الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة 20 أوت 1955-
سكيكدة-
كلية العلوم
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة المـاستر
تخصص: تحليل عددي للمعادلات التفاضلية الجزئية (ANEDP)

الموضوع

دراسة جبرية لفئة الفضاءات المترية

من إعداد الطالب
أكرم مسيف

تمت مناقشتها يوم: 2024/00/00، أمام اللجنة المكونة من:

بوزطوطة لمين	أستاذ محاضر أ	جامعة 20 أوت 1955	- رئيسا
لطرش عبد الكريم	أستاذمحاضر أ	جامعة 20 أوت 1955	- مشرفا
حامدي زكريا	أستاذ محاضر ب	جامعة 20 أوت 1955	- مناقشا

السنة الجامعية
2024 - 2023

❖ شكـــر وعرفـــان

قال رسول الله صل الله عليه و سلم " من لم يشكر الناس لم يشكر الله ".

الحمد لله على إحسانه والشكر له على توفيقه لنا لإتمام هذا العمل .

وقبل أن نمضي أتقدم ببالغ الشكر وعظيم الامتنان للأستاذ لطرش عيد الكريم الذي لن تكفي الحروف لإيفائه حقه لمجهوداته ونصائحه التي لم يبخل علي بها و إرشاداته أرجو من الله عز و جل أن يوفقه إلى ما يصبو إليه و يجعله من عباده الصالحين .

وأخص بجزيل الشكر والعرفان إلى كل من أشعل شمعة في درب عملنا و إلى كل من وقف على المنابر وأعطى من حصيلة فكره لي .

إلى الأساتذة الكرام في هذه الجامعة.

إلى من قدموا لي المساعدات والتوجيهات دون أن يشعروا بدورهم بذلك .

كما أشكر أعضاء اللجنة التي تشرفنا بقبولها مناقشة هذه المذكرة .

﴿ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على والدي و أن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين﴾

❖ إهــداء

الحمد لله و كفى و الصلاة على الحبيب المصطفى و أهله و من وفى أما بعد:
الحمد لله الذي وفقنا لتثمين هذه الخطوة في مسيرتي الدراسية
بمذكرتي هذه ثمرة الجهد و النجاح بفضله تعالى
مهداة إلى من وهبوني الحياة و الأمل، و النشأة على شغف
الإطلاع و المعرفة، و من علموني أن أرتقي سلّم الحياة بحكمة و صبر،
برًّا و إحسانا ، ووفاءا لهما :والدي العزيز ووالدتي العزيزة حفظهما الله
و أدامهما نورا لدربي،
و إلى من كانوا عونا لي في رحلة بحثي إخوتي: أيمن ، محمد ، عبد الرحيم ،
و لكل لعائلة الكريمة و كل أصدقائي .
و كل من علمني حرفا في هذه الدنيا الفانية.
و نسأل الله أن يجعلها نبراسا لكل طالب علم
آمين يا ربّ العالمين.

مسيف أكرم

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة بعض الخصائص الجبرية لفئة الفضاءات المترية $\underline{Met}$ (أشياؤها الفضاءات المترية و مورفيزماتها التطبيقات المستمرة بين الفضاءات المترية) من خلال استخراج المورفيزمات الشاملة المميزة لها ، كما قمنا بتحديد الشيء الابتدائي و الشيء الانتهائي في هذه الفئة.

كلمات مفتاحية

الفئة، التشاكل الفئوي، الفضاء المتري، التطبيق المستمر، فئة الفضاءات المترية، المورفيزم الشامل .

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié certaines propriétés algébriques de la catégorie des espaces métriques ***Met*** (Ses objets sont des espaces métriques et ses morphismes des applications continues entre des espaces métriques) en extrayant ses morphismes universels bien connus, Nous avons également identifié l'objet initial et l'objet terminal dans cette catégorie.

clés mots Les

Catégorie, Foncteur, Espace métriques, Application continue, Catégorie des espaces métriques, Morphisme universel.

Abstract

In this work, we studied some algebraic properties of the category of metric spaces $\underline{\boldsymbol{Met}}$ (Its objects are metric spaces and its morphisms, continuous applications between metric spaces) by deriving its well-known universal morphisms, We also identified the initial object and the terminal object in this category .

Keywords

Category, Functor, Metric spaces, Continuous application, Category of metric spaces, Morphism universal.

الفَهـرَس

الفصل 1
مفاهيم أساسية 5

1.1 الفضاءات المترية 5
1.1.1 أمثلة 6
1.2 تعاريف أساسية 6
1.2.1 التطبيقات المستمرة 7
1.2.2 الفضاء المتري لمسافة الأثر 8
1.2.3 الفضاء المتري لحاصل الضرب 9
1.2.4 الفضاء المتري للجمع المنفصل 11

الفصل 2
مفاهيم عامة في نظرية الفئات 14

2.1 الفئات 14
2.1.1 الأشياء الخاصة في الفئات 19
2.1.2 الفئة الصغيرة 20
2.2 التشاكل الفئوي 20

الفصل 3
التحويلات الطبيعية و المورفيزمات الشاملة 24

3.1 التحويلات الطبيعية 24
3.2 التشاكل الفئوي القطري 32
3.3 المورفيزمات الشاملة 33
3.3.1 المورفيزمات الشاملة الأساسية 34
3.3.2 أمثلة على المورفيزمات الشاملة في فئة المجموعات 36

37

الفصل 4
المورفيزمات الشاملة لفئة الفضاءات المترية

4.1 المورفيزمات الشاملة لفئة الفضاءات المترية 37
4.1.1 Co-product 37
4.1.2 Product 39
4.1.3 Equalizer 41
4.2 الشيء الابتدائي والانتهائي في فئة الفضاءات المترية 43
4.2.1 الشيء الابتدائي في فئة الفضاءات المترية 43
4.2.2 الشيء الانتهائي في فئة الفضاءات المترية............... 44

الحوصلة

مقـــدّمة

في عالم الرياضيات ، تعتبر الفضاءات المترية و نظرية الفئات من الأسس التي تشكل البنية التحتية للعديد من النظريات و التطبيقات المعقدة، تميز الفضاءات المترية بأنها توفر إطارا لدراسة المفاهيم المتعلقة بالمسافة و التقارب ، وهي ضرورية لفهم العديد من الظواهر الرياضية و الفيزيائية.

من ناحية أخرى تقدم نظرية الفئات لغة و أدوات للتعامل مع الهياكل الرياضية بطريقة مجردة و موحدة، مما يسمح بتحليل العلاقات الأساسية بينها.

تاريخ تطور هذه المفاهيم مثير للإهتمام بقدر أهميتها، فالفضاءات المترية ، على سبيل المثال قد تطورت بشكل كبير منذ بداية دراستها على من قبل العالم الفرنسي موريس فريشيه في عام 1905 م، حيث تم استخدامها لتوضيح مفاهيم مثل الاستمرارية و التقارب .

أما نظرية الفئات ، فقد أسست عام 1945 م على يد صموئيل إيلينبرغ و سوندرز ماكلين ، و قد كان لها تأثير عميق على الرياضيات الحديثة خاصة في مجالات مثل الطبولوجيا الجبرية و الفيزياء النظرية.

قمنا بتقسيم هذا العمل الى أربع فصول :

تناولنا في الفصل الأول المفاهيم الأساسية حول المسافة و الفضاءات المترية و بعض الخواص التي سنحتاجها في بناء المورفيزمات الشاملة في الفصل الرابع.

في الفصل الثاني ، شرعنا في استعراض بعض المفاهيم العامة لنظرية الفئات حيث تناولنا التعاريف والأمثلة الأساسية المتعلقة بالفئات ، حيث قمنا بتعريف الفئة و دعمنا التعريف بالعديد من الأمثلة التوضيحية ، كما قمنا بتعريف التشاكلات الفئوية و قدمنا بعض الأمثلة عليها .

في الفصل الثالث تناولنا مفهوم التحويلات الطبيعية ، الذي يعد من بين المفاهيم الأساسية في نظرية الفئات ، تطرقنا أيضا إلى تعريف المورفيزمات الشاملة التي قمنا بإيجاد البعض منها في الفصل الأخير من هذه المذكرة .

في الفصل الرابع وجدنا بعض المورفيزمات الشاملة الأساسية في فئة الفضاءات المترية ($\underline{\mathcal{M}et}$) و تعزيزا لعملنا قمنا باستخراج الشيء الابتدائي و الشيء الانتهائي.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

نقدم في هذا الفصل المفاهيم الأساسية حول المسافة و الفضاءات المترية و بعض الخواص و النظريات التي نحتاجها في بناء المورفيزمات الشاملة في الفصل الرابع.

1.1 الفضاءات المترية

تعريف 1.1.1

[14]. لتكن X مجموعة غير خالية و التطبيق :

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+, \forall x, y \in X$$

الذي يحقق :

1- $x = y \Longleftrightarrow d(x, y) = 0$

2- $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$

3- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

-يعرف التطبيق d مسافة على X.

-الثنائية (X, d) تسمى فضاء متري و تعرف $d(x, y)$ على أنها المسافة بين x و y.

1.1.1 أمثلة

مثال 1.1.1. التطبيق $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرف بالشكل التالي :

$$d(x,y)=|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

هو مسافة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (يمكن التحقق بسهولة من الشروط أعلاه).

مثال 1.1.2. لتكن X مجموعة غير خالية و $d:X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ تطبيق معرف بالشكل :

$$d(x,y)=\begin{cases}0\ ,x=y\\ 1\ ,x\neq y.\end{cases} \tag{1.1}$$

فإن d هو مسافة على X و تسمى المسافة المتقطعة (يمكن التحقق بسهولة من الشروط أعلاه).

1.2 تعاريف أساسية

تعريف 1. 1.2.. [9] ليكن (X,d) فضاء متري و $x_0\in X$، $r>0$ عدد حقيقي .

- الكرة المفتوحة في X التي نصف قطرها r و مركزها x_0 هي :

$$B(x_0,r)=\{x\in X;d(x,x_0)<r\}$$

-نقول عن $U \subset X$ أنه جوار لـ x_0 إذا كان:

$$\exists r > 0, B(x_0, r) \subset U$$

تعريف 1. 2.2. [9] ليكن (X, d) فضاء متري و $U \subset X$.
-نقول عن U أنه مفتوح إذا كان :

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0, B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$$

-نقول أن U مغلق من (X, d) إذا كان متممه U^c مفتوح من (X, d).

ملاحظة 1. 2.1. ϕ هي مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت.

تعريف 1. 2.3. [9] ليكن (X, d) فضاء متري ، نعرف الطبولوجيا (τ_d) المولدة بالفضاء المتري (X, d) كالتالي :

$$\tau_d = \{O \subset X; (X, d) \text{ مفتوح من } O\}$$

-الثنائية (X, τ_d) تسمى الفضاء الطبولوجي المولد لـ (X, d) .

تعريف 1. 2.4. لتكن $A \subset M$ مجموعة غير خالية ، نعرف مسافة النقطة $x \in M$ عن A كالتالي:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, z), z \in A\}$$

1.2.1 التطبيقات المستمرة

هناك العديد من التعريفات للتطبيقات المستمرة بين الفضاءات المترية (انظر [14]) و نهتم في عملنا بشكل خاص بالتعاريف التالية:

تعريف 1. 2.5.. [14] ليكن (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاءين متريين ، و

$$f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$$

تطبيق :

1. نقول عن f أنه مستمر عند $a \in X$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d_X(x, a) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

2. نقول عن الدالة f أنها مستمرة على X إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من X.

3. نقول عن f أنه مستمر عند $a \in X$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل جوار $Y \supset V$ لـ $f(a)$ الصورة العكسية $f^{-1}(V) \subset X$ هي جوار لـ a.

4. نقول أن f مستمر على X إذا كانت الصورة العكسية لكل مفتوح في Y هي مفتوح في X .

1.2.2 الفضاء المتري لمسافة الأثر

تعريف 1. 2.6.. [14] ليكن (X, d) فضاء متري و A مجموعة جزئية غير خالية من X ، و ليكن $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ اقتصار لـ d على $A \times A$ المعرف بـ :

$$d_A(x, y) = d(x, y), \forall x, y \in A$$

التطبيق d_A يعرف مسافة على المجموعة $A \times A$ و تسمى بمسافة الأثر. [1]

1.2.3 الفضاء المتري لحاصل الضرب

تعريف 1. 2.7.. [14] ليكن (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضائين متريين، الجداء الديكارتي للمجموعتين X_1 و X_2 يعرف على النحو التالي:

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in X, x_2 \in X_2\}$$

على المجموعة $X_1 \times X_2$ نستطيع تعريف أكثر من مسافة، من بين هذه المسافات الممكنة سنتعرّف على واحدة تتميّز عن المسافات الأخرى بارتباطها المباشر بالمسافتين d_1 و d_2.
من أجل نقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$ مسافة الجداء معرفة بينهما كالتالي:

$$d_{X_1 \times X_2}((x_1, y_1), (x_2, y_2) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

الثنائية $(X_1 \times X_2, d_{X_1 \times X_2})$ هي فضاء متري و تسمى الفضاء المتري لحاصل الضرب.

[1] يمكن الملاحظة بسهولة أن d_A هو مسافة على المجموعة $A \times A$

خاصية 1. 2.1. [2]

لتكن $X = X_1 \times X_2$ فضاء الجداء الديكارتي و d_X هي مسافة الجداء، نعرف P_1 و P_2 كما يلي:

$$P_1 : (X, d_X) \longrightarrow (X_1, d_1)$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto P_1(x_1) = x_1$$

$$P_2 : (X, d_X) \longrightarrow (X_2, d_2)$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto P_2(x_2) = x_2$$

التطبيقان P_1 و P_2 مستمران. [2]

برهان :

نتحقق من استمرارية P_1 عند $(a, b) \in X_1 \times X_2$،

ليكن $\varepsilon > 0$ و باختيار $\delta = \varepsilon$. عندما تكون $d_{max}((x, y), (a, b)) < \delta$ نتحصل على :

$$d_X(P_1(x, y), P_1(a, b)) = d_X(x, a) \le d_{max}((x, y), (a, b)) < \delta = \varepsilon$$

إذا P_1 مستمرة عند (a, b), بنفس الطريقة نثبت استمرار P_2. ■

نظرية 1.2.1. [14]

ليكن $X = X_1 \times X_2$ فضاء الجداء الديكارتي و ليكن التطبيق:

$$f : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$$

التطبيق f مستمر إذا وفقط إذا كان $P_1 \circ f$ و $P_2 \circ f$ تطبيقان مستمران.

[2] P_1 و P_2 يسميان تطبيقي اللاإسقاط.

1.2.4 الفضاء المتري للجمع المنفصل

تعريف 1. 2.8.. [12] (الجمع المنفصل)
لتكن $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ مجموعات كيفية غير خالية، نعرف الجمع المنفصل للمجموعات $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ كما يلي:

$$\biguplus_{i\in\mathbb{N}} X_i = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup}\{(x,i)/i\in\mathbb{N}, x\in X_i\}$$

- حالة خاصة:
لتكن X_1 و X_2 مجموعتين كيفيتين غير خاليتين، نعرف الجمع المنفصل لهما بالعلاقة التالية:

$$X_1 \uplus X_2 = X_1\times\{1\}\cup X_2\times\{2\}$$

مثال 1.2.1. لتكن $X_1=\{1,2,3\}$ و $X_2=\{a,b\}$ فإن:

$$\begin{aligned} X_1 \biguplus X_2 &= \{(x,1), x\in X_1\}\cup\{(y,2), y\in X_2\} \\ &= \{(1,1),(2,1),(3,1)\}\cup\{(a,2),(b,2)\} \\ &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(a,2),(b,2)\} \end{aligned}$$

تعريف 1. 2.9.. [12] (تطبيقي الإدخال)
لتكن X_1 و X_2 مجموعتين كيفيتين غير خاليتين وليكن $X_1\uplus X_2$ الجمع المنفصل لهما.

نعرف التطبيقين φ_2 و φ_1 كما يلي:

$$\varphi_1 : X_1 \longrightarrow X_1 \biguplus X_2$$

$$x \longmapsto \varphi_1(x) = (x, 1)$$

$$\varphi_2 : X_2 \longrightarrow X_1 \biguplus X_2$$

$$x \longmapsto \varphi_2(x) = (x, 2)$$

نسمي: φ_1 و φ_2 بتطبيقي الإدخال، وهما معرفان جيدا.

تعريف 1. 2.10.. فضاء الجمع المنفصل هو تركيب يسمح لنا بإنشاء فضاء متري جديد من فضائين متريين أو أكثر نعرفه كالاتي :
نفرض أننا نملك الفضائين المتريين (X_1, d_1) و (X_2, d_2) نعرف مسافة الجمع المنفصل على المجموعة $X = X_1 \uplus X_2$ كالتالي :

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, i) \times (y, j) \longmapsto d((x, i), (y, j))$$

بحيث:

$$d((x,i);(y,j)) = \begin{cases} d_1(x,y), & if : i = j = 1 \\ d_2(x,y), & if : i = j = 2 \\ c > 0, & if : \quad not \end{cases} \tag{2.1}$$

خاصية 1. 2.2.. ليكن (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاءان متريان و $(X_1 \uplus X_2, d_{X_1 \uplus X_2})$

الفضاء المتري للجمع المنفصل ، فإن تطبيقي الإدخال φ_1 و φ_2 المعرفين سابقا (انظر 1.2.1) مستمران.

برهان :

1- استمرار φ_1:

لتكن $x \in X_1$ و $\varepsilon > 0$ معطى نريد أن نجد $\delta > 0$. بحيث من أجل كل $y \in X_1$ مع $d_1(x,y) < \delta$؛ لدينا :

$d_{X_1 \uplus X_2}(\varphi_1(x), \varphi_1(y)) < \varepsilon$ نأخذ $\delta = \varepsilon$ عندها من أجل أي $y \in X_1$ مع $d_1(x,y) < \delta$ لدينا :

$d_{X_1 \uplus X_2}(\varphi_1(x), \varphi_1(y)) = d_{X_1 \uplus X_2}((x,1),(y,1)) = d_1(x,y) < \varepsilon$ و منه φ_1 مستمر .

نفس الطريقة مع φ_2. ■

نظرية 1.2.2. [12] :

ليكن (Y, d_Y) فضاءً مترياً، و f تطبيق معرف من $(X_1 \uplus X_2, d_{X_1 \uplus X_2})$ نحو (Y, d_Y)، إذن:

$$f \text{ مستمر} \Leftrightarrow \quad f\circ\varphi_2 \wedge f\circ\varphi_1 \quad \text{مستمرين}$$

الفصل 2

مفاهيم عامة في نظرية الفئات

في هذا الفصل نتناول تعاريف أساسية في نظرية الفئات، حيث سنقوم بتعريف الفئة ونعزز التعريف بالعديد من الأمثلة التوضيحية، كما نعرّف الأشياء الخاصة في الفئات والتشاكلات الفئوية ونقدم بعض الأمثلة عليها.

2.1 الفئات

تعريف 2. 1.1.. [13] (الفئة)

الفئة $\underline{C}$ هي كائن رياضي مكون من مجموعتين ويحقق المسلمات التالية :

* المجموعة الأولى مكوّنة من أشياء ونرمز لها بـ $Ob(\underline{C})$ وعناصرها...a, b, c ونكتب $a \in \underline{C}$.

* المجموعة الثانية مكوّنة من مورفيزمات [1] نرمز لها بـ $Mor(\underline{C})$ عناصرها $f, g, h...$ ونكتب (f من $\underline{C}$).

بحيث :

[1] تسمى أيضا الأسهم.

- لكل مورفيزم f يوجد شيء $a \in \underline{C}$ يسمى المصدر لـ f و نكتب:
$a = Dom(f)$.

- لكل مورفيزم f يوجد شيء $b \in \underline{C}$ يسمى الهدف لـ f ونكتب: $b = Cod(f)$.

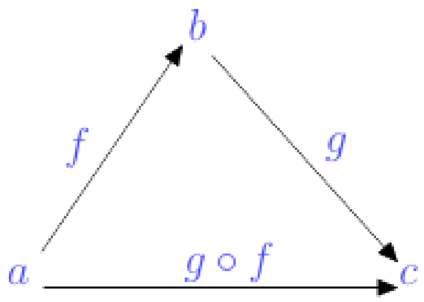
$$a \xrightarrow{f} b$$

* يتحقق إضافة لذلك:

- لكل شيء $a \in \underline{C}$ يوجد مورفيزم وحيد نرمز له بـ: Id_a و يسمى المورفيزم الحيادي[2] حيث:

$$a = Dom(Id_a) = Cod(Id_a) \qquad a \xrightarrow{Id_a} a$$

- لكل مورفيزمين f و g حيث : $a \xrightarrow{f} b$ و $b \xrightarrow{g} c$ يوجد مورفيزم وحيد نرمز له بـ $g \circ f$ مصدره a وهدفه c.



[2] ويسمى كذلك بالتطبيق المطابق.

بالإضافة إلى الشروط السابقة يجب أن يتحقق مايلي:

* عملية التركيب على المورفيزمات تكون تجميعية أي أنه من أجل:

$f : a \longrightarrow b \;\; , \;\; g : b \longrightarrow c \;\; , \;\; h : c \longrightarrow d$ لدينا: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=50, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[rrr, bend right=50, "(h \circ g) \circ f"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & c \arrow[r, "h"] & d
\end{tikzcd}$$

* المورفيزم Id هو مورفيزم حيادي بالنسبة لعملية التركيب أي من أجل:

$a \xrightarrow{f} b, \;\; b \xrightarrow{g} c$ لدينا:

$$Id_b \circ f = f \;\; \text{و} \;\; g \circ Id_b = g$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "Id_b \circ f"'] & b \arrow[d, "Id_b"] \arrow[dr, "g \circ Id_b"] & \\
 & b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

أمثلة 2.1.1. (الفئات المنتهية)

(أ) $\underline{0}$ هي الفئة الخالية (الفارغة) بدون أشياء وبدون مورفيزمات.

(ب) $\underline{1}$ هي الفئة المكونة من شيء واحد والمورفيزم الحيادي له $\bullet \circlearrowleft$.

(ج) 2 الفئة المكونة من شيئين ومورفيزم (دون حساب المورفيزمات الحيادية)
$\circlearrowleft \bullet \longrightarrow \bullet \circlearrowright$.

(د) $\circlearrowleft \bullet \rightrightarrows \bullet \circlearrowright$: وهي الفئة المكونة من شيئين ومورفيزمين متوازيين دون حساب المورفيزمات الحيادية.

(ه) 3 هي فئة مكونة من ثلاثة أشياء وثلاثة مورفيزمات
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[loop above] \arrow[dl] & \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[loop right] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$.
وهكذا فإن الفئات المنتهية تتميز بعدد منتهي من الأشياء والمورفيزمات.

أمثلة 2،1،2. (الفئات غير المنتهية)

(أ) الفئة $\underline{Set}$ هي الفئة التي:

- أشياؤها هي عبارة عن مجموعات كيفية.

- مورفيزماتها هي عبارة عن التطبيقات التي تربط بين المجموعات.
إذ يمكن أن نلاحظ أن :

- لكل تطبيق له مجموعة انطلاق و مجموعة وصول (هدف).

- لكل مجموعة A يمكن تعريف التطبيق الحيادي المعرف بـ:

$$Id_A : A \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto Id_A(x) = x$$

- تركيب التطبيقات معرف دوما وهو تجميعي.

- التطبيق الحيادي حيادي بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

(ب)

اسم الفئة	أشياء الفئة	مورفيزمات الفئة
$\underline{Top}$	الفضاءات الطبولوجية	التطبيقات المستمرة
$\underline{Vect}$	الفضاءات الشعاعية	التطبيقات الخطية
$\underline{Grp}$	الزمر	هوميومورفيزم الزمر
$\underline{\mathbb{R}}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	الدّوال المستمرة العرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$
$\underline{opsubset}(U \subseteq \mathbb{R})$	المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$	التطبيقات المستمرة المعرفة من U نحو V من $\mathbb{R}$
$\underline{Met}$	الفضاءات المترية	التطبيقات المستمرة في الفضاءات المترية

تعريف 2. 1.2.. [11] (الفئة الجزئية)

لتكن $\underline{C}$ فئة كيفية غير خالية نقول عن $\underline{D}$ انها فئة جزئية من الفئة $\underline{C}$ إذا حققت ما يلي :

1. $Ob(\underline{D}) \subseteq Ob(\underline{C})$

.2 $Mor(\underline{D}) \subseteq Mor(\underline{C})$

وأن المورفيزمات المطابقة الموجودة في $\underline{D}$ هي ذاتها المورفيزمات المطابقة في $\underline{C}$، إضافة لذلك فإن تركيب المورفيزمات في $\underline{D}$ هو ذاته تركيب المورفيزمات في $\underline{C}$.

تعريف 2. 1.3.. [11] (الفئة الثنوية)
لتكن $\underline{C}$ فئة كيفية غير خالية نعرف الفئة الثنوية للفئة $\underline{C}$ والتي يرمز لها بـ $\underline{C}^{op}$ وتتألف هذه الفئة من :

/1 $Ob(\underline{C}) = Ob(\underline{C}^{op})$

/2 $\forall f : a \longrightarrow b \in \underline{C},\ \exists f' : b \longrightarrow a \in \underline{C}^{op}$

إضافة لذلك فإن جميع شروط الفئة(المذكورة في التعريف 2. 1.1.) محققة.

2.1.1 الأشياء الخاصة في الفئات

تعريف 2. 1.4.. [6] (الشيء الإبتدائي) نقول عن الشيء c من الفئة $\underline{C}$ أنه إبتدائي "$Initial$" إذا كان يشكل المصدر لمورفيزم واحد فقط من الشكل $c \longrightarrow a$ وذلك من أجل كل $a \in \underline{C}$.

مثال 2.1.1. في الفئة $\underline{Set}$ المجموعة الخالية $\emptyset$ تمثل الشيء الإبتدائي فيها لأنه من أجل كل مجموعة X من $\underline{Set}$ يوجد تطبيق وحيد: وهو التطبيق الخالي.

ملاحظة 2. 1.1.. إذا كان a شيئاً ابتدائياً في الفئة $\underline{C}$ فإنه يكون شيئاً إنتهائياً في الفئة $\underline{C}^{op}$.

تعريف 2. 1.5.. [6] (الشيء الانتهائي)
نقول عن الشيء t من الفئة $\underline{C}$ أنه نهائي "$Terminal$" إذا كان يشكل الهدف لمورفيزم واحد فقط من الشكل $a \to t$ وذلك من أجل كل $a \in \underline{C}$.

مثال 2.1.2. في الفئة $\underline{Set}$ المجموعة وحيدة العنصر $\star$ تمثل الشيء الإنتهائي فيها حيث من أجل كل مجموعة X من $\underline{Set}$ هناك تطبيق وحيد $f : X \to \star$ يصور كل عناصر المجموعة X بالعنصر الوحيد $\star$.

ملاحظة 2. 1.2.. إذا كان b شيئاً إنتهائياً في الفئة $\underline{C}$ فإنه يكون شيئاً ابتدائياً في الفئة $\underline{C}^{op}$.

ملاحظة 2. 1.3..

1- العلاقة $\emptyset \to X$ لا تمثل تطبيقاً وعليه فإن $\emptyset$ لا تمثل شيئاً انتهائياً.

2- التطبيق $X \to \star$ ليس وحيداً وعليه فإن $\star$ لا يمثل شيئاً ابتدائياً.

2.1.2 الفئة الصغيرة

تعريف 2. 1.6.. [11] (الفئة الصغيرة)
نقول عن الفئة أنها صغيرة إذا كانت أشياؤها عبارة عن مجموعات منتهية وكان عدد مورفيزماتها كذلك.

2.2 التشاكل الفئوي

تعريف 2. 2.1.. [13] (التشاكل لفئوى)

لتكن $\underline{C}$ ، $\underline{B}$ فئتين غير خاليتين، نعرّف التشاكل الفئوي على أنه علاقة تربط بين الفئة $\underline{C}$ والفئة $\underline{B}$، و نكتب: $T: \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ حيث:

- من أجل كل شيء $a \in \underline{C}$ فإن $T(a) \in B$.
- من أجل كل مورفيزم $f: a \to b$ من $\underline{C}$ يوجد مورفيزم من $\underline{B}$:

$$Tf: T(a) \to T(b)$$

بحيث :

(أ) $T(Id_a) = Id_{T(a)}$ أي أن صورة المورفيزم الحيادي للشيء a بواسطة التشاكل T هو المورفيزم الحيادي لصورته.

(ب) $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$ أي أن صورة التركيب بواسطة التشاكل T هي تركيب الصور و ذلك من أجل كل مورفيزمين f ، g قابلين للتركيب.

أمثلة 2.2.1.

(1) التشاكل الحيادي: لتكن فئة كيفية $\underline{C}$ نعرف التشاكل الحيادي على هذه الفئة كما يلي:

$$ID : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & ID(X) = X \arrow[d, "ID(f) = f"] \\
Y \arrow[r] & ID(Y) = Y
\end{tikzcd}$$

يمكن وببساطة ملاحظة أن ID يمثل تشاكل فئوي على الفئة $\underline{C}$.

(2) لتكن الفئة $\underline{Set}$ نعرف التشاكل $\mathcal{P}$ على الفئة السابقة كما يلي:

$$\mathcal{P} : \underline{Set} \longrightarrow \underline{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\
Y \arrow[r] & \mathcal{P}(Y)
\end{tikzcd}$$

حيث:

$$\mathcal{P}(f)(a) = f(a),\ a \in \mathcal{P}(A)$$

ويمكن الملاحظة بأن $\mathcal{P}$ يحقق الشرطين:

ش 1)

$$(1) \qquad \begin{aligned} Id_{\mathcal{P}(A)} : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ a &\longmapsto Id_{\mathcal{P}(A)}(a) = a. \end{aligned}$$

(2) مجهة أخري لدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Id_A) : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ a &\longmapsto \mathcal{P}(Id_A)(a) = Id_A(a) = a \end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد أن $\mathcal{P}(Id_A) = Id_{\mathcal{P}(A)}$،

ش 2) من أجل كل من $A, B, C \in \underline{Set}$ ومن أجل f و g من $\underline{Set}$ حيث: $f : A \to B$ و $g : B \to C$ لدينا:

$$(3) \qquad \forall a \subset A : \mathcal{P}(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$(4) \qquad \forall a \subset A : \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)(a) = g(f(a))$$

من (3) و (4) نجد أن $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$ وهو الشرط الثاني لتعريف التشاكل الفئوي.

الفصل 3

التحويلات الطبيعية و المورفيزمات الشاملة

إن من بين المفاهيم الأساسية التي صاغها كل من أيلامبارج $(S. Eilenberg)$ و ماكلين $(S. Maclane)$ في نظرية الفئات هي التحويلات الطبيعية التي تربط بين التشاكلات الفئوية والمهمة في الطبولوجيا الجبرية.

سنتعرف في هذا الفصل على هذا المفهوم ونعرّج كذلك على تعريف المورفيزمات الشاملة انطلاقا من التشاكل الفئوي القطري.

3.1 التحويلات الطبيعية

تعريف 3. 1.1. [13] (التحويل الطبيعي)

لتكن $\underline{C}$ و $\underline{D}$ فئتين غير خاليتين وليكن F و G تشاكلين فئويين معرفين من $\underline{C}$ نحو $\underline{D}$. نعرف التحويل الطبيعي T من F نحو G (نقول عن T أيضا أنه المورفيزم الذي يربط بين التشاكلين F و G) كما يلي:

- من أجل كل شيء $A \in \underline{C}$ يوجد مورفيزم وحيد من الفئة D حيث:

$$T_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

- من أجل كل مورفيزم $f : A \longrightarrow B$ من $\underline{C}$ لدينا:

$$G(f) \circ T_A = T_B \circ F(f)$$

معناه المخطط [1] التالي تبادلي:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "T_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "T_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

مثال 3.1.1. ليكن التشاكل الفئوي التالي $** : \underline{Vect_K} \longrightarrow \underline{Vect_K}$ الذي ينقل كل فضاء شعاعي E إلى الثنوي المضاعف E^{**} الخاص به وكل تطبيق خطي f إلى أثر الأثر الخاص به f^{**} (نذكّر أنّ f^* معرف بـ $(f^*(l) = l \circ f$ ، يوجد تحويل طبيعي (يرمز له بـ i في الأسفل) معرف من التشاكل الحيادي $1 : \underline{Vect_K} \longrightarrow \underline{Vect_K}$ نحو التشاكل الفئوي $**$. والمعرف بالعلاقة:

$$\begin{array}{rcl} E & \xrightarrow{\quad i_E \quad} & E^{**} \\ x & \longmapsto & (\, l \to l(x)\,) \end{array}$$

[1] المخطط التبادلي هو مخطط يشمل مجموعة الأشياء (نقاط) والمورفيزمات (مسارات) وتكون فيه جميع المسارات المتجهة في المخطط من نفس نقاط البداية والنهاية تؤدّي إلى نفس النتيجة من حيث البنية. المخطط قد لا يكون تبادليًا، أي أن تركيب المسارات المختلفة في المخطط لا يعطي نفس النتيجة.

حيث أنه من أجل كل تطبيق خطي $f : E \longrightarrow F$ المربع التالي تبادلي:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_E"] \arrow[d, "f"'] & E^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ F \arrow[r, "i_F"'] & F^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (l \to l(x)) \arrow[d, mapsto] \\ f(x) \arrow[r, mapsto] & (l \to l(f(x))) \end{tikzcd}$$

شرح المثال

$$V \in \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \rightsquigarrow V^* = \{h : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad h \text{ خطي}\}$$

نظرية 3.1.1. [4]

إذا كان f تطبيق خطي من V نحو W.

$$f : V \longrightarrow W$$

فإنه يوجد تطبيق ثنوي لـ f نرمز له بـ f^* معرف كما يلي:

$$f^* : W^* \longrightarrow V^* \quad \text{خطي}$$

حيث:

$$f^*(h) = h \circ f$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} \mathbb{K}$$

أولاً: نعرف التشاكل الفئوي $* \equiv F$

$$F \equiv * : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{Vect}_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & V^* \arrow[d, "f^* = - \circ f"] \\
W \arrow[r] & W^*
\end{tikzcd}$$

-التحقق من شرطي التشاكل:

ش1/ $\boldsymbol{F(1_V) \overset{?}{=} 1_{F(V)}}$

$$\boldsymbol{F(1_V) : V^* \longrightarrow V^*}$$

$$\boldsymbol{h \longmapsto F(1_V)(h) = h \circ 1_V = h}$$

ومنه

$$\boldsymbol{F(1_V)(h) = h}$$

إذن: $\boldsymbol{F(1_V) = 1_{F(V)}}$

ش2/ $\boldsymbol{F(f \circ g) \overset{?}{=} F(f) \circ F(g)}$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{V} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \boldsymbol{V^*} \arrow[d, "g^*(m)=m\circ g"] \\
\boldsymbol{W} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \boldsymbol{W^*} \arrow[d, "f^*(l)=l\circ f"] \\
\boldsymbol{F} \arrow[r] & \boldsymbol{F^*}
\end{tikzcd}$$

$$F^* \xrightarrow{f^*} W^* \xrightarrow{g^*} V^*$$

(أ)

$$g^* \circ f^* : F^* \longrightarrow V^*$$

$$l \longmapsto (g^* \circ f^*)(l) = g^* \circ (f^*(l)) \overset{3.1.1}{=} g^*(l \circ f) \overset{3.1.1}{=} l \circ f \circ g$$

من جهة أخرى

(ب)

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \downarrow{\scriptstyle f\circ g} & & \downarrow{\scriptstyle (f\circ g)^*(l) \overset{3.1.1}{=} l\circ(f\circ g) = l\circ f\circ g} \\ F & \longrightarrow & F^* \end{array}$$

من (أ) و (ب) نجد:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), ((f \circ g)^* = f^* \circ g^*)$$

ومنه $* \equiv F$ يمثل تشاكل فئوي.

برهنا على أن $* \equiv F$بأنه تشاكل فئوي لكي يساعدنا في البرهان على أن $**$ هو كذلك تشاكل فئوي.

ثانياً:

نظرية 3،1،2. [10]

إذا كان V فضاء شعاعي فإنه يوجد تطبيق خطي قانوني (طبيعي) η_V

معرف بالشكل التالي:

$$\eta : V \longrightarrow V^{**}$$

$$v \longmapsto \eta_V(v)(h) = h(v) \in \mathbb{K}$$

- برهان أن $** : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{Vect}_{\mathbb{K}}$ المعرف كما يلي :

$$\begin{tikzcd}
** : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \arrow[rr] & & \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \\
V \arrow[rr] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, dashed] & & V^{**} \arrow[d, "f^{**} = - \circ f^{*}"] \\
W \arrow[rr] & & W^{**}
\end{tikzcd}$$

هو تشاكل فئوي، حيث:

$$f^{**} = h \circ f^{*}$$

$$W^{*} \xrightarrow{f^{*}} V^{*} \xrightarrow{h^{*}} \mathbb{K}$$

التحقق الشروط:

ش1/

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, "1_V"] & V^{**} \arrow[d, "(1_V)^{**}(h) \overset{3.1.1}{=} h \circ (1_V)^{*} = h"] \\
V \arrow[r] & V^{**}
\end{tikzcd}$$

ش2/

$$(g\circ f)^{**} \overset{?}{=} g^{**}\circ f^{**}$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} F$$

(أ)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "g\circ f"] & V^{**} \arrow[d, "(f\circ g)^{**}(h)\overset{3.1.1}{=}h\circ(f\circ g)^{*}=h\circ f^{*}\circ g^{*}"] \\ F \arrow[r] & F^{**} \end{tikzcd}$$

(ب)

$$\begin{aligned} (g^{**}\circ f^{**})(h) &= g^{**}(f^{**}(h)) \\ &\overset{3.1.1}{=} g^{**}(h\circ f^{*}) \\ &\overset{3.1.1}{=} (h\circ f^{*})\circ g^{*} \\ &= h\circ f^{*}\circ g^{*} \end{aligned}$$

من (أ) و (ب) نجد

$$(g\circ f)^{**} = g^{**}\circ f^{**}$$

ثالثاً: إثبات أن η تحويل طبيعي من $1_{\underline{Vect}_{\mathbb{K}}}$ إلى $**$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"] & V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W & W \arrow[r, "\eta_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

هل

$$f^{**}\circ\eta_V = \eta_W\circ f$$

$$f^{**} \circ \eta_V : V \longrightarrow W^{**}$$
$$v \longmapsto (f^{**} \circ \eta_V)(v)$$

من أجل $v \in V$ و K و $h : w \longrightarrow K$ لدينا:

$$\begin{aligned}
(f^{**} \circ \eta_V)(v)(h) &= (f^{**}(\eta_V(v))(h) \\
&\overset{3.1.1}{=} (\eta_V(v) \circ f^*)(h) \\
&\overset{3.1.1}{=} (\eta_V(v))(h \circ f) \\
&\overset{3.1.2}{=} (h \circ f)(v) = h(f(v)) \\
&\overset{3.1.2}{=} \eta_W(f(v))(h) \\
&= (\eta_W \circ f)(v)(h)
\end{aligned}$$

$$f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$$

وعليه η تحويل طبيعي من $1_{\underline{Vect}_{\mathbb{K}}}$ نحو $**$.

شرح المخطط التوضيحي.

1. من الواضح أن x من E

2. بتطبيق الصورة عموديا نجد $f(x) \in F$.

3. بتطبيق الصورة أفقيا

$$i_E(x) \in E^{**} \rightsquigarrow i_E(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$i_E(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$l \longmapsto i_E(x)l \overset{3.1.2}{=} l(x)$$

4. بتطبيق صورة $f(x)$ أفقيا

$$i_E(f(x)) : F^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$l \longmapsto i_E(f(x))(l) = l(f(x))$$

تعريف 3. 1.2.. [13] (فئة التشا كلات)
لتكن $\underline{C}$ و $\underline{D}$ فئتين غير خاليتين. نعرّف فئة التشا كلات من $\underline{C}$ إلى $\underline{D}$ والتي رمز لها بـ:
$\underline{D}^{\underline{C}} = funct(\underline{C}, \underline{D})$ كما يلي:

- أشياء الفئة $\underline{D}^{\underline{C}}$ هي التشا كلات الفئوية بين الفئتين $\underline{C}$ و $\underline{D}$.
- المورفيزمات هي التحويلات الطبيعية.

3.2 التشا كل الفئوي القطري

تعريف 3. 2.1.. لتكن $\underline{C}$ فئة كيفية و $\underline{J}$ فئة صغيرة، نعرّف التشا كل الفئوي القطري Δ بالشكل الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
\Delta : \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C}^{\underline{J}} \\
c & \longmapsto & \Delta(c) \\
f \big\downarrow & & \big\downarrow \Delta(f) \\
c' & \longmapsto & \Delta(c')
\end{array}$$

$\Delta(c) : \underline{J} \longrightarrow \underline{C}$ هو التشا كل الفئوي الثابت

$$(\forall i \in \underline{J}, \Delta(c)(i) = c \text{ و } \forall l \in \underline{J}\ \Delta(c)(l) = 1_c \ , \ \Delta(f) : \Delta(c) \longrightarrow \Delta(c'))$$

هو التحويل الطبيعي المعرّف بـ f من أجل كل $i \in \underline{J}$، نوضح ذلك بالمخطط التالي:

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "l"'] & \Delta(c)(i)=c \arrow[r, "\Delta(f)(i)=f"] \arrow[d, "\Delta(c)(l)=1_c"'] & \Delta(c')(i)=c' \arrow[d, "\Delta(c')(l)=1_{c'}"] \\
j & \Delta(c)(j)=c \arrow[r, "\Delta(f)(j)=f"'] & \Delta(c')(j)=c
\end{tikzcd}$$

3.3 المورفيزمات الشاملة

تعريف 3. 3.1. [13] (المورفيزم الشامل)

ليكن $S : \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ تشاكل فئوي و $c \in \underline{C}$، نعرّف المورفيزم الشامل من c نحو التشاكل الفئوي S على أنه الزوج $\langle r, u \rangle$ حيث:

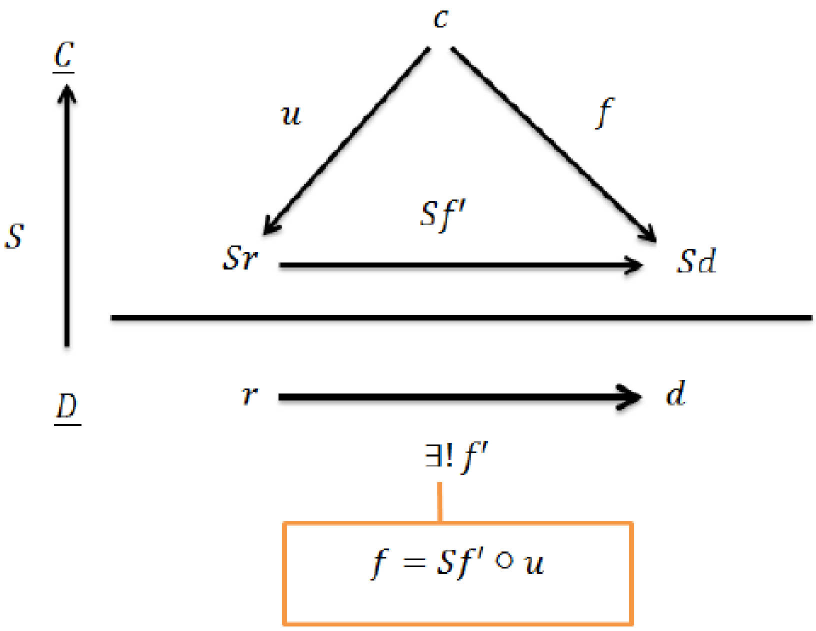
$$r \in \underline{D} \quad , \quad u : c \longrightarrow Sr \quad \text{من} \quad \underline{C}$$

ويحقق من أجل كل زوج آخر $\langle d, f \rangle$ حيث: $(d \in \underline{D}\ , f : c \longrightarrow Sd$ من $\underline{C})$

يوجد مورفيزم وحيد $f' : r \longrightarrow d$ حيث:

$$Sf' \circ u = f$$

نوضح ذلك بالمخطط التالي:



تعريف 3، 3،2.. في التعريف السابق r هو عنصر المورفيزم الشامل.

3،3،1 المورفيزمات الشاملة الأساسية

-الـ $Co-product$ لشيئين A و B من فئة $\underline{C}$ هو مورفيزم شامل للشيء $\langle A,B\rangle$ في $\underline{C}\times\underline{C}$ نحوالتشاكل القطري Δ المعرف كما يلي:

$$\begin{array}{ccc}
\Delta:\ \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C}\times\underline{C} \\
c & \longmapsto & \langle c,c\rangle \\
f \big\downarrow & & \big\downarrow \Delta(f)=\langle f,f\rangle \\
c' & \longmapsto & \langle c',c'\rangle
\end{array}$$

-الـ $Co-equalizer$ للزوج $\langle f,g\rangle$ حيث f و g مورفيزمين من $\underline{C}^{\bullet\rightrightarrows\bullet}$ هو المورفيزم الشامل للشيء $\langle f,g\rangle$ نحو التشاكل القطري $\Delta:\underline{C}\longrightarrow\underline{C}^{\bullet\rightrightarrows\bullet}$.

-الـ $Push-out$ للزوج $\langle f,g\rangle$ حيث f و g مورفيزمين من $\underline{C}^{\bullet\leftarrow\bullet\rightarrow\bullet}$ هو المورفيزم الشامل للشيئ $\langle f,g\rangle$ نحو التشاكل القطري $\Delta:\underline{C}\longrightarrow\underline{C}^{\bullet\leftarrow\bullet\rightarrow\bullet}$.

تعريف 3. 3.3.. [13] (المورفيزم الشامل الثنوي)

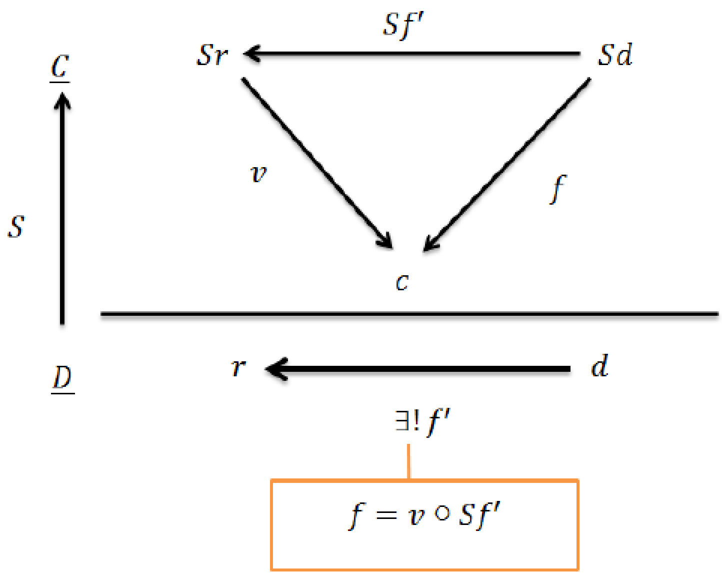
ليكن $S:\underline{D}\longrightarrow\underline{C}$ تشاكل فئوي و $c\in\underline{C}$. نعرّف المورفيزم الشامل من S نحو c (المورفيزم الشامل الثنوي) على أنه الزوج $\langle r,v\rangle$ حيث:

$$r\in\underline{D},v:Sr\longrightarrow c \quad \text{من} \quad \underline{C}$$

الذي يحقق من أجل كل زوج $\langle d,f\rangle$ حيث: $(d\in\underline{D},f:Sd\longrightarrow c\in\underline{C})$ يوجد مورفيزم وحيد $f':d\longrightarrow r$ حيث:

$$v\circ Sf'=f$$

نوضح ذلك بالمخطط التالي:



تعريف 3. 3.4.. في التعريف السابق نعرف r على أنه ثنوي عنصر المورفيزم الشامل.

مثال 3.3.1. الـ $Product$ للشيئين A و B لفئة $\underline{C}$ هو ثنوي الـ $Co-product$.[2]

3.3.2 أمثلة على المورفيزمات الشاملة في فئة المجموعات

في الفئة $\underline{Set}$ لدينا:

1- عنصر $Co-product$ للمجموعتين A و B هو الجمع المنفصل بينهما.

2- عنصر $Product$ للمجموعتين A و B هو الجداء الديكارتي لهما.

3- عنصر $Co-equalizer$ للتطبيقين: $f,g : A \longrightarrow B$ هو فضاء القسمة $B/\mathcal{R}$ حيث $\mathcal{R}$ هي علاقة تكافؤ.

4- عنصر $Equalizer$ للتطبيقين: $f,g : A \longrightarrow B$ هي المجموعة D حيث:

$$D = \{x \in A, f(x) = g(x)\}.$$

[2] الـ $Equalizer$ و $Bull-back$ هما ثنوي لكل من $Co-equalizer$ و $Push-out$ على الترتيب.

الفصل 4

المورفيزمات الشاملة لفئة الفضاءات المترية

في هذا الفصل، ندرس أهم المورفيزمات الشاملة لفئة الفضاءات المترية $\underline{Met}$، ستسمح لنا دراسة هذه المورفيزمات بمقارنتها بالمورفيزمات الشاملة لفئة المجموعات $\underline{Set}$.

و تعزيزا لعملنا قمنا بإيجاد الشيء الابتدائي والانتهائي لفئة الفضاءات المترية، وأخيرا وضعنا حوصلة على العمل المنجز.

4.1 المورفيزمات الشاملة لفئة الفضاءات المترية

4.1.1 *Co-product*

نظرية 4.1.1. [5]

ليكن $(X_2, d_2) \in \underline{Met}$ و(X_1, d_1) . عنصر الـ $Co-product$ لـ (X_1, d_1) و (X_2, d_2) هو الفضاء المتري $(X_1, d_1) \uplus (X_2, d_2)$ (انظر التعريف 1. 2.9).

برهان :

ليكن $(C, d_C) \longrightarrow (X_1, d_1) : f$ و $(C, d_C) \longrightarrow (X_2, d_2) : g$ تطبيقين

مستمرين، إذن يوجد تطبيق مستمر وحيد h معرف كما يلي:

$$h : (X_1 \uplus X2, d_{X_1 \uplus X_2}) \longrightarrow (C, d_C)$$
$$(x,k) \longmapsto h(x,k) = \begin{cases} f(x) & si \quad k=1 \\ g(x) & si \quad k=2 \end{cases}$$

1/ $f = h \circ \varphi_1$ و $g = h \circ \varphi_2$. لأن:

- $(h \circ \varphi_1)(x) = h(\varphi_1(x)) = h(x,1) = f(x)$
- $(h \circ \varphi_2)(x) = h(\varphi_2(x)) = h(x,2) = g(x)$

2/ من النظرية (1.2.2) نجد أن h مستمر.

برهان وحدانية h:

ليكن $h' : (X_1 \uplus X2, d_{X_1 \uplus X_2}) \longrightarrow (C, d_C)$ تطبيق آخر مستمر، حيث أن

$f = h' \circ \varphi_1$ و $g = h' \circ \varphi_2$. لدينا:

$$(h' \circ \varphi_1)(x) = h'(\varphi_1(x)) = h'(x,1) = f(x), \forall x \in X_1.$$

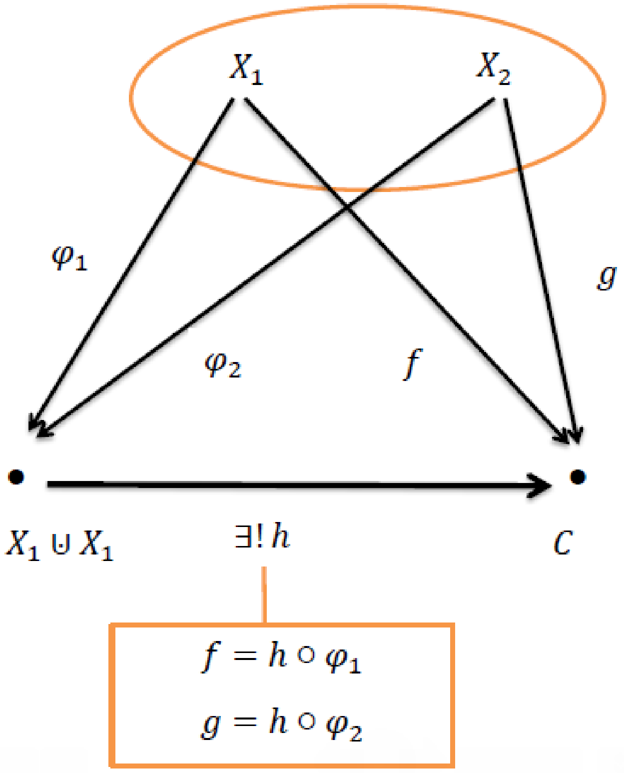
و

$$(h' \circ \varphi_2)(x) = h'(\varphi_2(x)) = h'(x,2) = g(x), \forall x \in X2.$$

إذن h وحيد.

■

يمكن أن نلخص البرهان بالمخطط التالي:



Product 4.1.2

نظرية 4.1.2. [5]

ليكن $(A, d_A), (B, d_B) \in \underline{Met}$. عنصر الـ *Product* لـ (A, d_A) و (B, d_B) هو الفضاء المتري $(A \times B, d_{A\times B})$.

(انظر التعريف 1. 2.7.)

برهان :

إذا كان $(A, d_A) \longrightarrow (C, d_C) : f_1$ و $(B, d_B) \longrightarrow (C, d_C) : f_2$ تطبيقين

مستمرين. نعرف التطبيق f كما يلي:

$$f:(C,d_C)\longrightarrow(A\times B,d_{A\times B})$$

$$x\longmapsto h(x)=(f_1(x),f_2(x))$$

1. $f_1=P_1\circ f$ و $f_2=P_2\circ f$ لأن:

- $(P_1\circ f)(x)=P_1(f(x))=P_1(f_1(x),f_2(x))=f_1(x)$.
- $(P_2\circ f)(x)=P_2(f(x))=P_2(f_1(x),f_2(x))=f_2(x)$.

2. من النظرية (1.2.1) f مستمر.

برهان وحدانية f:

ليكن $f':(C,\delta)\longrightarrow(A\times B,d_{A\times B})$ تطبيق آخر مستمر،

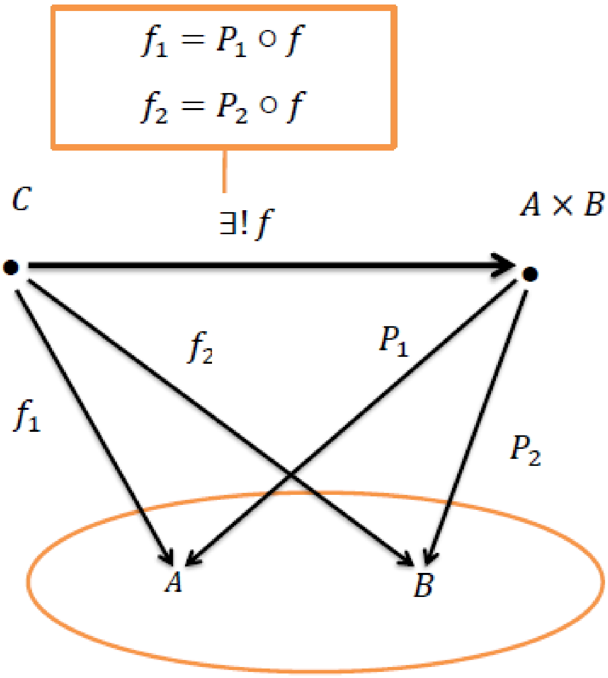
حيث $f_2=P_2\circ f'$, $f_1=P_1\circ f'$. نفرض أن: $f'(x)=(a,b)$.

$$a=P_1(a,b)=(P_1\circ f')(x)=f_1(x)\ ,\ b=P_2(a,b)=(P_2\circ f')(x)=f_2(x).$$

إذن $f'(x)=(f_1(x),f_2(x))=h(x)$ إذن f وحيد.

■

نوضح ذلك بالمخطط التالي:



4.1.3 *Equalizer*

نظرية 4.1.3. [5]

ليكن $f, g : (B, d_B) \longrightarrow (A, d_A)$ مورفيزمين من الفئة <u>*Met*</u>، عنصر الـ *Equalizer* للزوج $\langle f, g \rangle$ هو الفضاء المتري (D, d_D)، حيث:

$$D = \{x \in B, f(x) = g(x)\} \subseteq B$$

و $d_D(x, y) = d_B(x, y)$ حيث d_D هي مسافة الأثر (انظر التعريف 1.2.6.).

برهان - أولاً: واضح أن التطبيق: $e : (D, d_D) \longrightarrow (B, d_B)$ مستمر.

- ثانيا: ليكن $h : (C, d_C) \longrightarrow (B, d_B)$ تطبيق مستمر، حيث: $f \circ h = g \circ h$،
إذن يوجد تطبيق مستمر h' معرف كما يلي:

$$h' : (C, d_C) \longrightarrow (D, d_D)$$
$$x \longmapsto h'(x) = h(x)$$

- h' مستمر لأن h مستمر.
- ليكن $C \ni x$ لدينا:

$$(e \circ h')(x) = e(h'(x)) = e(h(x)) = h(x)$$

إذن $e \circ h' = h$.

برهان وحدانية h'

ليكن $h'' : (C, d_C) \longrightarrow (D, d_D)$ تطبيق آخر مستمر حيث: $e \circ h'' = h$،

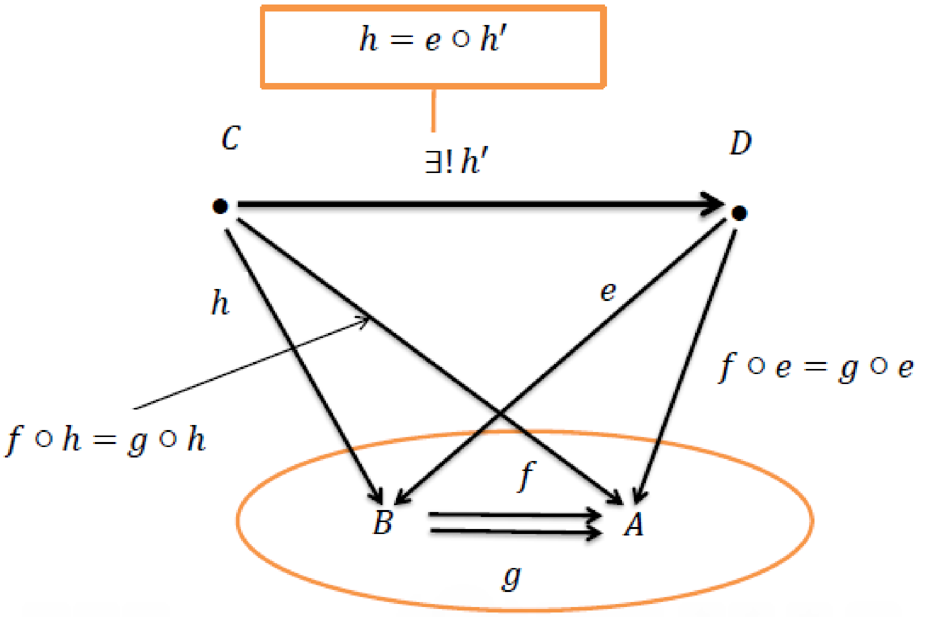
إذن $\forall x \in C,\ (e\, h'')(x) = (e \circ h')(x) \Longrightarrow e(h''(x)) = e(h'(x)) \Longrightarrow$

$h''(x) = h'(x)$

إذن h' وحيد.

■

نوضح ذلك بالمخطط التالي:



4.2 الشيء الابتدائي والانتهائي في فئة الفضاءات المترية

4.2.1 الشيء الابتدائي في فئة الفضاءات المترية

الفضاء المتري $(\emptyset, d_\emptyset)$ حيث $d_\emptyset = 0$ هو شيء ابتدائي لفئة الفضاءات المترية $(\underline{Met})$.

<u>توضيح:</u>

- واضح أن $d_\emptyset$ هي مسافة على $\emptyset$.
- التطبيق $f : (\emptyset, d_\emptyset) \to (X, d_X)$ هو تطبيق مستمر و وحيد وذلك من اجل كل فضاء متري (X, d_X).

4.2.2 الشيء الانتهائي في فئة الفضاءات المترية

الفضاء المتري $(\star, d_\star)$ حيث $d_\star$ هي المسافة المتقطعة على المجموعة أحادية العنصر $\star$.

هو شيء انتهائي لفئة الفضاءات المترية $(\underline{Met})$.

توضيح:

- من الواضح أن $d_\star$ هي مسافة على $\star$ و هي المسافة المتقطعة.
- من أجل كل فضاء متري (X, d_X) ، التطبيق $f : (X, d_X) \to (\star, d_\star)$ مستمر و وحيد.

الحوصلة

قمنا في هذه المذكرة باستخراج بعض الخواص الجبرية لفئة الفضاءات المترية *Met* و ذلك بتعيين بعض المورفيزمات الشاملة لها و هي :

CO-product, Product, Equalizer،

و تعزيزا لعملنا قمنا بإيجاد كل من الشيء الابتدائي و الشيء الانتهائي لهذه الفئة، كما لاحظنا انطلاقا من هذه الدراسة أن جميع النظريات و الخواص المستعملة في استخراج المورفيزمات الشاملة للفئة *Met* هي اسقاط لتلك المستعملة في الفئة *Set* .

انطلاقا من هذه الدراسة نعرف التشاكل الفئوي المهمل (ι) الذي يقوم بإهمال البنية (إذ يصور الفضاء المتري إلى مجموعة و التطبيق المستمر إلى تطبيق عادي بين مجموعتين)، كما يلي:

$$
\begin{array}{cccc}
\iota : & \underline{MET} & \longrightarrow & \underline{SET} \\
 & (X, d_X) & \longmapsto & X \\
 & f \big\downarrow & & \big\downarrow \iota(f) = f \\
 & (Y, d_Y) & \longmapsto & Y
\end{array}
$$

قائمة المراجع

[1] **م. حازي** ، "الوجيزة الوافية في دروس الطبولوجيا"، جامعة التكوين المتواصل، 2006.

[2] **غ. حسين موسى**، "مقدمة في التبولوجيا"، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، 2008.

[3] **ع. قوبا** ، " الجبر الجزء الأوّل، مبادئ الجبر المجرد "، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،الجمهورية العربية السورية،الإصدار الأُول،الطبعة الثانية، 2017.

[4] **ع. قوبا** ، " الجبر الجزء الثاني، الجبر الخطي "، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،الجمهورية العربية السورية، 2017.

*[5] **J. Adaḿek , H. Herrlich , G.E. Strecker**, "Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats", Dedicated to Bernhard Banaschewski, 18th January 2005.*

*[6] **S. AWODEY** , " Category Theory" , Second Edition, Carnegie Mellon University, 2010.*

[7] **S. Eilenberg , S. Maclane**. *"General Theory of Natural Equivalences ", Transactions of the american Mathematical Society, 1945.*

[8] **A. Grothendieck**, *"Categories fibrees et descente. Revetements etales et group fondamental" , In Seminaire de Gemetrie Algebrique du Bois-Marie (SGA 1), 1960-1961.*

[9] **D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov**.*A course in Metric Geometry, American Mathematical Society, 2001.*

[10] **H. Brezis,***Analyse Fonctionnlle Théorie et Application,Mosson, Paris,1983.*

[11] **B. Le Stum**, *"Le langage des catégories", Université de Rennes 1, Version du 3 septembre 2004.*

[12] **F. Ronga** , *" Topologie et géométrie ", Genève, MMVI ap.J.-C, 2006.*

[13] **P. Saunders Mac Lane**, *"Categories for the Working Mathematician ", Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg SPIN , 1066-1688 , 1969-1970.*

[14] **A. Wilson sutherland**,*"Introduction to Metric and Topological Spaces, Oxford University Press, 2009.*