وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كليـــــــة العلـــــوم
قسم الرياضيات

N⁰ : U.S/F.S/D.M/……/2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Stabilité exponentielle d'un système Lord Shulman thermoélastique avec amortissement poreuse et un terme de retard

Option : AFA

Par :Kaouane Khadidja

Encadré par : Bouzettouta Lamine **MCA** **U. SKIKDA**

Devant le jury :

Président : Lallouche Abdallah MCB U. SKIKDA
Examinateur: Ghennam Karima MCB U. SKIKDA

Année : 2023/2024

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENT

Louange à ALLAH de nous avoir guidé dans le bon chemin en l'implorant dans nous prières afin de nous donner non seulement le courage ; la force et la patience de réaliser ce travail. Je tenais à présenter mes remerciements les plus sincères a mon encadreur Dr. Bouzettouta Lamine pour ton dévouement, votre grande gentillesse et pour la confiance que vous m'avait témoigné pendant la réalisation de ce travail. Soyez assurées de nous profonde gratitude. Mes sincères considérations et remerciements sont égarements exprimés aux membres du jury.

MCB. Lallouche Abdallah , qui nos fait l'honneur par sa présence en qualité de président du jury. MCB. Karima Ghennam , pour avoir accepté d'examiner ce travail

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

A ceux qui sont la source de mon inspiration et de mon courage , à qui je dois de l'amour et la reconnaissance à ma très chère mère et mon père , que dieu les gardes Aux sources de l'espoire dans ma vie mon frère mohammed et mes soeurs manel, nour elhouda , widad et aya toute la famille Mes amies

Kaouane khadidja

Résumé

Ce mémoire s'intéresse à un système thermoélastique unidimensionnel de type Lord-Shulman avec amortissement poreux et retard discret. Sous une hypothèse adéquate concernant la pandération du retard, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution à l'aide de la méthode des semi-groupes. De plus , nous établissons la stabilité exponentielle du système en employant la méthode multiplicative, qui repose sur un choix judicieux des fonctionnelles de Lyapunov dans le cas d'égalité des vitesses de propagation des ondes.

Mots-clés : Système de Lord-Shulman, stabilité exponentielle, thermoélasticité, Semi-group, Fonctionnelle de Lyapunov

Abstract

this dissertation investigates a one-dimensional thermoelastic system described by the Lord-Shulman model. The system incorporates porous damping and a discrete time delay. Under suitable assumptions on the delay term, We employ the semigroup method to establish the existence and uniquenss of solutions. Furthermore, for the special case where the wave propagation velocities are equal, We analyze the system's exponential stability using the multiplier method. This method hinges on the construction of appropriate Lyapunov functionals .

.

Key Words : Lord-Shulman system, Exponential stability, thermoelasticity, semigroup, Lypunov functional

1 Introduction

La modélisation de la conduction de la chaleur est principalement connue par la loi de Fourier, cependant cette loi présente une limite pertinente. Il existe de nombreux chercheurs dans la littérature qui se penchent sur la formulation de relations alternatives pour surmonter ce paradoxe. Nous rappelons que Lord et Shulman [41] ont étudié l'équation de conduction de la chaleur de Cattaneo-Maxwell [42] et l'ont combinée avec le système décrivant les vibrations élastiques d'un matériau. La thermoélasticité de Lord-Shulman a récemment suscité beaucoup d'attention de la part des scientifiques, et de nombreuses publications ont contribué à clarifier cette théorie. L'analyse d'un ensemble de quatre équations hyperboliques avec dissipation thermique est décrite. Dans cette situation, l'équation de la chaleur est également hyperbolique contrairement à l'équation parabolique obtenue avec la loi de Fourier. D'autre part, au cours des siècles précédents et actuels, un intérêt croissant a été porté à l'étude des matériaux avec microstructure [37, 52]. Une classe de matériaux est particulièrement prise en considération lorsque des microtempératures [45] affectent la microstructure [44]. De nombreuses personnes s'intéressent à l'étude des matériaux élastiques avec microtempératures en raison de leur utilisation extensive de ces types de structures. Pour plus de détails, voir [43, 48, 54]. Il existe également des applications physiques intéressantes de la thermoélasticité avec des vides, telles que l'étude des solides avec de petites structures poreuses distribuées. Dans le cas de la loi de Cattaneo-Maxwell, les équations d'évolution pour la thermo-poroélasticité avec microtempératures sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} &= tx, & J\varphi_{tt} = h_x + g, \\ \rho_1 T_0 \eta_1 &= q_x, & \rho_1 e_t = P_x + q - Q, \end{aligned} \tag{1}$$

Où ρ_1 est la masse volumique, J est le produit de la masse volumique par l'inertie équilibrée, T_0 représente une température de référence à l'équilibre, t est le tenseur de contrainte, η_1 est l'entropie, q est le vecteur de flux de chaleur, h est la contrainte équilibrée, g est la force volumique équilibrée, P est le premier moment du flux de chaleur, Q est le flux de chaleur moyen et e est le premier moment d'énergie. Les variables u et φ représentent respectivement le déplacement du matériau élastique solide et la fraction volumique. Les équations constitutives sont les suivantes :

$$\begin{aligned} t &= (\lambda+2\mu)u_x + \mu_0\varphi - \beta_0(\tau_1\theta_t+\theta), & h = a_0\varphi_x - \mu_2(\tau_1 T_t = T), \\ g &= -\mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1(\tau_1\theta_t+\theta), & \rho_1\eta_1 = \beta_0 u_x + \beta_1\varphi + a(\tau_1\theta_t+\theta), \\ q &= \kappa\theta_x + k_1 T, & P = -k_2 T_x, \\ Q &= (\kappa - k_3)\theta_x + (k_1 - k_2)T, & \rho_1 e = -b(\tau_1 T_t + T) - \mu_2\varphi_x. \end{aligned} \tag{2}$$

Où θ est la température, T est la microtempérature qui représente la variation de la température à l'intérieur du micro-élément, λet μ sont les paramètres de Lamé habituels,

et τ_1 est le paramètre de relaxation, supposé être petit mais strictement positif. Les coefficients $\beta_0, \beta_1, \mu_0, \kappa, a_0$ représentent respectivement le couplage entre le déplacement et la

température, le couplage entre le déplacement et la fraction volumique, le couplage entre le déplacement et la porosité, la conductivité thermique et la capacité thermique. Les autres

paramètres, k_1, k_2, k_3, ξ et μ_2, définissent les caractéristiques du matériau et, en particulier,

ils définissent les couplages et satisfont les inégalités.

$$\mu_0^2 < \mu * \xi,$$

et

$$k_2^2 < \kappa k_1.$$

Maintenant, en remplaçant l'équation (2) dans l'équation (1), nous obtenons le système suivant :

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} &= \mu * u_{xx} + \mu_0 \varphi_x - \beta_0(\tau_1 \theta_{tx} + \theta_x), && dans(0,1)\times(0,\infty) \\
J\varphi_{tt} &= a_0\varphi_{xx} - \mu_2(\tau_1 T_{tx} + T_x) - \mu_0 u_x - \xi\varphi + \beta_1(\tau\theta_t + \theta), && in(0,1)\times(0,\infty) \\
a(\tau_1\theta_t + \theta)_t &= -\beta_0 u_{tx} - \beta_1\varphi_t + \kappa\theta_{xx} + k_1 T_x, && dans(0,1)\times(0,\infty) \\
b(\tau_1 T_t + T)_t &= k_2 T_{xx} - \mu_2\varphi_{tx} - k_2 T - k_3\theta_x, && dans(0,1)\times(0,\infty) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

où $\mu* = \lambda + 2\mu$. Bazarra, Fernandez et Quintanilla [38] ont étudié le problème (3) par la théorie des semi-groupes en conjonction avec la méthode développée par Liu et Zheng [47] pour déterminer la décroissance exponentielle de la solution pour les conditions limites suivantes :

$$u(l,t) = u(0,t) = \varphi_x(l,t) = \varphi_x(0,t) = \theta_x(l,t) = \theta_x(0,t) = T(0,t) = T(0,t) = 0.$$

Ces dernières années, le contrôle des EDP avec des effets de retard temporel est devenu un domaine de recherche actif, voir par exemple [39] et [46]. La présence de retard peut être

une source d'instabilité du système, voir par exemple [50] et [55]. Dans le présent mémoire, notre objectif est d'étendre l'étude de Boudeliou et Bouraoui [40] en présence du terme poreux avec retard temporel ajouté à la deuxième équation du système, en supposant que l'effet de micro-température n'est pas pris en compte.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre 01 :

Nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles.

Chapitre 02 :

Nous prouvons que le système (2.1)- (2.3) ,et nous donnons des résultats d'existence et d'unicité en utilisant la théorie des semi groupe qi repose sur le théorème de HILLE-YOSIDA.

chapitre 03 :

Nous prouvons à l'aide de la méthode des multiplications que notre système est exponentiel-lement stable.

CHAPITRE 1

ESPACES FONCTIONNELLES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant l'analyse fonctionnelle et les résultats des quelques inégalités qu'on utilisera ultérieurement. Ensuite, nous donnons brièvement, les définitions et les théorèmes qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail. De plus, en utilisant la théorie du semi groupe qui nous serons très utiles pour la suite de notre travail. On désignera par un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

1 Notion d'analyse fonctionnelle

1.1 Espaces Fonctionnelles

Espace Complet

Définition 1.1 *Un espace normé $(E; ||.||_E)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.*

Espace de Banach

Définition 1.2 *Un espaces vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach.*

Espace de Hilbert

Définition 1.3 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme*

$$(u, v)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 Espace de Sobolev :

Commençons par les espaces $L^p(\Omega)$.

Les espaces $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Définition 1.4 *On définit l'espace $L^p(\Omega)$ par*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \textit{mesurables telles que} \\ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &< +\infty,\ \textit{si}\ 1 \leq P < \infty\ \textit{et}\ \textit{supess}|f(x)| < +\infty,\ \textit{si}\ p = +\infty\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Théorème 1.1

Les espace $L^p(\Omega)$, muni des normes suivantes

$$\| f \|_{Lp(\Omega)} = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},\ \text{pour } 1 \leq p \leq +\infty \text{ et } ||f||_{L^\infty} = supess|f(x)|, \tag{1.2}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.1

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert .

Les espaces de Sobolev $\mathbf{H}^m(\Omega)$

Théorème 1.2

Etant donné $m \in N$, on désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev où

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)/\forall\alpha, |\alpha| \leq m \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tel que } v_\alpha = \nu^\alpha u \text{ au sens faible}\right\} \tag{1.3}$$

On introduit sur H^m le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \sum_{\alpha_l eqm} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle, \tag{1.4}$$

et la norme associée

$$\| u \|_{H^m} = \sqrt{\langle u, v\rangle_m}$$

Théorème 1.3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni de produit scalaire (1.4) est un espace de Hilbert séparable.Dans le cas $m = 1$ on utilise la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ pour définir l'espace de Sobolev suivant :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \tag{1.5}$$

H désigne un espace de Hilbert, $H\prime$ son dual.

2 Certaines inégalités algébrique

Nous allons donner ici quelques inégalités algébrique importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliqués et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

2.1 Inégalité de Hölder

Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors le produit $f.g$ est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\int\limits_{\Omega}|fg|dx \leq (\int\limits_{\Omega}|f|^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int\limits_{\Omega}|g|^q dx)^{\frac{1}{q}},$$

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

Remarque 2.1

L'inégalité de Cauchy Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder avec $p=q=2$.

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

soient f et g deux fonction dans $L^2(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega}|fg|\, dx \leq (|f|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}(\int\limits_{\Omega}|g|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}$$

2.3 Inégalité de Young

Soit a,b deux réels positifs et p,q deux réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

alors :

$$\forall\varepsilon>0, ab \leq \frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}}b^q.$$

on utilisera parfois la forme

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q \text{ avec } C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}}$$

Si $p=q=2$ on a :

$$ab \quad \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \ \text{ où } \ ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$$

2.4 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^2}(\Omega) \leq C||\nabla u||_{L^2}(\Omega).$$

3 Quelques théorèmes utiles

Théorème 3.1

Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non bornée dans H est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(A) : \langle Ax, x\rangle \leq 0.$$

3.1 Théorème de Hille-Yosida

Soit A un opérateur maximale monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout
$u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in C^1([0,\infty], H) \cap C([0,\infty], D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur } [0,\infty[\\ u(0) = u_0 \qquad \text{(donnée initiale)} \end{cases} \tag{1.6}$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \ \text{ et } \ \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \forall t \geq 0.$$

3.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 3.1 *Soit H un espace de Hilbert , A une forme bilinéaire continue et coercive et $\varphi \in H$. Il existe une unique $u \in H$, vérifiant :*

$$A(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H$$

Si A est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$u \in H et \frac{1}{2}A(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = Min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}A(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right)$$

Remarque 3.1

Une forme bilinéaire $A : H \times H \to \mathbb{R}$

1. Continue s'il existe $C \geq 0$ tq pour tout $u, v \in H$:

$$|A(u,v)| \leq C|u||v|.$$

2. Coercive s'il existe $\alpha \succ 0$ tq pour tout $u \in H$:

$$A(u,u) \geq \alpha ||u||^2.$$

3. A est symétrique si

$$\forall u, v \in H, A(u,v) = A(v,u);$$

3.3 Théorème de Fubini

On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2), (\Omega_1 \times \Omega_2) \in \mathbb{R}^2$ ouvert Alors,pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int\limits_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int\limits_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int \int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy$$

3.4 Inégalité Intégrable

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet,plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants :

Lemme 3.1 *Soient* $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante et* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction strictement croissante de classe* $C^1(\mathbb{R}_+)$ *telle que :*

$\psi(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = +\infty$. Supposant que : $\exists p \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int\limits_s^{+\infty} \psi\prime^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0)E(s), \forall s \rangle 0. \tag{1.7}$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0) \exp^{1-d\Psi(t)} \forall t > 0 \; si \quad p = 0 \\ E(t) \leq E(0)(\frac{1+p}{1+pd\Psi(t)}) \quad \forall t > 0 \quad si \quad p > 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

dans le cas particulier où $\psi(t) = t$ on déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} a)E(t) &\leq E(0)exp^{1-dt} && \forall t > 0 \quad \text{si} \quad p = 0 \\ b)E(t) &\leq E(0)(\frac{1+p}{1+pd\forall(t)})^{\frac{1}{p}} \forall t > 0 && \text{si} \quad p > 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

appelées respectivement , estimation exponentielle et estimation polynomiale.

Lemme 3.2 *Soit* $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue (décroissante) vérifiant*

$$\int_s^{+\infty} \forall(E(t))dt \leq \frac{1}{d}E(s), \forall s \rangle 0, \tag{1.10}$$

où d est un réel strictement positif et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\psi(0) = 0$. Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que

$$E(t) \leq \psi^{-1}(\frac{\Psi^{-1}(C_0 t)}{c_1 t}),\ \forall \leq t_0, \tag{1.11}$$

où $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\psi(t)}dt,\ \forall s > 0. \tag{1.12}$$

4 Théorie des semi-groupes

Définition 4.1 *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *est un opérateur linéaire (non borné).* A *est appelé dissipatif si* $\Re(Av, v)x \leq 0,\ \forall v \in D(A)$*. L'opérateur dissipateur* A *est appelé m-dissipatif si* $(\lambda I - A)$ *est surjective pour tout* $\lambda > 0$*.*

Théorème 4.1

Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si

$$\| (\lambda I - A)_x \|_X \geq \lambda \| x \|_X, \forall x \in D(A), \lambda > 0, \tag{1.13}$$

Preuve :

Supposons que A est dissipatif et fixe $x \in d(A)$ et $\lambda > 0$.alors

$$\lambda \parallel x \parallel \leq \Re((\lambda - A)x, x)_X$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous concluons que

$$\lambda \parallel x \parallel_x^2 \leq \parallel (\lambda - A)x \parallel_X \parallel x \parallel_X,$$

Qui conduit directement à (1.13) . a l'inverse supposer que (1.13) tient et fixe $x \in D(A)$,

alors pour tout $\lambda > 0$,on a

$$\lambda^2 \parallel x \parallel^2 \leq \lambda^2 \|x\|_x - 2\lambda\Re(Ax, x)_x^2, \lambda \succ 0.$$

En divisant cette inégalité par 2λ, on obtient équivalemment

$$\Re(Ax, x)_x \leq \frac{1}{2\lambda} \|Ax\|_x^2, \lambda \rangle 0.$$

Passer à la limite lorsque λ passer à l'infini donner la dissipativité de A. On peut maintenant prouver certaines propriétés utiles des opérateur m-dissipatifs.

Théorème 4.2

soit A est un Opérateur m-dissipatif. ensuite, les propriétés suivantes sont conservées.

1. A est fermé.

2. pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X.

de plus $(\lambda I - A)^{-1}$est un opérateur linéaire borné tel que

$$\parallel (\lambda I - A)^{-1} \parallel_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

3.$D(A)$ est dense dans X.

Preuve :

Commençons par le point 1. comme A est un opérateur m-dissipatif,il existe $\lambda_0 > 0$

tel que $R(\lambda_0 I - A) = X$,donc par (1.13) il en résulte que $\lambda_0 I - A$ a une inverse bornée.Comme $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est borné,il est également fermé. Alors $\lambda_0 I - A$ est fermé et donc A également.

Pour prouver le point 2, il suffit de prouver que $R(\lambda_0 I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$

Pour cela, nous introduisons l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in (0,1) \text{ tel que } R(\lambda I - A) = X\}$$

Première Λ est un ouvert. en effet (1.13) implique que Λ est un sous-ensemble de l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A. comme $\rho(A)$ est un ouvert, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage de λ inclus dans $\rho(A)$. L'intersection de ce voisinage avec la droit réelle est clairement inclus dans Λ, ce qui prouve que Λ est ouvert. Montrons aussi que Λ est fermé. Soit une séquence.$(\Lambda_n)_n$ d'élément de Λ tel que

$\lambda_n \to \lambda > 0$ comme $n \to \infty$

Ensuite, pour un élément quelque $y \in X$ et tout n, il existe $x_n \in D(A)$ telle que

$$(\lambda_n I - A)_{xn} = y \tag{1.14}$$

En raison de (1.13), il en résulte que

$$\| x_n \|_X \leq \lambda_n^{-1} \| y \|_X \tag{1.15}$$

Et donc la suite $(x_n)_n$ est bornée. Nous appliquons maintenant (1.13) avec $x_n - x_m$ et λ_m on obtient

$$\lambda_m \parallel x_n - x_m \parallel_X \leq \parallel \lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) \parallel_X$$

et par l'utilisation (1.14) on en déduit que

$$\lambda_m \parallel x_n - x_m \parallel_X \leq |\lambda_m - \lambda_n| \parallel x_n \parallel_X .$$

et par (1.15), On déduit qu'il existe $x \in X$ tel que xn converge vers x dans X.Mais (1.14) Alors implique Ax_n converge vers $\lambda x - y$ et puisque A est fermé, on conclut que $x \in D(A)$ avec $\lambda x - Ax = y$. Cela montre que λ appartient Λ et que la fermeture de Λ est prouvée. En conclusion , Λ est un sous-ensemble ouvert, fermé et non vide de $(0, \infty)$.Terminons par le point 3. Soit $y \in X$ tel que

$$(y, x)_x = 0, x \in D(A) \tag{1.16}$$

Si nous montrons que

$$(y, Ax)_x = 0, x \in D(A) \tag{1.17}$$

alors nous allons obtenir ce

$$(y, x - A_x)x = 0, x \in D(A)$$

Et puisque $R(I - A) = X$, on déduit que $y = 0$. il reste alors à montrer(1.16). soit $x \in D(A)$ est fixé, puis par le point 2, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_n \in D(A)$ et

$$x = x_n - \frac{1}{n}Ax_n, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.18}$$

Ceci implique que

$$Ax_n = n(x_n - x)$$

et de la régularité x, $x_n \in D(A)$, on déduit que xn appartient à $D(A^2)$ et que la prochaine identité

$$Ax = A(I - \frac{1}{n}A)x_n.$$

Ou équivalent

$$Ax_n = A(I - \frac{1}{n}A)^{-1}Ax.$$

Du point 2, nous savons que

$$\left\|(I - \frac{1}{n}A)^{-1}\right\|_{l(x)} \leq 1$$

et donc

$$\| Ax_n \|_X \leq \| Ax \|_X .$$

De plus, comme X est un espace de Hilbert, il existe une sous-suite (Ax_{nk}) et $(Ax_n)_n$ et $z \in X$ tel que Ax_{nk} Converge faiblement vers z Ceci implique que la suite de paires $((x_{nk}, Ax_{nk}))_k$ Converge faiblement vers (x, z) dans $X \times\ X$.Ainsi, par le lemme de Ma-zur, il existe une autre suite $((\tilde{x}_l, z_l))_l$ Fait de combinaisons convexes de (x_{nj}, Ax_{nj}) n guarantees (that the $z_l = A\tilde{x}$) tel que $(\widetilde{x_l, z_l}) = (\tilde{x}_l, \tilde{x}_l)$ converge fortement vers(x, z)dans $X \times\ X$ comme l va à ∞. comme A est fermé, nous en déduisons $z = Ax$. Enfin par (1.16) et (1.18) on a

$$(y, Ax_{nk})X = n_k(y, x_{nk} - x) = 0$$

et en passant à limite en k, nous trouvons que (1.17) passons maintenant à la notation de semi-groupes linéaires.

Théorème 4.3

soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné.on dit que A est monotone si

$$(Av, v) \geq 0, \forall v \in D(A) \tag{1.19}$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f \tag{1.20}$$

Remarque 4.1

si A est un maximal monotone, alors λA est aussi maximal monotone pour tout $\lambda > 0$. Par contre si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones alors $A + B$ défini sur $D(A) \cap D(B)$ n'est pas nécessairement maximal monotone.

Définition 4.2 *Une famille à un seul paramètre $(S(t))_t \geq 0$ de $L(X)$ est un semi-groupe des opérateurs linéaires bornés sur X si*

1.

$$S(0) = Id_x,$$

2.

$$S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0.$$

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ z \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t}, \text{existe} \right\}$$

et

$$Az = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t}, \forall z \in D(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_t \geq 0$ et $D(A)$ est appelé le domaine de A. Un semi-groupe $(S(t))_t \geq 0$ des opérateurs linéaires bornés est appelée une suite fortement continue(ou un C_0-semi-groupe) si

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)z = z, \forall z \in X. \tag{1.21}$$

Un fortement continue $(S(t))_{t\geq 0}$ sur X satisfaisant

$$\| S(t) \|_{L(X)} \leq 1, \forall t \geq 0,$$

est appelé C_0-Semi-groupe de contractions. Montrons maintenant quelques propriétés utiles de C_0-semi-groupe de contractions.

Théorème 4.4

soit $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contraction sur$X$. alors

1. pour tout $x \in X$, l'application $t \to S(t)x$ est un fonction continue de $[0, \infty)$ dans X.

2. pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)xds = S(s)x. \tag{1.22}$$

3. pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$, l'élément $\int_0^t S(s)xds$ appartient à $D(A)$, et

$$A(\int_0^t S(s)xds) = S(t)x - x \tag{1.23}$$

4. pour tout $x \in D(A)$et tout $t > 0$, l'élément $S(t)x$ appartient à $D(A)$, et $t \to$

$S(t)x$ est une fonction différentiable continue de $(0,\infty)$ dans X et

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \forall t \geq 0.$$

5. pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$,on a

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(u)Axdu = \int_s^t AS(u)xdu.$$

Preuve :

pour le point 1, par (1.21), La propriété de continuité tient trivialement à $t = 0$. maintenant fixer$x \in X$ et prendre un arbitraire $t > 0$ alors pour $h \geq 0$, on a

$$S(t+h)x - S(t)x = S(t)(S(h)x - x),$$

5 Théorie de la stabilité de Lyapunov

L'étude de la stabilité pour les systèmes évolutives est souvent liée à la construction des fonctionnelles de Lyapunov. La méthode générale de la construction des fonctions de Lyapunov

ont proposée par V .Kolmanovskii et L.Shaikhet et déjà utilisée avec succès pour les équations différentielles, pour les équations de différence à temps discret, pour les équations

de différence à temps continu, est utilisé ici pour étudier la stabilité des équations évolutive à retard, en particulier, des équations différentielles partielles. On a l'équation

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt}A(t,u(t)) + f1(t,ut), t > 0 \\ u(s) = \psi(s), s \in [-h,0] \end{cases} \tag{1.24}$$

Notons par $u(t,\psi)$ la solution de l'équation (1.24) correspondant à la condition initiale ψ.

Définition 5.1 *La solution triviale de l'équation (1.24) est dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que.*

$$|u(t,\psi)| < \varepsilon \text{ pour tout } t > 0, \text{ si } \quad |\psi|_{CH} = sup|\psi(s)| < \delta.$$

$$|u(t,\psi)| < \varepsilon \text{ pour tout } t > 0, \text{si } |\psi|_{CH} = \sup_{s\in[-h,0]} |\psi(s)| < \delta. \tag{1.25}$$

Définition 5.2 *La solution triviale de l'équation (1.24) est dite exponentiellement stable si elle est stable et il existe $\lambda > 0$ une constante positive tel que pour tout $\psi \in C(0,-h,H)$ il existe C (qui peut dépendre sur ψ) tel que :*

$$|u(t,\psi)| \leq Cexp(-\lambda t) \quad pour \quad t > 0$$

Maintenant, on va faire la démonstration de la théorème du stabilité. supposons qu'il existe une fonctionnelle $V(t,u_t)$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites pour certains nombres positives c_1, c_2 et λ

Théorème 5.1

$$|u(t,u_t)| \leq c_1 exp(\lambda t)|u(t)|^2, t \geq 0 \tag{1.26}$$

$$|u(0,u_0)| \geq c_2|\psi|^2_{c_H} \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt}V(t,u_t) \leq 0, t \geq 0 \tag{1.28}$$

Alors la solution triviale de l'équation (1.24) est exponentiellement stable. Notons que le théorème ([?]). implique que l'étude de la stabilité de l'équation (1.24) peut être réduit à la construction appropriées de Lyapunov.Pour construire les fonctionnelles de Lyapunov on utilise des procédures formelles.

5.1 Le procédure des fonctionnelles de Lyapunov

Le procédure consiste en quatre étapes.

5.2 Etape

pour transformer l'équation (1.24) sous la forme

$$\frac{dz(t,u_t)}{dt}A_1(t,u_t)+A_2(t,u_t) \tag{1.29}$$

où $z(t,.)$ et $A_2(t,.)$ sont des familles d'opérateurs non linéaire,

1. $z(t,0)=0; A2(t,0)=0$, l'opérateur $A_1(t,.)$ dépendante de t et ut mais indépendante pour les valeurs précidentes $u(t+s), s<0$.

5.3 Etape

supposons que la solution triviale de l'équation

$$\frac{dy(t)}{dt}=A_1(t,y(t))$$

est exponentiellement stable et il existe donc une fonctionnelle de Lyapunov $V(t,y(t))$, qui satisfait les conditions du théorème ([?]).

5.4 Etape

La fonctionnelle de Lyapunov $V(t,u_t)$ pour l'équation (1.24) est écrit sous la forme $V=V_1+V_2$, où $V_1(t,u_t)=V(t,z(t,u_t))$. L'élément y de la fonction $V(t,y)$ est remplacée la fonctionnelle z(t, xt) dans la partie gauche de l'équation (1.24).

5.5 Etape

Généralement, la fonctionnelle $V_1(t,u_t)$ satisfait les conditions du théorème [?]. Pour satisfait ces conditions, il est nécessaire de calculer $\frac{d}{dt}V_1(t,u_t)$ et de l'estimer.

Ensuite, la fonctionnelle $V_2(t, u_t)$ peut être choisir de manière standard.

6 Problèmes à Retard

Dans cette section, nous introduisons des exemples de problèmes, anciens et nouveaux,qui sont traité à l'aide de la théorie générale des équation différentielles.Nous tentons de donner

un description suffisant de la dérivation, de la solution et propriétés des solutions pour que le lecteur puisse apprécier une partie du goût du problème. Dans aucun des cas nous ne

donnons un traitement complet du problème,mais offrent des références pour une étude plus approfondie.

6.1 Le contrôle d'un navire

Minorsky (1962) a conçu un dispositif de direction automatique pour le cuirassé New Mexico. ce qui suit est un esquisse du problème . Supposons que le gouvernail du navire ait une position angulaire $x(t)$ et supposons qu'il y ait une force de frottement proportionnelle à la vitesse, disons$-cx(t)$. Il y un instrument indiquant la direction qui point dans la direction de mouvement réelle et il ya instrument pointant dans la direction désirée. Ces deux sont reliés par un dispositif qui active un moteur électrique produisant une certaine force pour déplacer le gouvernial de manière à amener le navire sur trajectoire souhaitée. Il

y a un décalage de temps entre le moment où le navire s'éloigne et le moment où le moteur électrique active le force de rappel. L'équation pour $x(t)$ est

$$x^{''}(t) + cx\prime(t) + g(x(t-h)) = 0 \tag{1.30}$$

où $xg(t) > 0$ si $x \neq 0$ et c est un constant positive. L'objectif est de donner des conditions assurant que $x(t)$ restera prés de zéro pour que le navire suive son cours.

6.2 Epidémies (Cooke et Yorke)

Dans les travaux de Cooke et Yorke (1973), l'hypothèse de Lotka est modifiée de sort que le nombre de naissances par unité de temps n'est fonction que de la taille de la population

et non de la répartition par âge voir[2]. Dans cette hypothèse, on a $x(t)$ la taille de la population et on a le nombre de naissance $B(t) = g(x(t))$. Supposons que chaque individu

a un durée de vie L de sorte que le nombre de décès par unité de temps soit $g(x\check{s}(t-L))$.

$$x\prime(t) = g(x(t)) - g(x(t-L)), \tag{1.31}$$

Où g est fonction différentiable. Nous notons que toute fonction constante est une solution de (1.31). Cooke et Yorke (1973) considèrent le modèle suivant pour la propagation de

la gonorrhée. La population est divisée en deux classes : (a) $S(t) = Le$ nombre de sujets susceptibles. (b) $S(t) = Le$ nombre de maladies infectieuses. Le taux de nouvelle infection

dépend uniquement des contacts entre les individus sensibles et infectieux.Puisque est égale à la population totale constante moins $x(t)$, la vitesse est une fonction $g(x(t))$. Supposons

qu'une personne exposée est immédiatement infectieuse et reste infectieuse pendant une période L(le temps pour le traitement et la guérison). Alors x vérifie aussi (1.31). Or, à

tout moment $t, x(t)$est égal à la somme du capital produit au cours de la période $[t-L, t]$ plus une constante c désignant la valeur des actifs non déprécies. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^L p(s)g[x(t-s)]ds + c \\
&= \int_{t-L}^{t} p(t-u)g[x(u)]ds + c
\end{aligned}
$$

6.3 L'équation de Tournesol

Somolinos (1978) a considéré l'équation

$$x" + (a/r)x\prime + (b/R)sin(t-r) = 0$$

Et a obtenu des résultats intéressant sur l'existence des solutions périodiques. L'étude de ce problème remonte au début des années 1800 et a attiré beaucoup d'attention.Il implique le mouvement d'une plante de tournesol.

CHAPITRE 2

Bien-Posé et stabilité exponentielle du gonflement poreux avec thermoélectricité Gurtin-Pipkin et terme de retard

ce travail examine la stabilité exponentielle et la bonne pose d'un système poreux gonflant avec l'effet thermique Gurtin-Pipkin comme seule source d'amortissement au fil du temps. nous utilisons un corollaire essentiel du théorème de lumer-Phillips pour démontrer le résultat de bonne position sous des hypothèses de poids à terme de retard appropriées. de plus, l'utilisation d'une fonctionnelle de lyapunov appropriée conduit à une stabilité exponentielle sans s'appuyer sur des hypothèses de vitesse des vagues.

1. INTRODUCTION

les matériaux élastiques poreux gonflants sont une classe de matériaux qui présent la propriété unique de subir des expansion volumétrique lorsqu'ils sont exposés à certains stimuli tels que des solvants, des changements de température, ou des variations de ph . Ces matériaux se caractérisent par leur capacité à absorber et à retenir de grandes quantités de liquide dans leur structure poreuse, conduisant à une augmentation significative de la taille et du volume. Globalement, comprendre le comportement de le gonflement des matériaux poreux est essentiel pour les ingénieurs civils afin d'assurer la stabilité et la longévité des infrastructures projets. En considérant les effets du gonflement et en mettant en œuvre des techniques d'ingénierie appropriées, l' ingénierie les utilisateurs peuvent atténuer les risques potentiels et concevoir des structures capables de résister aux défis posés par le gonflement .des sols ou roches. le fondement théorique du gonflement des sols sort du cadre de cet article ; lecteurs intéressés pour en savoir plus sur le sujet on se réfère à des vers publications supplémentaires [8, 20]. Notre objectif à l'heure actuelle le travail d'étude consiste à étudier la stabilité asymptotique d'un système poreux gonflant avec un retard et

un simple faible source de dissipation provenant de la conduction thermique Gurtin-Pipkin [16] il est de notoriété publique dans la littérature ature, comme le soutiennent Suh dans [28], et Richard dans [25], entre autres, ce retard doit être incorporé dans systèmes afin d'analyser avec précision et de créer des contrôles de rétroaction pour ces systèmes.D'un autre côté, le l'introduction d'un terme de retard dans le système complique l'analyse puisque les retards peuvent introduire des oscillatoire comportement ou des effets déstabilisant. Nous suggérons aux lecteurs proposons de une liste non exhaustive de références $[1, 9, 10, 21 - 23]$et les citations qui y figurent pour plus d'informations sur les retards. Nous examinons spécifiquement le gonflement thermoélastique poreux modèle ci-dessous pour $\rho_1, \rho_2, \rho_3, a_1, a_3, \delta \succ 0$ et $a_1 a_3 \succ a_2^2$

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, \qquad \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ \rho_2 v_{tt} - a_3 v_{xx} - a_2 u_{xx} - \delta \tau_x = 0, \qquad \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ \rho_3 \tau_t + q_x - \delta v_{xt} = 0, \qquad \text{dans } (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), \qquad \text{dans } (0,1) \\ \tau(x,-t) = \tau_0(x,t) \ , \qquad \text{dans } (0,1) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = \tau(0,t) = \tau(1,t) = 0 \qquad \text{dans } (0,\infty) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $u(x,t)$ est le déplacement du fluide, $v(x,t)$ est le matériau solide élastique et $\tau(x,t)$ est la température respectivement. le conditions initiales u_0, u_1, v_0, v_1 et τ_0 sont des données fixes.la loi de conduction thermique de Gurtin-Pipkin définit le flux de chaleur q comme

$$q(t) = -\frac{1}{\tau_1} \int_0^\infty \mu(s) \tau_x(x, t-s) ds, \tag{2.2}$$

où τ_1 est une constante positive qui représente le temps de relaxation et $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ désigne la mémoire le noyau aura ses caractéristiques spécifiques répertoriées dans la section qui suit. Munoz Rivera et Racke [26] analysé les systèmes de type Timchenko

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi) + \gamma \tau_x = 0 \\ \rho_3 \tau_t - \kappa \tau_{xx} + \gamma \varphi_{tx} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

où u, φ, τsont le déplacement transversal, l'angle de rotation du filament et la différence de température, respectivement. ils ont prouvé que le système est exponentiellement stable sous différentes conditions aux limites si et seulement si

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\cdot \tag{2.4}$$

Dans[15], Frenandez-Sare et Racke ont étudié les systèmes de Timochenko et l'équation de la chaleur dérivée de la l'équation de Cattaneo loi.

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi)_x = 0 \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi) + \gamma \tau_x = 0 \\ \rho_3 \tau_t + \gamma q_x + \delta \varphi_{tx} = 0 \\ \tau_0 q_t + q + \kappa \tau_x = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

est exponentiellement stable sous la condition (2.4). Dans leur étude de (2.5), Santos et al. [27] a établi un nouveau indice de stabilité.

$$\chi = (\tau - \frac{\rho_1}{\kappa \rho_3})(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}) - \frac{\tau \rho_1 \delta^2}{\kappa \rho_3},$$

et obtenu la désintégration polynomiale pour $\chi = 0$,et une désintégration exponentielle pour $\chi \neq 0$. pour le flyx de chaleur, Dell'Ore et pata dans [13] considére le système suivant en appliquant la loi thermique de Gurtin-Pipkin

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi) - \delta\tau_x = 0, \\ \rho_3 \tau_t - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \mu(s)\tau_{xx}(x, t-s)ds + \delta\varphi_{xt} = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

ils ont ajouté un nouveau numéro de stabilité

$$\chi_g = \left(\frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} - \frac{\tau}{\mu(0)}\right)\left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_3}{b}\right) - \frac{\tau}{\mu(0)}\frac{\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3},$$

et démontré que le système est exponentiellement stable si $\chi_g = 0$. Hanni et coll .[17]ont étudié une forme différente du système Gurtin-pipkin Timonshenko dans lequel l'équation de la force de cisaillement est affectée par laconduction thermique

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi)_x + \delta\tau_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(u_x + \varphi) - \delta\tau = 0, \\ \rho_3 \tau_t - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \mu(s)\tau_{xx}(x, t-s)ds + \delta(u_x + \varphi)_t = 0. \end{cases}$$

ils ont introduit un nouveau numéro de stabilité χ donné par

$$\chi = \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\left(b - \frac{\mu(0)\rho_2}{\tau\rho_3}\right) + \frac{b\rho_2\delta^2}{\kappa\rho_3},$$

et obtenu des résultats pour la stabilité polynomiale et exponentielle qui dépendaient de la faÇon dont le noyau de mémoire comportement et un numéro de stabilité . la loi thermique Gurtin-pipkin pour la Bresse a donné de nombreux résultats de dégradation intéressants basés sur la numiro de stabilité, Dell'Oro[11] a étudié le systéme thermoplastique de Bresse-Gurtin-pipkin, c'est-à-dire.

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi + l\omega)_x - \kappa_0 l\,(\omega_x - lu) = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi + l\omega) - \delta\tau_x = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - lu)_x + \kappa l\,(u_x + \omega + l\omega) = 0, \\ \rho_3 \tau_t - \kappa_1 \int_0^\infty g(s)\tau_{xx}(t-s)ds + \delta\Psi_{tx} = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

En introduisant un nouveau numéro de stabilité de la forme

$$\zeta_g = \left(\frac{\rho_1}{\rho_3\kappa} - \frac{1}{g(0)\kappa_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}\right) - \frac{1}{g(0)\kappa_1}\frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 b\kappa}.$$

où u, v, ω, τ représente le déplacement vertical, l'ange de rotation, le déplacement horizontal, le temps température dans la direction verticale, et température dans la direction horizontale,

respectivement. toutes les constants $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \kappa, \kappa_0, l, \delta, b, \tau$ sont strictement positives. il a démontré que le semi-groupe produit par l'équation tion (2.7) est exponentiellement stable si et seulement si

$$\zeta_g = 0 \text{ et } \quad \kappa = \kappa_0$$

en 2021, Dell'Oro [12] a considéré le même problème (2.7) par présence de la température le long de l' horizontale .direct et a donné une analyse détaillée de la stabilité du système

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi + l\omega)_x + \kappa_0 l(\omega_x - lu) + l\delta\upsilon = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi + l\omega) + \delta\tau_x = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x + lu)_x + \kappa l(u_x + \varphi + l\omega) + \delta\upsilon_x = 0, \\ \rho_3 \tau_t - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \mu(s)\tau_{xx}(x, t-s)ds + \delta\varphi_{tx} = 0, \\ \rho_3 \upsilon_t - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty h(x)\upsilon_{xx}(x, t-s)ds + \delta\,(\omega_x - lu)_t = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

l'autheur a introduit deux nombres de stabilité dans l'étude de stabilité

$$\zeta_u = \left(\frac{\tau\rho_3}{\mu(0)} - \frac{\rho_1}{\kappa}\right)\left(b - \frac{\kappa\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{\tau\delta^2}{\mu(0)}, \qquad \zeta_h = \left(\frac{\tau\rho_3}{h(0)} - \frac{\rho_1}{\kappa}\right)(\kappa_0 - \kappa) + \frac{\tau\delta^2}{h(0)},$$

et démontré que si et seulement si $\zeta_u\zeta_h = 0$, le semi-groupe associé au modèle (2.8) est exponentiellement écurie. mais lorsque $\zeta_u\zeta_h \neq 0$, l'autre vérifie que le semi-groupe est polynomiale-ment (optimal) stable. si nous supposons la loi de Cattaneo de conduction thermique

$$\tau_1 q_t + \beta q + \tau_x = 0, \tag{2.9}$$

où β est la conductivité thermique, c'est-à-dire que des calculs simples démontrent que lorsqu'il est remplacé par $\mu(t) = e^{-\frac{\beta}{\tau_1}t}$ dans (2.2) on obtient (2.9). Lorsque (2.1) et la loi thermique de (2.9) ont été combinées, Apalara et al. [4] ,a stabilité le système de manière exponentielle sans tenir compte des limitations du nombre de stabilité.si nous supposons la loi de Fourier classique de conduction thermique

$$q = -\beta\tau_x. \tag{2.10}$$

de même, on obtient (2.10) en mettant $\mu(t) = \tau_1\beta\delta(t)$, où δ est une fonction Dirac Delta ,et en appliquant la propriété de filtrage d'une fonction Delta. De même, Apalara et al. [5] ont examiné (2.1) en utilisant la méthode conventionnelle loi de Fourier (2.10) et résultats de stabilité exponentielle établis indépendants des vitesses des vagues du système. la loi thermique de Gurtin-pipkin donnée par (2.2) transforme le système (2.1) en un système complètement hyperbolique, ce que, parce qu'il résout le problème des signaux thermiques se propageant à une vitesse infinie dans un système parabolique, est particulièrement intrigant. les lois bien connues de Maxwell-cattaneo et de Fourier classique sont des exemples d'exceptions à la loi thermique de Gurtin-pipkin. concernant le retard de certains systèmes, certains résultats peuvent être obtenus. Aplara et Messaoudi [3] ont étudié un système thermostique linéaire unidimensionnel de type Timoshenko avec retard. le flux de chaleur est déterminé par la loi de Cattaneo

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(\varphi + u_x)_x + \mu u_t(x, t-\tau) = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi) + \gamma \tau_x = 0, \\ \rho_3 \tau_t + q_x + \gamma \varphi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + \beta q + \tau_x = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

avec les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \\ \tau(x,0) = \tau_0(x), q(x,0) = q_0(x), u_t = f_0(x,-t), \\ u(0,t) = u(1,t) = \varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = \tau(0,t) = \tau(1,t) = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

les auteurs ont fourni, sous une condition de retard et un nombre de stabilité ,un résultat de désintégration exponentielle. kafini et coll.[19]ont étudié le système Timoshenko de thermoélectricité de type III avec retard

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi)_x + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = 0 \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi) + \beta \tau_{tx} = 0 \\ \rho_3 \tau_{tt} - \delta \tau_{xx} + \gamma \varphi_{tx} - \kappa \tau_{txx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \\ \tau(x,0) = \tau_0(x), \tau_t(x,0) = \tau_1(t), \\ u_t(x, t-\tau) = f_0(x, t-\tau), \\ u(0,t) = u(1,t) = \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \tau_x(0,t) = \tau_x(1,t) = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

et démontré que, malgré le retard, l'énergie décroît de façon exponentielle dans des conditions appropriées sur les données de départ pour des vitesses d'onde égales. et ils ont découvert que sous différentes vitesses de vagues, l'énergie se désintègre polynomialement.B. feng et H. L. pelicer[14] considéré un système de Timoshenko non linéaire suivant avec con-délai permanent et terme de forçage

$-$

$$\begin{cases} - \quad \rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + \varphi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + \kappa(u_x + \varphi) + \mu_1 \varphi_1 + \mu_2(s)(x, t - \tau) + f(\varphi) = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

et a fourni une stabilité exponentielle sous des vitesses de vagues égales. Récemment J. Hao et F. wang dans[18]ont présenté pour les cas de vitesses de propagation des ondes égales et non égales ,la stabilité d'un système Timochenko thermoélectrique système de type lll avec historique et retard distribué . le but de cet article est d'étudier la relation asymptotique stabilité du système (2.1) lorsque le flux thermique fourni par (2.2). Nos travaux étendent les résultats de stabilité dans [6] systèmes poreux gonflants avec un terme de retard . En utiliser l'équation (2.2) dans (2.1), nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, \qquad \text{dans } (0,1) \times (0,\infty), \\ \rho_2 v_{tt} - a_3 v_{xx} - a_2 u_{xx} + \delta \tau_x = 0, \qquad \text{dans} \quad (0,1) \times (0,\infty) \\ \rho_3 \tau_t - \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \mu(s) \tau_{xx}(x, t-s) ds - \delta v_{xt} = 0, \qquad \text{dans} \quad (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), \quad \text{dans} \quad (0,1) \times (0,\infty) \\ \tau(x,-t) = \tau_0(x,t), \quad \text{dans} \quad (0,1) \times (0,\infty) \\ \varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(1,t) = \theta(0,t) = \theta(1,t), \qquad \text{dans} \quad (0,\infty) \end{cases} \tag{2.15}$$

dans le présent travail, nous étudions (2.15) ,un système poreux gonflant avec la loi thermique de Gurtin-Pupkin et , et établir les résultats de décroissance exponentielle sous des hypothèses appropriées sur le terme de retard sans compromis.attribution à n'importe quel numéro de stabilité . l'article est organisé de la manière suivante. dans la section 2 nous énonçons quelques hypothèses et transformations nécessaires dans la preuve de notre résultat de stabilité . dans la section 3 nous utilisons la méthode des semi-groupes pour prouver la bien-possibilité de notre problème .la section 4 est l'endroit où nous énonçons et prouvons quelques lemmes techniques et notre résultat de stabilité .

2. hypothèse et transformation

Dans cette section, nous donnons quelques éléments nécessaires à la preuve de notre résultat. le noyau mémoire $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,est un $C^2(\mathbb{R}_+)$ convexe sommable non croissante satisfaisant $(A_1)\mu(0) \succ 0$, $\lim\limits_{s\to\infty}\mu(s) = 0$, et $\int_0^\infty \mu(s)ds = 1$.De plus , il existe un nombre réel positif i tel que

$$-\mu''(s) \leq i\mu'(s), \tag{2.16}$$

où $\mu''(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mu(s)$. En prenant $g = -\mu'$, la condition suivante s'ensuit $(A_2)g$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, g \in C^1(\mathbb{R}_+), g(0) \succ 0, g_0 = \int_0^\infty g(s)ds = \mu(0) \succ 0$,et $\int_0^\infty sg(s)ds = 1$. En outre, (2.16) implique

$$g\prime(s) \leq -ig(s). \tag{2.17}$$

Nous introduisons une variable $\eta : (\ 0.1) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$définie comme

$$\eta(x,t,s) = \int\limits_{t-s}^{t} \tau(x,\sigma)d\sigma, \tag{2.18}$$

avec donnée initiales $\eta(x,0,s) = \int_0^s \tau_0(x,\sigma)d\sigma$.une simple inspection montre que η satisfait

$$\begin{aligned} \eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) &= \tau(x,t)\ , \qquad (\ 0.1) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\ , \\ \eta(0,t,s) &= \eta(1,t,s) = \eta(x,t,0) = 0, \quad (\ 0.1) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Nous obtenons des calculs directs

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(s)\tau_{xx}(x,t-s)ds &= \lim_{b\to\infty}\mu(s)\int_{t-s}^{t}\tau_{xx}(x,\sigma)d\sigma\,\Big|_{s=0}^{s=b} - \int_0^\infty \mu'(s)\int_{t-s}^{t}\tau_{xx}(x,\sigma)d\sigma ds\\ &= \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,t,s)ds.\end{aligned}$$

où

$$\underset{b\to\infty}{lim}\mu(s)\int_{t-s}^{t}\tau_{xx}(x,\sigma)d\sigma\,\Big|_{s=0}^{s=b} = 0.$$

enfin, il n'existe aucune preuve que l'inégalité de Poincaré puisse s'appliquer à u et v selon l'equation de Neumann conditions aux limites sur u et v. pendant ce temps, en utilisant les conditions aux limites dans $(2.15)_6$ et en utilisant $(2.15)_1$,$(2.15)_2$, nous concluons que

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \text{ et } \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 v(x,t)dx = 0. \tag{2.19}$$

Ainsi,en résolvant (2.19) et en utilisant les données initiales $(2.15)_4$,on obtient

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u_0(x)dx + t\int_0^1 u_1(x)dx \text{ et } \int_0^1 v(x,t)dx = \int_0^1 v_0(x)dx + t\int_0^1 v_1(x)dx. \tag{2.20}$$

par conséquent, si l'on laisse

$$\bar{u}(x,t) = u(x,t) - \int_0^1 u(x,t)dx \quad \text{et } \bar{\bar{v}}(x,t) = v(x,t) - \int_0^1 v(x,t)dx,$$

alors,il séensuit que

$$\int_0^1 \bar{u}(x,t)dx = \int_0^1 \bar{\bar{v}}(x,t)dx = 0 \ . \tag{2.21}$$

Désormais, nous travaillons avec Toi Désormais, nous travaillons avec $\bar{u}$ et $\bar{\bar{v}}$ au lieu de u et v mais écris u et v pour simplifier la notation. il convient donc d'utiliser l'inégalité de poincaré. on ajoute le terme de retard dans la deuxième équation du système (2.15) et regroupant les transformations, par Conséquent, le système (2.15) devient

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - a_3 v_{xx} - a_2 u_{xx} + \delta \tau_x + \gamma_1 v_t + \gamma_2 v_t(x, t-\tau) = 0, \\ \rho_3 \tau_t - \frac{1}{\tau_t} \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(x,t,s) ds - \delta v_{xt} = 0, \\ \eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) = \tau(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), \\ v_t(x, t-\tau) \ = f_0(x, t-\tau), \\ \tau(x,-t) = \tau_0(x,t), \quad \eta_0(x,s) = \int_0^s \tau_0(x,\sigma) d\sigma, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = \tau(0,t) = \tau(1,t) = 0, \\ \eta(0,t,s) = \eta(1,t,s) = \eta(x,t,0) = 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

ensuite, nous prenons en compte le système (2.22) et déterminons le résultat de stabilité exponentielle, sans tenir compte de tout numéro de stabilité ou autres connexions entre les paramètres du système. pour éviter toute ambiguïté à l'avenir, nous ne mentionnerons que les variables x, t et s que lorsque cela est nécessaire.

2. bien-posé

Dans cette section, nous utilisons le théorème de lumer-phillips pour vérifier l'existence et l'unicité de la solution pour (2.22).comme dans [2, 7]

, introduisons la nouvelles variables suivant :

$$Z(x,\rho,t) = v_t(x, t-\tau\rho) \quad \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty). \tag{2.23}$$

alors, la fonction z satisfait

$$\tau Z_t(x,\rho,t) + Z_p(x,\rho,t) = 0 - \quad \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty). \tag{2.24}$$

le problème (2.22) devient donc

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_2 v_{tt} - a_3 v_{xx} - a_2 u_{xx} + \delta\tau_x + \gamma_1 v_t + \gamma_2 Z(x,1,t) = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_3\tau_t - \frac{1}{\tau_t}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,t,s)ds - \delta v_{xt} = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty), \\ \eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) = \tau(x,t), & \text{dans } (0,1)\ \times(0,\infty)\times(0,\infty), \\ \tau Z_t(x,\rho,t) Z_p(x,\rho,t) = 0, \quad \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), \ \text{dans } (0,1) \\ Z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), \quad \text{dans } (0,1)\times(0,1) \\ \tau(x,-t) = \tau_0(x,t), \quad \eta_0(x,s) = \int_0^s \tau_0(x,\sigma)d\sigma, \quad \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = v_x(0,t) = v_x(1,t) = \tau(0,t) = \tau(1,t) = 0, \quad \text{dans } (0,\infty) \\ \eta(0,t,s) = \eta(1,t,s) = \eta(x,t,0) = 0, \quad \text{dans } (0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty), \\ Z(x,0,t) = v_t(x,t), \quad \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \end{cases} \tag{2.25}$$

ainsi, nous considérons le problème (2.25) avec l'hypothèse pour ξ comme suit

$$\tau\gamma_2 \prec \xi \prec \tau(2\gamma_1 - \gamma_2). \tag{2.26}$$

En prenant $w = u_t$,$N = v_t$ et soit $U = (u, w, v, N, \tau, \eta, Z)^t$alors,le problème (2.25)peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{c} U(t) = AU(t), t \succ 0, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \tau_0, \eta_0, f_0)^t, \end{array} \right. \tag{2.27}$$

où l'opérateur $A : D(A) \subset H \to H$ est défini par

$$AU = \left(\begin{array}{c} w \\ \frac{a_1}{\rho_1} u_{xx} + \frac{a_2}{\rho_1} v_{xx} \\ N \\ \frac{a_3}{\rho_2} V_{xx} + \frac{a_2}{\rho_2} u_{xx} + \frac{\delta}{\rho_2} T_x + \frac{\gamma_1}{\rho_2} v_t - \frac{\gamma_2}{\rho_2} Z(x,1,t) \\ \frac{1}{\tau_1 \rho_3} \int_0^1 g(s) \eta_{xx}(x,t,s) ds + \frac{\delta}{\rho_3} N_x \\ \tau(x,t) - \eta_s(x,t,s) \\ -\frac{1}{\tau} Z_\rho(x,\rho,t) \end{array} \right) \tag{2.28}$$

on considère les espaces suivants

$$\left\{ \begin{array}{c} L_*^2 = \left\{ \eta \in L^2(0,1) : \int_0^1 \eta(x) dx = 0 \right\}. \\ H_*^2 = \{ \eta \in H^2, \eta_x(0) = \eta_x(1) = 0 \} . H_*^1 = H^1(0,1) \cap L_*^2. \\ L_g = \left\{ \eta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow H_0^1(0,1), \|\eta\|_{L_g}^2 =: \int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \prec 0 \right\}. \end{array} \right.$$

où $L_g = L_g^2 \left(\mathbb{R}_+, H_0^1(0,1) \right)$ être un espace de Hilbert équipé duproduit intérieur

$$(\theta, \upsilon)_{L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1(0,1))} = \int_0^1 \int_0^{+\infty} g(s) \theta_x(s) v_x(s) ds dx,$$

et laisse

$$H = H_*^1(0,1) \times L_*^2(0,1) \times H_*^1(0,1) \times L_*^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L_g(\mathbb{R}_+ \longrightarrow H_0^1(0,1)) \times L^2((0,1), L^2(0,1)),$$

être un espace de Hilbert équipé du produit scalaire, pour $U = (u, w, v, N, T, \eta, Z)^t$ $\in H$

et $\tilde{U} = (\tilde{u},\, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{N}, \tilde{\tau}, \tilde{\eta}, \tilde{Z})^t \in H$:

$$\begin{aligned}
\langle U, \tilde{U}\rangle_H \quad &= \quad a_1 \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + \rho_1 \int_0^1 w_x \tilde{w}_x dx + a_3 \int_0^1 v_x \tilde{v}_x dx + \rho_2 \int_0^1 N_x \tilde{N}_x dx \\
&\quad + \rho_3 \int_0^1 \tau \tilde{\tau} dx + a_2 \int_0^1 (u_x \tilde{v}_x + v_x \tilde{u}_x) dx + \frac{1}{\tau} \int_0^1 \int_0^\infty g(x) \eta_x \tilde{\eta}_x dx \\
&\quad + \varsigma \int_0^1 \int_0^1 Z(x,\rho) \tilde{Z}(x,\rho) d\rho dx
\end{aligned}$$

le domaine de A est

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{c} U \in H.u, v \in H^2(0,1), w, N \in H^1_*, \\ \tau \in H^1_0(0,1), \eta, \eta_s \in L_g, \quad \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds \in H^2(0,1), \\ Z, Z_\rho \in L^2((0,1), L^2(0,1)), \quad Z(x,0) = N(x). \end{array} \right\} \tag{2.29}$$

le théorème suivant donne la bonne pose de notre problème .

Supposons que g satisfait (A_2) et (2.26)vérifié,alors pour tout $U_0 \in H$, il existe uneunique solution $U \in C(\mathbb{R}_+, H)$.du problème (2.27) De plus ,si $U_0 \in D(A)$,alors, $U_0 \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$

preuve.Nous montrons que A est dissipatif.soit $U \in D(A)$,alors,

$$\langle Au, u\rangle_H = \frac{-1}{\tau} \int_0^1 \int_0^\infty g(s)\eta_{xs}(s)\eta_x(s) ds dx - \gamma_1 \int_0^1 N^2 dx - \gamma_2 \int_0^1 Z(x,1,t) N dx - \frac{\varsigma}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 Z_\rho Z d\rho dx, \tag{2.30}$$

En appliquant l'inégalité de Young au troisième terme de (2.30) , on obtient

$$-\gamma_2 \int_0^1 Z(x,1,t)N dx \leq \frac{\gamma_2}{2} \int_0^1 Z^2(x,1,t)dx + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^1 N^2 dx. \tag{2.31}$$

En remplaÇant(2.31) dans (2.30) et en intégrant le dernier terme de (2.30) par le fait $Z(x,0) = N(x)$on obtient

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_H &= \frac{-1}{2\tau_1} \int_0^\infty g(s) \frac{\partial}{\partial s} \|\eta_x(s)\|^2 ds - \left(\gamma_1 - \frac{\varsigma}{2\tau} - \frac{\gamma_2}{2}\right) \int_0^1 N^2 dx - (\frac{\varsigma}{2\tau} - \frac{\gamma_2}{2}) \int_0^1 Z^2(x,1,t)dx \\
&= \frac{1}{2\tau_1} \frac{d}{ds} \int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\tau_1} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - r_0 \int_0^1 (N^2 + Z^2(x,1,t))dx \\
&= \frac{-1}{2\tau_1} \lim_{b\to\infty} (s) g(s) \|\eta_x(s)\|^2 \Big|_{s=0}^{s=b} + \frac{1}{2\tau_1} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - r_0 \int_0^1 (N^2 + Z^2(x,1,t))dx,
\end{aligned}$$

pour une constante r_0 telle que $r_0 \succ 0$ puisque (2.26) est vérifiée.il résulte de (2.18) que $\eta_x(x,t,0) = 0$.En outre, en résolvant (2.17), on obtient

$$g(s) \leq g(0)e^{-is} \rightsquigarrow g(s) \|\eta_x(s)\|^2 \leq g(0)e^{-is} \|\eta_x(s)\|^2 ,$$

où $\underset{b\to\infty}{lim} g(s) \|\eta_x(s)\|^2 = 0$.Ainsi,

$$\langle AU, U\rangle_H \leq \frac{1}{2\tau_1} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - r_0 \int_0^1 \left(N^2 + Z^2(x,1,t)\right) dx \leq 0,$$

Donc A est un opérateur dissipatif .il reste à démontrer que pour tout

$$F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T \in H ,$$

il existe un unique $u \in D(A)$tel que

$$Au = F, \tag{2.32}$$

ce qui équivaut à

$$\left(\begin{array}{c} w = f_1, \text{ dans } H^1_*, \\ a_1 u_{xx} + a_2 v_{xx} = \rho_1 f_2, \text{ dans } L^2_* \\ N = f_3, \text{ dans } H^1_* \\ a_2 V_{xx} + a_3 u_{xx} + \delta\tau_x + \gamma_1 v_t - \gamma_2 Z(x,1,t) = \rho_2 f_4, \text{ dans } L^2 \\ \frac{1}{\tau_1}\int_0^1 g(s)\eta_{xx}(x,t,s)ds + \delta N_x = \rho_3 f_5, \text{ dans } L^2 \\ \tau(x,t) - \eta_s(x,t,s) = f_6, \text{ dans } L_g \\ -\frac{1}{\tau} Z_\rho(x,\rho,t) = f_7, \text{ dans } L^2((0,1), L^2(0,1)) \end{array} \right) \tag{2.33}$$

en utilisant respectivement $(2.33)_1$,$(2.33)_3$ et $(2.33)_7$, nous obtenons

$$w, N \in H^1_*, Z_\rho \in L^2((0,1), L^2(0,1)).$$

en substituant $(2.33)_3$ dans $(2.33)_5$, on obtient

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{xx} ds = \delta\tau_1 f_{3x} - \tau_1\rho_3 f_5 \in L^2(0,1).$$

par conséquent, nous avons

$$\int_0^\infty g(s)\eta(s) ds \in H^2(0,1).$$

Il est clair que

$$\eta(s) = s\tau - \int_0^s f_6(y)dy, \tag{2.34}$$

satisfait $(2.33)_6$ et la condition aux limites $\eta(0) = 0$.

noter que$\int_0^\infty sg(s)ds = 1$, en utilisant (2.34) on obtient,

$$\tau \ = \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds + \int_0^\infty g(s) \int_0^s f_6(y)dyds. \tag{2.35}$$

pendant ce temps, en utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $0 < i_1\} < i$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) \left\| \int_0^s f_{6x}(y)dy \right\|^2 ds &= .\int_0^\infty g(s) \left\| \int_0^s e^{\frac{i_1}{2}y} e^{-\frac{i_1}{2}y} f_{6x}(y)dy \right\|^2 ds \\ &\leq \int_0^\infty g(s)(\int_0^s e^{i_1 y}dy) \int_0^s e^{--i_1 y} \|f_{6x}(y)\|^2 dyds \\ &\leq \frac{1}{i_1} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(s)(e^{i_1 s} - 1)ds \right) e^{-i_1 s} \|f_{6x}(y)\|^2 dy. \end{aligned} \tag{2.36}$$

nous fixons

$$h(y) = .\int_y^\infty g(s)(e^{i_1 s} - 1)ds$$

et définir

$$H(y) =: h(y) - \frac{e^{i_1 y}}{i - i_1} g(y).$$

évidemment ce $\lim_{y\to\infty} h(y) = 0$. de la non-négative de g et $g(y) \leq g(0)e^{-iy}$, on obtient $\underset{y\to\infty}{lim} \frac{e^{i_1 y}}{i-i_1} g(y) = 0$, ce implique que $\underset{y\to\infty}{lim} H(y) = 0$.De plus, d'après (2.17), on obtient

$$\begin{aligned}
H\prime(y) &= -g(y)e^{i_1 y} + g(y) - \frac{i_1 e^{i_1 y}}{i-i_1} g(y) - \frac{e^{i_1 y}}{i-i_1} g'(y) \\
&\geq -g(y)e^{i_1 y} + g(y) - \frac{i_1 e^{i_1 y}}{i-i_1} g(y) - \frac{i e^{i_1 y}}{i-i_1} g'(y) \\
&= g(y) \geq 0,
\end{aligned}$$

donc, H est non décroissant donc, $H(y) \leq 0$, par contre on a

$$e^{-i_1 y} h(y) = e^{-i_1 y} \int_y^\infty g(s)(e^{i_1 s} - 1)ds \leq \frac{1}{i-i_1} g(y). \tag{2.37}$$

le substitution de (2.37) dans (2.36) danne

$$\int_0^\infty g(s) \left\| \int_0^s f_{6x}(y)dy \right\|^2 ds \leq \frac{1}{i(i-i_1)} \int_0^\infty g(s) \left\| \int_0^s f_{6x}(y)dy \right\|^2 = \frac{1}{i(i-i_1)} \|f_6\|_{Lg}^2 \prec \infty. \tag{2.38}$$

le résultat (2.38) implique que $f_6 \in L_g$. alors, par définition nous avons $\int_0^s f_{6x}(y)dy \in L_g$. de plus en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\infty g(s)\int_0^s f_{6x}(y)dyds\right\|^2 &\leq \int_0^\infty g(s)ds\left\|\int_0^s f_{6x}(y)dy\right\| \\ &\leq g_0\int_0^\infty g(s)ds\left\|\int_0^s f_{6x}(y)dy\right\| \\ &\prec \infty.\end{aligned}$$

il résulte de la dernière inégalité ci-dessus que $\left\|\int_0^\infty g(s)\int_0^s f_{6x}(y)dyds\right\|^2$ est délimité, que $\int_0^\infty g(s)\int_0^s f_{6x}(y)dyds \in H_0^1$.par conséquent, d'après (3.13) nous avons

$$\tau \in H_0^1(0,1).$$

pendant ce temps, nous observons que.

$$\int_0^\infty g(s)\left\|\tau_x\right\|^2 ds = g_0\left\|\tau_x\right\|^2 \prec \infty \Longrightarrow \tau \in L_g.$$

de plus, en appliquant (2.18), l'intégration par parties, le fait que $\int_0^\infty sg(s) = 1$, et la règle de L'Hôpital , on obtient

$$\int_0^\infty s^2 g(s)ds \leq \frac{2}{i} \prec \infty \quad .$$

donc,

$$\int_0^\infty g(s)\left\|s\tau_x\right\|^2 ds = \left(\int_0^\infty s^2 g(s)ds\left\|\tau_x\right\|^2\right) \prec \infty \quad .$$

cela implique que $s\tau \in L_g$. par conséquent, a prtit de $(2.33)_6$et (2.35), on obtient

$$\eta, \eta_s \in L_g.$$

en résolvant des équations $(2.33)_2$ et $(2.33)_4$ on arrive à

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2}(a_3\rho_1 f_2 - a_2\rho_2 f_4 + a_1\delta\tau_x - a_2\gamma_1 N - a_2\gamma_2 Z(x,1,t)) \in L^2, \\
v_{xx} &= \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2}(a_1\rho_2 f_4 - a_2\rho_1 f_2 _ a_1\delta\tau_x + a_1\gamma_2 Z(x,1,t)) \in L^2.
\end{aligned}$$

donc, $u, v \in H^2(0,1)$.De plus, il est clair que

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2}(a_3\rho_1 \int_0^x f_2(y)dy - a_2\rho_2 \int_0^x f_4(y)dy - a_2\gamma_1 \int_0^x N(y)dy _ a_2\gamma_2 \int_0^x Z(y,1,t)dy + a_1\delta\tau_x \\
v_x &= \frac{1}{a_1 a_3 - a_2^2}(a_1\rho_2 \int_0^x f_4(y)dy - a_2\rho_1 \int_0^x f_2(y)dy + a_1\gamma_1 \int_0^x N(y)dy + a_1\gamma_2 \int_0^x Z(y,1,t)dy - a_1\delta\tau
\end{aligned}$$

donc, u et v satisfont aux conditions aux limites puisque $f_2, f_4 \in L^2$ et $\tau \in H_0^1(0,1)$, c'est-a-dire

$$u_x(0) = u_x(1) = v_x(0) = v_x(1) = 0.$$

alors, (2.32) a une solution unique dans $D(A)$ de plus $\|U\|_H \leq k\|F\|_H$,donc, $0 \in \rho(A)$.enfin, puisque $0 \in \rho(A)$ et A est dissipatif, nous concluons que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0- semi-groupe de contraction dans H en utilisant le théorème 1.2.4 de [24] (théorème de Lumer-Pillips).

CHAPITRE 3

Stabilité exponentielle

dans cette section,nous supposons que (u, v, τ, η, z) est, une solution de(2.25) et nous démontrons la stabilité exponentielle de notre problème en utilisant la technique énergétique. supposons que g satisfait (A_2) et que $\gamma_2 \prec \gamma_1$ soit vérifié.alors, la fonctionnelle énergétique E défini par

Lemme 0.1 *supposons que g satisfait (A_2) et que $\gamma_2 \prec \gamma_1$ soit vérifié.alors, la fonctionnelle énergétique E défini par*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho_1 u_t^2 + a_1 u_x^2 + \rho_2 v_t^2 + a_3 v_x^2 + 2a_2 u_x v_x + \rho_3 T^2\right) dx \qquad (3.1) \\ &+ \frac{\varsigma}{2}\int_0^1\int_0^1 Z^2(x,\rho,t)\,d\rho dx + \frac{1}{2\tau_1}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x\right|^2 ds dx, \end{aligned}$$

satisfait,

$$\grave{E}(t) \leq -m_0 \left(\int v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 Z^2(x,1,t)dx \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\infty g'(x) \left| \eta_x \right|^2 dsdx, \qquad (3.2)$$

pour certains $m_0 > 0$, ou m_0 une constante positive si $\gamma_2 \prec \gamma_1$.preuve nous multiplions la première et les trois équations de (2.25) par $u(t), v(t)$ et τ, respectivement,et une intégration par partie terminée (0,1), on trouvons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\rho_1 u_t^2 + a_1 u_x^2 + \rho_2 v_t^2 + a_3 v_x^2 + 2a_2 u_x v_x + \rho_3 T^2\right) dx + \gamma_1 \int_0^1 v_t^2 dx + \gamma_2 \int_0^1 v_t Z(x,1,t)dx + \frac{1}{\tau_1}\int_0^1 \tau_x$$

en utilisant (2.25) $_4$ où est $\eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) = \tau(x,t)$, par simplecalcul on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau_x \int_0^\infty g(s)\eta_x dsdx &= \int_0^1 \int_0^\infty g(s)(\eta_{ts} + \eta_{sx})\eta_x dsdx \qquad (3.3) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x\right|^2 dsdx + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^\infty g(s) \ \frac{\partial}{\partial t} \left|\eta_x\right|^2 dsdx. \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x\right|^2 dsdx - \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^\infty g'(s) \ \left|\eta_x\right|^2 dsdx. \end{aligned}$$

Maintenant, en multipliant $(2.25)_5$ par $\frac{\varsigma}{\tau}Z$ et intégrer le résultat sur $(0,1) \times (0,1)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\varsigma}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1 Z^2(x,\rho,t)d\rho dx &= -\frac{\varsigma}{2\tau}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}Z^2(x,\rho,t)d\rho dx \\ &= \frac{\varsigma}{2\tau}\int_0^1 (Z^2(x,0,t)-Z^2(x,1,t)) \\ &= \frac{\varsigma}{2\tau}\int_0^1 (v_t^2 - Z^2(x,1,t))\ . \end{aligned} \tag{3.4}$$

remplacement (3.3), (3.4) in (**??**) nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= -\left(\gamma_1 - \frac{\varsigma}{2\tau}\right)\int_0^1 (v_t^2(x,t)dx\frac{\varsigma}{2\tau}\int_0^1 Z^2(x,1,t)dx \\ &\quad \gamma_2\int_0^1 v_t(x,t)Z(x,1,t)dx + \frac{1}{2\tau}\int_0^1\int_0^\infty g'(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

en appliquant l'inégalité des jeunes dans (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &\le -\left(\gamma_1 - \frac{\varsigma}{2\tau} - \frac{\gamma_2}{2}\right)\int_0^1 (v_t^2(x,t)dx - \left(\frac{\varsigma}{2\tau} - \frac{\gamma_2}{2}\right)\int_0^1 Z^2(x,1,t)dx \\ &\quad + \frac{1}{2\tau_1}\int_0^1\int_0^\infty g'(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx. \end{aligned} \tag{3.6}$$

en utilisant (2.26) et (3.1) on obtient (3.2).

Lemme 0.2 *Le fonctionnel*

$$F_1(t) = \frac{\rho_2}{a_2} \int_0^1 (v_t u - v u_t),$$

satisfait, l'estimation

$$\begin{aligned} F\prime_1(t) \quad \leq \quad & -\frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \left(\frac{1}{a_2^2} \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - a_3 \right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \int_0^1 v_x^2 dx + \frac{\delta^2}{a_2^2} \int_0^1 \tau^2 dx \quad (3.7) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dx \quad + \quad \frac{\gamma_1^2}{a_2^2} \int_0^1 (v_t^2 dx \quad + \quad \frac{\gamma_2^2}{a_2^2} \int_0^1 Z^2(x,1,t) dx. \end{aligned}$$

preuve,en prenant la dérivée de F_1, en utilisant $(2.25)_1$ et $(2.25)_2$, on obtient

$$\begin{aligned} F\prime_1(t) \quad = \quad & -\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\rho_2}{\rho_1} \int_0^1 v_x^2 dx - \frac{\delta}{a_2} \int_0^1 u_x T dx + \frac{1}{a_2} \left(\frac{a_1 \rho_2}{\rho_1} - a_3 \right) \int_0^1 u_x v_x dx \quad (3.8) \\ & \frac{\gamma_1}{a_2} \int_0^1 v_t u dx \quad - \quad \frac{\gamma_2}{a_2} \int_0^1 Z(x,1,t) u dx \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de yoing, on obtient

$$\frac{\delta}{a_2}\int_0^1 u_x\tau dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 u_x^2dx+\frac{\delta^2}{a_2^2}\int_0^1 \tau^2dx, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{a_2}\left(\frac{a_1\rho_2}{\rho_1}-a_3\right)\int_0^1 u_xv_xdx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 u_x^2dx+\frac{1}{a_2^2}\left(\frac{a_1\rho_2}{\rho_1}-a_3\right)^2\int_0^1 v_x^2dx, \tag{3.10}$$

$$\frac{\gamma_1}{a_2}\int_0^1 v_tudx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 u^2dx+\frac{\gamma_1^2}{a_2^2}\int_0^1 v_t^2dx, \tag{3.11}$$

$$\frac{\gamma_2}{a_2}\int_0^1 Z(x,1,t)udx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 u^2dx+\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}\int_0^1 Z^2(x,1,t)dx \tag{3.12}$$

en substituant (3.9)-(3.12) dans (3.8), on obtient (3.7).

Lemme 0.3 *le fonctionnel*

$$F_2(t)=\frac{1}{\lambda}\left(a_1\rho_2\int_0^1 v_tvdx-a_2\rho_1\int_0^1 u_tvdx\right)+\frac{\gamma_1a_1}{2\lambda}\int_0^1 v^2dx,$$

satisfait, pour toute $\varepsilon_1 \succ 0$ petit, l'estimation

$$\begin{aligned}F\prime_2(t) \leq & -\frac{1}{2}\int_0^1 v_x^2dx+\varepsilon_1\int_0^1 u^2dx+\left(\frac{a_1\rho_2}{\lambda}-\frac{a_2^2\rho_1^2}{4\varepsilon_1\lambda^2}\right)+\int_0^1 v_t^2dx+\frac{a_1^2\delta^2}{\lambda^2}\int_0^1 \tau^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1 v^2dx\\ & +\frac{a_1^2\gamma_2^2}{2\lambda^2}\int_0^1 Z^2(x,1,t)dx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$\lambda=a_1a_3-a_2^2\succ 0.$$

preuve ,en prenant la dérivée de F_2, en utilisant $(2.25)_1$ et $(2.25)_2$, on obtient

$$\begin{aligned} F\prime_2(t) &= -\int_0^1 v_x^2 dx + \frac{a_1\rho_2}{\lambda}\int_0^1 v_t^2 dx - \frac{a_2\rho_1}{\lambda}\int_0^1 u_t v_t dx - \frac{a_1\delta}{\lambda}\int_0^1 v_x \tau dx \\ &\quad -\frac{a_1\gamma_2}{\lambda}\int_0^1 Z(x,1,t) v dx \end{aligned} \tag{3.14}$$

utiliser les inégalités de Young avec $\varepsilon_1 \succ 0$,

$$\begin{aligned} --\frac{a_2\rho_1}{\lambda}\int_0^1 u_t v_t dx &\leq \varepsilon_1 \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{a_2^2\rho_1^2}{4\varepsilon_1\lambda^2}\int_0^1 v_t^2 dx, & (3.15) \\ -\frac{a_1\delta}{\lambda}\int_0^1 v_x\tau dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 v_x^2 dx + \frac{a_1^2\delta^2}{\lambda^2}\int_0^1 \tau^2 dx, & (3.16) \\ \frac{a_1\gamma_2}{\lambda}\int_0^1 Z(x,1,t) v dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 v^2 dx + \frac{a_1^2\gamma_2^2}{2\lambda^2}\int_0^1 Z^2(x,1,t) dx. & (3.17) \end{aligned}$$

En substituant (3.15))-(3.17)) dans (3.14)),on obtient (3.13)). Supposons que g satisfait $(A2)$ alors, la fonctionnelle

$$F_3(t) = \frac{\rho_3}{\delta}\int_0^1 \tau \int_0^x v_t(\tau_1) d\tau_1 dx,$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \succ 0$ petit, l'estimation

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -\frac{1}{2}\int_0^1 v_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 v_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{g_0}{2\delta^2\tau_1^2}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx \\ &+\frac{\rho_3^2}{\rho_2^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_3}+\frac{a_3^2}{4\delta^2\varepsilon_2}+\frac{a_2^2}{4\delta^2\varepsilon_3}+\frac{\gamma_1^2}{\delta^2}+\frac{\gamma_2^2}{4\delta^2}\right)\int_0^1 \tau^2 dx + \int_0^1 Z^2(x,1,t)dx. \end{aligned}$$

preuve. en prenant la dérivé de F_3, en utilisant $(2.25)_2$ et $(2.25)_3$, on obtient

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\int_0^1 v_t^2 dx + \frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^1 \tau^2 dx + \frac{a_3\rho_3}{\delta\rho_2}\int_0^1 v_x\tau dx + \frac{a_2\rho_3}{\delta\rho_2}\int_0^1 u_x\tau dx \\ &-\frac{1}{\delta\tau_1}\int_0^1 v_t\int_0^\infty g(s)\ \eta_x dsdx - \frac{\rho_3\gamma_1}{\delta\rho_2}\int_0^1\tau\int_0^x v_t(\tau_1)d\tau_1 dx \\ &\frac{\rho_3\gamma_1}{\delta\rho_2}\int_0^1\tau\int_0^x Z(\tau_1,1,t)d\tau_1 dx. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités des Young avec $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \succ 0$,

$$\frac{a_3\rho_3}{\delta\rho_2}\int_0^1 v_x\tau dx \leq \varepsilon_2\int_0^1 v_x^2 dx + \frac{a_3^2\rho_3^2}{4\varepsilon_2\delta^2\rho_2}\int_0^1 \tau^2 dx, \tag{3.18}$$

$$\frac{a_2\rho_3}{\delta\rho_2}\int_0^1 u_x\tau dx \leq \varepsilon_3\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{a_2^2\rho_3^2}{4\varepsilon_3\delta^2\rho_2}\int_0^1 \tau^2 dx, \tag{3.19}$$

$$-\frac{\rho_3\gamma_1}{\delta\rho_2}\int_0^1 \tau\int_0^x v_t(\tau_1)d\tau_1 dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 v_t^2 dx + \frac{\rho_3^2\gamma_3^2}{\delta^2\rho_2^2}\int_0^1 \tau^2 dx, \tag{3.20}$$

$$-\frac{\rho_3\gamma_2}{\delta\rho_2}\int_0^1 \tau\int_0^x Z(\tau_1,1,t)d\tau_1 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 Z^2(\tau_1,1,t)dx + \frac{\rho_3^2\gamma_2^2}{2\delta^2\rho_2^2}\int_0^1 \tau^2 dx, \tag{3.21}$$

En appliquant successivement les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz pour le reste,en estimant et en utilisant le fait que g soit positif on trouve

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\delta\tau_1}\int_0^1 v_t\int_0^\infty g(s)\ \eta_x ds dx &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 v_t^2 + \frac{1}{2\delta^2\tau_1^2}\int_0^1\left(\int_0^\infty \sqrt{g(s)}\ \sqrt{g(s)}\eta_x ds\right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 v_t^2 + \frac{1}{2\delta^2\tau_1^2}\int_0^1\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^1 dx\int_0^\infty g(s)\ |\eta_x|^2 ds dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 v_t^2 + \frac{g_0}{2\delta^2\tau_1^2}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\ |\eta_x|^2 ds dx. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

en substituant (3.18)-(3.22) dans (??), on obtient (??).

Lemme 0.4 *supposons que g satisfait $(A2)$ alors, la fonctionnelle*

$$F_4(t) = -\frac{1}{g_0}\int_0^1 \tau \int_0^\infty g(s)\ \eta_x dsdx,$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_4 \succ 0$ petit, le devis

$$\begin{aligned} F_4'(t) \quad &\leq \quad -\frac{1}{2}\int_0^1 \tau^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 v_t^2 dx + \left(\frac{1}{\rho_3 \tau_1} + \frac{\delta^2}{4\rho_3^2 g_0 \varepsilon_4}\right)\int_0^1\int_0^\infty g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx \\ &\quad -\frac{g(0)}{2g_0^2}\int_0^1\int_0^\infty g'(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx. \end{aligned} \tag{3.23}$$

preuve. en prenant la dérivée de F_4 et en utilisant $(2.25)_3$ et $(2.25)_4$, on obtient

$$\begin{aligned} F_4'(t) \quad &= \quad -\int_0^1 \tau^2 dx + \frac{1}{\rho_3 g_0 \tau_1}\int_0^1 \left(\int_0^\infty g(s)\ \eta_x ds\right)^2 dx + \frac{\delta}{\rho_3 g_0}\int_0^1 v_t \int_0^\infty g(s)\ \eta_x dsdx \\ &\quad +\frac{1}{g_0}\int_0^1 \tau \int_0^\infty g(s)\ \eta_x dsdx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

En appliquant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz , avec $\varepsilon_4 \succ 0$on obtient

$$\frac{1}{\rho_3 g_0 \tau_1}\int_0^1 \left(\int_0^\infty g(s)\ \eta_x ds\right)^2 dx \quad \leq \quad \frac{1}{\rho_3 \tau_1}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx, \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{\rho_3 g_0}\int_0^1 v_t \int_0^\infty g(s)\ \eta_x dsdx \quad \leq \quad \varepsilon_4 \int_0^1 v_t^2 dx + \frac{\delta^2}{4\rho_3^2 g_0 \varepsilon_4}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx, \tag{3.26}$$

$$\frac{1}{g_0}\int_0^1 \tau \int_0^\infty g(s)\ \eta_x dsdx - \frac{1}{2}\int_0^1 \tau^2 dx - \frac{g_0}{2g_0^2}\int_0^1\int_0^\infty g'(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx. \tag{3.27}$$

En substituant (3.25)-(3.27) dans (3.24), on obtient (3.23).

Lemme 0.5 *le fonctionnel*

$$F_5(t) = -\int_0^1 u_t u dx,$$

satisfait, l'estimation

$$F_5'(t) \leq -\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{1}{2\rho_1}(2a_1 + a_2)\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{a_2}{2\rho_1}\int_0^1 v_x^2 dx. \tag{3.28}$$

preuve. en prenant la dérivée de F_5 et en utilisant $(2.25)_1$ et l'inégalité de Young , on obtient

$$\begin{aligned} F_5'(t) &= -\int_0^1 u_t^2 dx + \frac{a_1}{\rho_1}\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{a_2}{\rho_2}\int_0^1 u_x v_x dx \\ &\leq \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{1}{2\rho_1}(2a_1 + a_2)\int_0^1 u_x^2 dx + \frac{a_2}{2\rho_2}\int_0^1 v_x^2 dx. \end{aligned}$$

Lemme 0.6 *le fonctionnel*

$$F_6(t) = \tau \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau\rho} Z^2(x, \rho, t) d\rho dx.$$

satisfies, pour une constant positive m_2, l'enstimation

$$
\begin{aligned}
F_6'(t) &\leq -m_2\left(\int_0^1 Z(x,1,t)dx+\tau\int_0^1\int_0^1 e^{-\tau\rho}Z^2(x,\rho,t)d\rho dx\right)\\
&\leq \int_0^1 u_t^2dx+\frac{1}{2\rho_1}\left(2a_1+a_2\right)\int_0^1 u_x^2dx+\frac{a_2}{2\rho_2}\int_0^1 v_x^2dx. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

preuve. en prenant la dérivée de F_6 et en utilisant $(2.25)_5$, on obtient

$$
\begin{aligned}
F_6'(t) &= -2\tau\int_0^1\int_0^1 e^{-\tau\rho}Z(x,\rho,t)Z_\rho(x,\rho,t)d\rho dx\\
&= -\int_0^1\int_0^1 e^{-\tau\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}Z^2(x,\rho,t)d\rho dx\\
&= -\int_0^1\left(e^{-\tau\rho}Z^2(x,1,t)-Z^2(x,0,t)\right)dx-\tau\int_0^1\int_0^1 e^{-\tau\rho}Z^2(x,\rho,t)d\rho dx.\\
&= -e^{-\tau}\int_0^1 Z^2(x,1,t)dx-\tau\int_0^1\int_0^1 e^{-\tau\rho}Z^2(x,\rho,t)d\rho dx+\int_0^1 v_t^2dx
\end{aligned}
$$

en utilisant le fait $Z(x,0,t)=V_t(x,t)$ et $e^{-\tau}\leq e^{-\tau\rho}\leq 1$ pour tout $\rho\in[0,1]$, on obtient

$$
F_6'(t)\leq e^{-\tau}\left(\int_0^1 Z^2(x,1,t)dx+\tau\int_0^1\int_0^1 Z^2(x,\rho,t)d\rho dx\right)+\int_0^1 v_t^2dx,
$$

paramètre $m_2=e^{-\tau}$, on obtient (3.29). maintenant, nous définissons la fonctionnelle de lyapunov par

$$\xi(t) = NE(t) + \sum_{j=1}^{6} N_j F_j(t), \tag{3.30}$$

pour N et $N_j, j = 1, ..., 6$ sont des constantes positives et nous montrons que $\xi(t)$ est équivalent à la fonctionnelle énergétique E. on suppose g satisfait (A_2). alors, il existe deux constantes positives $a, b > 0$, tel que

$$E(t) \leq \xi(t) \leq bE(t), \quad t \geq 0. \tag{3.31}$$

preuve. en faisant un calcul simple basé sur la définition de $F_j = 1, ..., 6$ on obtient

$$\begin{aligned}
|\xi(t) - NE(t)| \quad \leq \quad & N_1 \frac{\rho_2}{|a_2|} \int_0^1 |v_t u - v u_t| \, dx + \frac{N_2}{\lambda} \left(a_1 \rho_2 \int_0^1 |v_t v| \, dx + |a_2| \, \rho_1 \int_0^1 |u_t v| \, dx \right) \\
& + \frac{\lambda \gamma_1}{2 \, |a_1|} \int_0^1 |v|^2 \, dx + N_3 \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \left| \tau \int_0^x v_t(\tau_1) d(\tau_1) \right| dx + \frac{N4}{g_0} \int_0^1 \left| \tau \int_0^\infty g(s) \eta(s) ds \right| dx \\
& + N_5 \int_0^1 |u_t u| \, dx + \tau \int_0^1 \left| e^{-\tau\rho} Z^2(x, \rho, t) \right| d\rho dx
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-schwarz et young,on arrive à

$$\begin{aligned}
|\xi(t) - NE(t)| \quad \leq \quad & \left(\frac{\rho_{2N_2}}{2a_2^2} + \frac{a_1^2 \rho_2^2 N_2}{2\lambda \rho_1} + \frac{\rho_3 N_3}{2\delta} \right) \int_0^1 v_t^2 dx + \left(\frac{\rho_{2N_1}}{2} + \frac{\rho_1 N_2}{\lambda} + \frac{\gamma_1 \lambda N_2}{2a_1} \right) \int_0^1 v^2 dx \\
& + \left(\frac{\rho_{2N_1}}{2a_2^2} + \frac{a_1^2 \rho_2^2 N_2}{2\lambda \rho_1} + \frac{N_5}{2} \right) \int_0^1 u_t^2 dx + \left(\frac{\rho_{2N_1}}{2} + \frac{N_5}{2} \right) \int_0^1 u^2 dx \\
& + \left(\frac{\rho_3 N_3}{2\delta} + \frac{N_\prime}{2} \right) \int_0^1 \tau^2 dx + \frac{N_\prime}{2g_0} \int_0^1 \int_0^\infty g(s) \; |\eta_x|^2 \, ds dx + N_6 \tau \int_0^1 \int_0^1 Z^2(x, \rho, t) d\rho d
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré's , c'est évident que

$$|\xi(t)-NE(t)|\leq \tau_2\int_0^1\left(v_t^2+u_t^2+v_x^2+u_t^2+\tau^2+\int_0^1 g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 dsdx+\int_0^1 Z(x,\rho,t)d\rho\right)dx \tag{3.32}$$

où

$$\tau_2=\begin{array}{c}\left\{\max\frac{\rho_{2N_1}}{2a_2^2}+\frac{a_1^2\rho_2^2N_2}{2\lambda\rho_1}+\frac{\rho_3N_3}{2\delta},\frac{\rho_{2N1}}{2a_2^2}+\frac{a_2^2\rho_2N_2}{2\lambda}+\frac{N_5}{2},c_p\left(\frac{\rho_{2N1}}{2a_2^2}+\frac{\rho_1N_2}{\lambda}+\frac{\gamma_1N_2}{2a_1}\right)\right.\\ \left.c_p\left(\frac{\rho_{2N1}}{2}+\frac{N_5}{2}\right),\frac{\rho_3N_3}{2\delta}+\frac{N_4}{2},+\frac{N_4}{2g_0},N_6\tau\succ 0.\right\}\end{array}$$

o\ù c_ρ c'est une constante de Poincaré. cependant, la fonctionnelle énergétique fornie par(3.1) peut être définié comme

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}\left[\rho_1u_t^2+\rho_2v_t^2+\frac{a_1}{2}\left(u_x+\frac{a_2}{a_1}v_x\right)^2+\frac{a_3}{2}\left(v_x+\frac{a_2}{a_3}u_x\right)^2+\frac{1}{2}\left(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\right)u_x^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2}\left(a_3-\frac{a_2^2}{a_1}\right)v_x^2+\rho_3\tau^2+\frac{1}{\tau_1}\int_0^\infty g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 ds+\varsigma\int_0^1 Z^2(x,\rho,t)d\rho dx\right]\\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^1\left[\rho_1u_t^2+\rho_2v_t^2+\frac{1}{2}\left(a_1-\frac{a_2^2}{a_3}\right)u_x^2+\frac{1}{2}\left(a_3-\frac{a_2^2}{a_1}v_x^2\right)\right.\\ &\quad\left.+\rho_3\tau^2+\frac{1}{\tau_1}\int_0^\infty g(s)\ \left|\eta_x\right|^2 ds+\varsigma\int_0^1 Z^2(x,\rho,t)d\rho\right]dx.\end{aligned} \tag{3.33}$$

il résulte de $a_1a_3\succ a_2^2$ et (3.33) que

$$E(t) \geq \tau^3 \int_0^1 \left[v_t^2 + u_t^2 + v_x^2 + u_x^2 + \tau^2 + \int_0^\infty g(s) \ \left|\eta_x\right|^2 ds + \varsigma \int_0^1 Z^2(x, \rho, t) d\rho \right] dx, \tag{3.34}$$

où

$$\tau^3 = \min \frac{1}{2} \left\{ \rho_1, \rho_2, \rho_3, \frac{1}{2} \left(a_1 - \frac{a_2^2}{a_3} \right), \frac{1}{2} \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right), \frac{1}{\tau_1}, \varsigma \right\} \succ 0.$$

En combinant (3.32) et (3.34) nous trouvons,

$$|\xi(t) - NE(t)| \leq \frac{\tau_2}{\tau_3} E(t),$$

ce implique que

$$\left[N - \frac{\tau_2}{\tau_3} \right] E(t) \leq \ \xi(t) \leq \left[N - \frac{\tau_2}{\tau_3} \right] E(t). \tag{3.35}$$

pour $N = a + \frac{\tau_2}{\tau_3}$ donne.(3.31),où $a \succ 0$ et $b = a + \frac{2\tau_2}{\tau_3}$.

Maintenant, nous énoncons et démontrons notre résultat de stabilité.

Théorème 0.1 *supposons que g satisfait (A_2) et que $\gamma_2 \prec \gamma_1$ soit vérifié. Alors, il existe deux constantes positives α_1 et $\alpha_2$teelles queque l'énergie désignée par (3.1)satis fait*

$$E(t) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}, \forall t \geq 0. \tag{3.36}$$

*peuve.En différenciant l'équation (3.30),en rappelant les équations (3.2),(3.7),(3.13),(**??**),(3.23), en prendre*

$$N_5 = 2, \varepsilon_1 = \frac{1}{N_2}, \varepsilon_2 = \frac{\omega N_2}{2N_3}, \varepsilon_3 = \frac{\omega N_1}{N_2}, \varepsilon_4 = \frac{N_3}{8N_4}, \varepsilon_6 = \frac{N_3}{8N_6},$$

Nous arrivons à

$$
\begin{aligned}
\xi'(t) \quad \leq \quad & \left[\frac{N}{2\tau_1} - \frac{g(0)N_4}{2g_0^2}\right] \int_0^1 \int_0^\infty g'(s) \ \left|\eta_x\right|^2 dsdx - \left[\frac{\omega N_1}{2} - \frac{2a_1 + a_2}{\rho_1}\right] \int_0^1 u_x^2 dx \\
& - \left[-\frac{\omega N_2}{2} - \left(\frac{1}{a_2^2}\left(\frac{a_1\rho_2}{\rho_1} - a_3\right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) N_1 - \frac{a_2}{\rho_1}\right] \int_0^1 v_x^2 dx \\
& - \left[\frac{N_3}{2} + Nm_0 - \frac{N_1\gamma_1^2}{a_2^2} - N_2\left(\frac{a_1\rho_2}{\lambda} + \frac{a_2^2\rho_1^2 N_2}{4\lambda^2}\right)\right] \int_0^1 v_t^2 dx \\
& - \left[\frac{N_4}{2} - \frac{N_1\delta^2}{a_2^2} - \frac{N_1 a_1^2\delta^2}{\lambda^2} - \frac{N_3\rho_3^2}{\rho_2^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_3} + \frac{N_3 a_3^2}{2\delta^2 w N_2} + \frac{N_3 a_2^2}{2\delta^2 w N_1} + \frac{\gamma_1^2}{\delta^2} + \frac{\gamma_2^2}{4\delta^2}\right)\right] \int_0^1 \tau^2 dx \\
& - \left[m_0 N - \left(1 - \frac{m_2}{8}\right) N_3 - \frac{\gamma_2^2 N_1}{a_2^2} - \frac{a_1^2\gamma_2^2 N_2}{2\lambda^2}\right] \int_0^1 Z^2(x,\rho,t)dx - \int_0^1 u_t^2 dx \\
& + \left[\frac{g_0 N_3}{\delta^2\tau_1^2} + \left(\frac{1}{\rho_3\tau_1} + \frac{2\delta^2 N_4}{\rho_3^2 g_0 N_3}\right) N_4\right] \int_0^1 \int_0^\infty g(s) \ \left|\eta_x\right|^2 dsdx - \frac{\tau_1 N_3}{8} \int_0^1 \int_0^1 Z^2(x,\rho,t)d\rho dx
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous choisissons N_1, N_2, N_3et N_1quatre constantes suffisamment grandes pour que

$$
\begin{cases}
\frac{wN_1}{2} - \frac{2a_1+a_2}{\rho_1} \succ 0, \\
\frac{\omega N_2}{2} - \left(\frac{1}{a_2^2}\left(\frac{a_1\rho_2}{\rho_1} - a_3\right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) N_1 - \frac{a_2}{\rho_1} \succ 0, \\
\frac{N_3}{2} - \frac{N_1\gamma_1^2}{a_2^2} - N_2\left(\frac{a_1\rho_2}{\lambda} + \frac{a_2^2\rho_1^2 N_2}{4\lambda^2}\right) \succ 0, \\
\frac{N_4}{2} - \frac{N_1\delta^2}{a_2^2} - \frac{N_2 a_1^2\delta^2}{\lambda^2} - \frac{N_3\rho_3^2}{\rho_2^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_3} + \frac{N_1 a_3^2}{2\delta^2 w N_2} + \frac{N_1 a_1^2}{2\delta^2 w N_1} + \frac{\gamma_1^2}{\delta^2} + \frac{\gamma_2^2}{4\delta^2}\right) \succ 0,
\end{cases}
$$

enfin ,en prenant

$$
N = \max\left\{a + \frac{\tau_2}{\tau_3}, 2\tau_1\left(a + \frac{g(0)N_4}{2g_0^2}\right), \frac{d}{m_0}\right\},
$$

où

$$d=\left(1-\frac{m_2}{2}\right)N_3+\frac{\gamma_2^2N_1}{2}+\frac{a_1^2\gamma_2^2N_2}{2\lambda^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\xi'(t) &\leq -\beta_1\int_0^1\left(u_t^2+u_x^2+v_t^2+v_x^2+\tau^2+\int_0^1 Z^2(x,\rho,t)d\rho+\int_0^\infty g(s)\;|\eta_x|^2\,ds\right)dx\\ &\leq -\beta_2E(t), \qquad \forall t\geq 0,\end{aligned}$$

pour certaines constantes positives $\beta_1$et β_2. Du lemme 8, nous conclunons que

$$\xi'(t)\leq -r_1\xi'(t),\forall t\geq 0, \tag{3.37}$$

où $r_1=\frac{\beta_2}{b}\succ 0$.une simple intégration de (3.37) donne

$$\xi(t)\leq \xi(0)e^{-r_1t},\forall t\geq 0.$$

En appliquant à nouveau le lemme 8, nous obtenons le résultat souhaité(3.36).

En conclusion, on peut dire que l'étude de la stabilité exponentielle du système thermoélastique Lord-sholman avec amortissemant poreux et présence du terme de retard met en évidence l'importance de l'interaction entre la thermodynamique et l'élasto-mécanique dans les systèmes multicouches les résultats obtenus montrent comment le retard et l'amortissement peuvent affecter de manière significative la stabilité du système ouvert de nouveaux horizons pour le développement de techniques de control dans les systèmes complexes cette étude est une étape importante vers une compéhension approfondie des interctions thermomécaniques et de leurs applications dans les domaines de l'industrie et de l'ingénierie de pointe.

BIBLIOGRAPHIE

[1]

[1] E. Ait Benhassi, K. Ammari, S. Boulite, et L. Manier. Stabilisation par rétroaction d'une classe d'équations d'évolution avec retard . Journal de l'équation d'évolution , 9 :103-121, 2009.

[2] M. Aouadi, M. Ciarletta, et F. Passarella. théorie thermoélectrique avec microtempératures et thermodynamique dissipative.journal des contraintes thermiques , 41(4) :522-542, 2018.

[3] T. A. Apalara et S. A. Messaoudi. un résultat de stabilité exponentielle d'un système Timochenko avec thermoélectricité avec deuxième son

et en présence de retard . Mathématiques appliquées et Optimisation, 71 :449-472, 2015.

[4]T. A. Apalara, A. Soufyane, et M. Afilal. sur la bonne position et la décroissance exponentielle des milieux thermoélastiques poreux gonflants avec deuxième son .journal d' analyse mathématique et d' applications mathématiques, 510(2) :126006, 2022.

[5] T. A. Apalara, M. O. Yusuf, S. E. Mukiawa, et O. B. Almutairi. stabilisation exponentielle des systèmes poreux gonflants avec thermo-amortissement élastique . Journal de l'université des science du Roi saud, 35(1) :102460, 2023.

[6] T. A.-A. Apalara et O. B. Almutairi. Bien posé et stabilité exponentielle du gonflement poreux avec thermoélastique gurtin-pipkin -ité. Mathématiques, 10(23) :4498, 2022.

[7] N. Bazarra, J. R. Fernàndez, et R. Quintanilla. thermoélectricité lord-Shulman avec microtempératures . Mathématiques appliquées & Optimisation, 84(2) :1667-1685, 2021.

[8] A. Bedford et D. S. Drumheller. Théories des mélanges non miscibles et structurés. Revue Internationale des sciences de l'ingénieur , 21(8) :863-960, 1983.

[9] L. Bouzettouta et D. Abdelhak. stabilisation exponentielle du faisceau complet de von

Kármán par un effet thermique et un amortissement par frottement et retard distribué. Journal de physique mathématique , 60(4), 2019

[10] L. Bouzettouta, F. Hebhoub, K. Ghennam, et S. Benferdi. stabilité exponentielle pour un système timoshenko non linéaire avec distribution retard . Revue Internationale d'analyse et d'applications, 19(1) :77-90, 2021.

[11] F. Dell'Oro. Stabilité asymptotique des systèmes thermoélastiques de type bresse.

Journal d'équations différentielles, 258(11) :3902-3927, 2015

[12]F. Dell'Oro. sur la stabilité des systèmes de Bresse et timochenko à conduction thermique hyperbolique. Journal d'équations différentielles, 281 :148-198, 2021.

[13] F. Dell'Oro et V. Pata. sur la stabilité des systèmes timochenko avec la loi thermique de Gurtin-pipkin . Journal d'équations différentielles, 257(2) :523-548, 2014.

[14] B. Feng et M. L. pelicer. Existence globale et stabilité exponentielle pour un système Timochenko non linéaire avec retard. valeur limite Problèmes ,

2015(1) :1-13, 2015.

[15] H. D. Fernández Sare et R. Racke. sur la stabilité des systèmes timochenko : loi de Cattaneo versus loi de Fourier.

Archive pour Rational Mécanique et analyse , 194 :221-251, 2009.

[16] M. E. Gurtin et A. C. pipkin. une théorie générale de la conduction thermique avec des vitesses d'onde finies. Archive pour la mécanique rationnelle et Analyse ,

31 :113-126, 1968.

[17]D. Hanni, B. Feng, et K. Zennir. stabilité du système timochenko couplée à la loi thermique de Gurtin-pipkin affectant la force de cisaillement. Analyse Applicable, 101(15) :5171-5192, 2022.

[18] J. Hao et F. Wang. désintégration énergétique dans un système de type Timochenko pour la thermoélasticité de type III avec retard distribué et historique. 2018.

[19]M. Kafini, S. A. Messaoudi, M. I. Mustafa, et T. Apalara. la bonne position et la stabilité se traduisent par un système de type Timoshenko. thermoélasticité de type III avec retard. Zeitschrift für angewabndte Mathematik und physik, 66 :1499-1517, 2015.

[20] B. Kalantari et coll. lngénierie significative des sols gonflants. Revue de recherche en sciences applicquées, ingénierie et Technologie, 4(17) :2874-2878, 2012.

[21] H. E. Khochemane, L. Bouzettouta, et A. Guerouah. Décroissance Exponentielle et bonne position pour un élastique poreux unidimensionnel système à retard distribué. Analyse applicable, 100(14) :2950-2964, 2021.

[22] K. Mpungu, T. A. Apalara, et M. Muminov. sur la stabilisation des poutres lamellées avec retard. Applications des Mathématiques, 66 :789-812, 2021.

[23]S. Nicaise et C. Pignotti. Résultats de stabilité et d'instabilité de l'équation d'onde avec un terme de retard dans la frontière ou une alimentation interne dos. SIAM journal sur le contrôle et l'optimisation, 45(5) :1561-1585, 2006

[24] S. Nicaise et C. Pignotti. stabilisation de l'équation d'onde avec retard aux limites ou interne distribué. 2008.

[25] J.-P. Richard. systèmes temporisés : un aperçu de quelques avancées récentes et problèmes ouverts. automatique, 39(10) :1667-1694, 2003.

[26]J. E. M. Rivera et R. Racke. systèmes Timochenko non linéaires légèrement dissipatifs-existence mondial et stabilité exponentielle. journal de Analyse mathématique et applications, 276(1) :248-278, 2002.

[27] M. Saintos, D. A. Jùnior, et J. M. Rivera. le numéro de stabilité du système timochenko avec deuxième son. journal du équations différentiel ,253(9) :2715-2733, 2012.

[28] H. suh et Z. Bien. utilisation d'actions temporisées dans la conception des contrôleur .Transactions IEEE sur le contrôle automatique , 25(3) :600-603, 1980