

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Les méthodes de Runge-Kutta

Option : *Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*

Présenté par : 1. Yssaad Amel

2. Mermad Ghania

Encadré par : Boughiout Nawel

M.C.B

U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Hannach Amel

M.C.B

U. SKIKDA

Examineur : Bouzatouta Lamine

M.C.A

U. SKIKDA

Année : 2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله الذي علمني ما لم أكن أعلم ورزقني نور العلم، ووفقني لإنجاز هاته
المذكورة.

قال تعالى:

(فَتَعَالَى اللَّهُ الْمَلِكُ الْحَقُّ وَلَا تَعْجَلْ
بِالْقُرْآنِ مِنْ قَبْلِ أَنْ يُقْضَىٰ إِلَيْكَ وَحْيُهُ وَقُلْ رَبِّ
زِدْنِي عِلْمًا)، «سورة طه: الآية 114».


وقال تعالى: (يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ
آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا
تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)، «سورة المجادلة: الآية 11».

صدق الله العظيم.




Remerciements

Un grand merci revient à Allah le tout puissant qui lui seul nous a donné la volonté de réaliser ce modeste travail .



Un grand merci à notre promoteur, Dr BOUGHIOUW Nawel, pour ses conseils et son aide et qui a mis à notre disposition tout le nécessaire pour réaliser ce travail .

Nous remercions messieurs les membres de jury, qui ont accepté de participer au jury de soutenance. .



Nous tenons à remercier nos parents pour leurs encouragements et leurs soutiens.

Sans oublier les bons collègues, nous les remercions toutes les Belles journées qu'on a passées ensemble. Et tous les autres sans exception.

Ainsi, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail nous leur disons.

Merci pour tout.





Dédicace

Je dédie ce mémoire

*A ma très chère mère, qui représente pour moi la source de
tendresse et exemple du dévouement et qui n'a pas
cessé de m'encourager et de prier pour moi.*

*A mon cher père, qui a toujours rêvé de me voir sauter les
degrés de la réussite.*

*A mon cher mari, pour courage et sa patience
durant mon parcours universitaire.*

*A la joie de notre maison, les petits anges, mes filles,
qu'Allah les protège.*

*A mes sœurs, et frères, qui soutiennent dans la vie
et leurs enfants*

A mes amies et camarades.

*Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire,
du moyenne, du secondaire ou de
l'enseignement supérieur.*



Dédicace

Je dédie ce mémoire

A ma très chère mère, qui représente pour moi la source de tendresse et exemple du dévouement et qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A mon cher père, qui a toujours rêvé de me voir sauter les degrés de la réussite.

A mes sœurs, et frères, qui soutiennent dans la vie.

A mon cher mari, pour m'encourager.

A la joie de notre maison, les petits anges, les enfants de ma sœur, qu'Allah les protège.

A mes amies et camarades.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyenne, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

*GHANIA
GHANIA*

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la méthode numérique Runge-Kutta de toutes sortes (ordre élevé, fermées et symplectique), elle faire à résoudre les équations différentielles ordinaires. Consolidant notre travail par des simulations numériques.

Mots clés :

Runge-Kutta - problèmes à condition initial - approximation - emboîtée - symplectique - ordre élevé - système hamiltonien.

Abstract

In this memory, we are interested in the numerical method Runge-Kutta for resolution of differential equations. We discuss the different types of this method (embedded and symplectic), with the support of an numerical examples.

Key words:

Runge-Kutta, problems with initial condition - approximation - embedded - symplectic - high stages - Hamiltonian system.

المخلص

نهتم في هذه المذكرة بالطريقة العددية رانج كوئا بأنواعها (الرتب العليا، المغلقة والتماسكية)، الخاصة بحل المعادلات التفاضلية العادية مع التدعيم بأمثلة عددية.

الكلمات المفتاحية :

رانج كوئا - مسائل مع شروط ابتدائية - المغلقة - التماسكية - الرتب العليا - أنظمة هاميلتون.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Les méthodes de Runge-Kutta classiques	4
1.1 problème de Cauchy	4
1.2 Étude générale des méthodes à un pas :	4
1.3 Les méthodes de Runge-Kutta	13
2 Les formules du cinquième et sixième ordre	21
2.1 Les équations de condition pour les coefficients de Runge-Kutta :	21
2.2 Une solution des équations de condition pour les coefficients :	27
2.3 Le terme principal de l'erreur de troncature locale	31
2.4 Méthodes de Runge-Kutta à formules emboîtées :	33
3 Les méthodes de Runge-Kutta symplectiques	35
3.1 Que signifie symplectique ?	35
3.2 Système différentiel hamiltonien	35
3.3 Méthode d'Euler symplectique :	36
3.4 Runge-Kutta 4 implicite symplectique	37
4 Simulation numérique	39

Introduction générale

Les méthodes de Runge-Kutta (RK à brièvement) sont des méthodes d'analyse numérique fréquemment utilisés pour l'approximation des solutions d'équations différentielles ordinaires. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta, lesquels élaborèrent la méthode en 1901. Elles font parties des méthodes les plus populaires de la part de leur facilité de mise en œuvre et leur précision.

La méthode de RK est un algorithme en une étape de haute précision largement utilisé en ingénierie. Étant donné que cet algorithme à une grande précision, il est construit sur un support mathématique. La base théorique de la méthode de RK est dérivée de la formule de Taylor et utilise l'approximation de la pente pour exprimer la différentielle, on calcule la pente de plusieurs points dans la période d'intégration puis on implémente une moyenne pondérée à utiliser comme base pour le point suivant, on obtient la méthode d'intégration numérique élevée si la pente de deux points est prise à l'avance et alors c'est la méthode de Runge-Kutta du second ordre, et si quatre points sont pris à l'avance. c'est la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre ...

Il existe beaucoup des formules de la méthode afin de diminué l'erreur tel que d'ordre élevé : 7, 8, 9, 10, 11 et 12 [7], celle emboîtées 8(7), 9(8), 10(9), 11(12), ... [15], emboîtées paires 8(6), 12(10) [8] et emboîtées triples [9].

Malgré la simplicité et la précision de la méthode R-K elle souffre des inconvénients, les plus important d'entre eux c'est l'instabilité à long terme aussi la perte des constantes des systèmes conservatifs comme l'énergie et le mouvement cinétique. Les méthodes R-K symplectiques répondent à ces problèmes, elles sont appliquées aux systèmes Hamiltoniens et elles préservent l'espace des phases [11].

Dans le premier chapitre, nous étudient la méthode de Runge-Kutta simple en détail. Tel que le problème de Cauchy, les méthodes à un pas où nous avons discuté de sa consistance, stabilité et convergence on faisant on les vérifiant pour les méthodes RK2 et RK4, discutant à la fin des avantages et inconvénients.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations de condition pour les coefficients de Runge-Kutta 5 et 6 dérivées des formules classiques de Runge-Kutta, y compris une procédure de contrôle de pas qui est à niveau basée sur une couverture complète du terme d'erreur de troncature locale principal. Naturellement, ces nouvelles formules nécessitent plus d'évaluations des différentielles que les formules classique connues de Runge-Kutta sans procédure de contrôle de taille d'arrêt. Et puis nous avons touché à la méthodes emboîtée, qui utilise deux formules de Runge-Kutta simultanément pour chaque pas, utilisant les mêmes évaluations de dérivées mais avec des coefficients différents l'une est à l'ordre

p , l'autre à l'ordre q , ($q > p$ en général $q = p + 1$). Sous des conditions de continuité et de différentiabilité commensurables.

Dans le chapitre trois, nous avons discuté brièvement des méthodes de R-K symplectiques tel que la méthode d'Euler, RK4 implicite et symplectique. Consolidant notre travail par des simulations numériques dans le dernier chapitre, en utilisant le Matlab 2012a.

Les méthodes de Runge-Kutta classiques

1.1 problème de Cauchy

Définition 1.1 :

Étant donné le problème :

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x)) & , \forall x \in [a, b] \\ y(a) = \eta & , \text{donné dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.1)$$

le problème de Cauchy consiste à la recherche d'une fonction y de classe c^1 vérifiant (1.1).

Définition 1.2 :

On dit que la fonction $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est **lipschitzienne** en y dans $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ s'il existe une constante réelle strictement positive $L > 0$, appelée **constante de Lipschitz** telle que :

$$\|f(x, y) - f(x, y^*)\| \leq L \|y - y^*\| : \quad \forall x \in [a, b]; \quad \forall y, y^* \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 1.1 :

Soit le problème de Cauchy (1.1) si $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions suivantes :

1. f continue.
2. $\|f(x, y) - f(x, y^*)\| \leq L \|y - y^*\|$; $L > 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall y, y^* \in \mathbb{R}^n$.

Alors le problème de Cauchy (1.1) admet une solution (fonction y de classe c^1) unique de classe $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Preuve. :

C.F [13]. ■

1.2 Étude générale des méthodes à un pas :

Soit f une fonction de $[a, b] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} donnée et vérifiant les conditions suivantes :

1. f continue.

2. f lipschitzienne en $y : \|f(x, y) - f(x, y^*)\| \leq L \|y - y^*\|, L > 0, \forall x \in [a, b], \forall y, y^* \in \mathbb{R}^n$.

Comme f vérifie les conditions du théorème (1.1)[Cauchy]. Donc il existe une fonction y de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ solution du **problème de Cauchy** (1.1).

On pose : $x_0 = a$ et $x_n = x_0 + nh; n = 0, \dots, N; h = \frac{b-a}{N}$.

Une méthode itérative à un pas consiste à approcher chaque valeur $y(x_{n+1})$ par une valeur y_{n+1} de \mathbb{R} calculée en fonction de x_n, y_n (valeur approchée de $y(x_n)$) et du pas h . Une telle méthode peut s'écrire :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h) ; & n = 0, 1, 2, \dots, N \\ y_0 = \eta_h & \text{donné dans } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.2)$$

où F est une fonction de $[a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$ dans \mathbb{R} dépendant du problème (1.1).

On se propose de montrer que dans une méthode à un pas, l'erreur $e_n = y_n - y(x_n)$ peut être proportionnelle à $h^p (p > 1)$, comme précédemment, on construira une fonction y_h telle que $y_h(x_n) = y_n$ et telle que $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

1.2.1 Notions de consistance, stabilité et convergence

Définition 1.3 : (La consistance)

Le problème (1.2) consiste avec (1.1) si on a :

$$\max |\nabla y(x_n) - F(x_n, y(x_n), h)| \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0; n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.3)$$

Comme y est la solution de l'équation (1.1) et $\nabla y(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ la dérivée approchée de y en x , alors : $\nabla y(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$.

Définition 1.4 :

Soient deux suites y_n et z_n définies par les formules :

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h) \quad ; y_0 \text{ fixé dans } \mathbb{R} \quad (1.4)$$

$$z_{n+1} = z_n + h\{F(x_n, z_n, h) + \varepsilon_n\} \quad ; z_0 \text{ fixé dans } \mathbb{R} \quad (1.5)$$

on dit que le schéma (1.5) est le schéma perturbé du problème (1.4) par ε_n et par la nouvelle condition initiale z_0 .

PROBLÈME :

z_n reste-t-il voisin de y_n lorsque la perturbation des données est assez petite ?

Définition 1.5 : (la stabilité)

on dit que la méthode(1.2) est stable s'il existe deux constantes M_1 et M_2 indépendantes de h telle que :

$$\max_n |y_n - z_n| \leq M_1 |y_0 - z_0| + M_2 \max_n |\varepsilon_n| \quad (1.6)$$

où y_n et z_n sont les résultats des schémas (1.4) et (1.5) respectivement.

Définition 1.6 :

Soit $\eta_h = y_0$ est une condition initiale pour un h fixé, on dit que la méthode (1.2) est **convergente** si :

$$\{\eta_h \longrightarrow \eta \text{ quand } h \longrightarrow 0\} \implies \left\{ \max_n |y_n - y(x_n)| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0 \right\} \quad (1.7)$$

Théorème 1.2 :

Si la méthode (1.2) est consistante et stable alors elle est convergente.

Preuve. :

Si on prend : $z_n = y(x_n)$ de (1.5), on a :

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = h[F(x_n, y(x_n), h) + \varepsilon_n] \quad (1.8)$$

y : solution de (1.1). La méthode est consistante donc :

$$\max_n \left| \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - F(x_n, y(x_n), h) \right| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

c-à-d que :

$$\max_n |\varepsilon_n| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0.$$

C'est la méthode (1.2) est stable, il résulte de (1.8) et (1.6) qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 telle que :

$$\max_n |y_n - y(x_n)| \leq M_1 |\eta_h - \eta| + M_2 \max_n |\varepsilon_n|.$$

Comme : $|\eta_h - \eta| \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$ donc :

$$\max_n |y_n - y(x_n)| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0,$$

et alors la méthode (1.2) est convergente. ■

1.2.2 Convergence des méthodes à un pas**Lemme 1.1 :**

Pour que la méthode (1.2) soit consistante avec l'équation (1.1) il faut qu'elle vérifie la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$F(x, y; 0) = f(x, y) \quad ; \forall x \in [a, b], \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Preuve. :

Condition nécessaire : quand $h \longrightarrow 0$ on a :

$$\max_n |\nabla y(x_n) - F(x_n, y(x_n), h)| \longrightarrow 0$$

donc

$$\begin{aligned} \max_n \left| \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - F(x_n, y(x_n), h) \right| &\longrightarrow 0 \\ \max_n \left| \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt - F(x_n, y(x_n), h) \right| &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

soit $x \in [a, b]$, il existe une suite x_n (**n dépendant de h**) tendant vers x quand $h \rightarrow 0$. f et F sont continues, donc :

$$\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt \rightarrow f(x, y(x)) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

$$F(x_n, y(x_n), h) \rightarrow F(x, y(x), 0) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

donc $f(x, y(x)) - F(x, y(x), 0) = 0$. Or $\forall x \in [a, b]$, $z = y(x)$ parcourt \mathbb{R} quand y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation (1.1) ; d'où (1.9).

Condition suffisante : si $F(t, y(t), 0) = f(t, y(t))$, a-t-on (1.3) ; d'où la consistance ?

$$\frac{1}{h}(y(x_{n+1}) - y(x_n)) - F(x_n, y(x_n), h) = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \{F(t, y(t), 0) - F(x_n, y(x_n), h)\} dt$$

F est continue uniformément sur le compact $\{(x, y(x)) \mid x \in [a, b]\} \times [0, h_0]$; donc pour $x_n \leq t \leq x_{n+1}$ on a :

$$\max_n |F(t, y(t), 0) - F(x_n, y(x_n), h)| \rightarrow 0$$

quand $h \rightarrow 0$. Ce qui entraîne

$$\max_n \left| \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \{F(t, y(t), 0) - F(x_n, y(x_n), h)\} dt \right| \rightarrow 0$$

quand $h \rightarrow 0$; ce qui est bien équivalent à (1.3). ■

Lemme 1.2 :

Soit a_n une suite de réels positifs telle que

$$\begin{cases} a_{n+1} \leq (1+A)a_n + B & ; n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ A > B \text{ et } B > 0 \end{cases}$$

alors :

$$a_{n+1} \leq a_0 e^{nA} + \frac{(e^n - 1)}{A} B ; \quad n = 1, \dots, N$$

Preuve. :

C.F [13]. ■

Lemme 1.3 :

Si F vérifié la condition de Lipschitz :

$$|F(x, y; h) - F(x, y^*; h)| \leq L|y - y^*| \quad ; \forall x \in [a, b]; \forall y, y^* \in h \quad ; \forall h \in [0, h_0] \quad (1.10)$$

avec L ne dépende pas de h ; alors la méthode (1.2) est stable avec les constantes M_1 et M_2 :

$$M_1 = e^{L(b-a)} \quad M_2 = \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L}$$

h_0 est le rayon de stabilité de la méthode.

Preuve. :

Soient y_n et z_n vérifiant

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h) \quad ; n = 0, \dots, N-1$$

$$z_{n+1} = z_n + h \{F(x_n, z_n, h) + \varepsilon_n\} \quad ; n = 0, \dots, N-1$$

on fait la différence et on a :

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + h|F(x_n, y_n, h) - F(x_n, z_n, h)| + h|\varepsilon_n|$$

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + hL) |y_n - z_n| + |h| |\varepsilon_n| \quad ; n = 0, \dots, N-1$$

alors d'après le lemme (1.2) on a :

$$|y_n - z_n| \leq |y_0 - z_0| e^{L(b-a)} + \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L} \max_{n=0, \dots, N-1} |\varepsilon_n|$$

pour $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Donc

$$\max_{n=0, 1, \dots, N} |y_n - z_n| \leq |y_0 - z_0| e^{L(b-a)} + \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L} \max_{n=0, 1, \dots, N-1} |\varepsilon_n|$$

d'où la stabilité. ■

Théorème 1.3 :

Soit F vérifiant

1. $F(x, y, 0) = f(x, y) ; \forall x \in [a, b], \forall y \in \mathbb{R}$.
2. $|F(x, y, h) - F(x, y^*, h)| \leq L |y - y^*| \quad ; \forall y, y^* \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], \forall h \in [0, h_0]$ avec L indépendant de h .

Alors la méthode (1.2) converge ($\max_n |y_n - y(x_n)| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$).

Preuve. :

1 \Rightarrow La consistance d'après le lemme (1.1)

2 \Rightarrow La stabilité d'après le lemme (1.3)

consistance et stabilité \Rightarrow convergence d'après le théorème (1.2). ■

Remarque 1 :

Si y est une solution de (1.1), y_n défini par (1.2) pour $n=0, 1, \dots, N$, on obtient une majoration de l'erreur en appliquant le lemme (1.3). Quand F vérifie les hypothèses du théorème (1.3), on obtient :

$$|e_n| = |y_n - y(x_n)| \leq |\eta_h - \eta| e^{L(x_n - a)} + \left(\max_{m=0, \dots, N-1} |\varepsilon_m| \right) \frac{e^{L(x_n - a)} - 1}{L}$$

avec $\varepsilon_n = |\nabla y(x_n) - F(x_n, y(x_n), h)|$.

Nous définissons sur $[a, b]$, la fonction "solution approchée" y_h comme étant par la ligne polygonale de \mathbb{R}^2 joignant les points $\{x_n, y_n\}$ successivement de $n = 0$ à $n = N$.

1.2.3 Étude de l'erreur de discrétisation. Ordre des méthodes à un pas :

Définition 1.7 :

La méthode (1.2) est d'ordre p ($p > 0$) si ;

$$\max_{n=0, \dots, N-1} |\nabla y(x_n) - F(x_n, y(x_n); h)| \leq C h^p \quad (1.11)$$

où C ne dépend pas de h mais dépend de y et F supposées toutes deux suffisamment différentiables.

Remarque 2 :

Le problème est de trouver une erreur e_n proportionnelle à h^p . La méthode convergera d'autant plus vite que p sera grand.

Théorème 1.4 :

Si f est suffisamment différentiable dans $[a, b] \times \mathbb{R}$ et si la méthode (1.2) est stable et d'ordre p on a :

$$\max_{n=0, \dots, N} |e_n| \leq M_1 |\eta_h - \eta| + M_2 C h^p \quad ; \quad e_n = y_n - y(x_n) \quad (1.12)$$

Preuve.

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n; h)$$

$y(x_{n+1})$ peut s'écrire :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h[F(x_n, y(x_n); h) + \varepsilon_n]$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - F(x_n, y(x_n); h) = \nabla y(x_n) - F(x_n, y(x_n); h)$$

(1.2) est d'ordre p , donc $\max_n |\varepsilon_n| \leq C h^p$; (1.2) est stable, donc :

$$\begin{aligned} \max_n |y_n - y(x_n)| &= \max_n |e_n| \leq M_1 |\eta - \eta_h| + M_2 \max_n |\varepsilon_n| \\ &\leq M_1 |\eta - \eta_h| + M_2 C h^p \end{aligned}$$

■

Remarque 3 :

Si : $\eta_h = \eta$ on a :

$$\max_n |e_n| \leq M_2 C h^p$$

Donc : $e_n \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \infty$ pour h assez petit.

Corollaire 1.2.1 :

Si

$$|F(x, y; h) - F(x, \bar{y}; h)| \leq L|\bar{y} - y|, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall y \text{ et } \bar{y} \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in [0, h_0].$$

L étant indépendant de h , ne dépendant que de F et de y solution de (1.1), si f est suffisamment différentiable sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ et si la méthode (1.2) est d'ordre p , alors :

$$\max_{0, 1, \dots, N} |e_n| \leq e^{L(b-a)} |\eta_h - \eta| + C \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L} h^p \quad (1.13)$$

Preuve. :

Le lemme (1.3) entraîne que (1.2) est stable et que $M_1 = e^{L(b-a)}$ et $M_2 = \frac{e^{L(b-a)} - 1}{h}$ dans (1.6). Le théorème (1.4) nous donne la relation :

$$\max_{0, 1, \dots, N} |e_n| \leq e^{L(b-a)} |\eta_h - \eta| + C \frac{e^{L(b-a)} - 1}{h} h^p$$

■

1.2.4 Majoration a priori de l'erreur de discrétisation :

Notons

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} f \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f^{(k)} &= \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial y} f \end{aligned}$$

donc

$$y^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x, y(x)) = \frac{d^k}{dx^k} f(x, y(x))$$

et

$$\vartheta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], |y| \leq |y_0| e^{L(b-a)} + \frac{e^{L(b-a)} - 1}{k} + \sup_{x \in [a, b]} |f(x, 0)| \right\}$$

Théorème 1.5 :

Si f est p fois continûment différentiable dans $[a, b] \times \mathbb{R}$ (ou dans ϑ), et si $F, \frac{\partial F}{\partial h}, \dots, \frac{\partial^p F}{\partial h^p}$ existent et continues dans $[a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$, alors la méthode (1.2) est d'ordre p si et seulement si :

$$\begin{cases} F(x, y; 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial h}(x, y; 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(x, y) \\ \dots \dots \dots ; \forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \\ \frac{\partial^{(p-1)}}{\partial h^{(p-1)}} F(x, y, 0) = \frac{1}{p} f^{(p-1)}(x, y). \end{cases} \quad (1.14)$$

De plus la constante C de la définition (1.7) est donnée par :

$$C = \frac{1}{(p+1)!} \max_{(x,y) \in \vartheta} |f^{(p)}(x, y)| + \frac{1}{p!} \max_{\substack{(x,y) \in \vartheta \\ h < h_0}} \left| \frac{\partial^p F}{\partial h^p}(x, y; h) \right| \quad (1.15)$$

Preuve. :

f est p fois continûment différentiable, dont y est de classe \mathbb{C}^{p+1} . On peut alors le développement de Taylor.

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = h \dot{y}(x_n) + \frac{h^2}{2!} \ddot{y}(x_n) + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_n) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\varepsilon_n)$$

où $x_n < \varepsilon_n < x_{n+1}$

$$\begin{aligned} \nabla y(x_n) &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \\ \nabla y(x_n) &= f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2!} f^{(1)}(x_n, y(x_n)) + \dots \\ &+ \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x_n, y(x_n)) + \frac{h^p}{(p+1)!} f^{(p)}(\varepsilon_n, y(\varepsilon_n)) \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.2.5 Méthode de Taylor

On considère le schéma défini par :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h F(x_n, y_n; h) \\ y_0 = \eta \end{cases} \quad \text{donné dans } \mathbb{R}$$

avec

$$F(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f^{(1)}(x, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x, y) \quad (1.18)$$

Nous pouvons vérifier facilement que l'on a :

$$\begin{cases} F(x, y; 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial h}(x, y; 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(x, y) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial^{p-1} F}{\partial h^{p-1}}(x, y; 0) = \frac{1}{p} f^{(p-1)}(x, y) \end{cases}$$

Donc d'après le théorème (1.5), cette méthode est consistante et d'ordre p , ce même théorème nous permet d'estimer la constante :

$$C = \frac{1}{(p+1)!} \max_{(x,y) \in \mathcal{D}} |f^{(p)}(x, y)| + \frac{1}{p!} \max_{\substack{(x,y) \in \mathcal{D} \\ h \leq h_0}} \left| \frac{\partial^p F}{\partial h^p}(x, y; h) \right|$$

donc, ici nous avons :

$$C = \frac{1}{(p+1)!} \max_{(x,y) \in \mathcal{D}} |f^{(p)}(x, y)|$$

Cherchons une condition pour que la méthode de TAYLOR soit stable.

Supposons

$$|f^{(k)}(x, y) - f^{(k)}(x, \bar{y})| < L_k |y - \bar{y}|; \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R},$$

pour $k = 0, 1, \dots, p-1$.

(Remarquons que L_0 est la constante de Lipschitz de f).

Nous pouvons prendre

$$L_k = \sup_{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f^{(k)}}{\partial y}(x, y) \right|,$$

f étant supposée dérivable et à dérivée bornée. Nous avons alors :

$$|F(x, y; h) - F(x, \bar{y}; h)| \leq (L_0 + \frac{h}{2!} L_1 + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} L_{p-1}) |y - \bar{y}|$$

et on posant $L = L_0 + \frac{h}{2!} L_1 + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} L_{p-1}$ nous obtenons :

$$|F(x, y; h) - F(x, \bar{y}; h)| \leq L |y - \bar{y}| \quad \forall h \in [a, h_0]$$

F alors est lipschitzienne, donc la méthode de TAYLOR est stable, d'après le lemme (1.2).

La méthode de TAYLOR est stable et consistante ; elle est donc convergente.

1.2.6 Méthode d'Euler

L'inégale $y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ peut s'approcher par la méthode du rectangle à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \simeq h \times f(t_n, y(t_n))$$

D'où le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Il s'agit de la fameuse méthode d'Euler explicite. Graphiquement, on voit immédiatement que cette méthode sous estime (sur-estime) l'aire quand la fonction f croît (décroît) au cours du temps.

L'erreur produite correspond à l'aire grisée de forme quasi triangulaire et de dimension $h \times ph$ où p est la pente de f à l'instant t_n . L'erreur vaut donc à peu près :

$$e_n = \frac{1}{2} p h^2$$

Après N itération, on a une erreur globale de l'ordre de $N \frac{1}{2} p h^2 = \frac{1}{2} T p h$ où T est la durée totale. Aussi, pour une durée donnée, l'erreur totale augmente linéairement avec le pas h : on dit que la méthode d'Euler est d'ordre un.

Appelée aussi « *méthode de tangente* », c'est la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles.

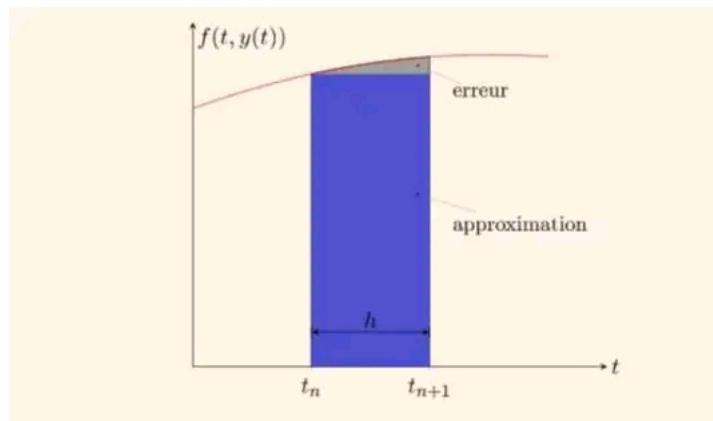


FIGURE 1.1 – Méthode d'Euler

1.3 Les méthodes de Runge-Kutta

Parmi ces méthodes à un pas, les méthodes de RK, leurs algorithmes consistent à calculer à chaque pas des valeurs intermédiaires.

soit le problème (1.1). on intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Qui prend la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_1 = f(t_n, y_n).$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h(a_{21} k_1)).$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)).$$

⋮

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right).$$

Tel que les coefficients de la méthode sont les suivants :

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

1.3.1 Runge-Kutta d'ordre 02

Soit

$$\phi(x, y, h) = b_1 f(x, y) + b_2 f[x + P_1 h, y + P_2 h f(x, y)]$$

et

$$\phi(x_n, y_n, h) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (\text{La fonction incrément})$$

$$z(x+h) - z(x) = h\Delta(x, y, h)$$

avec $z(x)$ est la solution exact du problème différentiel $z'(x) = f(x, z(x)); y = z(x)$.
pour la méthode d'ordre 2 il suffit d'imposer que le développement de Taylor de ϕ au premier ordre en h coïncide avec celui de Δ au même ordre :

$$z(x+h) = z(x) + h z'(x) + \frac{h^2}{2} z''(x) + o(h^3).$$

$$\begin{aligned} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} &= \Delta(x, y, h) = z'(x) + \frac{h}{2} z''(x) + o(h^2). \\ &= f(x, y) + \frac{h}{2} f''(x, y) + o(h^2). \\ &= f(x, y) + \frac{h}{2} (f_x + f_y f) + o(h^2). \end{aligned}$$

Le développement de ϕ du premier ordre en h :

$$\begin{aligned}\phi(x, y, h) &= \phi(x, y, 0) + h\phi(x, y, 0) + O(h^2). \\ &= b_1 f(x, y) + b_2 f(x, y) + h[b_2(P_1 f_x + P_2 f f_y)] + O(h^2). \\ &= (b_1 + b_2)f + h b_2 P_1 f_x + h b_2 P_2 f f_y + O(h^2).\end{aligned}$$

$$\Delta \equiv \phi \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 P_1 = \frac{1}{2} \\ b_2 P_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous choisissons $b_2 = \beta$ nous obtenons :

$$\begin{cases} b_1 = 1 - \beta. \\ b_2 = \beta. \\ P_1 = P_2 = \frac{1}{2\beta}. \end{cases}$$

En effet, la longueur des calculs croit très rapidement avec l'ordre.

- On utilise la méthode de trapèze on voit immédiatement que l'on peut améliorer l'estimation de l'intégrale en calculant l'aire d'une trapèze au lieu de celui d'une rectangle. La méthode du trapèze consiste à l'approximation suivant :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} \times [f(a) + f(b)]$$

appliquée à l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ cela donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \simeq \frac{h}{2} \times [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

Donc par trapèze, l'intégrale devienne :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$$

utilisant la méthode d'Euler explicite :

$$y(t_{n+1}) = y_n + h \times f(t_n, y_n)$$

Alors :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y_n + h \times f(t_n, y_n))]$$

on pose $f(t_n, y(t_n)) = k_1$ et $f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = K_2$

$$\text{Donc } k_2 = f(t_{n+1}, y_n + h k_1).$$

D'où la relation Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [k_1 + k_2].$$

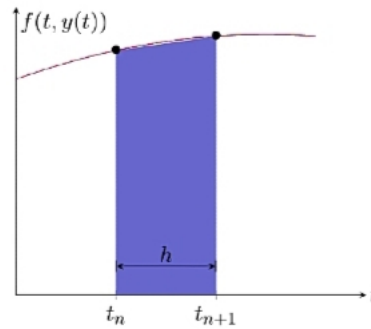


FIGURE 1.2 – Méthode de Trapèze

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

TABLE 1.1 – Runge-Kutta, ordre 02

1.3.2 Runge-Kutta d'ordre 4 :

Elle est donnée par le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

Pour trouver ce schéma on utilise la **méthode de Simpson** qui consiste à remplacer la fonction intégrée par une parabole passant par les points extrême et le point milieu. On à :

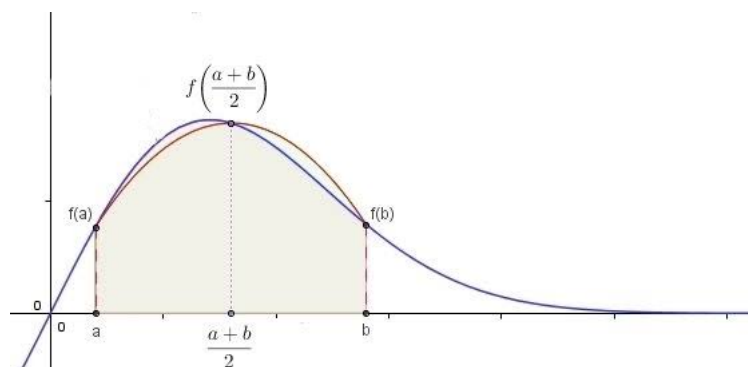


FIGURE 1.3 – Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$$

donc

$$y_{n+1} \simeq y_n + h \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2} \times f(t_n, y_n)))$$

Finalement on obtient la relation explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

avec

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

Le tableau de Butcher associée est donnée par :

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

TABLE 1.2 – Runge-Kutta, ordre 04

1.3.3 Théorème de Convergence de Runge-Kutta 4 :

On démontre que la méthode de **Runge-Kutta** définie par (1.3.2) est consistante et d'ordre 4 et on peut démontrer qu'elle est stable ; en effet (en posant $K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*$ les valeurs de K_1, K_2, K_3, K_4 correspondant à y^*) tel que :

$$F(x, y; h) - F(x, y^*; h) = \frac{1}{6} \left\{ [f(x, y) - f(x, y^*)] + 2[f(x + \frac{h}{2}, y + h\frac{k_1}{2}) - [f(x + \frac{h}{2}, y^* + h\frac{k_1^*}{2})]] \right. \\ \left. + 2[f(x + \frac{h}{2}, y + h\frac{k_2}{2}) - f(x + \frac{h}{2}, y^* + h\frac{k_2^*}{2})] + f(x + h, y + hk_3) - f(x + h, y^* + hk_3^*) \right\}$$

en appliquant la propriété $|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq k|y - y^*| \quad \forall x \in [a, b], \forall y, y^* \in \mathbb{R}$, nous obtenons successivement.

$$\begin{aligned} * |f(x + \frac{h}{2}; y + \frac{h}{2}K_1) - f(x + \frac{h}{2}, y^* + \frac{h}{2}k_1^*)| &\leq K|y - y^*| + \frac{h}{2}k|k_1 - k_1^*| \\ &\leq K|y - y^*| + \frac{h}{2}k^2|y - y^*| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* |f(x + \frac{h}{2}, y + h\frac{k_2}{2}) - f(x + \frac{h}{2}y^* + h\frac{k_2^*}{2})| &\leq K|y - y^*| + \frac{h}{2}K|K_2 - k_2^*| \\
&\leq k|y - y^*| + \frac{h}{2}k^2|y - y^*| \\
&\quad + \frac{h^2}{4}k^2|K_1 - k_1^*| \\
&\leq k|y - y^*| + \frac{h}{2}k^2|y - y^*| \\
&\quad + \frac{h^2}{4}k^3|y - y^*| \\
* |f(x + h, y + hk_3) - f(x + h, y^* + hk_3^*)| &\leq k|y - y^*| + hk|k_3 - k_3^*| \\
&\leq k|y, y^*| + hk^2|y - y^*| \\
&\quad + \frac{h^2}{2}k^2|K_2 - k_2^*| \\
&\leq k|y - y^*| + hk^2|y - y^*| \\
&\quad + \frac{h^2}{2}K^2|y - y^*| + \frac{h^3}{4}k^3|k_1 - k_1^*| \\
&\leq k|y - y^*| + hk^2|y - y^*| \\
&\quad + \frac{h^2}{2}k^3|y - y^*|
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|F(x, y; h) - F(x, y^*; h)| &\leq (1 + \frac{h}{2}k + \frac{h^2}{3!}k^2 + \frac{h^3}{4!}k^3)K|y - y^*| \\
&\leq k'|y - y^*|, \quad h \leq h_0
\end{aligned}$$

avec

$$k(1 + \frac{h}{2}k + \frac{h^2}{3!}k^2 + \frac{h^3}{4!}k^3) \leq \frac{e^{h_0k} - 1}{h} = k'.$$

D'après le lemme (1.3) le schéma de la méthode de **Runge-kutta** est stable. Étant stable et consistante, elle est donc convergente.

1.3.4 Les avantages et les inconvénients des méthodes de Runge-Kutta 4 :

La méthode de *Runge - Kutta d'ordre 4* se distingue par sa simplicité de mise en oeuvre ; nous la recommandons d'ailleurs pour tous les problèmes simples. Elle ne requiert que quatre évaluations de f par pas. On peut améliorer aisément la précision des calculs (si le langage et le compilateur le permettent) en calculant $\phi = \sum a_i k_j$ en précision multiple, car c'est la que se produisent la plupart des erreurs d'arrondi.

L'algorithme de *Runge - Kutta* souffre de deux inconvénients liés. On ne dispose d'aucune indication sur l'erreur de troncation en cours de calcul. D'autre part, il y a des problèmes de stabilité dès que le second membre est grand ou rapidement variable. Une méthode simple (mais coûteuse) de surveillance de la précision consiste à conduire deux calculs simultanément, l'un avec le pas h , l'autre avec le pas $\frac{h}{2}$. Tant que la "distance" entre les deux résultats reste inférieure à un certain seuil, on admet que le résultant est valable. Si le seuil franchi, il faut rejeter la(où les) dernière(s) valeur(s) calculée(s) et partir avec un pas

plus petit.

Il existe des algorithmes plus raffinés (qui partent les noms de Runge-Kutta -Fehlberg ou méthodes de Runge-Kutta emboîtées). Dans ce type des méthodes, on calcule, par exemple : six fois f par pas ; on combinant "bien" les résultats, on obtient une estimation précise de y_{n+1} ; une autre combinaison des même valeurs fournit une estimation de l'erreur. La seule difficulté réside dans la forme compliquée des coefficients qui remplacent les a_j et b_j . Mais l'ordinateur n'en a cure.

1.3.5 Les méthodes implicites

Toutes les méthodes de Runge-Kutta mentionnée jusqu'à présent sont des méthodes explicites. Les méthodes explicites de Runge-kutta ne conviennent généralement pas à la résolution d'équations rigides car leur région de stabilité absolu est petite. Cette question est particulièrement importante dans la résolution des équations aux dérivées partielles. L'instabilité des méthodes explicites de Runge-Kutta motive le développement des méthodes implicites. Une méthode Runge-Kutta implicite a la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

où

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, s$$

La différence avec une méthode explicite est que dans une méthode explicite, la somme sur j nous montre que jusqu'à $i - 1$. Cela apparait également dans le table de Butcher : la matrice des coefficients a_{ij} d'une méthode explicite est triangulaire inférieure comme montre le table (1.2). Dans une méthode implicite, la somme sur j monte à s et la matrice des coefficients n'est pas triangulaire, le table de Butcher de la forme :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}^T} \mid \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{b}^T \end{array}$$

Les formules du cinquième et sixième ordre

2.1 Les équations de condition pour les coefficients de Runge-Kutta :

Soit encore l'équation :

$$\dot{y} = f(x, y) \quad (2.1)$$

on pose comme l'habitude :

$$\begin{cases} f_0 = f(x_0, y_0) \\ f_k = f(x_0 + \alpha_k h; y_0 + h \sum_{\lambda=0}^{k-1} \beta_{k\lambda} f_\lambda) \quad ; \text{avec } (k = 1, 2, 3, \dots, 7) \end{cases} \quad (2.2)$$

et nous exigeons :

$$\begin{cases} y = y_0 + h \sum_{k=0}^5 c_k f_k + 0(h^6) \\ \hat{y} = y_0 + h \sum_{k=0}^7 \hat{c}_k f_k + 0(h^7) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec h comme pas d'intégration.

Nous essayons de déterminer les coefficients α_k , $\beta_{k\lambda}$, \hat{c}_k de l'équation (2.3) tel sorte que la première formule de l'équation (2.3) représente un cinquième ordre, et la deuxième formule est une formule de Runge-Kutta du sixième ordre.

On remarque que les équation de (2.3). Ont les même coefficients α_k et $\beta_{k\lambda}$ et ça nous abrège le nombre des équation.

Les équations de condition des coefficients de Runge-Kutta, résultant de développements de Taylor de (2.2) et (2.3), étant bien connues dans la littérature ces équation sont répertoriées dans un article de *J.C.BUTCHER* ([3], *table I*). Pour la commodité du lecteur. Nous listons ces équations pour une formule du sixième ordre telle que la deuxième formule

de l'équation (2.3). Ce pendant comme ces équations deviennent alors un peu longues, nous introduisons l'abréviation suivante :

$$\beta_{k1}\alpha_1^\lambda + \beta_{k2}\alpha_2^\lambda + \dots + \beta_{kk-1}\alpha_{k-1}^\lambda = P_k\lambda \quad (k = 2, 3, \dots, 7; \lambda = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

Les 37 équations de condition de notre formule du sixième ordre, répertoriées dans le même ordre que dans l'article de *BUTCHER*, se lisent alors :

$$\begin{aligned} \text{(I,1)} \quad & \sum_{k=0}^7 \hat{c}_k - 1 = 0 \\ \text{(II,1)} \quad & \sum_{k=1}^7 \hat{c}_k \alpha_k - \frac{1}{2} = 0 \\ \text{(III,1)} \quad & \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k P_{k1} - \frac{1}{6} = 0 \\ \text{(III,2)} \quad & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^7 \hat{c}_k \alpha_k^2 - \frac{1}{6} = 0 \\ \text{(IV,1)} \quad & \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{24} = 0 \\ \text{(IV,2)} \quad & \frac{1}{2} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k P_{k2} - \frac{1}{24} = 0 \\ \text{(IV,3)} \quad & \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k P_{k1} - \frac{1}{8} = 0 \\ \text{(IV,4)} \quad & \frac{1}{6} \sum_{k=1}^7 \hat{c}_k \alpha_k^3 - \frac{1}{24} = 0 \\ \text{(V,1)} \quad & \sum_{k=4}^7 \hat{c}_k \left[\sum_{\lambda=3}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} P_{\mu 1} \right) \right] - \frac{1}{120} = 0 \\ \text{(V,2)} \quad & \frac{1}{2} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 2} \right) - \frac{1}{120} = 0 \\ \text{(V,3)} \quad & \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} \alpha_\lambda P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{40} = 0 \\ \text{(V,4)} \quad & \frac{1}{6} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k P_{k3} - \frac{1}{120} = 0 \\ \text{(V,5)} \quad & \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \alpha_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{30} = 0 \\ \text{(V,6)} \quad & \frac{1}{2} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k P_{k2} - \frac{1}{30} = 0 \\ \text{(V,7)} \quad & \frac{1}{2} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k P_{k1}^2 - \frac{1}{40} = 0 \end{aligned}$$

$$(V,8) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k^2 P_{k1} - \frac{1}{20} = 0$$

$$(V,9) \quad \frac{1}{24} \sum_{k=1}^7 \hat{c}_k \alpha_k^4 - \frac{1}{120} = 0$$

$$(VI,1) \quad \sum_{k=5}^7 \hat{c}_k \left\{ \sum_{\lambda=4}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left[\sum_{\mu=3}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} \left(\sum_{\nu=2}^{\lambda-1} \beta_{\mu\nu} P_{\nu 1} \right) \right] \right\} - \frac{1}{720} = 0$$

$$(VI,2) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=4}^7 \hat{c}_k \left[\sum_{\lambda=3}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} P_{\mu 2} \right) \right] - \frac{1}{720} = 0$$

$$(VI,3) \quad \sum_{k=4}^7 \hat{c}_k \left[\sum_{\lambda=3}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} \alpha_{\mu} P_{\mu 1} \right) \right] - \frac{1}{240} = 0$$

$$(VI,4) \quad \frac{1}{6} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 3} \right) - \frac{1}{720} = 0$$

$$(VI,5) \quad \sum_{k=4}^7 \hat{c}_k \left[\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} \alpha_{\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} P_{\mu 1} \right) \right] - \frac{1}{180} = 0$$

$$(VI,6) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} \alpha_{\lambda} P_{\lambda 2} \right) - \frac{1}{180} = 0$$

$$(VI,7) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 1}^2 \right) - \frac{1}{240} = 0$$

$$(VI,8) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} \alpha_{\lambda}^2 P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{120} = 0$$

$$(VI,9) \quad \frac{1}{24} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k P_{k4} - \frac{1}{720} = 0$$

$$(VI,10) \quad \sum_{k=4}^7 \hat{c}_k \alpha_k \left[\sum_{\lambda=3}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} P_{\mu 1} \right) \right] - \frac{1}{144} = 0$$

$$(VI,11) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \alpha_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 2} \right) - \frac{1}{144} = 0$$

$$(VI,12) \quad \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \alpha_k \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} \alpha_{\lambda} P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{48} = 0$$

$$(VI,13) \quad \frac{1}{6} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k P_{k3} - \frac{1}{144} = 0$$

$$(VI,14) \quad \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k P_{k1} \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{72} = 0$$

$$(VI,15) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k P_{k1} P_{k2} - \frac{1}{72} = 0$$

$$(VI,16) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=3}^7 \hat{c}_k \alpha_k^2 \left(\sum_{\lambda=2}^{k-1} \beta_{k\lambda} P_{\lambda 1} \right) - \frac{1}{72} = 0$$

$$(VI,17) \quad \frac{1}{4} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k^2 P_{k2} - \frac{1}{72} = 0$$

$$(VI,18) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k P_{k1}^2 - \frac{1}{48} = 0$$

$$(VI,19) \quad \frac{1}{6} \sum_{k=2}^7 \hat{c}_k \alpha_k^3 P_{k1} - \frac{1}{72} = 0$$

$$(VI,20) \quad \frac{1}{120} \sum_{k=1}^7 \hat{c}_k \alpha_k^5 - \frac{1}{720} = 0$$

Table I : Les équations de condition pour les formules d'ordre cinq et six

Les chiffres romains indiquent l'ordre des termes dans les développements de Taylor.

Un tableau similaire est valable pour une formule du cinquième ordre tel que la première formule de (2.3). Nous obtenons ce tableau à partir du *table I* en omettant les équations du sixième ordre (VI, 1) à (VI, 20), et en remplaçant dans les équations restantes \hat{c}_k par c_k on limite les k sommes par 5 au lieu de 7.

Toutes les équations du *tableau I* doivent être satisfaites simultanément.

Les équations du *table I* qui représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour la formule de Runge-Kutta du sixième ordre peuvent ce pendant être remplacées par un système beaucoup plus simple de conditions suffisantes.

Dans un premier temps, nous faisons les hypothèses :

$$\alpha_5 = \alpha_7 = 1, \alpha_6 = 0, \hat{c}_1 = c_1 = 0, \hat{c}_2 = c_2, \hat{c}_3 = c_3, \hat{c}_4 = c_4, \hat{c}_5 = 0, \hat{c}_6 = \hat{c}_7 = c_5 \quad (2.5)$$

ce qui facilite grandement la résolution simultanée des deux systèmes d'équations (pour les formules de Runge-Kutta du cinquième et sixième ordre). Ensuite, nous introduisons les hypothèses suivantes (A), (B), (C) qui sont bien connus pour réduire considérablement nos équations de condition :

$$(A) = \begin{cases} (*) P_{21} = \frac{1}{2} \alpha_2^2 & (A2) \\ (*) P_{31} = \frac{1}{2} \alpha_3^2 & (A3) \\ (*) P_{41} = \frac{1}{2} \alpha_4^2 & (A4) \\ (*) P_{51} = \frac{1}{2} \alpha_5^2 = \frac{1}{2} & (A5) \\ P_{61} = \frac{1}{2} \alpha_6^2 = 0 & (A6) \\ P_{71} = \frac{1}{2} \alpha_7^2 = \frac{1}{2} & (A7) \end{cases}$$

$$(B) = \begin{cases} (*) c_2\beta_{21} + c_3\beta_{31} + c_4\beta_{41} + c_5 \begin{cases} \beta_{51} \\ \beta_{61} + \beta_{71} \end{cases} = c_1(1 - \alpha_1) = 0 & (B1) \\ (*) c_3\beta_{32} + c_4\beta_{42} + c_5 \begin{cases} \beta_{52} \\ \beta_{62} + \beta_{72} \end{cases} = c_2(1 - \alpha_2) & (B2) \\ (*) c_4\beta_{43} + c_5 \begin{cases} \beta_{53} \\ \beta_{63} + \beta_{73} \end{cases} = c_3(1 - \alpha_3) & (B3) \\ (*) c_5 \begin{cases} \beta_{54} \\ \beta_{64} + \beta_{74} \end{cases} = c_4(1 - \alpha_4) & (B4) \\ c_5(\beta_{65} + \beta_{75}) = c_5(1 - \alpha_5) = 0 & (B5) \\ c_5\beta_{76} = c_5 & (B6) \end{cases}$$

$$(C) = \begin{cases} (*) c_2\alpha_2\beta_{21} + c_3\alpha_3\beta_{31} + c_4\alpha_4\beta_{41} + c_5 \begin{cases} \beta_{51} \\ \beta_{71} \end{cases} = 0 & (C1) \\ (*) c_2\alpha_2^2\beta_{21} + c_3\alpha_3^2\beta_{31} + c_4\alpha_4^2\beta_{41} + c_5\beta_{71} = 0 & (C2) \\ (*) c_3\alpha_3\beta_{32}\beta_{21} + c_4\alpha_4(\beta_{42}\beta_{21} + \beta_{43}\beta_{31}) + c_5(\beta_{72}\beta_{21} + \beta_{73}\beta_{31} + \beta_{74}\beta_{41} \\ + \beta_{75}\beta_{51} + \beta_{76}\beta_{61}) = 0 & (C3) \end{cases}$$

L'astérisque (*) devant certaines des équations indique que ces équations sont valables pour les formules du cinquième ordre ainsi que pour les formules du sixième ordre. Si l'équation marquée d'un astérisque sont divisées en deux lignes. La ligne du haut vaut pour les formules du cinquième ordre et la ligne du bas pour les formules du sixième ordre. Les équations sans astérisque ne sont requise que pour les formules du sixième ordre.

En insérant les hypothèses (A) dans le *table I* on trouve immédiatement les identités suivante :

$$\begin{cases} (III, 1) \equiv (III, 2); (IV, 3) \equiv 3(IV, 4); (V, 7) \equiv 3(V, 9); \\ (V, 8) \equiv 6(V, 9); (VI, 8) \equiv 2(VI, 7); (VI, 14) \equiv (VI, 16); \\ (VI, 15) \equiv (VI, 17); (VI, 18) \equiv 15(VI, 20); (VI, 19) \equiv 10(VI, 20). \end{cases} \quad (2.6)$$

Par conséquent, les équations sur les côtés gauches des identités (2.6) peuvent être omises du *table I*.

En utilisant également l'hypothèse (B1), trois autre identités sont obtenues :

$$(IV, 1) \equiv (IV, 2); (V, 3) \equiv 3(V, 4); (VI, 7) \equiv 3(VI, 9). \quad (2.7)$$

Donc, éliminant les équations (IV, 1); (V, 3); (VI, 7) du *tableau I*.

Les hypothèses (B) conduisent aux identités suivantes :

$$\begin{cases} (IV, 2) \equiv (III, 2) - 3(IV, 4); (V, 1) \equiv (IV, 1) - (V, 5); \\ (V, 2) \equiv (IV, 2) - (V, 6); (V, 4) \equiv (IV, 4) - 4(V, 9); \\ (VI, 1) \equiv (V, 1) - (VI, 10); (VI, 2) \equiv (V, 2) - (VI, 11); \\ (VI, 4) \equiv (V, 4) - (VI, 13); (VI, 5) \equiv (V, 5) - 2(VI, 16); \\ (VI, 6) \equiv (V, 6) - 2(VI, 17); (VI, 9) \equiv (V, 9) - 5(VI, 20); \end{cases} \quad (2.8)$$

donc, éliminant ainsi dix équations de la *table I*.

Enfin, nous utilisons également l'hypothèse (C) pour obtenir les identités suivantes :

$$\begin{cases} (V, 5) \equiv (V, 6); (VI, 3) \equiv 3(V, 4) - 3(VI, 13); \\ (VI, 10) \equiv (VI, 11); (VI, 12) \equiv 3(VI, 13); \\ (VI, 16) \equiv (VI, 17). \end{cases} \quad (2.9)$$

Annulation de toutes les équations listées à gauche des identités (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9). Le *table I* se réduit au dix équations suivantes :

$$\begin{cases} (I, 1), (II, 1), (III, 2), (IV, 4), (V, 6), (V, 9), \\ (VI, 11), (VI, 13), (VI, 17), (VI, 20). \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous organisons ces équations restantes en deux groupes (D) et (E), le premier ne contenant aucune coefficient β . On obtient :

$$(D) = \begin{cases} (*) \left\{ \begin{matrix} c_0 \\ \hat{c}_0 \end{matrix} \right\} + c_2 + c_3 + c_4 + \left\{ \begin{matrix} c_5 \\ 2c_5 \end{matrix} \right\} = 1 & (D0) \\ (*) c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 + c_5 = \frac{1}{2} & (D1) \\ (*) c_2\alpha_2^2 + c_3\alpha_3^2 + c_4\alpha_4^2 + c_5 = \frac{1}{3} & (D2) \\ (*) c_2\alpha_2^3 + c_3\alpha_3^3 + c_4\alpha_4^3 + c_5 = \frac{1}{4} & (D3) \\ (*) c_2\alpha_2^4 + c_3\alpha_3^4 + c_4\alpha_4^4 + c_5 = \frac{1}{5} & (D4) \\ c_2\alpha_2^5 + c_3\alpha_3^5 + c_4\alpha_4^5 + c_5 = \frac{1}{6} & (D5) \end{cases}$$

et

$$(E) = \begin{cases} (*) c_2\alpha_2 P_{22} + c_3\alpha_3 P_{32} + c_4\alpha_4 P_{42} + c_5 \left\{ \begin{matrix} P_{52} \\ P_{72} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{15} \\ c_2\alpha_2 P_{23} + c_3\alpha_3 P_{33} + c_4\alpha_4 P_{43} + c_5 P_{73} = \frac{1}{24} \\ c_2\alpha_2^2 P_{22} + c_3\alpha_3^2 P_{32} + c_4\alpha_4^2 P_{42} + c_5 P_{72} = \frac{1}{18} \\ c_3\alpha_3\beta_{32} P_{22} + c_4\alpha_4(\beta_{42} P_{22} + \beta_{43} P_{32}) \\ + c_5(\beta_{72} P_{22} + \beta_{73} P_{32} + \beta_{74} P_{42} + \beta_{75} P_{52} + \beta_{76} P_{62}) = \frac{1}{72}. \end{cases}$$

En utilisant (C) et en introduisant les abréviations :

$$P_{k\lambda} = P_{\lambda k} - \beta_{k1}\alpha_1^\lambda; \quad \text{avec } (k = 2, 3, \dots, 7, \lambda = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

le dernier groupe d'équation se réduit à :

$$(E) = \begin{cases} (*) c_3\alpha_3 P_{32} + c_4\alpha_4 P_{42} + c_5 \left\{ \begin{matrix} P_{52} \\ P_{72} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{15} & (E1) \\ c_3\alpha_3 P_{33} + c_4\alpha_4 P_{43} + c_5 P_{73} = \frac{1}{24} & (E2) \\ c_3\alpha_3^2 P_{32} + c_4\alpha_4^2 P_{42} + c_5 P_{72} = \frac{1}{18} & (E3) \\ c_4\alpha_4\beta_{43} P_{32} + c_5(\beta_{73} P_{32} + \beta_{74} P_{42} + \beta_{75} P_{52} + \beta_{76} P_{62}) = \frac{1}{72}. & (E4) \end{cases}$$

Les coefficient $\beta_{k0}(k = 1, 2, \dots, 7)$ sont obtenus à partir des équations bien connues

$$(F) = \begin{cases} (*) \beta_{10} = \alpha_1 & (F1) \\ (*) \beta_{20} + \beta_{21} = \alpha_2 & (F2) \\ (*) \beta_{30} + \beta_{31} + \beta_{32} = \alpha_3 & (F3) \\ (*) \beta_{40} + \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} = \alpha_4 & (F4) \\ (*) \beta_{50} + \beta_{51} + \beta_{52} + \beta_{53} + \beta_{54} = \alpha_5 = 1 & (F5) \\ \beta_{60} + \beta_{61} + \beta_{62} + \beta_{63} + \beta_{64} + \beta_{65} = \alpha_6 = 0 & (F6) \\ \beta_{70} + \beta_{71} + \beta_{72} + \beta_{73} + \beta_{74} + \beta_{75} + \beta_{76} = \alpha_7 = 1 & (F7) \end{cases}$$

Les astérisques (*) dans (D), (E) et (F) ont la même signification que dans les équations (A), (B) et (C). Dans la section suivant, nous monterons comment les équations suffisantes de la condition (D) et (E) peuvent être résolues en tenant compte des hypothèses (A), (B), (C).

2.2 Une solution des équations de condition pour les coefficients :

Lors de la résolution de nos équations de condition, nous essaierons d'exprimer les coefficients β et c en fonction des coefficients α . Ce pendant, tous les quatre coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont indépendants les uns des autres.

Dans les deux nombres suivants, nous montrerons que α_4 et α_3 peuvent être exprimés par α_2 . Par conséquent, nous n'avons que deux α - coefficients indépendants c'est α_1 et α_2 . Nos coefficients β et c seront alors exprimés par α_1 et α_2 seulement.

Pour trouver la relation entre α_4 et α_2 . On forme :

$$c_3(1 - \alpha_3)P_{31} + c_4(1 - \alpha_4)P_{41}. \quad (2.12)$$

En utilisant les hypothèses (A), (B), (C) et (D) on obtient de (2.12) :

$$c_3(1 - \alpha_3)\beta_{32}\alpha_2 + c_4(1 - \alpha_4)(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = \frac{1}{24}. \quad (2.13)$$

On forme encore l'expression :

$$\alpha_2^2.(B2) + \alpha_3^2.(B3) + \alpha_4^2.(B4) - (E1), \quad (2.14)$$

éliminant ainsi le terme $c_5(\beta_{52}\alpha_2^2 + \beta_{53}\alpha_3^2 + \beta_{54}\alpha_4^2)$ dans (E1) obtenant :

$$c_3(1 - \alpha_3)\beta_{32}\alpha_2^2 + c_4(1 - \alpha_4)(\beta_{42}\alpha_2^2 + \beta_{43}\alpha_3^2) = \frac{1}{60}. \quad (2.15)$$

Nous éliminons maintenant les termes avec c_3 par exemple dans (1.12) et (2.15) et trouvons :

$$c_4(1 - \alpha_4)\beta_{43}\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{1}{60} - \frac{1}{24}\alpha_2. \quad (2.16)$$

Nous établissons une second relation entre c_4, β_{43} et les coefficients α . On commence par former :

$$c_3\alpha_3P_{31} + c_4\alpha_4P_{41} + c_5P_{51}. \quad (2.17)$$

En utilisons les hypothèses (A), (B) et (D) on trouve à partir de (2.17) :

$$c_3\alpha_3\beta_{32}\alpha_2 + c_4\alpha_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) + c_5(\beta_{52}\alpha_2 + \beta_{53}\alpha_3 + \beta_{54}\alpha_4) = \frac{1}{8}. \quad (2.18)$$

En formant :

$$c_3\alpha_3^2P_{31} + c_4\alpha_4^2P_{41} + c_5P_{51} \quad (2.19)$$

et en utilisant (A), (B) et (D) on trouve de la même façon :

$$c_3\alpha_3^2\beta_{32}\alpha_2 + c_4\alpha_4^2(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) + c_5(\beta_{52}\alpha_2 + \beta_{53}\alpha_3 + \beta_{54}\alpha_4) = \frac{1}{10}. \quad (2.20)$$

On forme finalement :

$$(E3) - \alpha_2 \cdot (2.20) + \alpha_2 \cdot (2.18) - (E1), \quad (2.21)$$

éliminant ainsi les les termes avec c_3 et avec c_5 . Comme second relation entre c_4 , β_{43} , et les coefficients α , on obtient alors :

$$c_4\beta_{43}\alpha_3\alpha_4(\alpha_3 - \alpha_2)(1 - \alpha_4) = \frac{1}{90} - \frac{1}{40}\alpha_2. \quad (2.22)$$

à partir des deux relations (2.16) et (2.22), on trouve comme relation entre α_4 et α_2 :

$$\alpha_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\alpha_2 - 4}{5\alpha_2 - 2}. \quad (2.23)$$

Une autre relation entre α_2 , α_3 et α_4 peut être obtenue à partir de (D1), (D2), (D3), (D4) et (D5) comme condition de compatibilité. On éliminant de ces équations les termes avec c_5 , c_2 , c_4 et c_3 dans cet ordre conduit à :

$$\alpha_3 = \frac{5\alpha_2\alpha_4 - 3(\alpha_2 + \alpha_4) + 2}{10\alpha_2\alpha_4 - 5(\alpha_2 + \alpha_4) + 3}. \quad (2.24)$$

En introduisant (2.23) dans (2.24) on trouve comme relation entre α_3 et α_2 :

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2}. \quad (2.25)$$

Les facteurs de pondération c_k (or \hat{c}_k) sont maintenant obtenus à partir des équations (D1), (D2), (D3) et (D4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2 = \hat{c}_2 = \frac{1}{180} \cdot \frac{45\alpha_2^2 - 30\alpha_2 + 4}{(15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2)(5\alpha_2 - 2)\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(1 - \alpha_2)} \\ c_3 = \hat{c}_3 = \frac{1}{180} \cdot \frac{15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2}{(5\alpha_2 - 2)\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)} \\ c_4 = \hat{c}_4 = -\frac{1}{20} \cdot \frac{(15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 1)(5\alpha_2 - 2)}{(15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2)(5\alpha_2 - 2)\alpha_4(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4)(1 - \alpha_4)} \\ c_5 = \hat{c}_5 = \hat{c}_7 = \frac{1}{2} - (c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Des deux équations (E1), il résulte :

$$P_{72} = P_{52} \quad (2.27)$$

En multipliant les équations (B2), (B3) et (B4) par α_2^2 , α_3^2 et α_4^2 respectivement, en additionnant ces trois équations, et en utilisant (D2) et (D3), on obtient :

$$c_3 P_{32} + c_4 P_{42} + c_5 P_{52} = \frac{1}{12} \quad (2.28)$$

Les trois équations (2.28), (E1) et (E3) représentent un système de trois équations linéaires pour les trois inconnues P_{32} , P_{42} et P_{52} sa solution s'écrit :

$$\begin{cases} p_{32} = \frac{1}{180} \cdot \frac{3\alpha_4 - 2}{c_3(\alpha_4 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)} \\ p_{42} = \frac{1}{180} \cdot \frac{3\alpha_3 - 2}{c_4(\alpha_3 - \alpha_4)(1 - \alpha_4)} \\ p_{52} = \frac{1}{180} \cdot \frac{15\alpha_3\alpha_4 - 12(\alpha_3 + \alpha_4) + 10}{c_5(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_4)}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Les quatre équations (A2), (A3), (A4) et (A5) donnent :

$$\begin{cases} \beta_{21}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2^2 \\ \beta_{31}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_3^2 - P_{31} \\ \beta_{41}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_4^2 - P_{41} \\ \beta_{51}\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{c_5}(\frac{1}{6} - c_3P_{31} - c_4P_{41}). \end{cases} \quad (2.30)$$

La dernière équation (2.30) est obtenue à l'aide des équations (B2), (B3) et (B4) et des équations (D1) et (D2).

L'introduction de (2.30) dans l'équation (C1) donne l'expression suivante pour P_{41} :

$$P_{41} = -\frac{c_3 P_{31}(1 - \alpha_3) - \frac{1}{24}}{c_4(1 - \alpha_4)}. \quad (2.31)$$

Puisque β_{32} est déjà connue de la première équation (2.29), l'équation (2.31) et la deuxième équation (2.29) représentent deux équations pour les deux inconnues β_{42} et β_{43} . Leur solution s'écrit :

$$\begin{cases} c_4 \beta_{42} = \frac{15\alpha_2\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_3) + 4(\alpha_3 - \alpha_2) - 6\alpha_3(\alpha_4 - \alpha_2)}{360\alpha_2^2(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)(1 - \alpha_4)} \\ c_4 \beta_{43} = -\frac{1}{120} \cdot \frac{5\alpha_2 - 2}{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)(1 - \alpha_4)} \end{cases} \quad (2.32)$$

À partir des équations (B2), (B3) et (B4) il résulte maintenant :

$$\begin{cases} c_5\beta_{52} = c_2(1-\alpha_2) - c_3\beta_{32} - c_4\beta_{42} \\ c_5\beta_{53} = c_3(1-\alpha_3) - c_4\beta_{43} \\ c_5\beta_{54} = c_4(1-\alpha_4) \end{cases} \quad (2.33)$$

On montre facilement que les coefficients β_{52} , β_{53} et β_{54} tel qu'obtenus à partir de (2.33), satisfait la dernière équation (2.29).

Puisque les coefficients $\beta_{21}\alpha_1$, $\beta_{31}\alpha_1$, $\beta_{41}\alpha_1$ et $\beta_{51}\alpha_1$ peuvent être obtenus à partir de (2.30). Tous les coefficients de Runge-Kutta pour notre formule du cinquième ordre sont maintenant déterminés en fonction des paramètres α_1 et α_2 .

Nous devons encore trouver les coefficients $\beta_{6\lambda}$ et $\beta_{7\lambda}$ pour notre formule du sixième ordre qui est requise pour le contrôle de la taille du pas.

Des deux équations (C1), il résulte :

$$\beta_{71} = \beta_{51}. \quad (2.34)$$

De (B6), on obtient :

$$\beta_{76} = 1. \quad (2.35)$$

L'équation (B5) suggère :

$$\beta_{65} = \beta_{75} = 0. \quad (2.36)$$

À partir des équations (A7), (E1), (E2), les expressions suivantes pour P_{71} , P_{72} , P_{73} sont obtenus :

$$\begin{cases} c_5P_{71} = \frac{1}{360} \cdot \frac{60\alpha_2(1-\alpha_3)(1-\alpha_4) + 2(3\alpha_4 - 2) - 15\alpha_2(1-\alpha_3)}{\alpha_2(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)} \\ c_5P_{72} = \frac{1}{180} \cdot \frac{15\alpha_3\alpha_4 - 12(\alpha_3 + \alpha_4) + 10}{(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)} \\ c_5P_{73} = \frac{1}{360} \cdot \frac{15(1-\alpha_3)(1-\alpha_4) + 15\alpha_2\alpha_3\alpha_4(1-\alpha_3) - 6\alpha_3\alpha_4(1-\alpha_2-\alpha_3) - 4\alpha_2}{(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)} \end{cases} \quad (2.37)$$

Les équations (2.37) donnant la solution suivante pour β_{74} , β_{73} et β_{72} :

$$\begin{cases} c_5\beta_{74} = -\frac{1}{60} \cdot \frac{(12\alpha_2 - 5)(5\alpha_2^2 - 5\alpha_2 + 1)}{(15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2)\alpha_4(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4)} \\ c_5\beta_{73} = \frac{1}{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} \cdot \left[\frac{60\alpha_2\alpha_4 - 45\alpha_2 - 30\alpha_4 + 24}{360(1-\alpha_4)} - c_5\beta_{74}\alpha_4(\alpha_4 - \alpha_2) \right] \\ c_5\beta_{72} = \frac{1}{\alpha_2^2} \cdot \left[\frac{15\alpha_3\alpha_4 - 12(\alpha_3 + \alpha_4) + 10}{180(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)} - c_5(\beta_{73}\alpha_3^2 - \beta_{74}\alpha_4^2) \right] \end{cases} \quad (2.38)$$

Enfin, les équations (B2), (B3) et (B4) donnent pour les coefficients β_{62} , β_{63} et β_{64} :

$$\begin{cases} c_5\beta_{62} = c_2(1-\alpha_2) - c_3\beta_{32} - c_4\beta_{42} - c_5\beta_{72} \\ c_5\beta_{63} = c_3(1-\alpha_3) - c_4\beta_{43} - c_5\beta_{73} \\ c_5\beta_{64} = c_4(1-\alpha_4) - c_5\beta_{74} \end{cases} \quad (2.39)$$

On peut vérifier que les coefficients de Runge-Kutta tel qu'obtenus dans cette section, satisfont bien toutes nos équations (A) à (F) si $c_0, \hat{c}_0, \beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{70}$ sont déterminés à partir de (D0) et (F). D'après la dérivation de nos coefficients de Runge-Kutta, il n'est pas évident qu'ils satisfassent les équations (C3) et (E4), puisque ces deux équations n'ont pas été utilisées dans la dérivation. Cependant, en exprimant explicitement tous les coefficients par α_2 . On peut montrer que les deux équations (C3) et (E4) deviennent des identités dans α_2 .

2.3 Le terme principal de l'erreur de troncature locale

Le principal terme d'erreur de troncature de notre formule de Runge-Kutta du cinquième ordre est une somme de vingt membres, chacun étant de la forme :

$$T_v \cdot [\dots]_v \cdot h^3 \quad (2.40)$$

Les T_v sont des constantes numériques de tare caractéristiques de l'individu

formule de Runge-Kutta à l'étude ; elles sont cependant indépendantes de l'équation différentielle (2.1). La parenthèse dans (2.40) contient certaines combinaisons de dérivées partielles du membre droit de (2.1). Les vingt valeurs T_v , exprimées par les coefficients de Runge-Kutta de la section (1,2), peuvent être obtenues à partir des membres gauches des équations (VI, 1) à (VI, 20) du **tableau I**, si, dans ces équations, on remplace \hat{c}_k par c_k et la borne supérieure 7 des k —somme par 5.

Si nous énumérons ces valeurs T_v dans le même ordre que dans le *table I* le premier T_v lire :

$$\begin{cases} T_1 = c_5 \beta_{54} \beta_{43} \beta_{32} \beta_{21} \alpha_1 - \frac{1}{720} \\ T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=4}^5 c_k \left[\sum_{\lambda=3}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} P_{\mu 2} \right) \right] - \frac{1}{720} \\ T_3 = \sum_{k=4}^5 c_k \left[\sum_{\lambda=3}^{k-1} \beta_{k\lambda} \left(\sum_{\mu=2}^{\lambda-1} \beta_{\lambda\mu} \alpha_\mu P_{\mu 1} \right) \right] - \frac{1}{240} \\ \vdots \end{cases} \quad (2.41)$$

Naturellement, il sera souhaitable d'établir des formules de Runge-Kutta avec de petites valeurs T_v . Si nous parvenons à rendre toutes les valeurs T_v suffisamment petites, on s'attend également à ce que la somme des termes (2.40) représente le terme principal de l'erreur de troncature locale soit raisonnablement petite.

En raison de la structure particulière de nos formules de Runge-Kutta (hypothèse (2.5)), la majorité de nos valeurs T_v sont nulles, comme nous le verrons immédiatement.

En raison de (5), (2.27) et (2.34), les équations de condition (C2), (D5) et (E3) sont également valables pour les formules de Runge-Kutta du cinquième ordre. Comme (D5) et (E3) correspondent aux équations (VI, 20) et (VI, 17) du *table I*, on a $T_{20} = 0$ et $T_{17} = 0$. À partir de $T_{20} = 0$ on obtient, en utilisant (2.6), (2.7), (2.8) : $T_{19} = 0$, $T_{18} = 0$, $T_9 = 0$, $T_7 = 0$, $T_8 = 0$. Conséquence, à partir de $T_{17} = 0$ on trouve, en utilisant (2.6), (2.8), (2.9) : $T_{15} = 0$, $T_6 = 0$, $T_{16} = 0$, $T_5 = 0$, $T_{14} = 0$.

Par un choix correct du paramètre α_1 , on peut aussi faire de $T_{11} = 0$. Le calcul simple, utilisant les résultats des sections 1 et 2, montre que $T_{11} = 0$ nécessite :

$$\alpha_1 = \frac{2}{15} \cdot \frac{5\alpha_2 - 1}{\alpha_2}. \quad (2.42)$$

De l'identité $(VI, 2) \equiv (V, 2) - (VI, 11)$ dans (2.8), il s'ensuit que $T_{11} = 0$ conduit à $T_2 = 0$ également. Par conséquent, au total, quatorze valeurs T_v du terme d'erreur de troncature principal sont nulles.

Nous calculons maintenant T_{10} en utilisant les résultats des section (1.1) et (1.2). En exprimant T_{10} par le seule paramètre libre α_2 , le calcul donne :

$$T_{10} = \frac{1}{360} \cdot \frac{(3\alpha_2 - 1)(5\alpha_2 - 1)}{15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2}, \quad (2.43)$$

et de l'identité $(VI, 1) \equiv (V, 1) - (VI, 10)$ dans (2.8), il résulte :

$$T_1 = -T_{10}. \quad (2.44)$$

Nous devons encore déterminer T_3, T_4, T_{12} et T_{13} . Encore une fois, un calcul simple, utilisant les résultats des section (1.1) et (1.2), conduit à :

$$T_{13} = -\frac{1}{360} \cdot \frac{(3\alpha_2 - 1)(5\alpha_2^2 - 5\alpha_2 + 1)}{15\alpha_2^2 - 10\alpha_2 + 2}. \quad (2.45)$$

Enfin, de (2.8) et (2.9) on obtient :

$$T_4 = -T_{13}, \quad T = 3T_{13}, \quad T_{12} = 3T_{13}. \quad (2.46)$$

Par exemple de (2.43), il s'ensuit que tout les valeurs de T_v deviennent nulles pour $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. Cependant, cette valeur pour α_2 conduit à $\alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$, rendant ainsi les équations (D1) à (D5) incompatibles. par conséquent, nous devons écarter la valeur $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. Cela signifie que nous ne pouvons pas rendre toutes les valeurs T_v nulles. Il toutefois s'y attendre, car sinon nous obtiendrions une formule de Runge-Kutta du sixième ordre avec seulement six évaluations.

Une nuit, essayez de garder les valeurs T_v petites, en choisissant α_2 une valeur proche de $\frac{1}{3}$ (cela signifie α_3 et α_4 proche de 1). Cependant, un tel choix de α_2 n'est pas conseillé, car cela conduirait à des valeurs élevées pour certain des coefficients de poids (2.26).

Comme nous ne pouvons pas rendre toutes les valeurs T_v nulles, nous pourrions essayer de rendre les valeurs T_v (2.45) et (2.46) ou en supposant :

$$5\alpha_2^2 - 5\alpha_2 + 1 = 0 \quad (2.47)$$

Cela nous laisserait avec seulement deux valeurs T_v différentes de zéro (T_1 et T_{10}). De (2.47) on obtiendrait :

$$\alpha_2 = \frac{1}{10}(5 \pm \sqrt{5}) \quad (2.48)$$

et de (2.43) et (2.44) :

$$T_{10} = -T_1 = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{3600}. \quad (2.49)$$

Évidemment, le signe Émoins dans (2.48) serait préférable, car il conduit à une plus petite valeur T_{10} .

Cependant, les valeurs (2.48) ne conduisent pas une solution de notre problème : pour $\alpha_2 = \frac{1}{10}(5 \pm \sqrt{5})$ on obtiendrait de (2.47) : $\alpha_3 = \frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})$. À partir des équations (D1) à (D5) nous dérivons, en éliminant c_5 , c_2 et c_3 , les deux relations :

$$\begin{cases} c_4 \alpha_4 (\alpha_3 - \alpha_4) (\alpha_2 - \alpha_4) (1 - \alpha_4) = \frac{1}{60} [10 \alpha_2 \alpha_3 - 5(\alpha_2 + \alpha_3) + 3] \\ c_4 \alpha_4^4 (\alpha_3 - \alpha_4) (\alpha_2 - \alpha_4) (1 - \alpha_4) = \frac{1}{60} [5 \alpha_2 \alpha_3 - 3(\alpha_2 + \alpha_3) + 2] \end{cases} \quad (2.50)$$

Pour nos valeurs α_2 et α_3 , car les membres droit de (2.50) deviendraient tous deux nuls. Par conséquent, l'une des conditions suivantes doit être remplie : $\alpha_4 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_4 = \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_3$ ou $c_4 = 0$. on peut montrer, cependant, que pour chacune de ces conditions, nos équations de condition (A) à (E) conduisent à des contradictions.

Cependant, en choisissant pour α_2 une valeur voisine de $\frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})$ les termes (2.45) et (2.46) prouvent rester petits, par contre, les termes (2.43) et (2.44) ne varient que peu au voisinage de $\alpha_2 = \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})$ pour laquelle ils ont extremum. Par conséquent, au lieu de choisir $\alpha_2 = \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5}) \approx 0.276$, nous pourrions, par exemple, prendre $\alpha_2 = \frac{4}{15} \approx 0.276$. Cette valeur est relativement proche de $\frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})$; il donne des coefficients de RK simples tous les facteurs de pondération (2.26) étant non négatifs et les coefficients d'erreur deviennent relativement petits. Le tableau II montre les coefficients de Rk pour $\alpha_2 = \frac{4}{15}$, tels obtenus à partir de la section II. Le terme principal (le terme du sixième ordre) de l'erreur de troncature obtenue comme la différence des deux formules (2.3), se lirait :

$$TE = \frac{5}{66} (f_0 + f_5 - f_6 - f_7) h. \quad (2.51)$$

De (2.43) et (2.45) on obtient alors pour nos coefficients d'erreur :

$$T_{10} = -\frac{1}{2160} \approx -0.463 \cdot 10^{-3} ; T_{13} = \frac{1}{32400} \approx -0.309 \cdot 10^{-4}. \quad (2.52)$$

2.4 Méthodes de Runge-Kutta à formules emboîtées :

Une alternative au précédent procédé est d'utiliser deux méthodes de Runge-Kutta à niveau, respectivement d'ordre p et $p + 1$ et partageant les mêmes évaluations de la fonction f . On parle alors de méthode de Runge-Kutta emboîtée.

L'idée est ici de faire appel à deux méthodes d'ordre différents p et \hat{p} (avec typiquement $\hat{p} = p + 1$), de fonction d'incrément respectives F et \hat{F} et d'utiliser la différence entre les valeurs approchées de la solution fournies par ces méthodes :

$$h(\hat{F}(t_n, x_n; h) - F(t_n, y_n; h));$$

comme l'estimation de l'erreur de troncature locale. Ce principe peut être rendu particulièrement efficace lorsqu'on combine deux méthodes de Runge-Kutta, respectivement à s et \hat{s} (avec $s \leq \hat{s}$) et d'ordre p et \hat{p} (avec $p < \hat{p}$), pour lesquelles les valeurs des quantités k_i coïncident pour $i = 1, \dots, s$, car d'estimateur d'erreur est la différence entre la première et la deuxième formule de l'équation (2.3) donc, elle est donnée par la quantité :

$$\Delta = y - \hat{y} = (y_0 + h \sum_{k=0}^5 c_k f_k + O(h^6)) - (y_0 + h \sum_{k=0}^7 \hat{c}_k f_k + O(h^7)) = h \left(\sum_{i=1}^s (\hat{b}_i - b_i) k_i + \sum_{i=s+1}^{\hat{s}} \hat{b}_i k_i \right).$$

L'évaluation de l'erreur est indispensable pour adapter le pas h à la précision souhaitée.

Dont le calcul demande un total de \hat{s} (contre $\hat{s} + s$ a priori) évaluations de la fonction f . De telles méthodes de Runge-Kutta emboîtées se caractérisent donc par la donnée d'un seul jeu de coefficients $\{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq \hat{s}}$ et de coefficients $\{C_i\}_{1 \leq i \leq \hat{s}}$ et deux jeux de coefficients $\{b_i\}_{1 \leq i \leq \hat{s}}$ et $\{\hat{b}_i\}_{1 \leq i \leq \hat{s}}$, et donnent lieu à des tableaux de Butcher augmentés de la forme :

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \\ & \hat{b}^T \end{array}$$

L'adaptation se fait alors de la manière suivante. Étant donné une tolérance fixée ε et partant d'un pas de longueur h , on obtient une nouvelle valeur du pas par la formule :

$$h_{new} = sh \left(\frac{\varepsilon}{|\Delta|} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Où s est un facteur de «sécurité», de valeur légèrement inférieure à 1, tenant compte du fait que la prédiction d'erreur n'est pas exacte. Si le pas courant est accepté, c'est-à-dire si $|\Delta| \leq \varepsilon$, on conserve l'approximation calculée et on prend h comme longueur pour le prochain pas. Si le pas est rejeté, on recalcule une nouvelle approximation avec h comme longueur du pas.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \\ & \hat{b}^T \end{array}$$

L'adaptation se fait alors de la manière suivante. Étant donné une tolérance fixée ε et partant d'un pas de longueur h , on obtient une nouvelle valeur du pas par la formule :

$$h = sh \left(\frac{\varepsilon}{|\Delta|} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Où s est un facteur de «sécurité», de valeur légèrement inférieure à 1, tenant compte du fait que la prédiction d'erreur n'est pas exacte. Si le pas courant est accepté, c'est-à-dire si $|\Delta| \leq \varepsilon$, on conserve l'approximation calculée et on prend h comme longueur pour le prochain pas. Si le pas est rejeté, on recalcule une nouvelle approximation avec h comme longueur du pas.

Les méthodes de Runge-Kutta symplectiques

3.1 Que signifie symplectique ?

Tout d'abord, que signifie symplectique ? Symplectique signifie que la solution existe sur une variété symplectique. Une variété symplectique est un ensemble de solutions qui est défini par une forme à 2. La raison pour laquelle cela est important pour la physique est que les équations de l'hamiltonien ont naturellement que les solutions résident sur un collecteur symplectique dans l'espace des phases, le fractionnement naturel étant les composants de position et de quantité de mouvement. Pour la vraie solution hamiltonienne, ce chemin d'espace de phase est une énergie constante.

Cela signifie que les intégrateurs symplectiques ont une tendance à mieux capturer les modèles à long terme que les intégrateurs normaux en raison de manque de dérive et de la garantie quasi-périodique de périodicité. C'est les méthodes les plus convenable pour le problème de Kepler.

3.2 Système différentiel hamiltonien

a. Équations de Hamilton :

On considère un système dynamique à N_v degrés de libertés. On note q les coordonnées généralisées (un vecteur de N_v variables), et p les variables conjuguées. L'hamiltonien $H(q, p)$ est une fonction des $2N_v$ variables p et q .

Les équations du mouvement de Hamilton s'écrivent :

$$\frac{dq}{dt} = + \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (3.2)$$

Pour les systèmes mécaniques conservatifs, l'hamiltonien est séparable en une partie énergie cinétique et partie énergie potentielle :

$$H(p, q) = K(p) + V(q)$$

Les équations de Hamilton s'écrivent alors :

$$\frac{dq}{dt} = + \frac{\partial K}{\partial p} \quad (3.3)$$

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial q} \quad (3.4)$$

b. Exemples en mécanique classique :

1- L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique à une dimension :

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{dq}{dt} = p \quad (3.5)$$

$$\frac{dp}{dt} = -q \quad (3.6)$$

2- Le problème à N corps en interaction gravitationnelle est un autre exemple dont l'hamiltonien est séparable. Par exemple pour 2 corps, si q_1 et q_2 sont les vecteurs position des corps :

$$K(p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \quad (3.7)$$

$$V(q_1, q_2) = - \frac{G m_1 m_2}{|q_1 - q_2|} \quad (3.8)$$

3.3 Méthode d'Euler symplectique :

On cherche une solution numérique des équations (3.1) et (3.2) avec les conditions initiales à $t = 0$:

$$q(0) = q_0 \quad (3.9)$$

$$p(0) = p_0 \quad (3.10)$$

Pour obtenir N points sur l'intervalle $[0, T]$, on définit p le pas de temps $h = T/N$ et on cherche des valeurs approchées pour les instants :

$$t_n = n h \quad (3.11)$$

La méthode d'Euler A [1] est définie par :

$$q_{n+1} = q_n + h \frac{\partial H}{\partial p}(q_{n+1}, p_n) \quad (3.12)$$

$$p_{n+1} = p_n - h \frac{\partial H}{\partial q}(p_{n+1}, p_n) \quad (3.13)$$

Cette méthode est d'ordre 1. La première étape est en générale implicite. Dans le cas d'une hamiltonien séparable elle devient :

$$q_{n+1} = q_n + h \frac{\partial K}{\partial p}(q_n, p_{n+1}) \quad (3.14)$$

$$p_{n+1} = p_n - h \frac{\partial V}{\partial q}(q_n, p_{n+1}) \quad (3.15)$$

La méthode est alors explicite. Comparée à la méthode d'Euler simple (explicite), l'évaluation des coordonnées q et des moments conjugués p (les vitesses), se fait en deux étapes successives.

La seconde étape est en générale implicite. Dans le cas d'un hamiltonien séparable elle devient explicite :

$$q_{n+1} = q_n + h \frac{\partial K}{\partial p}(p_{n+1}) \quad (3.16)$$

$$p_{n+1} = p - h \frac{\partial V}{\partial q}(q_n) \quad (3.17)$$

On remarque que l'évaluation des p doit se faire en premier. Ces méthode d'Euler sont symplectiques [1].

3.4 Runge-Kutta 4 implicite symplectique

Runge-Kutta à pas fixe

On cherche à résoudre numériquement l'équation : $\dot{y} = f(y, t)$.

Un tel intégrateur se construit en choisissant judicieusement les points où l'on évalue la fonction f entre deux itérations. Ces derniers sont au nombre de trois (différentes du point de départ $y(t)$), et sont notés ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 .

On passe alors du point $y(t)$ au point $y(t+n)$ via la relation :

$$y(t+h) = y(t) + h b_1 f(t + \frac{b_1}{2} h, \xi_1) + h b_2 f(t + (b_1 + \frac{b_2}{2}) h, \xi_2) + h b_3 f(t + (b_1 + b_2 + \frac{b_3}{2}) h, \xi_3)$$

où les ξ_i sont donnés par les expressions suivants :

$$\xi_1 = y(t) + h \frac{b_1}{2} f(t + \frac{b_1}{2} h, \xi_1),$$

$$\xi_2 = y(t) + h b_1 f(t + \frac{b_2}{2} h, \xi_1) + h \frac{b_2}{2} f(t + (b_1 + \frac{b_2}{2}) h, \xi_2),$$

$$\xi_3 = y(t) + h b_1 f(t + (b_1 + b_2 + \frac{b_3}{2}) h, \xi_1) + h b_2 f(t + (b_1 + b_2 + \frac{b_3}{2}) h, \xi_2) + h \frac{b_3}{2} f(t + (b_1 + b_2 + \frac{b_3}{2}) h, \xi_3)$$

où les b_i sont choisis comme suit [?].

$$b_1 = \frac{1}{3}(2 + 2^{1/3} + 2^{-1/3}),$$

$$b_2 = 1 - 2b_3,$$

$$b_3 = b_1.$$

Les ξ_i sont donnés implicitement, on parle de méthode implicite. Précisons qu'un intégrateur symplectique est forcément implicite (ibid). La méthode est dite "DIRK" (Diagonally Implicit Rungr-Kutta methods) : la relation définissant ξ_1 ne fait apparaître ni ξ_2 ni ξ_3 , et celle définissant ξ_2 ne fait pas intervenir ξ_3 . On peut donc d'abord déterminer ξ_1 , puis ξ_2 , et enfin ξ_3 .

Implémentation :

Les coefficients ξ_i ont été calculé par l'algorithme de Newton "classique". Pour le système étudié ici, la fonction f (l'équation du mouvement) est autonome, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du temps. L'algorithme de Newton a donc d'abord été appliqué à la fonction : $g_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$x \rightarrow y(t) + h \frac{b_1}{2} f(x) - x$$

ξ_1 est alors la solution (sous réserve d'existence et d'unicité) de $g_1(\xi_1) = 0$.

On détermine ensuite ξ_2 comme zéro de la fonction

$$g_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$x \rightarrow y(t) + h b_1 f(\xi_1) + h \frac{b_2}{2} f(x) - x$$

puis ξ_3 comme zéro de

$$g_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$x \rightarrow y(t) + h b_1 f(\xi_1) + h b_2 f(\xi_2) + \frac{b_3}{2} f(x) - x$$

On peut alors calculer $y(t+h)$. On réitérant ce processus, pn peut alors déterminer la trajectoire complète de la particule.

Simulation numérique

Exemple 1 :

Dans ce chapitre on établit l'exemple à condition initiale suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = 1 + y^2 & , \quad x \in [0, 1.4] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente une comparaison entre la solution exacte, la méthode de RK4, RK5 et RK6, où l'on remarque une grande correspondance entre elles, ce qui indique que RK4 est suffisante pour un tel problème simple.

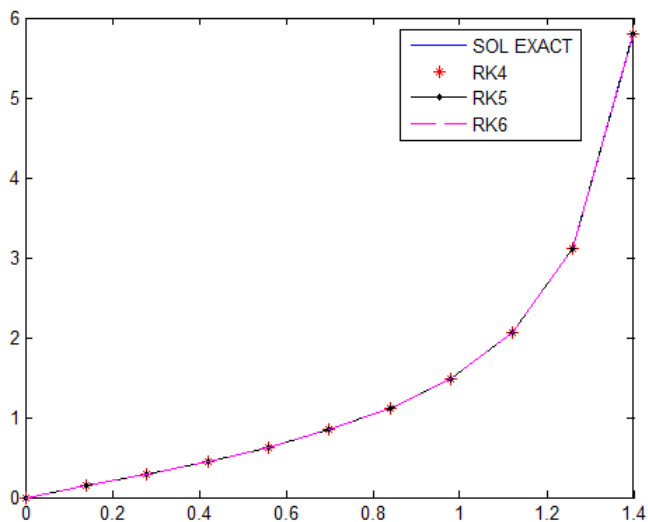


FIGURE 4.1 – Comparaison entre la solution exacte, RK4, RK5 et RK6

n	RK4	RK5	RK6	RK5(4)
50	4.6147e-05	9.2046e-07	3.5968e-07	9.8899e-11
100	2.9159e-06	3.2149e-08	8.5739e-09	7.3624e-12
150	5.7549e-07	4.2798e-09	8.6577e-10	1.5365e-12
200	1.8183e-07	1.0141e-09	1.6521e-10	5.0004e-13
250	7.439e-08	3.3115e-10	4.5153e-11	2.0817e-13
300	3.5841e-08	1.3263e-10	1.5561e-11	1.013e-13
500	4.6346e-09	1.0204e-11	7.6383e-13	1.3212e-14

TABLE 4.1 – estimation de l'erreur de troncature

par contre le tableau suivant montre l'amélioration de l'erreur avec le croisement de l'ordre, alors elle est idéale avec la méthode emboîtée.

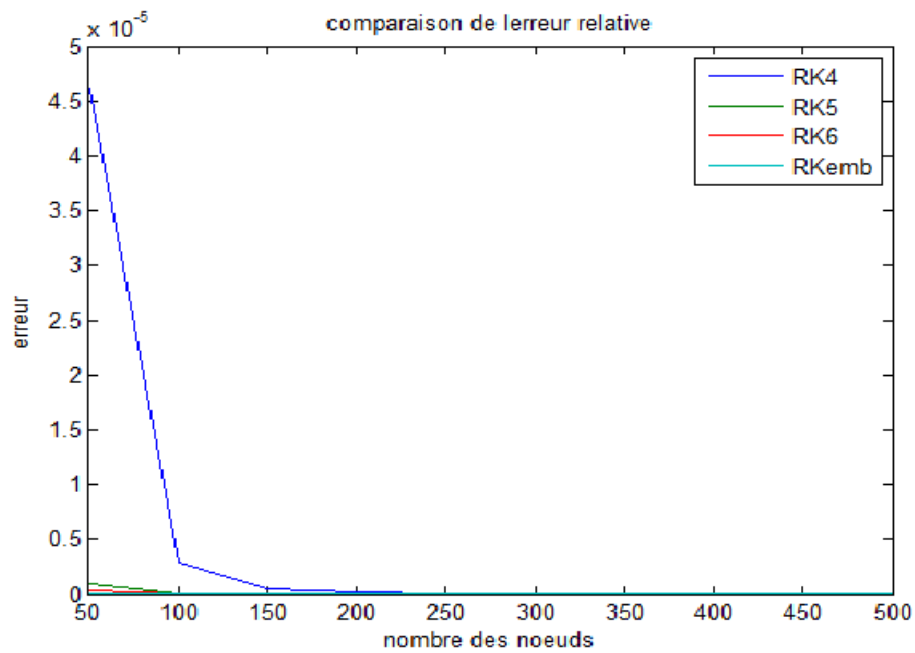


FIGURE 4.2 – Comparaison de l'erreur

Le tableau (4,1) et la figure (4.2) représente l'estimation de l'erreur entre la solution exacte et approximative tel que, on voit clairement que l'erreur diminue avec la croissence de l'ordre.

$k \setminus \lambda$	α_k	$\beta_{k\lambda}$							c_k	\widehat{c}_k
		0	1	2	3	4	5	6		
0	0	0							$\frac{31}{384}$	$\frac{7}{1408}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$							0	0
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{16}{75}$						$\frac{1125}{2816}$	$\frac{1125}{2816}$
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$					$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$
4	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{144}{25}$	-4	$\frac{16}{25}$				$\frac{125}{768}$	$\frac{125}{768}$
5	1	$\frac{361}{320}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{407}{128}$	$-\frac{11}{80}$	$\frac{55}{128}$			$\frac{5}{66}$	0
6	0	$-\frac{11}{640}$	0	$\frac{11}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{11}{256}$	0			$\frac{5}{66}$
7	1	$\frac{93}{640}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{803}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{99}{256}$	0	1		$\frac{5}{66}$

TABLE 4.2 – Table de Butcher, RK5 et RK6

Pour les algorithmes RK5 et RK6, on a utilise le tableau de Butcher ci-dessous .

0	0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{644448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
b_i	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$
\widehat{b}_i	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0

TABLE 4.3 – les coefficients de RK5(4)7M

On à utilisé les coefficients de ce tableau dans l'algorithme Runge-Kutta Emboitée RK5(4).

Exemple 2 : (Le problème des deux corps gravitationnel)

Ce problème modélise le mouvement des deux corps en interaction gravitationnelle entre eux, comme le mouvement des astres ou des particules sous atomiques.

L'équation du mouvement en coordonnées polaires ce donne comme suit :

$$\vec{\ddot{r}} = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

$$r(0) = 1 - e$$

$$\dot{r}(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3, & y_1(0) = 1 - e \\ \dot{y}_2 = y_4, & y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_3 = \frac{-y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}, & y_3(0) = 0 \\ \dot{y}_4 = \frac{-y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}, & y_4(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{cases}$$

On utilisant les conditions initiales ci-dessus l'hamiltonien exact vaut 0.8000, il se calcule avec la formule suivante :

$$H = T + V \\ = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

On voit clairement du tableau ci-dessous la conservation de l'hamiltonien on utilise Runge-Kutta 4 symplectique.

RK4	RK4sym
0.8276	0.8000
0.8276	0.8002
0.8276	0.8005
0.8276	0.8009
0.8276	0.8013
0.8275	0.8017
0.8274	0.8021
0.8273	0.8026
0.8272	0.8029
0.8270	0.8033
0.8269	0.8036

TABLE 4.4 – comparaison entre l'hamiltonien de (RK4 et RK4 symplectique)

conclusion

De ce qui précède nous pouvons conclure qu'aucune des algorithmes d'une même étape ne peut être jugé meilleur que les autres lors de résolution d'un problème ; parce que cela dépend de la nature de l'équation différentielle, la ainsi que la longueur de l'étape affecte la précision de la solution. Les algorithmes de Runge-Kutta avec des rangs plus élevés nécessitent de nombreux calculs. Par exemple, il n'est pas possible pour obtenir un algorithme du cinquième étage et du cinquième rangs, il faut ajouter deux étages pour obtenir cet algorithme et avec ceci on remarque que plus la longueur du pas est courte, les résultats sont plus précis.

L'amélioration ainsi que l'adaptation aux problèmes des méthodes de R-K, se poursuivent à ce jour.

Et en fin, nous remercions Dieu qui nous a permis de faire cette recherche, et nous espérons que nous étions on le niveau.

```

a=0;b=1.4;
n=10;
h=(b-a)/n;
x=a:h:b
yex=zeros(n,1);
for i=1:n+1
yex(i)=tan(x(i));
end
yex %SOL EXACT
y4=zeros(n,1);
for i=1:n
    k41=1+(y4(i))^2;
    k42=1+(y4(i)+(h/2)*k41)^2;
    k43=1+(y4(i)+(h/2)*k42)^2;
    k44=1+(y4(i)+h*k43)^2;
    y4(i+1)=y4(i)+(h/6)*(k41+2*k42+2*k43+k44);
end
y4 %RK4
y5=zeros(n,1);
for i=1:n
    k51=1+(y5(i))^2;
    k52=1+(y5(i)+(h/6)*k51)^2;
    k53=1+(y5(i)+((4*h)/75)*k51+((16*h)/75)*k52)^2;
    k54=1+(y5(i)+((5*h)/6)*k51-((8*h)/3)*k52+((5*h)/2)*k53)^2;
    k55=1+(y5(i)-((8*h)/5)*k51+((144*h)/25)*k52-4*h*k53+((16*h)/25)*k54)^2;
    k56=1+(y5(i)+((361*h)/320)*k51-((18*h)/5)*k52+((407*h)/128)*k53-((11*h)/80)*k54+
((55*h)/128)*k55)^2;
    y5(i+1)=y5(i)+h*((31/384)*k51+(1125/2816)*k53+(9/32)*k54+(125/768)*k55+(5/66)*k56);
end
y5 %RK5
y6=zeros(n,1);
for i=1:n
    k61=1+(y6(i))^2;
    k62=1+(y6(i)+(h/6)*k61)^2;
    k63=1+(y6(i)+((4*h)/75)*k61+((16*h)/75)*k62)^2;
    k64=1+(y6(i)+((5*h)/6)*k61-((8*h)/3)*k62+((5*h)/2)*k63)^2;
    k65=1+(y6(i)-((8*h)/5)*k61+((144*h)/25)*k62-4*h*k63+((16*h)/25)*k64)^2;
    k66=1+(y6(i)+((361*h)/320)*k61-((18*h)/5)*k62+((407*h)/128)*k63-((11*h)/80)*k64+
((55*h)/128)*k65)^2;
    k67=1+(y6(i)-((11*h)/640)*k61+((11*h)/256)*k63-((11*h)/160)*k64+((11*h)/256)*k65)^
^2;
    k68=1+(y6(i)+((93*h)/640)*k61-((18*h)/5)*k62+((803*h)/256)*k63-((11*h)/160)*k64+
((99*h)/256)*k65+h*k67)^2;
    y6(i+1)=y6(i)+h*((7/1408)*k61+(1125/2816)*k63+(9/32)*k64+(125/768)*k65+(5/66)*k67+
(5/66)*k68);
end
y6 %RK6
sol=[yex y4 y5 y6]
e1=max(abs(yex-y4))
e2=max(abs(yex-y5))
e3=max(abs(yex-y6))
plot(x,y4,x,yex,'*r',x,y5,'.-K',x,y6,'--m')
legend('SOL EXACT','RK4','RK5','RK6')

```

```

clear all
clc
a=0;
b=1.4;
n=10;
h=(b-a)/n;
hmin=h/3;
x=zeros(1,n+1);
y7M4=zeros(1,n+1);
y7M5=zeros(1,n+1);
yex=zeros(1,n+1);
tol=1e-3;
for i=1:n
    K1=1+y7M4(i)^2;
    K2=1+(y7M4(i)+h*((1/5)*K1))^2;
    K3=1+(y7M4(i)+h*((3/40)*K1+(9/40)*K2))^2;
    K4=1+(y7M4(i)+h*((44/45)*K1-(56/15)*K2+(32/9)*K3))^2;
    K5=1+(y7M4(i)+h*((19372/6561)*K1+(-25360/2187)*K2+(64448/6561)*K3+(-212/729)*K4))^2;
    K6=1+(y7M4(i)+h*((9017/3168)*K1+(-355/33)*K2+(46732/5247)*K3+(49/176)*K4-(5103/18656)*K5))^2;
    K7=1+(y7M4(i)+h*((35/384)*K1+(500/1113)*K3+(125/192)*K4+(2187/6784)*K5+(11/84)*K6))^2;
    y7M4(i+1)=y7M4(i)+h*((35/384)*K1+(500/1113)*K3+(125/192)*K4-(2187/6784)*K5+(11/84)*K6);
    y7M5(i+1)=y7M5(i)+h*((5179/57600)*K1+(7571/16695)*K3+(393/640)*K4-(92097/339200)*K5+(187/2100)*K6+(1/40)*K7);
    err=abs(y7M5(i+1)-y7M4(i+1))
    s=0.84*(tol*h/err)^(0.25)
    if ((err > tol)&(h>hmin))
        h=h*s;
    else h=(b-a)/n;
    end
    h
    x(i+1)=x(i)+h;
end
for i=1:n+1
    yexact(i)=tan(x(i));
end
sol=[yexact' y7M4' y7M5']
e4=max(abs(yexact-y7M4))
e5=max(abs(yexact-y7M5))
erreur=max(abs(y7M5-y7M4))
plot(x,yexact',x,y7M5,'*g',x,y7M4,'--r')

```

```
n=[50 100 150 200 250 300 500];
e1=[ 4.6147e-05  2.9159e-06  5.7549e-07  1.8183e-07  7.439e-08  3.5841e-08  4.6346e-09 ]
e2=[ 9.2046e-07  3.2149e-08  4.2798e-09  1.0141e-09  3.3115e-10  1.3263e-10  1.0204e-11]
e3 =[3.5978e-07  8.5739e-09  8.6577e-10  1.6521e-10  4.5153e-11  1.5561e-11  7.6383e-13 ]
erreur=[ 9.8899e-11  7.3624e-12  1.5365e-12  5.0004e-13  2.0817e-13  1.0136e-13  1.3212e-14]
plot(n,e1,n,e2,n,e3,n,erreur)
title('comparaison de l'erreur');
xlabel('nombre des noeuds');
ylabel('erreur');
legend('RK4', 'RK5', 'RK6', 'RKemb');
```

```

clear all
clc
%méthode de RK4 symplectique pour le pb de 2-corps
% yy la position et la vitesse en coordonnées cartésiennes
% H est l'hamiltonien le long de la trajectoire
n=10;
h=(4*pi)/n;
a=39.445;% le grand demi axe de Pluton en UA
e=0.25024871;% l'excentricité de Pluton
b1=(1/3)*(2+2^(1/3)+2^(-1/3));
b3=b1;
b2=1-2*b3;
yy=zeros(n+1,4);
yy(1,1)=a*(1-e);
yy(1,4)=sqrt((1+e)/(1-e));
deltaksi=[0.1;0.1;0.1;0.1];
for k=1:n
%méthode de newton pour les systèmes non linéaires
iter=1;
while iter < 10
ksil=[a*(1-e);0;0;sqrt((1+e)/(1-e))];
d11=((ksil(1)+ksil(2))^(3/2)-ksil(1)^(3/2)*(ksil(1)+ksil(2))^(1/2))/(ksil(1)+ksil(2))3;
d12=((3/2)*ksil(1))/(ksil(1)+ksil(2))^(5/2);
d13=((3/2)*ksil(2))/(ksil(1)+ksil(2))^(5/2);
d14=((ksil(1)+ksil(2))^(3/2)-ksil(2)^(3/2)*(ksil(1)+ksil(2))^(1/2))/(ksil(1)+ksil(2))3;
EF=[-1 0 h*(b1/2) 0 -yy(k,1)-h*(b1/2)*ksil(3)+ksil(1);0 -1 0 h*(b1/2) -yy(k,2)-h*(b1/2)
*ksil(4)+ksil(2);-h*(b1/2)*d11 -h*(b1/2)*d12 -1 0 -yy(k,3)+h*(b1/2)*ksil(1)/(ksil(1)
+ksil(2))^(3/2)+ksil(3);-h*(b1/2)*d13 -h*(b1/2)*d14 0 -1 -yy(k,4)+h*(b1/2)*ksil(2)/
(ksil(1)+ksil(2))^(3/2)+ksil(4)];
%methode de jordon pour le système linéaire
% étape 1
for j=2:5
EF(1,j)=EF(1,j)/EF(1,1);
end
EF(1,1)=1;
for i=2:4
for j=1:5
EF(i,j)=EF(i,j)-EF(i,1)*EF(1,j);
end
end
% étape 2
for j=3:5
EF(2,j)=EF(2,j)/EF(2,2);
end
EF(2,2)=1;
for i=1:4
if i~=2
for j=2:5
EF(i,j)=EF(i,j)-EF(i,2)*EF(2,j);
end
end
end
%étape 3

```

```

for j=4:5
    EF(3,j)=EF(3,j)/EF(3,3);
end
EF(3,3)=1;
for i=1:4
    if i~=3
        for j=2:5
            EF(i,j)=EF(i,j)-EF(i,3)*EF(3,j);
        end
    end
end
% étape 4
for j=5
    EF(4,j)=EF(4,j)/EF(4,4);
end
EF(4,4)=1;
for i=1:3
    for j=4:5
        EF(i,j)=EF(i,j)-EF(i,4)*EF(4,j);
    end
end
for i=1:4
    deltaksi(i)=abs(EF(i,5));
end
deltaksi;
for i=1:4
    ksi1(i)=ksi1(i)+deltaksi(i);
end
iter=iter+1;
end
ksi1;
deltaksi2=[0.1;0.1;0.1;0.1];
%méthode de newton pour les systèmes non linéaires
iter=1;
while iter < 50
    ksi2=[a*(1-e);0;0;sqrt((1+e)/(1-e))];
    d21=((ksi2(1)+ksi2(2))^(3/2)-ksi2(1)^(3/2)*(ksi2(1)+ksi2(2))^(1/2))/(ksi2(1)+ksi2(2))3;
    d22=((3/2)*ksi2(1))/(ksi2(1)+ksi2(2))^(5/2);
    d23=((3/2)*ksi2(2))/(ksi2(1)+ksi2(2))^(5/2);
    d24=((ksi2(1)+ksi2(2))^(3/2)-ksi2(2)^(3/2)*(ksi2(1)+ksi2(2))^(1/2))/(ksi2(1)+ksi2(2))3;
    EF2=[-1 0 h*(b2/2) 0 -yy(k,1)-h*b1*ksi1(3)-h*(b2/2)*ksi2(3)+ksi2(1);0 -1 0 h*(b2/2) -yy(k,2)-h*b1*ksi1(4)-h*(b2/2)*ksi2(4)+ksi2(2);-h*(b2/2)*d21 -h*(b2/2)*d22 -1 0 -yy(k,3)+h*b1*ksi1(1)/(ksi1(1)+ksi1(2))^(3/2)+h*(b2/2)*ksi2(1)/(ksi2(1)+ksi2(2))^(3/2)+ksi2(3);-h*(b2/2)*d23 -h*(b2/2)*d24 0 -1 -yy(k,4)+h*b1*ksi1(2)/(ksi1(1)+ksi1(2))^(3/2)+h*(b2/2)*ksi2(2)/(ksi2(1)+ksi2(2))^(3/2)+ksi2(4)];
    %methode de jordon pour le système linéaire
    % étape 1
    for j=2:5
        EF2(1,j)=EF2(1,j)/EF2(1,1);
    end
    EF2(1,1)=1;
    for i=2:4
        for j=1:5

```

```

        EF2(i,j)=EF2(i,j)-EF2(i,1)*EF2(1,j);
    end
end
% étape 2
for j=3:5
    EF2(2,j)=EF2(2,j)/EF2(2,2);
end
EF2(2,2)=1;
for i=1:4
    if i~=2
        for j=2:5
            EF2(i,j)=EF2(i,j)-EF2(i,2)*EF2(2,j);
        end
    end
end
%étape 3
for j=4:5
    EF2(3,j)=EF2(3,j)/EF2(3,3);
end
EF2(3,3)=1;
for i=1:4
    if i~=3
        for j=2:5
            EF2(i,j)=EF2(i,j)-EF2(i,3)*EF2(3,j);
        end
    end
end
% étape 4
for j=5
    EF2(4,j)=EF2(4,j)/EF2(4,4);
end
EF2(4,4)=1;
for i=1:3
    for j=4:5
        EF2(i,j)=EF2(i,j)-EF2(i,4)*EF2(4,j);
    end
end
for i=1:4
    deltaksi2(i)=abs(EF2(i,5));
end
deltaksi2;
for i=1:4
    ksi2(i)=ksi2(i)+deltaksi2(i);
end
iter=iter+1;
end
ksi2;
deltaksi3=[0.1;0.1;0.1;0.1];
%méthode de newton pour les systèmes non linéaires
iter=1;
while iter < 50
    ksi3=[a*(1-e);0;0;sqrt((1+e)/(1-e))];
    d31=((ksi3(1)+ksi3(2))^(3/2)-ksi3(1)^(3/2)*(ksi3(1)+ksi3(2))^(1/2))/(ksi3(1)+ksi3(2))
    ^3;
    d32=((3/2)*ksi3(1))/(ksi3(1)+ksi3(2))^(5/2);

```

```

d33=((3/2)*ksi3(2))/(ksi3(1)+ksi3(2))^(5/2);
d34=((ksi3(1)+ksi3(2))^(3/2)-ksi3(2)*(3/2)*(ksi3(1)+ksi3(2))^(1/2))/(ksi3(1)+ksi3(2))
^3;
EF3=[-1 0 h*(b3/2) 0 -yy(k,1)-h*b1*ksi1(3)-h*b2*ksi2(3)-h*(b3/2)*ksi3(3)+ksi3(1);0 -1 0
h*(b3/2) -yy(k,2)-h*b1*ksi1(4)-h*b2*ksi2(4)-h*(b3/2)*ksi3(2)+ksi3(2);-h*(b3/2)*d31 -h*
(b3/2)*d32 -1 0 -yy(k,3)+h*b1*ksi1(1)/(ksi1(1)+ksi1(2))^(3/2)+h*b2*ksi2(1)/(ksi2(1)
+ksi2(2))^(3/2)+h*(b3/2)*ksi3(1)/(ksi3(1)+ksi3(2))^(3/2)+ksi3(3);-h*(b3/2)*d33 -h*
(b3/2)*d34 0 -1 -yy(k,4)+h*b1*ksi1(2)/(ksi1(1)+ksi1(2))^(3/2)+h*b2*ksi2(2)/(ksi2(1)
+ksi2(2))^(3/2)+h*(b3/2)*ksi3(2)/(ksi3(1)+ksi3(2))^(3/2)+ksi3(4)];
%methode de jordon pour le système linéaire
% étape 1
for j=2:5
    EF3(1,j)=EF3(1,j)/EF3(1,1);
end
EF3(1,1)=1;
for i=2:4
    for j=1:5
        EF3(i,j)=EF3(i,j)-EF3(i,1)*EF3(1,j);
    end
end
% éape 2
for j=3:5
    EF3(2,j)=EF3(2,j)/EF3(2,2);
end
EF3(2,2)=1;
for i=1:4
    if i~=2
        for j=2:5
            EF3(i,j)=EF3(i,j)-EF3(i,2)*EF3(2,j);
        end
    end
end
%étape 3
for j=4:5
    EF3(3,j)=EF3(3,j)/EF3(3,3);
end
EF3(3,3)=1;
for i=1:4
    if i~=3
        for j=2:5
            EF3(i,j)=EF3(i,j)-EF3(i,3)*EF3(3,j);
        end
    end
end
% étape 4
for j=5
    EF3(4,j)=EF3(4,j)/EF3(4,4);
end
EF3(4,4)=1;
for i=1:3
    for j=4:5
        EF3(i,j)=EF3(i,j)-EF3(i,4)*EF3(4,j);
    end
end
for i=1:4

```

```
deltaksi3(i)=abs(EF3(i,5));
end
deltaksi3;
for i=1:4
    ksi3(i)=ksi3(i)+deltaksi3(i);
end
iter=iter+1;
end
ksi3;
ksi=[ksi1 ksi2 ksi3];
yy(k+1,1)=yy(k,1)+h*b1*ksi1(3)+h*b2*ksi2(3)+h*b3*ksi3(3);
yy(k+1,2)=yy(k,2)+h*b1*ksi1(4)+h*b2*ksi2(4)+h*b3*ksi3(4);
yy(k+1,3)=yy(k,3)-h*b1*(ksi1(1)/((ksi1(1))^2+(ksi1(2))^2)^(3/2))-h*b2*(ksi2(1)/((ksi2(1))^2+(ksi2(2))^2)^(3/2))-h*b3*(ksi3(1)/((ksi3(1))^2+(ksi3(2))^2)^(3/2));
yy(k+1,4)=yy(k,4)-h*b1*(ksi1(2)/((ksi1(1))^2+(ksi1(2))^2)^(3/2))-h*b2*(ksi2(2)/((ksi2(1))^2+(ksi2(2))^2)^(3/2))-h*b3*(ksi3(2)/((ksi3(1))^2+(ksi3(2))^2)^(3/2));
end
YY;
for i=1:n+1
H(i)=(1/2)*((yy(i,3))^2+(yy(i,4))^2)-1/sqrt((yy(i,1))^2+(yy(i,2))^2);
end
H=H'
```

```

n=10;
h=(4*pi)/n;
x=[0:h:2*pi];
y1=zeros(n+1,1);
y2=zeros(n+1,1);
y3=zeros(n+1,1);
y4=zeros(n+1,1);
a=39.445;%ua
%a=5900898440.58310867e3 %m
e=0.25024871;% extrencité de pluton
%K=39.476926421373; % constante de gravitation fois la masse de soleil (ua^3 an^-2)
G=6.6720e-11; %m^3kg^-1s^-2
%msoleil=1.9891e30;%kg
%mpluton=1.314e22;%kg
%mu=G*msoleil^3/(mpluton+msoleil)^2;
p=a*(1-e^2);
y1(1)=a*(1-e);
y4(1)=sqrt((1+e)/(1-e));
%algorithme de RK4
for i=1:n
    K21=-y1(i)/((y1(i))^2+(y2(i))^2)^(3/2);
    K22=- (y1(i)+h/2*K21)/(((y1(i)+h/2*K21)^2+(y2(i)+h/2*K21)^2)^(3/2);
    K23=- (y1(i)+h/2*K22)/((y1(i)+h/2*K22)^2+(y2(i)+h/2*K22)^2)^(3/2);
    K24=- (y1(i)+h*K23)/((y1(i)+h*K23)^2+(y2(i)+h*K23)^2)^(3/2);
    y3(i+1)=y3(i)+h/6*(K21+2*K22+2*K23+K24);
    K212=-y2(i)/((y1(i))^2+(y2(i))^2)^(3/2);
    K222=- (y2(i)+h/2*K212)/(((y1(i)+h/2*K212)^2+(y2(i)+h/2*K212)^2)^(3/2);
    K232=- (y2(i)+h/2*K222)/((y1(i)+h/2*K222)^2+(y2(i)+h/2*K222)^2)^(3/2);
    K242=- (y2(i)+h*K232)/((y1(i)+h*K232)^2+(y2(i)+h*K232)^2)^(3/2);
    y4(i+1)=y4(i)+h/6*(K212+2*K222+2*K232+K242);
    K11=y3(i);
    K12=y3(i)+h/2*K11;
    K13=y3(i)+h/2*K12;
    K14=y3(i)+h*K13;
    y1(i+1)=y1(i)+h/6*(K11+2*K12+2*K13+K14);
    K112=y4(i);
    K122=y4(i)+h/2*K112;
    K132=y4(i)+h/2*K122;
    K142=y4(i)+h*K132;
    y2(i+1)=y2(i)+h/6*(K112+2*K122+2*K132+K142);
end
for i=1:n+1
    r(i)=sqrt((y1(i))^2+(y2(i))^2);
end
%solution exacte
ylex=zeros(n+1,1);
y2ex=zeros(n+1,1);
for i=1:n+1
    rex(i)=p/(1+e*cos(x(i)));
    ylex(i)=rex(i)*cos(x(i));
    y2ex(i)=rex(i)*sin(x(i));
end
s=[rex' r']
error=max(abs(rex-r))
comet(ylex,y2ex)

```

```
for i=1:n+1
H(i)=(1/2)*((y3(i))^2+(y4(i))^2)-1/(sqrt((y1(i))^2+(y2(i))^2))^(3/2);
end
H'
%s=[ylex y1]
%max(abs(ylex-y1))
```

Bibliographie

- [1] B. Leimkuhler, S. Reich, *Simulating hamiltonian dynamics*, Cambridge university press, 2004.
- [2] BOUAMEUR SOFYANE et EZ-ZINI MOHAMED , *Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour des équations différentielles du 1^{er} ordre* Département de Mathématique, Informatique et Gestion Filière science Mathématique et Informatique. 18 Mars 2017.
- [3] ERWIN FEHLEGERG. GEORGE C. MARSHALL SPACE FLIGHT enter. HUNTSVILLE, ALA, *Classical Fifth-, Sixth-, Seventh and Eighth ordre Runge-Kutta formulas with Stepsize control* . National Aeronautics and space Administration. Washington, D. C. October 1968.
- [4] HAIRER, ERNST ; LUBICH ; CHRISTIAN ; WANNER GERHARD (1993), *Geometric Numerical Integration : Structure- Preserving Algorithms for ordinary differential equations(2nd ed.)*, Berlin, New York.
- [5] HAIRER, ERNST ; NORSETT, SYVERT PAUL ; WANNER GERHARD (1993), *solving ordinary differential equations I, Nonstiff problems*, Berlin, New York.
- [6] HAIRER, ERNST ; WANNER GERHARD (1996), *solving ordinary differential equations II, stiff and differential-Algebraic problems*, Berlin, New York.
- [7] J.C, BUTCHER *On Runge-Kutta processes of high order*.
- [8] J.R.DORMAND, M. E. A. EL-MIKKAUY, and J. PRINCE, *High of order embedded R-K-Nayström formula*, Numerical Analysis (1987)7-40-430.
- [9] J.R.DORMAND.P.J.PRINCE , *Runge-Kutta-Nayström triples*, Compt, Math, Applie , vol 13, Na 12,PP 937-940-1987.

- [10] JEAN -PHILLIPE GRAIVET, *Méthode numériques appliquées*, pour le scientifiques ingénieur. 17, avenue du Hoggar Parc d'activité de Courtabœuf-BP 112 91944 les Ulis Cedex6 A - France.
- [11] Kang Feng & Mengzhaoqim , *symplectic Runge-Kutta methods*, Springer pp 277-364.
- [12] *Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta*. Université de Grenoble.2014-2015.
- [13] MOÏSE SIBONEY,JEAN-CLAUDE MARDON, *Analyse Numérique II, approximations et équations différentielles*. (1988).
- [14] *Runge-Kutta algorithms of high stages*. Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Lybya, Vol. 1, No. 12, Mar.2019.
- [15] S.FILIPPI and J.GRE, *New R-K Nystrme formula- pairs of ordre 8(7), 9(8), 10(9) and 11(10) for differential equtions of the form $\ddot{y} = f(x, y)$* , journal of competationel and Applied Mathematics 14(1986) 361-370.