وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N^{0} : U.S/F.S/D.M/……/2023.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Solution Approximative de Euler-Maruyama Pour les équations différentielles Stochastiques

Option : Anedp

Par :
Lahira Randa

Encadré par : **CHALABI . EL-HACENE** **M.C.A.U.CONSTANTINE 3**

Devant le jury :

Président : LALLOUCHE. ABDALLAH	**M.C.B. U. SKIKDA**
Examinateur : OUAOUA. AMAR	**M.C.A. U. SKIKDA**

Année : 2022/2023

DEDICACE

Premièrement je prie ALLAH qui m'a donné la patience et la force pour accomplir ce travail et tout puissant de les protéger et de leur accorder une longue vie.

C'est un immense plaisir pour moi de dédier ce travail avec plein d'amour :

-A celle qui a éclairé ma vie et mon parcours en signe d'amour et de tendance, qui m'a tout donné, et qui il n'y a pas assez de mots pour remercier et exprimer ma gratitude… merci ma chère **MAMAN**.

-Pour le secret de ma fierté, la bougé qui se brule pour notre éclaircissement….merci Ma chère **PAPA**.

-A ***mon marré*** *et ma petite fille* ***zeineb****.*

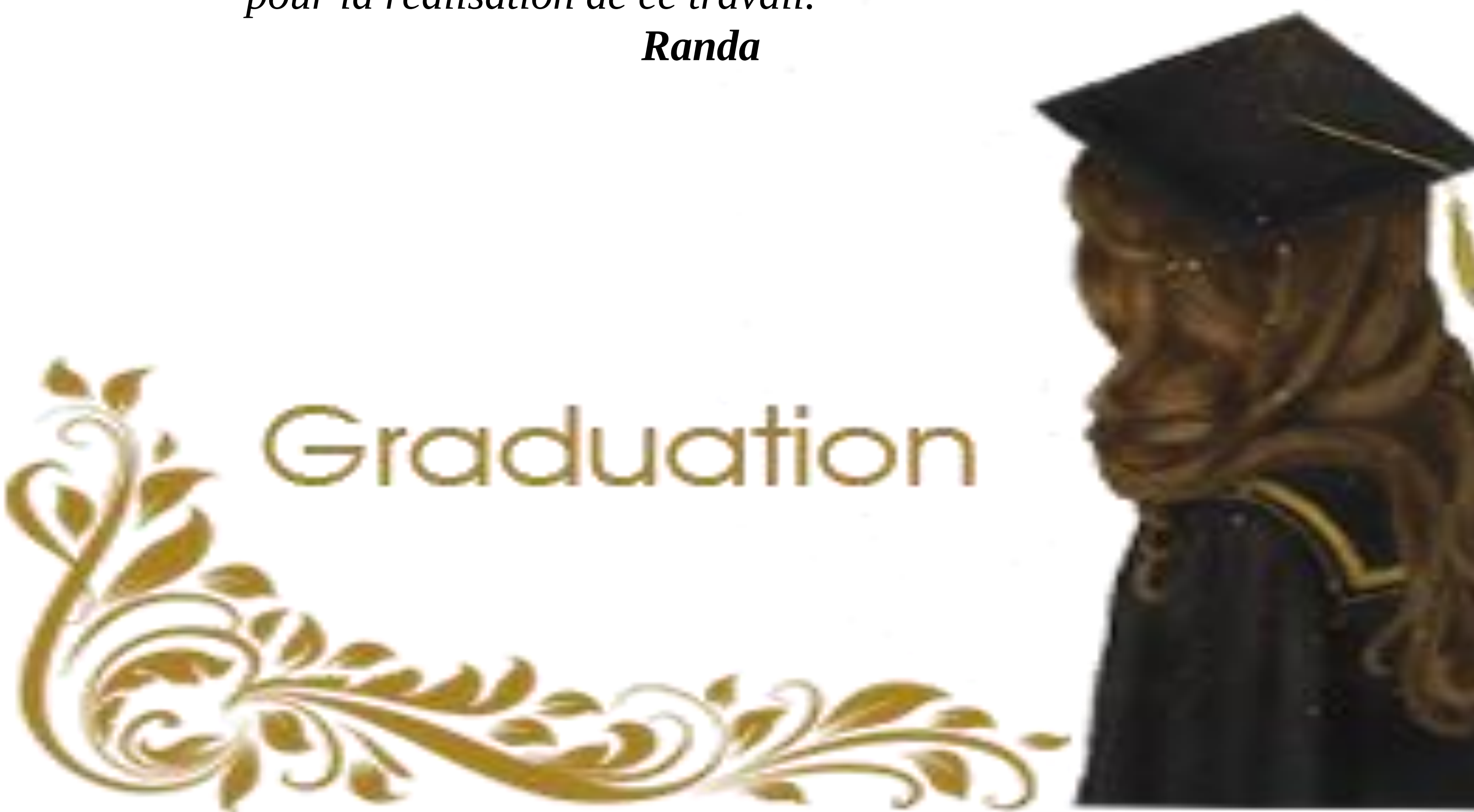
-A ***mes frères*** *et* ***ma chère sœur****.*

-A tous ***mes amies***

-A toute ***ma famille LAHIRA*** *et à tous les enseignants du département de mathématiques.*

-A toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou loin, pour la réalisation de ce travail.

Randa



Remerciements

Mes premiers remerciements à Dieu tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

*Je tiens tout d'abord à exprimer à mon encadreur '' **Dr.El-Hacène Chalabi**'' , de sa disponibilité, ses précieux conseils et la confiance, qu'il m'a accordée, qui ont fortement contribué à mener à bien ce travail.*

Un grand merci également pour les membres du jury les docteurs ***Ouaoua Amar*** *et* ***Alouche Abd Allah*** *qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers **mes parents**, sans leurs sacrifices je ne sacrais pas devenue celle que je suis aujourd'hui*

Je remercie à tous les enseignants du département de Mathématiques.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بعرض الحل التقريبي لاويلر مارويايما الخاص بالمعادلات التفاضلية العشوائية. كما قمنا ببرهان وجود ووحدانية هذا الحل.

الكلمات المفتاحية

تقريب اويلر مارويايما. المعادلات التفاضلية العشوائية. الحركة البراونية. الحساب العشوائي

Abstract:

In this memory , we exposed the Euler-Maruyama's approximate solution of the stochastic differential equations . We prove the existence and uniquenesses of this solution.

Key words: Euler-Maruyama approximate, stochastic differential equation, Bronian motion, stochastic calcul.

Résumé: Dans ce mémoire, nous avons exposé la solution approximative de Euler-Maruyama pour les équations différentielles stochastiques. Nous avons prouvé l'existence et l'unicité de cette solution

Mots clés : Approximation de Euler-Maruyama, équation différentielle stochastique, mouvement Brownien, calcul stochastique.

Solution approximative d'Euler-Maruyama pour les équations différentielles stochastiques

Randa Lahira Sous la direction de **Dr El Hacène Chalabi**

Université 20 Aout 1955 Skikda

Anné universitaire 2022/2023

15th July 2023

CONTENTS

0.1 INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles stochastique notées EDS ou en anglais SDE (stochastic differential equations) ce dernier est considère comme une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire (EDO) perturbée avec un terme aléatoire, ces équations fournissent des modèles en physique, biologie, économie et finance. Elles ont été introduites pour la première fois en 1946 par Kiyohi Itô pour étudier les trajectoires des processus de diffusion.

Les équations différentielles stochastiques servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire.

Dans de nombreux cas, on ne peut pas trouver une solution exacte aux EDS pour traiter ce problème nous devons donc avoir recours à des méthodes numériques afin de trouver une bonne approximation méthodes de discrétisations approximatives (Euler-Maruyama, Trapèzes,...), nous présentons dans ce travail seulement les approximations d'Euler-Maruyama.

Dans ce mémoire, qui ce compose de quatre chapitres:

Dans le **premier chapitre** présente les rappels sur espace mesurable, espace probabilisé et quelques théorèmes qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le **deuxième chapitre** on s'intéresse au processus stochastique, martingales, mouvement Brownien, ensuite on présente l'intégrale stochastique et ces propriétés, Formule d'Itô qui'il peut être mise en oeuvre pour la résolution des équaions différentielles stochastiques.

Dans le **troisème chapitre** on présente les équations différentielles stochastiques et c'est quoi solution d'un EDS et existences et unicités

Finalement, on discute l'existence et l'unicité de la solution en appliquant le shéma approximative de Euler-Maruyama et on termine avec une conclusion et perspective.

CHAPTER 1

PRILIMINAIRES

1.1 Espace mesurable

Définition 1.1 ($\sigma-$algèbre) Soit Ω un ensemble non vide, On appelle une tribu (ou $\sigma-$algèbre) sur Ω une famillle $\mathcal{F}$ de parties de Ω possedant les propriétés suivante:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ est stable par complémentaire: si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$ (où $A^c = \Omega - A$).
3. $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable: si $A_n \in \mathcal{F}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2 (Filtration): une filtration $\{\mathcal{F}_t;\ 0 \leq t \leq \infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, ie:pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty,\ \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appellés les parties mesurable de Ω. On dit que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espase mesurable.

Définition 1.3 Soit F une famille de parties de X, $\mathcal{M}$ tribu sur X On note

$$\sigma(F) = \bigcap_{F \subset \mathcal{M}} \mathcal{M}$$

Alors, $\sigma(F)$ est une tribu sur X appelée **tribu engendrée par** F. C'est la plus petite tribu sur X qui contient F.

Définition 1.4 Une **topologie** sur X est une famille $\mathcal{T}$ de parties de X telles que :

- $\phi \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

- Si $O_1, ..., O_n \in \mathcal{T}$, alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$

- Si $\{O_i\}_{i\in I}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\bigcup\limits_{i\in I}^{n} O_i \in \mathcal{T}$

Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent **les ouverts** de X. On dit que $(X, \mathcal{T})$ est **un espace topologique**.

Définition 1.5 (Tribu de Borel) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle **tribu de Borel** sur X, la tribu engendrée par les ouverts de X: $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{T})$.

Proposition 1.1 [7] *La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est engendrée par les intervalles* $]a, +\infty[$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6 Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable.On appelle **mesure positive** sur X une application $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ vérifiant :

1. $\mu(\phi) = 0$

2. (Additivité dénombrable) : si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est **un espace mesuré**.

Proposition 1.2 [7] *(propriétés élémentaires d'une mesure positive)*

1 *(Monotonie) : Si* $A, B \in \mathcal{M}$ *et* $A \subset B$*, alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$

2 *(Sous-additivité) : Si* $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

1. *Si* $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$*, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2. *Si* $A_n \in \mathcal{M}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$ *avec* $\mu(A_0) < \infty,$ *alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Définition 1.7 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1. On dit que $A \subset X$ est **négligeable** (pour la mesure μ) si $A \in \mathcal{M}$ et $\mu(A) = 0$.
2. On dit que la mesure μ est **complète** si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable.

Définition 1.8 On appelle **tribu de Lebesgue** sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, la tribu qui complète la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue λ.On appelle encore **mesure de Lebesgue** la mesure complétée $\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$.

Théorème 1.1 [7] *(mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$*): Soit* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *un espace mesurable muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure positive notée* λ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que:*

$$\lambda([a, b]) = b - a, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$$

1.2 Espace probabilsé

Définition 1.9 On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{C})$ (où Ω est tribu), toute application P: $\mathcal{C} \longrightarrow [0; 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles $A_1, A_2, ..., A_n, ...$on a

$$P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} P(A_i) \qquad (\sigma - \text{additivité de } P)$$

Définition 1.10 On appelle espace probabilisé le triplé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ où Ω est l'ensemble fondamental, $\mathcal{C}$ est une collection de sous-ensembles de Ω (la collection des événements), qui possède la structure précédente de σ-algèbre de Boole et $P : \mathcal{C} \longrightarrow [0; 1]$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{C}$.

1.2.1 Inégalités de Hölder et Gronwall

Lemme 1.1 [4] *(Inégalité de Hölder). Soit p et q des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si les variables $|X|^{p}$ et $|Y|^{q}$sont intégrables, on a*

$$\mathbb{E}\,|XY| \leq \left(\mathbb{E}\,|X|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\,|Y|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Lemme 1.2 [9] *(Inégalité de Gronwall). Soient $T>0$, $C\geq 0$, $u\,(.)$ une fonction positive bornée à mesure de Borel sur $[0,T]$ et $v\,(.)$une fonction intégrable. Si*

$$u\,(t) \leq C + \int_0^t v\,(s)\,u(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

Alors

$$u\,(t) \leq C \exp\left(\int_0^t v\,(s)\,ds\right), \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

CHAPTER 2

Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique qui permet de décrire le comportement, à tout moment après l'instant initial (par exemple $t_0 = 0$), d'un phénomène aléatoire. Nous précisons cette notion dans la définition suivante.

Définition 2.1 Un processus stochastique est une collection de variable aléatoires indexées par le temps, i.e $\mathbb{R}_+$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$.

Définition 2.2 Un processus stochastiques $(X(t))_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires si la loi de $X(t_1+s) - X(t_1)$ ne dépend que de s, i.e

$$\forall t_1,\ t_2,\ s \geq 0, \qquad X(t_1+s) - X(t_1) \overset{\mathcal{L}}{=} X(t_2+s) - X(t_2)$$

$(X(t))_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, la famille de variables aléatoires $(X(t_1) - X(t_0),\ ...,\ X(t_n) - X(t_{n-1}))$ indépendante.

$(X(t))_{t\geq 0}$ est un processus gaussien (ou normale) si pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, le vecteur $(X(t_0), ..., X(t_n))$ est gaussien.

Définition 2.3 (Temps d'arrêt) Étant donnée une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

2.1 Martingales

Définition 2.4 Le processus X_t est une:

1. $\mathcal{F}$-martingale si les trois conditions suivants vérifies:

   a) Le processus X est $\mathcal{F}$-adapté (i.e : X_n, est $\mathcal{F}_n$-mesurable)

   b) X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i.e :$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left|X_n\right| < +\infty$)

   c) $\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n$ pour tout n.

2. $\mathcal{F}$-sous martingale si elle vérifie a et b et $\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] \geq X_n$.

3. $\mathcal{F}$-sur martingale si elle vérifie a et b et $\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] \leq X_n$.

2.1.1 Propriétés

1. Le processus X est une martingale si et seulement si,elle est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.

2. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq m, \mathbb{E}\left[X_m \diagup \mathcal{F}_n\right] = X_n$.
   En effet:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_m \diagup \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X_m \diagup \mathcal{F}_{m-1}\right) \diagup \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m-1} \diagup \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(X_{m-1} \diagup \mathcal{F}_{m-2}\right) \diagup \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m-2} \diagup \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1} \diagup \mathcal{F}_n\right] = X_n
\end{aligned}
$$

   Si $m \leq n$, $\mathbb{E}\left[X_m \diagup \mathcal{F}_n\right] = X_m$.

3. Si $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale (resp $\mathcal{F}$-surmartingale,$\mathcal{F}$-sous martingale) alors, la suite $\left(\mathbb{E}\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (resp décroissante, croissante).

En effet: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{n+1} \diagup \mathcal{F}_n\right] &= X_n \\
&\Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{n+1} \diagup \mathcal{F}_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right] \\
&\Rightarrow \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right].
\end{aligned}
$$

2.1.2 Martingales locales continues

Définition 2.5 Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $M_0 = 0$ p.s. est une martingale locale (continue), s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow \infty$ et pour tout n, le processus arrêté M^{T_n} est martingale uniformément intégrable.
Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que M est une martingale locale si $M_n = M_0 + N_n$, où le processus N est une martingale locale issue de 0.
Dans tous les cas, on dit que la suite temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ réduit M si, pour tout n, le processus arrêté M^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.

Propriétés des martingales locales

a) Une martingale à trajectoires continues est une martingale locale (et la suite $T_n = n$ réduit M).

b) Dans la définition d'une martingale locale issue de 0, on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale" (en effet on peut ensuite remplacer T_n par $T_n \wedge n$).

c) Si M est une martingale locale, pour tout temps d'arrêt T, M^T est une martingale locale.

d) Si (T_n) réduit M et si S_n est une suite de temps d'arrêt telle que $S_n \uparrow \infty$, alors la suite$(T_n \wedge S_n)$ réduit aussi M.

e) L'espace des martingales locales est un espace vectoriel.

Lemme 2.1 [9] *(Inégalité de Doob martingale) Soit $X(t)_{t\geq 0}$ une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soient a, b deux réels positifs lel que $a < b$, $p > 1$ et $X(t) \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$, alors*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{a\leq t\leq b} |X(t)|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 \mathbb{E}\left(|X(b)|^p\right),$$

en particulier pour $p = 2$, on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{a\leq t\leq b} |X(t)|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(|X(b)|^2\right)$$

2.2 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est un processus stochastique (fonction aléatoire de temps). Initialement introduit par le botaniste Robert .Brown au XIX-éme siècle (1827) pour modéliser les mouvements de grains de pollen en suspension, il représente de nos jours un processus gaussien incontournable notamment en calcul stochastique.

Le mouvement brownien est à la fois un phénoméne naturel, et un objet mathématique le phénoméne naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il en résulte un mouvement trés irrégulier de la grosse particule.

Définition 2.6 Un mouvement Brownien standard est un processus stochastique $(B(t))_{t\geq 0}$ défini comme suit :

1. $B(0) = 0$, (issue de 0)
2. pour tout $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ est une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, t-s)$ indépendent de la tribu F_s engendreé par $\{B(u), u \leq s\}$

Remarque 2.1 on dit que le mouvement Brownien B est un mouvement Brownien par rapport à x si $B(0) = x$

Proposition 2.1 [2] *un prossus B est un mouvement Brownien si et seulement si :*

- $B_0 = 0$
- B *est continu.*
- *pour* $t, s > 0$, $\mathbb{E}(B(t)) = 0$ *et* $\mathbb{E}(B^{tr}(s)) = (t \wedge s)$.

Définition 2.7 On appelle mouvement Brownien de dimension $d \geq 1$ (réel si $d = 1$) tout processus adapté $(B_t)_{t\geq 0}$ d'espace d'etat $(\mathbb{R}^d, B_{\mathbb{R}^d})$ satisfaisant les propriétes suivantes:

1. $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}_d(0, hC)$, $(B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h\beta^2), \beta > 0$, si $d = 1)$pour tout t, $h \geq 0$, où C est une matrice carrée d'order d, symétrique et inversible.
2. $(B_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants par rapport au passé: la variable aléatoire $B_{t+h} - B_t$ est indépentante de la tribu $\mathcal{F}_t$ pour tout t, $h \geq 0$.

Lorsque $B_0 = x$ p.s., on dira que $(B_t)_{t\geq 0}$ est issu de x. Lorsque $B_0 = 0$ p.s. et $C = I$ la matrice identité ($\beta = 1$ dans le cas où $d = 1$), on dira que le mouvement brownien est standard.

Dans toute la suite, on considère un mouvement Brownien standard, réel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur la base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Ainsi la variable aléatoire $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t > 0$.

2.3 Intégrale stochastique

Définition 2.8 On appelle processus simple tout processus α de la forme:

$$\alpha_t(w) = \sum_k \alpha_{t_k}(w) 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < .... < t_k < ...$est une subdivision de $\mathbb{R}_+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

1. α est adapté
2. $\alpha \in L^2(\Omega \times [0,t], P \otimes dt)$ $\left(\text{i.e.}\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha^2(s)\, ds\right) < \infty\right)$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 2.9 Soit S l'ensemble des processus simples. Il est facile d'établir que S est un espace vectoriél sur $\mathbb{R}$

Remarque 2.2 Soit $\alpha \in S$. On appelle intégrale stochastique de α par rapport à $(B_t)_{t\geq 0}$, la variable aléatoire:

$$\int_0^t \alpha(s)\, dB(s) := \sum_k \alpha(t_k)\left(B(t_{k+1} \wedge t) - B(t_k \wedge t)\right)$$

Il découle de la linéarité de la somme que l'application $\alpha \rightarrow \int_0^t \alpha(s)\, dB(s)$ est linéaire sur S. On peut aussi démontrer que cette définition ne dépend pas du choix de la subdivision de $\mathbb{R}_+$.

2.3.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

- Soit $h \in L^2_{ad}(T)$, soit $t \in [0,T]$, alors le processus $\left(h(s) 1_{[0,t]}(s)\right)_{0 \leq s \leq T} \in L^2_{ad}(T)$ et son intégrale stochastique est définie par $\int_0^T h(s) 1_{[0,t]}(s)\, dB(s) = \int_0^T h(s)\, dB(s)$, ainsi on définit le processus stochastique $\left(\int_0^t h(s)\, dB(s),\ t \in [0,T]\right)$ appelé intégrale stochastique indéfinie de h par rapport à B.

- Soient h et g deux éléments de $L^2_{ad}(T)$ et soit $0 \leq s \leq r \leq t$. Alors

  (i) $\int_s^t h(u)\, dB(u) = \int_s^r h(u)\, dB(u)_u + \int_r^t h(u)\, dB(u)$;

  (ii) $\int_0^t (ah(s) + bg(s))\, dB(s) = a\int_0^t h(s)\, dB(s) + b\int_0^t g(s)\, dB(s)$ où (a et b sont des constantes).

- Les processus $\left\{\int_0^t h(s)\, dB(s), t>0\right\}$ et $\left\{\left[\int_0^t h(s)\, dB(s)\right]^2 - \int_0^t h^2(s)\, ds,\ t>0\right\}$ sont des martingales continues.

Lemme 2.2 [10] *(inégalité moments)* $p \geq 2$, $g \in M^2\left([0,T];R^{d\times m}\right)$ *tel que* $\mathbb{E}\int_O^T |g(s)|^p\, ds < \infty$, *alors*

$$\mathbb{E}\left|\int_O^T g(s)\, dB_s\right|^p \leq \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} \mathbb{E}\int_O^T |g(s)|^p\, ds.$$

En particulier pàur $p=2$

$$\mathbb{E}\left|\int_O^T g(s)\, dB_s\right|^2 \leq \mathbb{E}\int_O^T |g(s)|^2\, ds$$

2.4 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastiques: elle montre qu'une fonction de classe C^2 de ρ semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale .

Rappelons la formule de changement de variable classique : si F,g sont de classe C^1 alors $(F\circ g)'(t) = F'(g(t))\, g'(t)$ s'écrit

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))\, g'(s)\, ds$$

Si F est C^1 et g est seulement absolument continue (c'est à dire à variation finie) alors on a encore avec l'intégrale de Stieltjes :

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))\, dg(s)$$

La même formule reste vraie pour un processus X à variation finie en faisant un calcul trajectoriel (pour chaque w fixé, la trajectoire $t\to X_t(w)$ est à variation finie et le cas précédent s'applique) : pour F une fonction de classe C^1, on a alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s$$

La formule d'Itô généralise cette propriété pour des semimartingales lorsque F est C^2 ; la formule fait alors apparaître un terme supplémentaire dû au fait que ces processus ne sont pas à variation finie,cf.(2.1) ci-dessous

Théorème 2.1 [5] *(formule d'Itô) soit X une semi-martingale et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \tag{2.1}$$

Si on considère p semimartingales continues $X^{(1)}, \ ..., \ X^{(p)}$ et $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^2 alors,

$$\begin{aligned} F\left(X_t^{(1)}, ..., X_t^{(p)}\right) &= F\left(X_0^{(1)}, ..., X_0^{(p)}\right) + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X_s^{(1)}, ..., X_s^{(p)}\right) dX_s^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X_s^{(1)}, ..., X_s^{(p)}\right) d\left\langle X^{(i)}, X^{(j)}\right\rangle_s \end{aligned}$$

CHAPTER 3

Equations différentielles stochastiques

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Considérons une équation différentielle ordinaire de la forme:

$$x'(t) = a(t, x(t)) \tag{3.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée x' et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (3.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $a(t,x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x. Symboliquement, l'équation (3.1) se réécrit

$$dx(t) = a(t, x(t))\, dt \tag{3.2}$$

Une telle équation est utilisée pour d'écrire l'évolution d'un sysème physique.

Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme σdB_t, où B désigne un mouvement Brownien et σ est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB(s) \tag{3.3}$$

3.0.1 Définitions

L'écriture (3.3) est symbolique car dB_t n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (3.3) sous la forme:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB\,(s) \tag{3.4}$$

Définition 3.1 On applle équation différentielle stochastique (EDS) une équation avec condition initiale X_0 en le processus X (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) de la forme:

$$dX_t = a\,(t, X_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dB\,(t) \tag{E(a,σ)}$$

Ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t a(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)dB^j\,(s)\,; \qquad 1 \leq i \leq d \tag{3.5}$$

Où pour m, d des entiers positifs

- $a(t,x) = (a_i(t,x))_{1\leq i\leq d}$ est un vecteur mesurable de $\mathbb{R}^d$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérivé** ou **drift** de l'EDS
- $\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{1\leq i\leq d}$ est une matrice $d \times m$ mesurable définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient** de **diffusion** de l'EDS et B= $(B^{(1)}, ..., B^{(m)})$ est un mouvement Brownien standard en dimension m. La solution d'une EDS est une fonction aléatoire.Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t\geq 0}$.

Définition 3.2 (Solution d'une EDS) On appelle solution de l'EDS $E(\sigma, s)$ la donnée de

- un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles,
- un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-mouvement brownien $B = (B^1,\ ...,\ B^m)$ dans $\mathbb{R}^m$ défini sur cet espace de probabilité,
- un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté continu $X = (X^1, ..., X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que (3.4) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout $1 \leq i \leq d$.

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $E_x\,(a, \sigma)$.

On remarquera que lorsqu'on parle de solution de $E\,(a, \sigma)$, on ne fixe pas a priori l'espace de probabilité filtré ni le mouvement brownien B.Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastique.

3.0.2 Existences et unicités

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E(a,\sigma)$

Définition 3.3 (Existence, unicité des EDS) pour l'équation $E(a,\sigma)$, on dit qu'il y a

- **existence faible:** si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(a,\sigma)$.
- **existence et unicité faibles:** si de plus toutes les solutions de $E_x(a,\sigma)$ ont même loi.
- **unicité trajectorielle:** si, l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' de $E(a,\sigma)$ telles que $X_0 = X'_0$ p.s sont indistinguables.
- existence forte si une solution X de $E_x(a,\sigma)$ est adaptée par rapport à la filtration canonique de B. Il y a unicité forte pour $E(a,\sigma)$ si pour tout mouvement Brownien B, deux solutions fortes associées à B sont indistinguables.

3.1 Exemples sur les EDS

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, i.e $d = m = 1$

3.1.1 Equations de black et scholes

C'est le cas particulier où $b(t,x) = bx$ et $\sigma(x) = \sigma x$, i.e

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Cette EDS modélise l'évolution d'un cours X soumis à un taux d'intérêt déterministe a une perturbation stochastique $\sigma X_t dB_t$. Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ est appelé volatilité. Noter que la partie déterministe de l'accroissement de X_t, (bX_t) et sa partie aléatoire (σX_t) sont toutes les deux proportionnelles à la valeur courante, X_t, en t (ce qui est typique des modéles de croissance).

3.1.2 Equations affines

On suppose que $a(t,x) = a_t x + c_t$ et $\sigma(t,x) = \sigma_t x + \delta_t$, c'est à dire qu'on considère l' EDS affine générale

$$dX_t = X_t (a_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t \tag{3.6}$$

Elle a une solution construite à partir de la solution Z de l'EDS linéaire associée $dZ_t = Z_t (a_t dt + \sigma_t dB_t)$ de condition initiale $Z_0 = 1$, i.e.

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

En notant $\widetilde{c}_t = c_t - \sigma_t \delta_t$, telle que

$$X_t = Z_t \left(X_0 + \int_0^t Z_s^{-1} (\widetilde{c}_s ds + \delta_s dB_s)\right) \tag{3.7}$$

avec la formule d'Itô, on vérifie que (3.7) satisfait effectivement l'équation (3.6) :

$$\begin{aligned} dX_t &= Z_t \left(Z_t^{-1} (\widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t)\right) + X_t (a_t dt + \sigma_t dB_t) + d\left\langle Z_t, Z_t^{-1}\delta_t B_t\right\rangle_t \\ &= \widetilde{c}_t dt + \delta_t dB_t + X_t (a_t dt + \sigma_t dB_t) + \sigma_t \delta_t dt \\ &= X_t (a_t dt + \sigma_t dB_t) + c_t dt + \delta_t dB_t \end{aligned}$$

3.1.3 Processus de Bessel

soit $b > 0$, on considère l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = \frac{b}{X_t} dt + dB_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Il existe une unique solution (forte) à cette équation, appelée processus de Bessel.

$f(x) = \frac{b}{x}$ n'est pas lipschitzienne en 0, $(f'(0) = -\infty)$, on déduit que les conditions d'existence et d'unicité sont suffisantes mais pas nécessaires.

Il existe des équations qui ont plus d'une solution. Soit l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = 3X_t^{\frac{2}{3}} dt \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

Cette équation a plus d'une solution, pout tout b, le processus:

$$dX_t = (t-b)^3 \quad \text{si} \quad t > b \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{si} \quad t \leq b$$

est une solution de l'équation.

CHAPTER 4

Solution approximative d'Euler-Maruyama pour les EDS

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité complet avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0}$ aux conditios usuelles (c'est -à-dire qu'il est continu à droite et $\mathcal{F}_{t_0}$ contient tous les ensembles $\mathcal{P}-$nuls). On considère la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Si A est un vecteur ou une matrice, sa transposée est notée A^T, si A est une matrice, sa norme de trace est représentée par $|A| = \sqrt{tr(A^T A)}$. Soit $B(t) = (B_1(t), B_2(t), ..., B_m(t))^T$ est un mouvement Brownien $m-$dimensionnel défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

soit $\beta_t \subset ((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d)$ la famille de fonctionnelles définies sur $(-\infty; 0]$,continues, bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme

$$\|Q\| = \sup_{-\infty < \theta \leq 0} |Q|.$$

Soit $\mathcal{M}^2((-\infty, 0]; R^d)$ la famille des processus $\mathcal{F}_{t_0}-$mesurables de $(-\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}^d$,

$$Q(t) = Q(t, w), \ t \in (-\infty; 0],$$

tel que

$$\mathbb{E} \int_{-\infty}^{0} |Q|^2 \, dt < \infty$$

Dans [11], considéré les équations différentielles fonctionnelles stochastiques de $d-$dimensions suivantes

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))d\beta(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

où

$$X_t = \{X(t + \theta) : -\infty < \theta \leq 0\} \subset ((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d)$$

tel que

$$f : \beta \subset BC([t_0; T] \times (-\infty; 0]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

et

$$g : \beta \subset BC([t_0; T] \times (-\infty; 0]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times m}$$

mesurable, et la valeur initiale est donnée par:

$$X_{t_0} = \zeta = \{\zeta(\theta) : -\infty \leq \theta \leq 0\} \tag{4.1}$$

est une $\mathcal{F}_{t_0}$−mesurable a valeurs dans $BC((-\infty; 0]; \mathbb{R}^d)$ l'ensemble de variables aléatoires telle que

$$\zeta \in \mathcal{M}^2((-\infty; 0]; \mathbb{R}^d). \tag{4.2}$$

Une classe spéciale, importante d'équations différentielles stochastiques est la classe d'équations différentielles stochastiques avec retard commençons par l'équation différentielle stochastique avec retard suivante :

$$dX(t) = F(t, X(t), X(t - \delta(t))dt + G(t, X(t), X(t - \delta(t))dB\,(t)_t\,, \tag{4.3}$$

$t \in [\ t_0; T]$ avec les données initiales (4.2), où

$$\delta : [t_0; T] \to [0, \infty), \qquad F : [t_0; T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

Et

$$G : [t_0; T]\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times m}$$

est mesurable.

Définissions f, g par:

$$f(t, Q) = F(t, Q(0), Q(-\delta(t))) \text{ et } g(t, Q) = G(t, Q(0), Q(-\delta(t)))$$

Pour $(Q, t) \in \beta \subset [t_0; T] \times ((-\infty; 0]; \mathbb{R}^d$, alors l'équation (4.3) peut être écrite comme l'équation (4.1) afin que l'on puisse appliquer le théorème d'existence et d'unicité sur l'équation on retard (4.3).

4.1 Hypothèses

D'autre part, nous imposons la condition de lipschitz non uniforme et la croissance linéaire affaiblie condition, c'est tel que pour tout $t \in [\ t_0; T]$, et tout $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t, x, y) - f(t, \overline{x}, \overline{y})|^2 \vee |g(t, x, y) - g(t, \overline{x}, \overline{y})|^2 \leq h(|x - \overline{x}|^2 + |y - \overline{y}|^2); \tag{4.4}$$

où $h(.)$ est une fonction concave non décroissante de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{R}_+$ telle que $h(0) = 0$, $h(u) > 0$ pour $u > 0$ et $\int_{0+} \frac{du}{h(u)} = \infty$ et il existe une constante $k > 0$ tel que pour tout $(t, x, y) \in [t_0; T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$|f(t,0,0)|^2 \vee |g(t,0,0)|^2 \leq K \tag{4.5}$$

4.2 Lemmes et théorèmes

Préparons maintenant quelques lemmes afin de montrer le résultat principal.

On défini tout d'abord la suite d'approximation de Euler-Maruyama comme suit : pour tout entier $n \geq 1$, $X_n(t_0 + \theta) = \xi(\theta)$ si $-\infty < \theta \leq 0$ et

$$X_n(t) = X_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\right) + \int_{t_0+\frac{h}{n}}^{t} f\left(s, X_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\right), X_n\left(t_0 + \frac{k}{n} - \delta(s)\right)\right) ds \tag{4.6}$$

$$+ \int_{t_0+\frac{k}{n}}^{t} g\left(s, X_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\right), X_n\left(t_0 + \frac{k}{n} - \delta(s)\right)\right) dB_s \tag{4.7}$$

Pour

$$t_0 + \frac{k}{n} < t \leq \left[t_0 + \frac{(k+1)}{n}\right] \wedge T, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

Si on pose

$$X_n^1(t_0) = X_n(t_0), \quad X_n^2(t_0) = X_n(t_0) - \delta(t_0), \quad X_n^1(t) = X_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\right),$$

et

$$X_n^2(t) = X_n\left(t_0 + \frac{k}{n} - \delta(t)\right)$$

Pour $t_0 + \frac{k}{n} < t \leq \left[t_0 + \frac{(k+1)}{n}\right] \wedge T, \quad k = 0, 1, 2, ...,$

On trouve :

$$X_n(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right) ds + \int_{t_0}^{t} g\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right) dB_s \tag{4.8}$$

Le lemme suivant donne la borniture de la suite d'approximation d'Euler-Maruyama

Lemme 4.1 *Sous les hypothéses (4.4) et (4.5) on a , pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \geq t_0$*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty < s \leq t} |X_n(s)|^2\right) \leq \left(\frac{1}{2} + 4\mathbb{E}||\xi||^2 + KF(T - t_0)\right) \exp\left(2aF\left[T - t_0\right]\right)$$

tel que $F = 6(T - t_0 + 4)$.

Preuve. Nous avons

$$X_n(s) = \xi(0) + \int_{t_0}^{t} f\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right) ds + \int_{t_0}^{t} g\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right) dB_s$$

D'aprés l'inégalité

$$(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

on'a:

$$|X_n(s)|^2 \leq 3|\xi(0)|^2 + 3\left|\int_{t_0}^{t} f\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right) ds\right|^2 + 3\left|\int_{t_0}^{t} g\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right) dB_s\right|^2$$

Passons par le suprimum et l'éspérance $\mathbb{E}$ on'a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2 + 3\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}\left|\int_{t_0}^{s} f\left(r, X_n^1(r), X_n^2(r)\right) dr\right|^2\right)\\ &\quad +3\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}\left|\int_{t_0}^{s} g\left(r, X_n^1(r), X_n^2(r)\right) dB(r)\right|^2\right)\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Doob mg et lemme de Hölder on trouve:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2 + 3\mathbb{E}(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\left|f\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right)\right|^2 ds\\ &\quad +3\mathbb{E}(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\left|g\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s)\right)\right|^2 ds\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2\\ &\quad +3(T-t_0)\mathbb{E}\int_{t_0}^{t}\left|f\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s) + f(t,0,0) - f(t,0,0)\right)\right|^2 ds\\ &\quad +3\mathbb{E}\int_{t_0}^{t}\left|g\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s) + g(t,0,0) - g(t,0,0)\right)\right|^2 ds\end{aligned}$$

Cela nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2\\ &\quad +6(T-t_0)\mathbb{E}\int_{t_0}^{t}\left[\left|f\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s) - f(t,0,0)\right)\right|^2 + |f(t,0,0)|^2\right] ds\\ &\quad +6\mathbb{E}\int_{t_0}^{t}\left[\left|g\left(s, X_n^1(s), X_n^2(s) - g(t,0,0)\right)\right|^2 + |g(t,0,0)|^2\right] ds\end{aligned}$$

Et par les hypothèse (4.4) et (4.5) nous arrivons à :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2+6\mathbb{E}(T-t_0)\int_{t_0}^t\left[h\left(\left|X_n^1(s)\right|^2+\left|X_n^2(s)\right|^2\right)+K\right]ds\\ &\quad +6\times 4\mathbb{E}\int_{t_0}^t\left[h\left(\left|X_n^1(s)\right|^2+\left|X_n^2(s)\right|^2\right)+K\right]ds\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2+6K(T-t_0+4)(T-t_0)\\ &\quad +6(T-t_0+4)\mathbb{E}\int_{t_0}^t h\left(\left|X_n^1(s)\right|^2+\left|X_n^2(s)\right|^2\right)ds\end{aligned}$$

Et d'aprés la définition de $h(.)$ posons $F=6(T-t_0+4)$, on trouve

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right)\leq 3\mathbb{E}|\xi(0)|^2+KF(T-t_0)+aF\int_{t_0}^t\left(1+2\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty\leq r\leq s}|X_n(r)|^2\right)\right)ds$$

D'ou

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right) &\leq \frac{1}{2}+4\mathbb{E}|\xi(0)|^2+KF(T-t_0)\\ &\quad +aF\int_{t_0}^t\left(\frac{1}{2}+\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty\leq r\leq t}|X_n(r)|^2\right)\right)ds\end{aligned}$$

Finalement d'aprés le lemme de Grönwall on'a :

$$\frac{1}{2}+\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|X_n(s)|^2\right)\leq\left(\frac{1}{2}+4\mathbb{E}|\xi(0)|^2+KF(T-t_0)\right)\exp\left(2aF[T-t_0]\right)$$

Le théorème suivant nous donne la convergence de la solution approximative d' Euler-Maruyama converge vers la solution exacte de notre équation. ■

Théorème 4.1 *sous les hypothèses (4.4) et (4.5) on peut estimer la différence entre la solution approximative d' Euler-Maruyama et la solution exacte de l'équation, ie:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0<s\leq t}|X_n(t)-X(t)|^2\right)\leq\left(\frac{1}{2}aE(T-t_0)+\widehat{J}_1+\widehat{J}_2\right)\exp(2aE[T-t_0]),\qquad(4.9)$$

tels que $\widehat{J}_1=\frac{a}{n}CD(T-t_0)$, $\widehat{J}_2=4aBE(T-t_0)$

$C = \left(\frac{1}{2} + 4\mathbb{E}\left|\xi\right|^2 + 6K\left(T - t_0 + 4\right)\left(T - t_0\right)\exp\left(12a\left(T - t_0 + 4\right)\left(T - t_0\right)\right)\right)$
$D = 8\left(K + a\left(1 + 2C\right)\right)$ et $E = 4\left(T - t_0 + 4\right)$

Preuve. on a

$$X(t) = \xi\left(0\right) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-\beta(s))ds + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s), x(s-\beta(s))dB\left(s\right)$$

$$X_n(t) = \xi\left(0\right) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n^1(s), x_n^2(s)ds + \int_{t_0}^{t} g\left(s, x_n^1(s), x_n^2(s)\right)dB\left(s\right)$$

Cela implique

$$\begin{aligned} X(s) - X_n(s) &= \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x(s), x(s-\beta(s) - f(s, x_n^1(s), x_n^2(s))\right] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \left[g(s, x(s), x(s-\beta(s) - g(s, x_n^1(s), x_n^2(s))\right] dB\left(s\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|X(s) - X_n(s)\right|^2 &\leq 2\left|\int_{t_0}^{t} \left[f(s, x(s), x(s-\beta(s) - f(s, x_n^1(s), x_n^2(s))\right] ds\right|^2 \\ &\quad + 2\left|\int_{t_0}^{t} \left[g(s, x(s), x(s-\beta(s) - G(s, x_n^1(s), x_n^2(s))\right] dB\left(s\right)\right|^2 \end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Holder, l'inégalité de Doob martingale et l'inégalité de moments nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 < s \leq t}\left|X(s) - X_n(s)\right|^2\right) &\leq 2(T-t_0)\mathbb{E}\int_{t_0}^{t}\left|f(s, x(s), x(s-\beta(s) - f(s, x_n^1(s), x_n^2(s))\right|^2 ds \\ &\quad + 2\times 4\mathbb{E}\int_{t_0}^{t}\left|g(s, x(s), x(s-\beta(s)) - g(s, x_n^1(s), x_n^2(s))\right|^2 ds \end{aligned}$$

Et par les hypothèses (4.4), (4.5) et la définition de $h(.)$ on a :

$$\begin{gathered} \mathbb{E}\left(\sup_{t_0 < s \leq t}\left|X(s) - X_n(s)\right|^2\right) \leq 2a(T-t_0)(T-t_0+4) \\ +2a(T-t_0+4)\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}\left|X(s) - X_n^1(s))\right|^2 + \mathbb{E}\left|X(s-\beta(s)) - X_n^2(s)\right|^2 ds \end{gathered} \tag{4.10}$$

Si on pose $X^1(t_0) = X(t_0)$, $X^2(t_0) = X(t_0 - \beta(t_0))$, $X^1(t) = X(t_0 + \frac{k}{n})$, et $X^2(t) = X(t_0 + \frac{k}{n} - \beta(t))$ pour $t_0 + \frac{k}{n} < t \leq [t_0 + (k+1)/n] \wedge T, k = 0, 1, 2, \ldots$ il résulte alors de (4.9) que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 < s \leq t}\left|X(s) - X_n(s)\right|^2\right) \leq \frac{1}{2}aE(T-t_0) + 2aE\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 < r \leq s}\left|X(r) - X_n(r)\right|^2\right)ds + J_3 + J_4$$

Où

$$J_3 = aE\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}\left|\left|X(s) - X^1(s)\right|^2\right|ds$$

et

$$J_4 = aE \int_{t_0}^{t} \mathbb{E} \left| \left| X(s - \beta(s)) - X^2(s) \right|^2 \right| ds,$$

On appliquant l'inégalité de Gronowall :

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t_0 < s \leq t} |X(s) - X_n(s)|^2 \right) \leq (aE(T - t_0)/2 + J_3 + J_4) \exp\left(2aE[T - t_0]\right), \qquad (4.11)$$

Nous pouvons estimer

$$J_4 = aE \sum_{k \geq 0} \int_{t_0 + \frac{k}{n}}^{[t_0 + (k+1)/n] \wedge T} \mathbb{E} \left| \left| X(s) - X(t_0 + \frac{k}{n}) \right|^2 \right| ds \leq aCE \frac{1}{n} [T - t_0], \qquad (4.12)$$

Avec

$$J_4 = aE \int_{t_0}^{T} \mathbb{E} \left| X(s - \beta(s)) - X(t_0 + \frac{k}{n} - \beta(s))^2 \right| ds \leq 4aBE[T - t_0], \qquad (4.13)$$

La substitution de (4.11) et (4.12) par (4.9) donne le résultat requis (4.8). La preuve est complète. ■

Pour l'unicité de la solution, on suppose que l'équation (4.1) admet deux solutions $X(t)$, $Y(t)$ et par les mêmes méthodes utilisées dans les démonstrations précédentes, on peut facilement prouver que

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)|^2 = 0$$

Ce qui implique que $X(t) = Y(t)$.

CHAPTER 5

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a parler sur la solution approximative de Euler-Maruyama pour les équations différentielles stochastiques. D'abord on donnera quelques rappels sur les espaces mesurables et les espaces probabilisés et queleques théorèmes.

Ensuite on parle sur l'intégrale stochastique et les martingales, et présente le processus stochastique et la formule d'Itô et la construction du mouvement brownien,nous avons détaille des équations différentielles stochastique ,on définit l'existence et l'unicité des solutions, et donner le shéma d'approximation de Euler-Maruyama pour les EDS et ces applications pour démontrer l'existence et l'unicité de solution des EDS.

Nous espérons comme perspective de généraliser ce travail dans le cas des équations différentielles stochastiques gouvernées le G-mouvement Brownien.

BIBLIOGRAPHY

[1] El-H Chalabi, S Mesbahi On the existence and stability of solutions of stochastic differential systems driven by the G-Brownian motion. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. Volume 82, 2021, 57–74

[2] F.aboubou, "Les équations différentielles stochastiques avec retard", Mémoire de Master soutenue en 2022 Univ-Skikda

[3] F.Faizullah. A note on the caratheodory approximation scheme for stochastic differentielle equations under G-Brownian motion, Z. Normal forsh 67 (2012). 432-439

[4] F.Jedrzejewski, "Modèles aléatoires et physique probabiliste", Springer-Verlag France 2009.

[5] J.C.Breton, "calcul stochastique", Université de Rennes 1 Octobre-Décembre 2020.

[6] P.Dusart, "Cours de probabilités", Licence 2-S3 SI-Mass 2013.

[7] T.Gallay, "Théorie de la mesure et de l'intégration", Université joseph fourier, Grenoble 2009.

[8] V.Bénézech,P.Bouafia, "Equation différentielle stochastique en dimension finie et infinie".

[9] X.Mao, "STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIOPNS", May 1997, June 2007.

[10] Y. H. Kim, "Carathéodory Approximate Solution Stochastic Differential Delay Equation". Filomat 30:7 (2016), 2019-2028.

[11] Y. Ren, S. Lu, and N. Xia, Remarks on the existence and uniqueness of the solutions to stochastic functional differential equations with infinite delay, J. Comput. Appl. Math. 220 (2008) 364-372.