et $I'(u_n) \rightarrow 2$.
- Remarquons que la topologie est ici la topologie forte.
- On rencontre dans la littérature plusieurs variantes de la condition de Palais-Smale.

Lemme 2.1. (Lemme de déformation)

Soit E un espace de Banach et $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On pose pour $c \in \mathbb{R}$

$$I \leq c = \{u \in E; I(u) \leq c\}.$$

De façon analogue on définit les ensembles, $I < c, I \geq c, I > c$ est les ensembles de niveau $I = a$.

Le point crucial dans l'existence des points critique est la différence topologique entre les ensembles $I < c$ et $I \leq c + \varepsilon$ pour certaine valeur de $c \in \mathbb{R}$.



Lemme 2.2. Soit E un espace de Banach et $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale. Soit $c \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de I .

Alors il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un homéomorphisme $\eta : E \rightarrow E$ satisfaisante :

1) Pour tout $u \in I \leq c - \varepsilon_0 \cup I \geq c + \varepsilon_0$ on a $\eta(u) = u$.

2) On a $\eta(I \leq c + \varepsilon) \subset I \leq c - \varepsilon$.

Remarque 2.1.

1) On a démontré un peu plus que ce qui est affirmé dans le lemme de déformation : il s'agit non seulement d'un homéomorphisme, mais d'une homotopie (η_t dépend continuellement de t).

2) Il existe de nombreuses variantes du lemme de déformation. Par exemple, on peut imposer que $\eta(I \leq c + \varepsilon) = I \leq c - \varepsilon$.

3) Le lemme de déformation dépend de façon cruciale de la condition de Palais-Smale. Considérons la fonction $I(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $E = \mathbb{R}$. Elle ne satisfait pas la condition de Palais-Smale en $c = 0$. De plus, $c = 0$ est une valeur régulière, mais $I \leq \varepsilon$ n'est certainement pas homéomorphe à un sous-ensemble de $I \leq -\varepsilon$ car le dernier est compact, alors que $I \leq \varepsilon$ ne l'est pas.

2.1.2 Théorème du Col

Théorème 2.1. Soient X un espace de Banach $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $I(0) = 0$ et que :

1) Il existe $R > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $\|u\| = R$, alors $I(u) \geq \alpha$.

2) Il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $I(u_0) < \alpha$.

3) alors I possède une valeur critique c telle que $c \geq \alpha$ de façon plus précise si on pose :

$$\beta = \{\varphi([0, 1]); \varphi \in C([0, 1], X), \varphi(0) = 0; \varphi(1) = u_0\}$$

et

$$c = \inf_{A \in \beta} \max_{V \in A} I(v)$$

Alors c est une valeur critique de I et $c \geq \alpha$.



Démonstration. Soient β (qui est évidemment non vide) et c définis comme dans le théorème tout d'abord notés que par connexité, pour tout $A \in \beta$, l'intersection $A \cap u \in X; \|u\| = \mathbb{R}$ est non vide, et par conséquent $\max_{v \in A} I(v) \geq \alpha$ et finalement $c \geq \alpha$.

Si c n'est pas une valeur critique de I avec les notations de déformation pour $0 < \varepsilon < \varepsilon$, on peut trouver $A \in \beta$ tel que $A = \varphi([0, 1])$

$$c \leq \max_{V \in A} I(v) \leq c + \varepsilon$$

en posant $\psi(\tau) = \eta(1, \varphi(\tau))$ et $B = \psi([0, 1])$ on a $B \in \beta$. Mais la propriété du lemme de déformation implique que $B \subset [I(v) \leq c - \varepsilon]$, ce qui contredit le fait que, par définition de c , on a $\max_{v \in B} I(v) \geq c$. On en conclut. \square

2.1.3 Principe du Min -Max

Théorème 2.2. Soient X un espace de Banach, I de E dans \mathbb{R} une fonction de classe C^1 vérifiant la condition de palais- Smale et B une famille non vide de X , on suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, le flot $\eta(1, \cdot)$ construit dans le lemme de déformation respecte B (c-à-d si $A \in B$, on a $\eta(1, A) \in B$) on pose :

$$c = \inf_{A \in B} \sup_{v \in A} I(v).$$

si $c \in \mathbb{R}$, alors c est une valeur critique de I .



Démonstration. En effet si c n'est pas valeur critique, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut choisir $A \subset B$ tel que $c \leq \sup_{v \in A} I(v) \leq c + \varepsilon$. Mais par hypothèse, on posant $w = \eta(1, A)$ on a d'une part $w \in B$, et d'autre part $w \in [I \leq c - \varepsilon]$, ce qui contredit la définition de c .

□

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE SOLUTION POUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de solution de l'équation elliptique non linéaire pour le problème de Dirichlet suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u) + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^N , $1 < p < +\infty$, Δ_p est l'opérateur p-laplacien : $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, $h \in W^{-1,p'}$.

• On s'intéresse à l'étude de solution du problème sous les hypothèses :

$(f_{\alpha,\beta})$

$$\alpha \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2} s} \text{ et } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{s-2} s} \leq \beta,$$

$(F_{\alpha,\beta})$

$$\alpha < l(x) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{pF(x, s)}{|s|^p}, \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{pF(x, s)}{|s|^p} := k(x) < \beta,$$

p.p. $x \in \Omega$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists d_\varepsilon \in L^1(\Omega) \text{ tel que p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

on a

$$-d_\varepsilon(x) + (l(x) - \varepsilon) \frac{|s|^p}{p} \leq F(x, s) \leq (k(x) + \varepsilon) \frac{|s|^p}{p} + d_\varepsilon(x),$$

- où $\alpha = \lambda_n$ et $\beta = \lambda_n + 1$ sont deux valeurs propre consécutives du p -laplacien et $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.
- Cette étude est consacrée initialement à l'établissement d'un résultat de point critique, de type min-max pour la fonctionnelle énergie I associée au problème \mathcal{P} définie par :

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega F(x, u) - \langle h, u \rangle$$

ou $\langle h, u \rangle$ désigne le produit de dualité d'un élément $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ par $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

3.1 Le cas linéaire $p = 2$

Les travaux dans cette direction utilisant une approché variationnelle sont dit à dolph[7]. Ensuite plusieurs études ont été faites sur ce type de problème .

Les méthodes utilisées dans ces travaux font intervenir essentiellement le caractère linéaire du laplacien et décomposition de l'espace de Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$ en somme directe d'un sous espace vectoriel V engendré par les n premières fonction propre de $-\Delta$ et son orthogonale $W(W_0^{1,2}(\Omega) = V \oplus W)$. La caractérisation variationnelle de la valeur propre λ_{n+1} :

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} = \sup \left\{ \frac{\int_\Omega |u|^2}{\int_\Omega |\nabla u|^2} \quad u \in W/\{0\} \right\},$$

Permet d'établir la coercivité et l'anticoercivité de le fonctionnelle I sur W et V respectivement, ce qui conduit à l'existence d'une valeur critique de type min-max de I en utilisant le théorème de point selle de Rabinowitz.

Il est clair que les méthodes utilisées dans le cas linéaire $p = 2$ ne s'adaptent pas à notre situation, d'où la nécessité de l'établissement d'un théorème de point critique adéquat.

3.2 Le cas non linéaire $p \neq 2$

Dans le cas ou l'opérateur non linéaire ($p \neq 2$), les résultats connus de natures variationnelles sont démontrés lorsque les quotients $\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ et $\frac{pF(x,s)}{|s|^p}$ se situent à gauche de la première valeur propre λ_1 du p -laplacien ($-\Delta_p$). Ils utilisent la caractérisation variationnelle de λ_1 :



$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup \left\{ \frac{\int_{\Omega} |u|^p}{\int_{\Omega} |\nabla u|^p} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\} \right\}$$

Rappelons que les nombres $\lambda_n(\gamma)$ définis par :

$$\frac{1}{\lambda_n(\gamma)} = \sup_{K \in A_n(\gamma)} \min_{u \in K} \int_{\Omega} |u|^p.$$

Appartiennent au spectre $\sigma(-\Delta_p)$ du p -laplacien, où $\gamma(F)$ est le genre d'une partie $F \subset W_0^{1,p}(\Omega) / \{0\}$ fermée et symétrique, $A_n(\gamma) = \{K \subset S; K \text{ compact symétrique et } \gamma(K) \geq n \text{ et } S = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \|u\|_{1,p} = 1\}\}$. Anane a montré que λ_1 est simple et isolée.

ensuite Anane et Tsouli ont montré que λ_2 est bien la deuxième valeur propre, c'est-à-dire $\lambda_1 < \lambda_2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(-\Delta_p) = \emptyset$.

D'autres travaux ont été effectués dans cette direction utilisant une méthode topologique, citons par exemple :

- Dans le cas $N = 1, 1 < p < +\infty$ et $(f_{\mu_n} + \delta_{\mu_{n+1}} - \delta)$ pour un certain $\delta > 0$ où μ_n et μ_{n+1} sont deux valeurs propre consécutives du p -laplacien.
- Dans le cas $N \geq 1, 1 < p < +\infty$ et

$$\lambda_1 < \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2} s} \text{ et } \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2} s} < \lambda_2.$$

où λ_1 et λ_2 sont la première et la deuxième valeur propre du p -laplacien.

Notons que les conditions que nous considérons sont plus faibles que celles considérées par les auteurs précédents. Cette amélioration est due à la méthode variationnelle utilisée lors de la résolution du problème. (C'est-à-dire : L'hypothèse $(F_{\alpha, \beta})$ est satisfaite dit que la fonction f vérifie la condition $(f_{\alpha, \beta})$. Mais on démontre facilement que l'inverse est généralement faux).



Théorème 3.1. (Théorème abstrait)

Désignons par X un espace de Banach réel de dimension infinie et $co(K)$ l'enveloppe convexe d'une partie K de E . Rappelons qu'une fonctionnelle $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfait la condition de (PS) sur X si pour toute suite (u_n) de X telle que la suite $(I(u_n))$ est bornée et $I'(u_n) \rightarrow 0$ dans X' , alors (u_n) possède une sous suite convergente dans X .

Théorème 3.2. Soient $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle satisfaisant la condition (PS) sur E , K_0 un compact non vide tel que $0 \in K_0$ et $A \subset E$ un ensemble non vide. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(P_1) \quad h(\bar{D}) \cap A \neq \emptyset, \forall h \in \Gamma \text{ où } \Gamma = \{h \in C(\bar{D}, E/0), h|_{K_0} = id\} \text{ et } D = co(K_0).$$

$$(P_2) \quad \alpha := \max_{K_0} I < \inf_A I := \beta.$$

Alors la valeur

$$c := \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in h(\bar{D})} I(u)$$

est une valeur critique de la fonctionnelle I , de plus, on a

$$c \geq \beta$$

Pour justifier la bonne définition de la valeur c , on a :

Lemme 3.1. $\Gamma \neq \emptyset$ où Γ est défini dans le théorème(3.2)

Démonstration. (preuve du lemme)

Si $0 \notin \bar{D}$, alors $id \in \Gamma$, par suite le lemme est démontré. Supposons maintenant que $0 \in \bar{D}$.

-1ère étape :

Montrons qu'il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $D_v \cap K_0 = \emptyset$ où $D_v = \{tv, t \geq 0\}$.

En effet, soit $r > 0$ tel que $\bar{B}(0, r) \cap K_0 = \emptyset$, comme $dim E = +\infty$ et \bar{D} est compact, il est clair que $\partial B(0, r) \setminus \bar{D} \neq \emptyset$. Soit $v \in \partial B(0, r) \setminus \bar{D}$, nous avons $D_v \cap K_0 = \emptyset$.

En effet, si $D_v \cap K_0 \neq \emptyset$, alors il existe $t > 0$ tel que $tv \in K_0$, puisque $\bar{B}(0, r) \cap K_0 = \emptyset$, alors $\|tv\| > r$, or $\|v\| = r$, de sorte que $t > 1$ et que $v \in [0, tv]$, d'où $v \in \bar{D}$, ce qui est absurde.

-2ème étape :

Montrons que

$$\Gamma \neq \emptyset.$$

Soit $b > 0$ tel que $K_0 \subset \bar{B}(0, b)$.

Posons $\varepsilon = d(D_v, K_0) = \min_{u \in K_0, t \geq 0} \|tv - u\|$, on a $0 < \varepsilon < +\infty$.



Posons $\alpha = \frac{2b}{\varepsilon \|v\|}$ et définissons $h : \bar{D} \rightarrow X : h(x) = x - \alpha d(x, K_0)v$.

Il est clair que h est continue sur \bar{D} et que $h(x) = x$ pour tout $x \in K_0$.

Pour terminer montrons que

$$h(x) \neq 0, \forall x \in \bar{D}.$$

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in \bar{D}$ tel que $h(x) = 0$, donc $x = \alpha d(x, K_0)v$, de sorte que $x \in D_v$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|x\| &= \alpha d(x, K_0) \|v\| \\ &= 2b \frac{d(x, K_0)}{\varepsilon} \\ &\geq 2b \end{aligned}$$

donc $x \notin \bar{B}(0, b)$, par suite $x \notin \bar{D}$, ce qui est absurde. D'où la preuve du lemme (3.1).

Démonstration. (Preuve du théorème(3.2))

On peut supposer, sans perte de généralité, que $I(0) = 0$. En effet, écrivons $I(u) = (I(u) - I(0)) + I(0)$, alors c est une valeur critique de I si et seulement si $c - I(0)$ est une valeur critique de $I - I(0)$.

Soit $h \in \Gamma$, d'après (P1) il existe $u_0 \in h(\bar{D}) \cap A$, donc la définition de la valeur β implique $\beta \leq I(u_0) \leq \max_{u \in h(\bar{D})} I(u)$, comme h est arbitraire, on en conclut que $c \in \mathbb{R}$ et $\beta \leq c$.

Pour montrer que c est une valeur critique, supposons, par l'absurde, que $K_c = \{u \in X; I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0\} = \emptyset$ et choisissons $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} < \min \frac{1}{2}(\beta - \alpha), c \text{ si } c > 0, \\ \bar{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \text{ si } c \leq 0. \end{cases}$$

Puisque I satisfait la condition de (PS) sur X , le théorème de déformation montre qu'il existe $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ et $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ vérifiant :

(D₁) : Si $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$, alors $\eta(t, u) = u$ pour tout $t \in [0, 1]$.

(D₂) : $\eta(t, u)$ est un homéomorphisme de X sur X pour tout $t \in [0, 1]$.

(D₃) : $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$ où $I^s = \{u \in X \text{ tel que } I(u) \leq s\}$.

Par définition de la valeur c , il existe $h \in \Gamma$ tel que $\max_{u \in h(\bar{D})} I(u) \leq c + \varepsilon$,



donc $h(\bar{D}) \subset I^{c+\varepsilon}$, par (D_3) , on a $\eta(1, h(\bar{D})) \subset I^{c-\varepsilon}$, il vient que :

$$\max_{u \in \tilde{h}(\bar{D})} I(u) \leq c - \varepsilon \quad (3.1)$$

où $\tilde{h} : \bar{D} \rightarrow X : \tilde{h}(u) = \eta(1, h(u))$ pour tout $u \in \bar{D}$. Si on montre que $\tilde{h} \in \Gamma$, alors on aura $c \leq \max_{u \in \tilde{h}(\bar{D})} I(u) \leq c - \varepsilon$, ce qui est absurde. Pour montrer ceci, il suffit de vérifier que $\tilde{h}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \bar{D}$ et que $\tilde{h}(u) = u$ pour tout $u \in K_0$.

En effet, si $c \leq 0$ alors par (3.1) $\max_{u \in \tilde{h}(\bar{D})} \phi(u) \leq c - \varepsilon$, On a $\phi(\tilde{h}(v)) \leq c - \varepsilon < 0$ pour tout $u \in \bar{D}$, par suite $\tilde{h}(v) \neq 0$ pour tout $u \in \bar{D}$ (car $\phi(0) = 0$). Si $c > 0$, alors $\phi(0) = 0 < c - \bar{\varepsilon}$, et par (D_1) , on a $\eta(1, 0) = 0$ or $h(u) \neq 0$ pour tout $u \in \bar{D}$, donc par (D_2) , $\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) \neq 0$ pour tout $u \in \bar{D}$.

D'autre part, soit $u \in K_0$, comme $\beta \leq c$, et d'après l'hypothèse $(P2)$ et le choix de $\bar{\varepsilon}$, on a :

$$I(u) \leq \alpha < \alpha + \bar{\varepsilon} \leq \beta - \frac{\beta - \alpha}{2} \leq c - \bar{\varepsilon},$$

de sorte que $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$.

Enfin d'après (D_1) , on obtient $\eta(1, u) = u$, il vient que $\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u$, il en résulte que $\tilde{h} \in \Gamma$, d'où le théorème (3.1). \square

3.2.1 Corollaire du théorème :

Nous allons établir dans cette section un corollaire du théorème(3.1) qui donne une situation particulière et intéressante pour les applications. Notons par $Sym(X)$ l'ensemble des parties F de X fermées symétriques telles que $0 \notin F$ et rappelons la définition du genre $\gamma(F)$ d'un élément F de $Sym(X)$.

Définition 3.1. La fonction genre $\gamma : Sym(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup +\infty$ est défini par :

- 1) $\gamma(\emptyset) = 0$
- 2) si $F \neq \emptyset$, alors $\gamma(F) = k$ est le plus petit entier tel qu'il existe une application $\emptyset : F \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ impaire et continue,
- 3) $\gamma(F) = +\infty$ si une telle application n'existe pas.

Remarque 3.1. Dans la définition(3.1) l'ensemble $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ peut être remplacé par : $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k; \|x\|_{\mathbb{R}^k} = 1\}$.

En effet, si $\emptyset : F \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ est une application impaire et continue, alors l'application $g = h \circ \emptyset : F \rightarrow S^{k-1}$ est impaire continue, où $h : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow S^{k-1} : h(x) = \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}}$.

Ceci nous conduit à introduire une nouvelle fonction genre $\theta : Sym(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.



Définition 3.2. La fonction $\theta : \text{Sym}(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup +\infty$ est définie par :

- 1) $\theta(\emptyset) = 0$
- 2) Si $F \neq \emptyset$, alors $\theta(F) = \sup\{k \in \mathbb{N}; \text{il existe } f \in C(S^{k-1}, F) \text{ impaire}\}$,
 - Remarquons que si $F \neq \emptyset$, alors $1 \in k \in \mathbb{N}$; il existe $f \in C(S^{k-1}, F)$ impaire la définition (3.2) a donc un sens.
 - Nous ne savons pas si la fonction θ coïncide avec le genre usuel γ , néanmoins, elle vérifie les propriétés suivantes qui sont déjà satisfaites par γ .

Proposition 3.1. Soit $K, K_1, K_2 \in \text{Sym}(X)$, on a

- 1) $\theta(K) \leq \gamma(K)$.
- 2) $\theta(S_Y) = \dim Y$ ou Y est un espace de Banach réel et $S_Y = \{u \in Y; \|u\|_Y = 1\}$.
- 3) $\theta(K) = 0$ si et seulement si $K = \emptyset$.
- 4) S'il existe $\phi \in C(K_1, K_2)$ impaire, alors $\theta(K_1) \leq \theta(K_2)$. En particulier si $K_1 \subset K_2$, alors $\theta(K_1) \leq \theta(K_2)$.
- 5) Si K_1 et K_2 sont homéomorphes par homéomorphisme impaire, alors $\theta(K_1) = \theta(K_2)$.
- 6) Si K est compact, alors $\theta(K) < +\infty$.

Démonstration. (Preuve de la proposition(3.1))

- 1) Si $\theta(K) = k \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe

$$f \in C(S^{k-1}, K) \text{ impaire,}$$

donc $k = \gamma(S^{k-1}) \leq \gamma(K)$.

Si $\theta(K) = +\infty$.

Alors pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ il existe

$$f \in C(S^{k-1}, K) \text{ impaire,}$$

Donc

$$k = \gamma(S^{k-1}) \leq \gamma(K).$$



Par suite

$$\gamma(K) = +\infty,$$

d'où le résultat.

2) Si $0 < \dim Y < +\infty$.

Posons $n = \dim Y$ et soit u_1, \dots, u_n une base de Y orthonormée.

Définissons f_1 :

$$S^{n-1} \rightarrow S_Y : f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in S_Y.$$

Il est clair que l'application f_1 est un homéomorphisme continu impaire,

Donc

$$\theta(S_Y) \geq n.$$

D'autre part, supposons par l'absurde, que $\theta(S_Y) > n$,

Donc il existe $k > n$ et une application $f_2 : S^{k-1} \rightarrow S_Y$ continue et impaire. Définissons

$$g = f_1^{-1} \circ f_2 : S^{k-1} \rightarrow S^{n-1}.$$

Alors g est une application continue impaire définie de S^{k-1} vers S^{n-1} avec $k > n$.

D'après le théorème de Borsuk, il existe $x \in S^{k-1}$ tel que

$$g(x) = g(-x),$$

donc

$$g(x) = 0,$$

ce qui est absurde, d'où

$$\theta(S_Y) = n.$$

Si $\dim Y = +\infty$, alors pour tout $n \geq 1$ il existe X_n un sous-espace vectoriel de Y tel que $\dim X_n = n$.

D'après le 1^{er} cas, on a $\theta(S_Y \cap X_n) = n$, par suite il existe une application $f : S^{n-1} \rightarrow S_Y \cap X_n$ continue impaire, donc $\theta(S_Y) \geq n$.

Enfin, comme n est arbitraire, on a $\theta(S_Y) = +\infty$.

La démonstration des assertions 3)...6) est similaire à celle du genre γ . □



Corollaire 3.1. Soient $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle satisfaisant la condition (PS) sur X , $K_0 \in \text{Sym}(X)$ un compact et $A \subset X$ un ensemble symétrique non vide. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(p'1) Si $K \in \text{Sym}(X)$ compact tel que $\theta(K) \geq \theta(K_0) + 1$, alors $\theta \cap A \neq \emptyset$.

(p'2) $\alpha := \max_{k_0} I < \inf_A I := \beta$.

Alors la valeur

$$C := \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in h(\bar{D})} I(u),$$

ou $D = \text{co}(K_0)$ et $\Gamma = \{h \in C(\bar{D}, X/0); h = \text{id sur } k_0 \}$ est une valeur critique de la fonctionnelle I . De plus, on a :

$$c \geq \beta.$$

Démonstration. (Preuve du corollaire)

D'après le théorème (3.), il suffit de montrer que $h(\bar{D}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma$,

Soit $h \in \Gamma$, posons $K = h(\bar{D}) \cup (-h(\bar{D}))$,

Il est clair que $K \in \text{Sym}(X)$, compact et $k_0 \subset K$.

Ensuite, montrons que

$$\phi(K) \geq \theta(K_0) + 1.$$

En effet, posons

$$\theta(K) = n$$

Alors il existe une application :

$$f_1 : S^{n-1} \rightarrow K_0 \text{ continue et impaire,}$$

Soit $\tilde{f}_1 : \bar{D}_n \rightarrow \text{co}(K_0)$ un prolongement continu de f_1 ou $\bar{D}_n = \{x \in \mathcal{R}^n; \|x\|_{\mathcal{R}^n} \leq 1\}$.

Définissons l'application $f : S^n \rightarrow K$ par :

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{cases} h \circ \tilde{f}_1(x_1, \dots, x_n) & x_{n+1} \geq 0, \\ -h \circ \tilde{f}_1(-x_1, \dots, -x_n) & x_{n+1} \leq 0. \end{cases}$$



Nous vérifions facilement que f est bien défini, continue et impaire, donc $\theta(K) \geq \theta(k_0) + 1$.

L'hypothèse (p'_1) entraîne que $K \cap A \neq \emptyset$.

Enfin, puisque A est symétrique, il résulte que $h(\bar{D}) \cap A \neq \emptyset$, d'où le corollaire. \square

Remarque 3.2. *Il existe dans la littérature plusieurs théorèmes de types minimax. Par exemples : Le théorème de liaisons[15] et le théorème de point selle de Rabinowitz. Ces théorèmes font intervenir la décomposition $V \oplus W = X$ ou V est un sous espace vectoriel de dimension finie. Le corollaire généralise ces théorèmes. En effet, soit $V \oplus W = X$ ou $Q = u \in V$ tel que $\|u\| \leq r$ pour un certain $r > 0$, et $A = W$. D'après la proposition (3.1), on a d'une part $\theta(K_0) = \dim V$.*

D'autre part, on a le résultat général suivant :

Proposition 3.2. *$K \cap A \neq \emptyset$ pour tout $K \in \text{Sym}(X)$ tel que $\gamma(K) \geq \theta(K_0) + 1$.*

Démonstration. (preuve de la proposition 2) :

Soient $K \in \text{Sym}(X)$ tel que $\gamma(K) \geq \theta(K_0) + 1$ et P projection de X sur V . Supposons, par l'absurde, que $K \cap W = \emptyset$, alors $0 \notin P(K)$, par suite l'application $f = P|_K : K \rightarrow V/0 \simeq \mathbb{R}^n/0$ est continue impaire, d'après la définition de γ , on a $\gamma(K) \leq n = \theta(K_0)$, ce qui est absurde.

\square



CONCLUSION

Dans ce mémoire , nous avons étudié problème elliptique non-linéaire faisant intervenir l'opérateur p-laplacien .

Nous avons établi théorème d'existence à l'aide de la théorie des points critiques, précisément l'utilisation du Principe Min-Max .

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics. Vol. 65, Academic Press, New York, (1975).
- [2] G. Allaire- F. Alouges, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles. École Polytechnique, année 2015 - 2016.
- [3] A.Ambrosetti et P.H.Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory, J. Func. Anal. 14(1973), 349-381.
- [4] A.Anane et O.Chakrone, Sur un théorème de point critique et application à un problème de non-résonance entre deux valeurs propres du p-laplacien, Université Paul Sabatier, (2000).
- [5] N. Benouhiba and Z. Belyacine, On the solution of the (p,q)-laplacien at resonance, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. Vol 77 (2013),
- [6] H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science and Business Media, 2010.
- [7] DOLPH (C.L.). - Non linear integral equations of the Hammerstein type, Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949), 289-307.
- [8] O.Gharbi. Étude de l'existence de solution d'une classe de systèmes d'équations elliptique non linéaires , Badje Mokter Annaba(2013).
- [9] L. Jeanjean, Méthodes Variationnelles et Applications à Quelques Problèmes d'analyse Non Linéaire.
- [10] O. Kavian, Introduction 'a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, Nancy, 1993.
- [11] M. Moussaoui and L.Elbouyahyaoui, Existence of solution for Dirichlet problem with $p(x)$ -Laplacian (3s) v. 33 2. (2015) : 241-248
- [12] RABINOWITZ (P.H.). - Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Reg. Conf. Series in Math., n° 65, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1986).
- [13] D.Zhao et X.Fan, On the space $L_p(x)(\Omega)$ and $W_{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal.Appl. 263 (2001), 424-446.
- [14] D. Zhao and X.L Fan, On the Nemytskii operators from $L_{p_1(x)}(\Omega)$ to $L_{p_2(x)}(\Omega)$. J. Lanzhou Univ. 34 (1998), 1-5.



- [15] ZELATI (V.C.). 2014 A (short) introduction to critical point theory, ICTP (Trieste), 1997.