

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Bifurcation zéro-Hopf dans un système générateur de spin nucléaire

Option : COSD

Par :

*Sakhri Larnene Ryene*

Encadré par : Boulfoul Amel

MCA U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Debz Nassima

Examineur: Mellahi Nawal

MCB U. SKIKDA

MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023



## REMERCIEMENT

*Tout d'abord nous tenons à remercies « DIEU » de nous avoir donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce travail.*

*La première personne que nous tenons à remercier est mon encadreur Dr « Boulfoul Amel », pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être même bon port.*

*On remercie les membres du jury « Debz Nassima et Mellahí Nawal » pour avoir accepté examiner ce travail.*

*Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité.*

## DEDICACE

*Avec tout respect et amour je dédie ce travail :*

*A mon cher père « **El\_Foudile** » : c'est le premier et le dernier homme de ma vie, qui a toujours en un soutien et sans qui je n'aurais pas atteint ce que je suis aujourd'hui.*

*A ma chère mère « **Noura** » : Tu es la lumière de ma vie, la flamme de mon cœur, je t'adore maman.*

*Je demande à dieu de les protéger pour moi.*

*Sans oublier :*

*Mes frères : MEHDI, ADEL*

*Mes sœurs : BOUTHEINA, MERJEM, CHAIMA*

*Mon cousin « **KHALED** »*

*A toute ma famille et mes amies.*

*Je vous dit merci beaucoup, je vous souhaite la santé, le bonheur et surtout la réussite, je vous aime.*

## ملخص

في هذه المذكرة سندرس الحلول الدورية التي تتشعب من نقطة استقرار صفر-اوف

للنظام التفاضلي:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - kz), \\ \dot{z} = \beta(\alpha(1 - z) - ky^2), \end{cases}$$

بحيث  $\alpha, \beta$  و  $k$  وسائط حقيقية كلية .

نستعمل نظرية المتوسط من الصنف الاول و الثاني و هي وسيلة كلاسيكية لدراسة سلوك

انظمة ديناميكية غير خطية و بالخصوص مداراتهم الدورية.

كلمات مفتاحية: نظام ديناميكي، حل دوري، طريقة المتوسط، نظام الدوران النووي.

Dans ce mémoire, nous étudions les solutions périodiques qui bifurquent du point d'équilibre zéro-Hopf pour le système différentiel générateur de spin nucléaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - kz), \\ \dot{z} = \beta(\alpha(1 - z) - ky^2), \end{cases}$$

avec  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $k$  sont paramètres arbitraires réels.

En utilisant la méthode de moyennisation du première et deuxième ordre qui est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaire, et en particulier leur orbites périodiques.

**Mots clés :** Système générateur de spin nucléaire, bifurcation zéro-Hopf, orbites périodiques, méthode de moyennisation.

In this work, we study the periodic solutions bifurcating from a zero-Hopf equilibrium for the differential system of nuclear spin generator :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - kz), \\ \dot{z} = \beta(\alpha(1 - z) - ky^2), \end{cases}$$

with  $\alpha, \beta$  and  $k$  are real arbitrary parameters.

By using the averaging method which is a classical tool to study the behavior of nonlinear dynamic system, and in particular their periodic orbits.

**Key words :** Dynamical system, periodic solution, averaging method, nuclear spin generator system.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Système dynamique . . . . .	11
1.3 Flot . . . . .	12
1.4 Point d'équilibre . . . . .	12
1.5 Orbites périodiques et cycles limites . . . . .	13
1.6 Théorie de bifurcation . . . . .	13
1.6.1 Bifurcation de Hopf . . . . .	14
1.7 Méthode de moyennisation du première et deuxième ordre . . . . .	16
<b>2 Bifurcation zéro-Hopf dans un système générateur de spin nucléaire par la méthode de moyennisation du première ordre</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Point zéro-Hopf . . . . .	19
2.3 Bifurcation zéro-Hopf du première ordre . . . . .	20

<b>3</b>	<b>bifurcation zéro-Hopf dans un système générateur de spin nucléaire par la méthode de moyennisation du deuxième ordre</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Bifurcation zéro-Hopf du deuxième ordre . . . . .	31

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques, biologiques, chimiques et économiques qui peuvent évoluer dans le temps.

La théorie des systèmes dynamiques est née avec les travaux de H.Poincaré autour des années 1881-1890. Cette évolution est décrite par des équations différentielles ou des applications. L'étude des systèmes dynamiques traite donc l'évolution temporelle des systèmes physiques....,etc.

Un des principaux problèmes de la théorie des systèmes dynamiques est l'étude des solutions périodiques, leur existence, leur nombres et leur stabilité. Les cycles limites des champs de vecteurs planaires ont défini par H.Poincaré. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Andronov ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de type vide était un cycle limite. Un cycle limite d'un système dynamique est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des solutions périodiques de ce système. La bifurcation zéro-Hopf est un outil important pour détecter l'existence des solutions périodiques qui dépend d'un paramètre " $\mu$ ". En général, le point zéro-Hopf est un équilibre qui a deux valeurs propres imaginaires pures et  $n - 2$  valeurs propres nuls.

Un autre outil est la méthode de moyennisation qui consiste à donner une relation quantita-

tive entre les solutions d'un certain système différentiel périodique et celles de son système différentiel moyenné. Cette méthode à été developpée par Verhulst Malkin et Sanders (1956), Bogoliubov et Mitropolski (1961), Roseau (1966), Llibre et Buica (2004), elle est l'une des plus importantes méthodes de perturbation utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques (voir [4]).

Le travail réalisé dans ce mémoire se divisé en trois chapitres :

**Le premier chapitre :** Ce chapitre est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de ce mémoire. On présentera la définition du système dynamique et d'un point d'équilibre. Ensuite on donnera la définition d'orbite périodique et d'un cycles limites. Enfin, on citera la bifurcation et la bifurcation de Hopf.

**Le deuxième chapitre :** Nous introduisons un petit rappelle sur le point zéro-Hopf. Ensuite, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf du système générateur de spin nucléaire par la méthode de moyennisation du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - kz), \\ \dot{z} = \beta(\alpha(1 - z) - ky^2), \end{cases} \quad (1)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $k$  sont des paramètres réelles.

**Le troisième chapitre :** Dans ce chapitre, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf du système générateur de spin nucléaire (1) par la méthode de moyennisation du second ordre.

# CHAPITRE 1

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques, qui seront utiles par la suite.

### 1.2 Système dynamique

Un système dynamique est un phénomène qui évolue au cours du temps. Cette évolution est décrite généralement par des équations différentielles ordinaires. Il peut être également :

- autonome : si l'évolution ne dépend pas du temps.
- non autonome : si l'évolution dépend du temps .

**Définition 1.2.1** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  définie qui vérifie :*

□  $U(t, \mathbf{x}) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.

□  $U(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

$$\square U(t + s, \mathbf{x}) = U(t, U(s, \mathbf{x})) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

### 1.3 Flot

**Définition 1.3.1** *Soit le système non linéaire autonome :*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ . On appelle *flot* du système différentiel (1.1), l'ensemble des applications  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0),$$

où  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  est la solution (1.1) telle que  $\phi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ .

### 1.4 Point d'équilibre

**Définition 1.4.1** *Soit le système différentiel :*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

On appelle *point d'équilibre* ou *point critique* ou *point stationnaire* du système dynamique, tout point  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que :  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

## 1.5 Orbites périodiques et cycles limites

**Définition 1.5.1** *On appelle solution périodique toute solution  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{t})$  de l'équation (1.1) telle qu'il existe un nombre  $\mathbf{T} > \mathbf{0}$  vérifiant*

$$\phi(\mathbf{t} + \mathbf{T}) = \phi(\mathbf{t}), \quad (1.2)$$

*le plus petit réel  $\mathbf{T} > \mathbf{0}$  qui vérifie (1.2) est appelé période.*

*Une solution périodique du système (1.1) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.*

**Définition 1.5.2** *Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée. Ceci signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées. Elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.*

**Remarque 1.5.1** *Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle limite est dit stable ou attractif, sinon il est dit instable.*

**Remarque 1.5.2** *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaire.*

## 1.6 Théorie de bifurcation

Les systèmes d'équations différentielles paramétrés peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tend vers un équilibre, un cycle limite...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Ils existent certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre. Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur associée du paramètre est appelé valeur de bifurcation.

La théorie des bifurcations des champs de vecteurs a pour but de décrire les modifications du portrait de phases des champs de vecteurs qui dépendent différemment d'un paramètre  $\mu$ .

### 1.6.1 Bifurcation de Hopf

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.3)$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(E)$ ,  $E$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . La bifurcation désigne tout changement qualitatif du comportement des solutions de système quand le paramètre  $\mu$  change. La valeur  $\mu_0$  pour laquelle  $f(x, \mu_0)$  n'est pas structurellement stable est dite valeur de bifurcation.

**Théorème 1.6.1** *On considère le système (1.3) et supposons qu'il existe pour chaque valeur de  $\mu$  un équilibre  $\phi(\mu)$ . On note  $Df_\mu$  la matrice Jacobienne de  $f$  en  $\phi(\mu)$  et suppose que toutes les valeurs propres de  $Df_\mu$  sont à parties réelles strictement négatives sauf une paire  $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$  telle que*

- $\beta(0) \neq 0$ .
- $\mu = 0 \Rightarrow \alpha(\mu) = 0$ .
- $\mu < 0 \Rightarrow \alpha(\mu) < 0$ .
- $\mu > 0 \Rightarrow \alpha(\mu) > 0$ .
- $\alpha' > 0$ .
- pour  $\mu = 0$  équilibre est stable.

*Alors le système (1.3) possède un cycle limite stable.*

**Exemple 1.6.1** Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2), \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Le point  $(0,0)$  est un point d'équilibre unique de ce système.

La linéarisation de système (1.3) à l'origine est :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (1.5)$$

La jacobienne en  $(0,0)$  est donnée par :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = (\lambda)^2 + 1.$$

Alors les valeurs propres sont  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , on a  $\mathbf{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$  et  $\mathbf{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm 1$ .

Pour  $\mathbf{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ , l'origine est un point non hyperbolique, on ne peut rien dire. Dans ce cas, pour déterminer la stabilité de l'origine considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \in C^1,$$

donc

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)^2.$$

$\frac{\partial V}{\partial t}$  est strictement négative, donc l'origine est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

On effectue le changement en coordonnées polaires  $(r, \theta) : x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$ .

Finalement, le système (1.3) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \theta' = -1, \\ r' = r(\mu - r^2). \end{cases} \quad (1.6)$$

- pour  $\mu$  négatif l'origine est l'unique équilibre est un foyer stable du système.
- pour  $\mu = 0$  l'origine est un équilibre asymptotiquement stable.
- pour  $\mu > 0$  l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable qui le cercle de rayon  $\sqrt{\mu}$ .

## 1.7 Méthode de moyennisation du première et deuxième ordre

La théorie de moyennisation est une théorie classique à été introduit pour la première fois par **Krylov** et **Bogoliubov** en 1930. Cette théorie utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques.

Elle donne des conditions pour les quelle les points singuliers du système moyenné autonome fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels non autonomes.

Elle s'applique aux systèmes de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

où  $\varepsilon$  est suffisamment petit, et  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  est  $T$ -périodique en la première variable. Pour d'informations sur cette théorie voir le livre de **Sanders, Verhulst**.

**Théorème 1.7.1** *Considérons le système différentiel :*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon \mathbf{R}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{R}_2(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^3 \mathbf{R}_3(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 : \mathbf{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{R}_3 : \mathbf{R} \times D \times (-\varepsilon \mathbf{R}_1, \varepsilon \mathbf{R}_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à la première variable.  $D$  est sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que :

(i)  $\mathbf{R}_1(t, \cdot), \mathbf{R}_2(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(D)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, D_x \mathbf{R}_1$  et  $D_x \mathbf{R}_2$  sont localement Lipschitz par rapport à  $x$ .  $\mathbf{R}_3$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ , on définit  $\mathbf{R}_{10}, \mathbf{R}_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{10} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{R}_1(s, z) ds, \\ \mathbf{R}_{20} &= \frac{1}{T} \int_0^T [D_z \mathbf{R}_1(s, z) \int_0^s \mathbf{R}_1(t, z) dt + \mathbf{R}_1(t, z)] ds. \end{aligned}$$

(ii) pour  $V \subset D$  un ensemble ouvert et borné et pour chaque  $\varepsilon \in (-\varepsilon \mathbf{R}_1, \varepsilon \mathbf{R}_1) \setminus (0)$ , il existe  $\mathbf{p} \in V$  tel que  $\mathbf{R}_{10}(\mathbf{p}) + \varepsilon \mathbf{R}_{20}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  et

$$\det \left( \frac{\partial (\mathbf{R}_{10} + \varepsilon \mathbf{R}_{20})}{\partial z} \right) \Big|_{z=\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Alors pour  $|\varepsilon| > \mathbf{0}$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  du système

(1.8) telle que  $\varphi(\mathbf{0}, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{p}$ .

-Si la fonction  $\mathbf{R}_{10}$  et  $\mathbf{R}_{20}$  ne sont pas identiquement nulles. Alors les zéros de  $\mathbf{R}_{10} + \varepsilon\mathbf{R}_{20}$  sont principalement les zéros de  $\mathbf{R}_{10}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Dans ce cas le théorème est dit la méthode de moyennisation du première ordre.

- Si la fonction  $\mathbf{R}_{10}$  est identiquement nulle et  $\mathbf{R}_{20}$  n'est pas identiquement nulle, ensuite les zéros de  $\mathbf{R}_{10} + \varepsilon\mathbf{R}_{20}$  sont les zéros de  $\mathbf{R}_{20}$ . Le théorème est dit la méthode de moyennisation du second ordre.

Selon la théorie de moyennisation du première ordre, pour l'équation différentielle moyennée on  $\mathbf{D}$  :

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon\mathbf{R}_{10}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.9)$$

où

$$\mathbf{R}_{10}(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{R}_1(t, \mathbf{y}) dt.$$

La stabilité de la solution périodique  $\varphi(\mathbf{t}, \varepsilon)$  peut être déterminée par la stabilité du point d'équilibre  $\mathbf{p}$  du système moyennée (1.9). C'est-à-dire que le point d'équilibre  $\mathbf{p}$  présente le comportement de stabilité de l'application de Poincaré associée à la solution périodique  $\varphi(\mathbf{t}, \varepsilon)$ . Dans la théorie de moyennisation du deuxième ordre, où  $\mathbf{R}_{10} \equiv \mathbf{0}$  et  $\mathbf{R}_{20}$  ne sont pas identiquement nulles, la stabilité de la solution périodique  $\varphi(\mathbf{t}, \varepsilon)$  est donnée par la stabilité du point d'équilibre  $\mathbf{p}$  du système moyennée.

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon^2\mathbf{R}_{20}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Où le point d'équilibre  $\mathbf{p}$  est associée à l'application de Poincaré de la solution périodique  $\varphi(\mathbf{t}, \varepsilon)$  (voir [1],[7]).

## CHAPITRE 2

# BIFURCATION ZÉRO-HOPF DANS UN SYSTÈME GÉNÉRATEUR DE SPIN NUCLÉAIRE PAR LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIÈRE ORDRE

## 2.1 Introduction

*Dans ce chapitre, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf dans un système générateur de spin nucléaire. Nous cherchons l'existence d'orbites périodiques qui bifurquent d'un point zéro-Hopf du système par la méthode de moyennisation du première ordre.*

## 2.2 Point zéro-Hopf

*Définition 2.2.1* Un équilibre d'un système différentiel

$$\dot{x} = f(x),$$

avec  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $A$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est appelé un équilibre zéro-Hopf, s'il a deux valeurs propres imaginaires pures et  $n - 2$  valeurs propres nulles.

## 2.3 Bifurcation zéro-Hopf du première ordre

Cherchons les solutions périodiques d'un système générateur de spin nucléaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - kz), \\ \dot{z} = \beta(\alpha(1 - z) - ky^2), \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $k$  sont des paramètres réels.

**Théorème 2.3.1** Il existe deux familles de système générateur de spin nucléaire, où  $p_1(0, 0, 1)$  est un point d'équilibre zéro-Hopf.

□ Si  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $k = 2$ .

□ Si  $\beta = 0$ .

### Preuve du théorème 2.3.1

Montrons que  $p_1(0, 0, 1)$  est un point d'équilibre zéro-Hopf.

□ Soit :  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $k = 2$ . Le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - 2z), \\ \dot{z} = -2\beta y^2. \end{cases} \quad (2.2)$$

La matrice jacobienne du système (2.1) en  $\mathbf{p}_1(0, 0, 1)$  est :

$$A = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ -1 & -\beta + 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_1(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\beta - \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \beta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + (1 - \beta^2)).$$

On pose :  $1 - \beta^2 = w^2$ , alors le polynôme caractéristique devient :

$$P_1(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + w^2).$$

Les valeurs propres associées sont :  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\beta^2 - 1}$ .

Si  $1 - \beta^2 < 0$ , alors les valeurs propres du système (2.1) en  $\mathbf{p}_1(0, 0, 1)$  deviennent une valeur propre nulle ( $\lambda_1 = 0$ ), et deux valeurs imaginaires pures ( $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\beta^2 - 1}$ ).

D'où le point  $\mathbf{p}_1(0, 0, 1)$  est un point d'équilibre zéro-Hopf si  $1 - \beta^2 < 0$ .

□ Si :  $\beta = 0$ ,  $w^2 = 1$ . Le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{x}, \\ \dot{\mathbf{z}} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

La matrice jacobienne du système (2.4) en  $(0,0,1)$  est :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_2(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1).$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

Donc, si  $\beta = 0$ , on a deux valeurs propres imaginaires pures ( $\lambda_{1,2} = \pm i$ ) et une valeur propre nulle ( $\lambda_1 = 0$ ). Alors dans ce cas le point  $\mathbf{p}_1(0, 0, 1)$  est un point zéro-Hopf.

Dans les théorèmes suivants, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf produisant une orbite périodique à partir du point d'équilibre zéro-Hopf  $(0,0,1)$ .

**Théorème 2.3.2** Soit  $\beta = \sqrt{1 - w^2} + \beta_1\varepsilon$ ,  $\alpha = \alpha_1\varepsilon$ ,  $k = 2 + k_1\varepsilon$ .

Si  $1 - w^2 > 0$ ,  $\varepsilon_1 k_1 > 0$ , le système générateur de spin nucléaire (2.1) a une bifurcation zéro-Hopf en  $(0,0,1)$  et un cycle limite en ce point d'équilibre lorsque  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

## Preuve du théorème 2.3.2

Soit  $\beta = \sqrt{1 - w^2} + \beta_1 \varepsilon$ ,  $\alpha = \alpha_1 \varepsilon$ ,  $k = 2 + k_1 \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

Le système (2.1) dans ce cas s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)x + y, \\ \dot{y} = -x - (\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)y(1 - (2 + \varepsilon k_1)z), \\ \dot{z} = (\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)(\varepsilon \alpha_1(1 - z)) - (2 + \varepsilon k_1)y^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ou bien

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)x + y, \\ \dot{y} = -x - (\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon k_1)y + (2 + \varepsilon k_1)(\sqrt{1 - w^2} + \beta_1 \varepsilon)zy, \\ \dot{z} = -(2 + \varepsilon k_1)(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)y^2 - \varepsilon \alpha_1(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)z \\ + \varepsilon \alpha_1(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1). \end{cases} \quad (2.5)$$

D'abord, on prend le changement de variables :  $x = X, y = Y, z = Z + 1$ .

Ensuite, en effectuant un autre changement de variables :  $X = \varepsilon U, Y = \varepsilon V, Z = \varepsilon W$ . Le système (2.5) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{U} = -(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)\varepsilon U + \varepsilon V, \\ \varepsilon \dot{V} = -\varepsilon U - (\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)\varepsilon V + (2 + \varepsilon k_1)(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)\varepsilon V(\varepsilon w + 1), \\ \varepsilon \dot{W} = -(\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)(2 + \varepsilon k_1)(\varepsilon V)^2 - (\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)\varepsilon \alpha_1(\varepsilon W + 1) \\ + (\sqrt{1 - w^2} + \varepsilon \beta_1)\varepsilon \alpha_1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous obtenons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = -\sqrt{1-w^2}U + V - \varepsilon\beta_1U, \\ \dot{V} = -U + \sqrt{1-w^2}V + \varepsilon((2\beta_1 + k_1\sqrt{1-w^2})V + 2\sqrt{1-w^2}WV) \\ + \varepsilon^2(k_1\beta_1V + (2\beta_1 + k_1\sqrt{1-w^2})WV + \varepsilon^3(k_1\beta_1WV), \\ \dot{W} = \varepsilon(-2\sqrt{1-w^2}V^2 - \alpha_1\sqrt{1-w^2}W) + \varepsilon^2(-k_1\sqrt{1-w^2}V^2 - 2\beta_1V^2 - \alpha_1\beta_1W) \\ + \varepsilon^3(-\beta_1k_1V^2). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Finalement, le système (2.5) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = -\sqrt{1-w^2}U + V + \varepsilon F_{11}(U, V, W), \\ \dot{V} = -U + \sqrt{1-w^2}V + \varepsilon F_{21}(U, V, W) + \varepsilon^2 F_{22}(U, V, W) \\ + \varepsilon^3 F_{23}(U, V, W), \\ \dot{W} = \varepsilon F_{31}(U, V, W) + \varepsilon^2 F_{32}(U, V, W) + \varepsilon^3 F_{33}(U, V, W), \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où

$$F_{11} = -\beta_1U,$$

$$F_{21} = V(\beta_1 + \sqrt{1-w^2}(2W + k_1)),$$

$$F_{22} = V(W(k_1\sqrt{1-w^2} + 2\beta_1) + \beta_1k_1),$$

$$F_{23} = V\beta_1k_1W,$$

$$F_{31} = -\sqrt{1-w^2}(2V^2 + \alpha_1W),$$

$$F_{32} = -(V^2(2\beta_1 + k_1\sqrt{1-w^2}) + \beta_1\alpha_1W),$$

$$F_{33} = -\beta_1k_1V^2.$$

Lorsque  $\varepsilon = 0$ , le système différentiel (2.8) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{U} = -\sqrt{1-w^2}U + V, \\ \dot{V} = -U + \sqrt{1-w^2}V, \\ \dot{W} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Le point  $(0,0,1)$  est le seul point d'équilibre du système (2.8). Les valeurs propres de son système linéarisé  $\dot{Z} = AZ$  sont  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm iw$  où :

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-w^2} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{1-w^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En écrivant le système (2.8) de telle sorte que la partie linéaire en  $(0,0,1)$  sera à sa forme normale de Jordan, c'est-à-dire sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, nous effectuons le changement de variables suivant :

$$(U, V, W)^T = P(u, v, w)^T.$$

*C'est à dire dire*

$$P = \begin{pmatrix} -w & \sqrt{1-w^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -wu + \sqrt{1-w^2}v \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

*On a :*

$$\begin{cases} -w\dot{u} = -\dot{U} + \sqrt{1-w^2}\dot{V}, \\ \dot{v} = \dot{V}, \\ \dot{w} = \dot{W}. \end{cases}$$

*On obtient donc*

$$\begin{cases} \dot{u} = -wv + \varepsilon[-u\beta_1 + v(\frac{1}{w}(\sqrt{1-w^2}2\beta_1 + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w))], \\ \dot{v} = uw + \varepsilon(v\beta_1 + v\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w)), \\ \dot{w} = \varepsilon(-v\beta_1 + v\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w)). \end{cases} \quad (2.10)$$

*C'est à dire*

$$\begin{cases} \dot{u} = -vw + \varepsilon f_{11}(u, v, w) + o(\varepsilon^2), \\ \dot{v} = uw + \varepsilon f_{21}(u, v, w) + o(\varepsilon^2), \\ \dot{w} = \varepsilon f_{31}(u, v, w) + o(\varepsilon^2), \end{cases}$$

*où*

$$f_{11} = -\beta_1 u + v(\frac{1}{w}(2\beta_1\sqrt{1-w^2} + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w)),$$

$$f_{21} = v\beta_1 + v\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w),$$

$$f_{31} = -(\alpha_1 w + 2v^2)\sqrt{1-w^2}.$$

*Considérons les coordonnées cylindriques  $(\theta, r, w)$  définies par  $u = r \cos(\theta)$ ,  $v = r \sin(\theta)$ ,*

$w = w$  et aussi  $u^2 + v^2 = r^2$ .

$$\text{On a : } \dot{r} = \frac{(u\dot{u} + v\dot{v})}{r},$$

$$\dot{r} = \varepsilon[r \cos(\theta) \sin(\theta) \left( \frac{1}{w}(2\beta_1\sqrt{1-w^2} + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w) \right) + r \sin^2(\theta)\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w)] - r\beta_1(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)).$$

$$\text{Après, On a : } \dot{\theta} = \frac{\dot{v}u - \dot{u}v}{r^2},$$

$$\dot{\theta} = w + \varepsilon[2\beta_1 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta)\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w) - \sin^2(\theta) \left( \frac{1}{w}(2\beta_1\sqrt{1-w^2} + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w) \right)],$$

$$\dot{w} = \varepsilon(-\alpha_1 w + 2v^2)\sqrt{1-w^2}.$$

Le système différentiel (2.10) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon[r \cos(\theta) \sin(\theta) \left( \frac{1}{w}(2\beta_1\sqrt{1-w^2} + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w) \right) + r \sin^2(\theta)\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w)] - r\beta_1(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = w + \varepsilon[2\beta_1 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta)\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w) - \sin^2(\theta) \left( \frac{1}{w}(2\beta_1\sqrt{1-w^2} + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w) \right)], \\ \dot{w} = \varepsilon(-\alpha_1 w + 2v^2)\sqrt{1-w^2}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Par conséquent, en prenant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante du système différentiel (2.11) et par le développement de Taylor :

$$\frac{-1}{1+x} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + O(x^3),$$

on peut écrire le système (2.11) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{w} [r \cos(\theta) \sin(\theta) (\frac{1}{w} (2\beta_1 \sqrt{1-w^2} + k_1 + 2w) - w(k_1 + 2w)) \\ + r \sin^2(\theta) \sqrt{1-w^2} (k_1 + 2w) - r\beta_1 (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))] + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dw}{d\theta} = \varepsilon \frac{\sqrt{1-w^2}}{w} (-\alpha_1 w + 2r^2 \sin^2(\theta)) + o(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (2.12)$$

Maintenant, le système (2.12) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon R_{11}(\theta, r, w) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dw}{d\theta} = \varepsilon R_{12}(\theta, r, w) + o(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (2.13)$$

où

$$\begin{aligned} R_{11}(\theta, r, w) &= \frac{1}{w} (-r\beta_1 (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) + r\sqrt{1-w^2} \sin^2(\theta) (k_1 + 2w) \\ &+ r \sin(\theta) \cos(\theta) (\frac{1}{w} (k_1 + 2w + 2\beta_1 \sqrt{1-w^2}) - w(k_1 + 2w))), \\ R_{12}(\theta, r, w) &= -\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} (w\alpha_1 + 2r^2 \sin^2(\theta)). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les solutions périodiques d'un système générateur de spin nucléaire.

Notons par  $t = \theta$ ,  $\vec{x} = (r, w) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ ,  $T = 2\pi$  et  $\vec{R}_1(\theta, r, w) = (R_{11}(\theta, r, w),$

$R_{12}(\theta, r, w))$ .

En appliquant ensuite le théorème de moyennisation 1.7.1, on obtient la fonction moyennée du première ordre.

$$\vec{R}_{10}(r, w) = (R_{101}(r, w), R_{102}(r, w)).$$

On remarque que le système (2.13) satisfait toutes les hypothèses du **théorème 1.7.1**. Pour cela, calculons les intégrales suivantes :

$$R_{101}(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{11}(\theta, r, w) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{w} (-r\beta_1 (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)))$$

$$+ r\sqrt{1-w^2} \sin^2(\theta)(k_1 + 2w) + r \sin(\theta) \cos(\theta) \left( \frac{1}{w}(k_1 + 2w + 2\beta_1\sqrt{1-w^2}) - w(k_1 + 2w) \right)),$$

$$R_{101}(r, w) = \frac{r\sqrt{1-w^2}(k_1 + 2w)}{2w}.$$

En utilisant les intégrales suivantes :

$$\int \cos \sin dx = \int u du = \frac{1}{1+n} u^{n+1} + c,$$

$$\int \sin^2(\theta) = \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta,$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

$$\int \cos^2(\theta) = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$

On a aussi :

$$R_{102}(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{21}(\theta, r, w) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} (w\alpha_1 + 2r^2 \sin^2(\theta)) d\theta,$$

$$R_{102}(r, w) = -\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} (r^2 + w\alpha_1).$$

Le système  $R_{101}(r, w) = R_{102}(r, w) = 0$  a une solution unique  $(r^*, w^*)$  avec  $r^* > 0$ .

Calculons les solutions  $(r^*, w^*)$  :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} (r^2 + w\alpha_1) = 0, \\ \frac{r\sqrt{1-w^2}}{2w} (k_1 + 2w) = 0. \end{cases}$$

Cette solution est :

$$(r^*, w^*) = \left( \sqrt{\frac{k_1\alpha_1}{2}}, \frac{-k_1}{2} \right).$$

Si  $\alpha_1 k_1 > 0$ , il est facile de vérifier que :

$$M = \frac{\partial(R_{101}, R_{102})}{\partial(r, w)} \Big|_{(r^*, w^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_{101}}{\partial r} & \frac{\partial R_{101}}{\partial w} \\ \frac{\partial R_{102}}{\partial r} & \frac{\partial R_{102}}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

C'est à dire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2\alpha_1 k_1(1-w^2)}}{w} \\ \frac{\sqrt{2k_1\alpha_1(1-w^2)}}{w} & \frac{-\alpha_1\sqrt{1-w^2}}{w} \end{pmatrix},$$

et

$$\det(M) = 0 \left( \frac{-\alpha_1 \sqrt{1-w^2}}{w} \right) - \left( \frac{\sqrt{\alpha_1 k_1 (1-w^2)} \sqrt{2k_1 \alpha_1 (1-w^2)}}{2w^2} \right) = -\frac{k_1 \alpha_1 (1-w^2)}{w^2} \neq 0.$$

D'après le théorème 2.3.2, il existe une orbite périodique  $(\mathbf{r}(\theta, \varepsilon), \mathbf{w}(\theta, \varepsilon))$  correspondante en  $(\mathbf{r}^*, \mathbf{w}^*)$  du système (2.13) tel que  $(\mathbf{r}(\theta, \varepsilon), \mathbf{w}(\theta, \varepsilon)) \rightarrow (\mathbf{r}^*, \mathbf{w}^*)$  pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit.

Cette solution périodique s'écrit dans le système (2.10) comme suit

$$(\mathbf{u}(\theta, \varepsilon) = r(\theta, \varepsilon) \cos(\theta), v(\theta, \varepsilon) = r(\theta, \varepsilon) \sin(\theta), w(\theta, \varepsilon)),$$

quand  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Par conséquent, le système (2.8) admet une solution périodique  $(\mathbf{U}(\theta), \mathbf{V}(\theta), \mathbf{W}(\theta))$  obtenu par le changement de variables  $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})^T = \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^T$ .

Finalement, pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit. La solution périodique du système (2.5) en  $(0,0,1)$  est :

$$(\mathbf{x}(\theta, \varepsilon), \mathbf{y}(\theta, \varepsilon), z(\theta, \varepsilon)) = (\varepsilon \mathbf{U}(\theta), \varepsilon \mathbf{V}(\theta), \varepsilon \mathbf{W}(\theta) + 1).$$

Donc, le point d'équilibre zéro-Hopf  $(0,0,1)$  est une solution périodique lorsque  $\varepsilon = 0$  suffisamment petit.

## CHAPITRE 3

# BIFURCATION ZÉRO-HOPF DANS UN SYSTÈME GÉNÉRATEUR DE SPIN NUCLÉAIRE PAR LA MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf dans un système générateur de spin nucléaire et l'existence d'orbites périodiques qui bifurquent d'un point zéro-Hopf du système par la méthode de moyennisation du second ordre.

### 3.2 Bifurcation zéro-Hopf du deuxième ordre

Cherchons les solutions périodiques d'un système générateur de spin nucléaire (2.1).

**Théorème 3.2.1** *Soit  $\beta = \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2$  et  $k = k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2$ ,*

*si  $\alpha_0 = 0$ ,  $k_0 = 2$ ,  $\alpha_1 k_1 > 0$  et  $\beta_1 \neq 0$ .*

Le système générateur de spin nucléaire (2.1) a une bifurcation zéro-Hopf en  $(0,0,1)$  et un cycle limite en ce point lorsque  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

### Preuve du théorème 3.2.1

On prend :  $\beta = \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2$  et  $k = k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2$ , avec  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. Le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)x + y, \\ \dot{y} = -x - (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)y(1 - (k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2)z), \\ \dot{z} = (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)((\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2)(1 - z) - (k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2)y^2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Si  $\alpha_0 = 0$ ,  $k_0 = 2$ ,  $\alpha_1 k_1 > 0$  et  $\beta_1 \neq 0$ . Alors le système (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)x + y, \\ \dot{y} = -x - (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)y(1 - (2 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2)z), \\ \dot{z} = (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)(\alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2)(1 - z) - (2 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2)y^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

D'abord, on prend le changement de variables :  $\mathbf{x} = \mathbf{X}, \mathbf{y} = \mathbf{Y}, z = \mathbf{Z} + 1$ . Le système (3.2) se transforme en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}} = -(\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \\ \dot{\mathbf{Y}} = -\mathbf{X} - (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\mathbf{Y} + (k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2)(\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)(\mathbf{Z} + 1)\mathbf{Y}, \\ \dot{\mathbf{Z}} = (\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2) - (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)(1 - (\mathbf{Z} + 1)) - (k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2) \\ (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\mathbf{Y}^2. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ensuite, en effectuant un autre changement de variables  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\varepsilon\mathbf{U}, \varepsilon\mathbf{V}, \varepsilon\mathbf{W})$ , le système (3.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\dot{\mathbf{U}} = -(\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\varepsilon\mathbf{U} + \varepsilon\mathbf{V}, \\ \varepsilon\dot{\mathbf{V}} = -\varepsilon\mathbf{U} - (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\varepsilon\mathbf{V} + (k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon)(\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\varepsilon\mathbf{V} \\ + ((\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)(k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon))\varepsilon\mathbf{V}\varepsilon\mathbf{W}, \\ \varepsilon\dot{\mathbf{W}} = -(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2)(\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2)\varepsilon\mathbf{W} - (\beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2) \\ (k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon)\varepsilon^2\mathbf{V}^2. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Nous obtenons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = V - \beta_1 \varepsilon U - \beta_2 \varepsilon^2 U, \\ \dot{V} = -U + \varepsilon(k_0 - 1)\beta_1 V + \varepsilon^2(-\beta_2 + k_1\beta_1 + k_0\beta_2 + k_0\beta_1 W)V \\ + \varepsilon^3(k_1\beta_2 + k_2\beta_1 + k_0\beta_1 W + k_1\beta_1 W)V + \varepsilon^4(k_1\beta_2 W + k_2\beta_1 W + k_2\beta_2)V \\ + \varepsilon^5(k_2\beta_2) V W, \\ \dot{W} = \varepsilon(-\alpha_0\beta_1 W) + \varepsilon^2((-\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_1)W - k_0\beta_1 V^2) + \varepsilon^3((-\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)W \\ - (k_0\beta_2 - k_1\beta_1)V^2) + \varepsilon^4((-k_1\beta_2 - K_2\beta_1)V^2) - \alpha_2\beta_2 W + \varepsilon^5(-k_2\beta_2)V^2. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

En fin, le système (3.5) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = V + \varepsilon G_{11}(U, V, W) + \varepsilon^2 G_{12}(U, V, W), \\ \dot{V} = -U + \varepsilon G_{21}(U, V, W) + \varepsilon^2 G_{22}(U, V, W) + \varepsilon^3 G_{23}(U, V, W) \\ + \varepsilon^4 G_{24}(U, V, W) + \varepsilon^5 G_{25}(U, V, W), \\ \dot{W} = \varepsilon G_{31}(U, V, W) + \varepsilon^2 G_{32}(U, V, W) + \varepsilon^3 G_{33}(U, V, W) \\ + \varepsilon^4 G_{34}(U, V, W) + \varepsilon^5 G_{35}(U, V, W), \end{array} \right. \quad (3.6)$$

où

$$G_{11}(U, V, W) = -\beta_1 U,$$

$$G_{12}(U, V, W) = -\beta_2 U,$$

$$G_{21}(U, V, W) = -\beta_1 V(k_0 - 1),$$

$$G_{22}(U, V, W) = V(\beta_1(k_1 + k_0 W) + \beta_2(k_0 - 1)),$$

$$G_{23}(U, V, W) = V(\beta_2(k_0 W + k_1) + \beta_1(k_1 W + k_2)),$$

$$G_{24}(U, V, W) = V(k_1\beta_2 W + k_2(\beta_1 W + \beta_2)),$$

$$G_{25}(U, V, W) = k_2\beta_2 VW,$$

$$G_{31}(U, V, W) = -\beta_1\alpha_0 W,$$

$$G_{32}(U, V, W) = -\beta_2\alpha_0 W - \beta_1(\alpha_1 W + k_0 V^2),$$

$$G_{33}(U, V, W) = -(\beta_2(\alpha_1 W + k_0 V^2) + \beta_1(k_2 V^2 + \alpha_2 W)),$$

$$G_{34}(U, V, W) = -(\beta_1 k_2 V^2 + \beta_2(-\alpha_2 W + k_1 V^2)),$$

$$G_{35}(U, V, W) = -\beta_2 k_2 V^2.$$

Lorsque  $\varepsilon = 0$ , le système (3.6) devient :

$$\begin{cases} \dot{U} = V, \\ \dot{V} = -U, \\ \dot{W} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

La matrice jacobienne de système linéarisée (3.7) en  $(0,0,1)$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 1).$$

Comme  $P_A(\lambda) = 0$ , alors les valeurs propres de système (3.7) sont  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm i$ .

On peut écrire le système (3.6) de telle sorte que la partie linéaire en  $(0,0,1)$  sera à sa forme

normale de Jordan. C'est-à-dire sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit le système (3.5) en coordonnées cylindrique  $(\theta, r, w)$  par  $U = r \cos(\theta)$ ,  $V = r \sin(\theta)$ ,  $W = w$ , puis en prend  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante.

On a :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{U\dot{U} + V\dot{V}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{\dot{V}U - \dot{U}V}{r^2}. \end{cases}$$

Après les calculs on a :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}((r \cos(\theta)(r \sin(\theta) + \varepsilon(-\beta_1 r \cos(\theta)) + \varepsilon^2(-\beta_2 r \cos(\theta)) + r \sin(\theta)) \\ (-r \cos(\theta) + \varepsilon(\beta_1(k_0 - 1)r \sin)) + \varepsilon^2(r \sin(\theta)(\beta_1(k_1 + k_0 w) + \beta_2(k_0 - 1))))), \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}(r \cos(\theta)(-r \cos(\theta) + \varepsilon(\beta_1(k_0 - 1)r \sin(\theta)) + \varepsilon^2(r \sin(\theta)(\beta_1(k_1 + k_0 w) \\ + \beta_2(k_0 - 1)) - r \sin(\theta)(r \sin(\theta))) + \varepsilon(-\beta_1 r \cos(\theta) + \varepsilon^2(-\beta_2 r \cos(\theta)))). \end{cases} \quad (3.8)$$

Le système différentiel (3.5) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \varepsilon(r\beta_1(k_0 \sin^2(\theta) - 1)) + \varepsilon^2(r(-\beta_2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)(\beta_1(k_0 w + k_1) \\ + \beta_1(k_0 - 1))))), \\ \dot{\theta} = \varepsilon(\beta_1 \cos^2(\theta)(k_0 - 1) + \beta_1 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2(\cos(\theta) \sin(\theta) \\ (\beta_1(k_1 + k_0 w + \beta_2))), \\ \dot{w} = \varepsilon(-\beta_1 \alpha_0 w) + \varepsilon^2(-\beta_2 \alpha_0 w - \beta_1(\alpha_1 w + k_0 r^2 \sin^2(\theta))). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

En utilisant le développement de Taylor :

$$\frac{-1}{1 + \varepsilon(\beta_1 k_0 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2(\sin(\theta) \cos(\theta)((k_1 + k_0 w) + k_0))} = 1 + \varepsilon(\beta_1 k_0 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2(\sin(\theta) \cos(\theta)((k_1 + k_0 w) + k_0)) + \varepsilon^2(\beta_1 k_0 \cos(\theta) \sin(\theta)).$$

On peut écrire le système (3.9) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dw} = \varepsilon((1 - k_0) + k_0 \cos^2(\theta)) + \varepsilon^2(r(\beta_1^2 k_0)(-1 + k_0 \sin^2(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta)) \\ - \sin^2(\theta)(\beta_1 k_1 + k_0 w \beta_1 - \beta_2 + \beta_2 k_0) + \beta_1 \cos^2(\theta), \\ \frac{dw}{d\theta} = \varepsilon(-\beta_1 \alpha_0 w) + \varepsilon^2(\beta_1((\beta_1 k_0 \alpha_0 w \sin(\theta) \cos(\theta) + k_0 r^2 \sin^2(\theta) + \alpha_1 w) \alpha_0 \beta_2 w)). \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Maintenant, le système (3.10) est équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon R_{11}(\theta, r, w) + R_{21}(\theta, r, w) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dw}{d\theta} = \varepsilon R_{12}(\theta, r, w) + \varepsilon^2 R_{22}(\theta, r, w) + O(\varepsilon^2). \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où

$$R_{11}(\theta, r, w) = \beta_1 r(1 - k_0 \cos^2(\theta)),$$

$$R_{12} = \alpha_0 \beta_1 w,$$

$$R_{21} = r(\beta_1^2 k_0 \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - k_0 \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta)$$

$$(k_1 \beta_1 + k_0 \beta_2 + \beta_1 k_0 w - \beta_2) + \beta_2 \cos^2(\theta)),$$

$$R_{22}(\theta, r, w) = \beta_1(\alpha_1 w + \beta_1 \alpha_0 k_0 w \sin(\theta) \cos(\theta) + k_0 r^2 \sin^2(\theta)) + \alpha_0 \beta_2 w.$$

D'après le théorème 1.7.1, nous avons la fonction moyennée :

$$R_{101}(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{11}(\theta, r, w) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_1 r(1 - k_0 + k_0 \cos^2(\theta)) d\theta,$$

alors :

$$R_{101}(r, w) = \beta_1 r \left(1 - \frac{k_0}{2}\right).$$

Ensuite :

$$R_{102}(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{12}(\theta, r, w) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_0 \beta_1 w d\theta,$$

alors, on a :

$$R_{102}(r, w) = \alpha_0 \beta_1 w.$$

Si  $k_0 \neq 0$ , d'après l'équation  $(R_{101}(r, w) = R_{102}(r, w)) = 0$ , on a  $r = 0$ . Ce n'est pas correct  $r$  doit être positif.

A fin d'appliquer le théorème de moyennisation du second ordre, nous avons besoin de

$$R_{101} = 0 \text{ et } R_{102} = 0. \text{ Nous prenons donc } k_0 = 2 \text{ et } \alpha_0 = 0.$$

D'après le théorème 1.7.1, nous avons :

$$R_{201}(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_r R_{11}(\theta, r, w) \int_0^{2\pi} R_{11}(\theta, r, w) dt + R_{21}(\theta, r, w)] d\theta,$$

ondevient :  $R_{201}(r, w) = -\frac{1}{2} \beta_1 r (k_1 + 2w)$ . D'autre part, on a :

$$R_{202}(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_r R_{12}(\theta, r, w) \int_0^{2\pi} R_{12}(\theta, r, w) dt + R_{22}(\theta, r, w)] d\theta,$$

Ondevient :

$$R_{202}(r, w) = \beta_1 (r^2 + \alpha_1 w). \text{ Onpeutl'équation } R_{201}(r, w) = R_{202}(r, w) = 0,$$

alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\beta_1 r(2k_1 + 4w) = 0 \dots(1) \\ \beta_1(r^2 + \alpha_1 w) = 0 \dots(2) \end{cases}$$

de (2) on a

$$\beta_1 r^2 = -\beta_1 \alpha_1 w \Rightarrow w = -\frac{r^2}{\alpha_1},$$

de (1) on a :

$$2k_1 - \frac{4r^2}{\alpha_1} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\alpha_1 k_1}{2}},$$

L'équation  $\mathbf{R}_{201}(r, w) = \mathbf{R}_{202}(r, w) = \mathbf{0}$  a une solution unique  $(r^*, w^*)$  où  $k_1 \alpha_1 > 0$ .

Cette solution est :

$$(r^*, w^*) = \left( r = \sqrt{\frac{\alpha_1 k_1}{2}}, w = -\frac{k_1}{2} \right).$$

Où  $k_1 \alpha_1 > 0$ , il est facile de vérifier que :

$$B = \frac{\partial(\mathbf{R}_{101}, \mathbf{R}_{102})}{\partial(r, w)} \Big|_{(r^*, w^*)}.$$

Dans cette situation, la matrice jacobienne est :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{201}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{R}_{201}}{\partial w} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{202}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{R}_{202}}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_1 \sqrt{k_1 \alpha_1} \\ \sqrt{2}\beta_1 \sqrt{k_1 \alpha_1} & \beta_1 \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Et

$$\det(B) = \beta_1^2 \alpha_1 k_1 \neq 0.$$

Son jacobien (1.9) prend la valeur  $\beta_1^2 \alpha_1 k_1 \neq 0$ . Le reste de la preuve du théorème 3.2.1 est similaire au théorème 2.3.2.

## CONCLUSION

Ce mémoire porte sur un aspect important de l'étude qualitative des systèmes différentielles, à savoir les cycles limites et les orbites périodiques.

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode de moyennisation du première ordre pour chercher le nombre de solutions périodiques d'un système générateur de spin nucléaire.

Nous avons aussi appliqué la méthode de moyennisation du deuxième ordre pour étudier l'existence d'orbites périodiques d'un système générateur de spin nucléaire. La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbation utilisée actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Buica and J. Llibre, Avariaging methods for finding period orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math., 2004, 128, 7-22.
- [2] L. Cid-Montiel, J. Llibre and C. Stoica, Zero-hopf bifurcation in a hyperchaotic lorenz system, Nonlinear Dyn., 2014, 75, 561-566.
- [3] R. D. Euzebio and J. Llibre, Zero-hopf bifurcation in a Chua's system, Nonlinear Anal. Real Word Appl., 2017, 37, 31-40.
- [4] R. D. Euzebio, J. Llibre and C. Vidal, Zero-hopf bifurcation in the Fitzhughnagumo system, Math. Method Appl. Sci., 2015, 38, 4289-4299.
- [5] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics 7. Third Edition Springer New York 2001.
- [6] J. Sanders, F. Verhulst and F. Murdock, Averaging method in Nonlinear Dynamical system, 2nd edn., Springer, New York, 2007.
- [7] R. Shi and J. Yu, zero-Hopf bifurcation in nuclear spin generator system. Journal of Applied Analysis and Computation., 2021, 23-31.