

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université 20 Août 1955-Skikda
Faculté des Technologie
Département de Génie civil
Référence : D012125014D



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية
المرجع : د012125014د

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme
de Doctorat en Sciences En Génie Civil
Option : Structures

Présentée par :
REMACHE ABDELKARIM

Thème

Étude numérique de la propagation dynamique d'une
fissure (coudage ou kinking)

Sous la direction du
Pr BOUZERD Hamoudi

Soutenue le
10/04/2025

Devant le jury composé de :

Pr BOUZIANE Salah	Université de Skikda	Président
Pr BOUZERD Hamoudi	Université de Skikda	Rapporteur
Pr EMERITE GUENFOUD Mohamed	Université de Guelma	Examineur
Pr BECHEUR Abdelhamid	Université de Bejaia	Examineur

2024/2025

Dédicaces

Je dédie le fruit de mes années d'études :

A mes très chers parents

A ma femme et mes enfants

A mes frères Kamel, Chemes Eddine, Mourad, Adel

A mes soeurs Rachida, Fatiha, Yamina, Louiza, Karima, Mouna

Remerciements

Je tiens à remercier et exprimer ma gratitude et ma reconnaissance tout d'abord à ALLAH, le Tout Puissant, qui m'a aidé à réaliser ce modeste travail.

Mes remerciements vont à mes très chers parents en signe de respect et de reconnaissance pour les sacrifices qu'ils ont consentis afin de m'assurer un brillant avenir.

Je remercie chaleureusement MR : Bouzerd Hamoudi pour son assistance, l'efficacité de son encadrement, clairvoyance et beaucoup de patience durant tout le temps qu'a exigé le travail. Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour son soutien et encouragement face à la difficulté.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui m'ont encouragé et à tous ceux qui se sont impliqués, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

ملخص

تحتل المواد المركبة، بفضل خصائصها الميكانيكية المتميزة، مكانة متزايدة في مجالات مثل الطيران، والهندسة المدنية، وصناعة السيارات. ومع ذلك، لا يزال سلوكها تجاه التشقق، لا سيما في نظام التحميل الديناميكي، صعب النمذجة. عندما تكون هندسة الهيكل أو نوع التحميل غير متماثل بالنسبة لمحور الشق، فإن هذا الأخير يتطور وفق نمط مختلط ويتبع مساراً غير مستقيم. في هذا السياق، يصبح من الضروري استخدام معيار التفرع لتحديد اتجاه الانتشار الجديد. في حالات التحميل السريع أو عندما يصبح معدل نمو الشق مرتفعاً، يصبح من الضروري أخذ عزم العطالة في الاعتبار، وهو ما يعرف بنمو الشقوق الديناميكي. وللتعامل مع هذه الإشكالية، تم تطوير نموذج جديد في هذه الأطروحة لتقييم معدل استرجاع الطاقة G في حالة التحميل الديناميكي. يعتمد هذا النموذج على الجمع بين عنصر نهائي مختلط خاص يُعرف بـ (RMQ-7) وتقنية التمديد الافتراضي للشقوق.

تم التحقق من فعالية النموذج من خلال دراسة صفيحة مشققة خضعت لأحمال ديناميكية، مع أخذ مستويات مختلفة من سرعة الانتشار بعين الاعتبار. وأكدت النتائج المحصل عليها مدى فعالية النموذج في تحليل السلوك الديناميكي لتشقق المواد المركبة.

الكلمات المفتاحية: التشققات غير المستقيمة، الحمولات الديناميكية، العنصر المتناهي المختلط (RMQ-7)، التمديد الافتراضي للتشققات، المواد المركبة.

Abstract

Composite materials, thanks to their remarkable mechanical properties, are increasingly used in fields such as aeronautics, civil engineering, and the automotive industry. However, their behavior in the presence of cracking, particularly under dynamic loading, remains challenging to model. When the geometry of the structure or the type of loading is asymmetric with respect to the crack axis, the crack propagates in mixed mode and follows a non-linear path. In this context, the use of a bifurcation criterion becomes essential to determine the new direction of propagation.

In cases of rapid loading or when the crack growth rate is high, it is crucial to account for the moment of inertia, which defines dynamic crack growth. To address this issue, a new model was developed in this thesis to evaluate the energy release rate G under dynamic loading conditions. This model is based on the combination of the special mixed finite element RMQ-7 and the virtual crack extension technique.

The performance of the model was validated through the study of a cracked plate subjected to dynamic loading, considering various propagation speed levels. The results obtained confirm the relevance of the model for analyzing the dynamic behavior of cracks in composite materials.

Keywords : crack Kinking; Dynamic; mixed finite element RMQ-7; virtual crack propagation; composite materials.

Résumé

Les matériaux composites, grâce à leurs propriétés mécaniques remarquables, occupent une place croissante dans des domaines tels que l'aéronautique, le génie civil et l'automobile. Toutefois, leur comportement face à la fissuration, en particulier en régime dynamique, reste difficile à modéliser. Lorsque la géométrie de la structure ou le type de chargement est asymétrique par rapport à l'axe de la fissure, celle-ci évolue selon un mode mixte et suit un trajet non rectiligne. Dans ce contexte, l'usage du critère de bifurcation s'avère nécessaire pour déterminer la nouvelle direction de propagation.

En cas de sollicitations rapides ou lorsque le taux de croissance de la fissure devient élevé, il est indispensable de prendre en compte le moment d'inertie, ce qui définit la croissance dynamique des fissures. Pour répondre à cette problématique, un nouveau modèle a été développé dans cette thèse afin d'évaluer le taux de restitution d'énergie G dans un contexte dynamique. Ce modèle repose sur l'association de l'élément fini mixte spécial RMQ-7 et de la technique d'extension virtuelle des fissures.

Les performances du modèle ont été validées à travers l'étude d'une plaque fissurée soumise à des charges dynamiques, en considérant différents niveaux de vitesse de propagation. Les résultats obtenus confirment la pertinence du modèle dans l'analyse du comportement dynamique des fissures dans les matériaux composites.

Mots-clés : coudage (Kinking) ; extension virtuelle des fissures ; dynamique ; élément fini mixte RMQ-7 ; matériaux composites.

Nomenclature

∂W_{els} : Variation de l'énergie de déformation élastique.

∂W_{ext} : Variation du travail des forces extérieures.

∂W_{cin} : Variation de l'énergie cinétique.

∂W_{surf} : Énergie dissipée lors de la propagation sur surface de la fissure.

γ_s : Énergie spécifique de création de surface (énergie par unité de surface).

A : Surface de la fissure.

G : Énergie de Griffith appliquée à l'unité de surface (taux de restitution d'énergie).

G_c : Taux de restitution d'énergie critique.

σ_f : Est la contrainte d'ouverture de fissure.

K : Facteur d'intensité de contrainte.

a : La longueur de la fissure.

f, g : Les fonctions et donnent la répartition angulaire.

K_c : Ténacité.

E, E' : Module d'Young.

σ : Contrainte appliquée à la pointe de la fissure.

Y_I : Facteur de géométrie spécifique au mode I.

K_t : Le facteur de concentration de contrainte.

σ_{max} : Contrainte maximale à l'endroit de la discontinuité.

σ_{nom} : Contrainte nominale appliquée uniformément à la structure.

A' : Aire de l'élément.

r : Rayon à fond d'entaille.

σ_I : Contrainte locale à l'extrémité A' .

μ :] Est module de cisaillement.

J : L'intégrale de Rice.

u_i : Est le vecteur déplacement en un point M du contour.

n_i : Est la composante de la normale à la surface de la fissure.

C : Est un contour fermé quelconque entourant la pointe de fissure.

σ_{ij} : Représente le champ de contraintes.

dS : Abscisse curviligne.

ϕ : La solution asymptotique HRR.

d_n : Coefficient de proportionnalité sans dimension.

η : Et qui dépend fortement du coefficient d'écrouissage.

σ_0 : Et peu de la limite d'élasticité .

r' : Un rayon plastique.

σ_γ : La limite d'élasticité.

$\sigma_{\theta\theta}$: Contrainte circonférentielle.

C_d : Est la vitesse des ondes de dilatation.

$\sigma_{ij}^{(1)}$: Représentent les contraintes appliquées au front de la fissure.

ν : Coefficient de Poisson.

K : La constante de Kolosov.

C_s : vitesse de cisaillement.

Υ : Représente la masse volumique.

v : Représente la vitesse d'avancement de la pointe de la fissure.

$\mathcal{K}_I(V)$: Qui représente la fonction universelle de vitesse.

∂A : L'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

$G_M^*(t)$: Le facteur statique du taux de restitution de l'énergie.

φ_i : Déplacements nodaux.

\tilde{C}^0 : Le champ de déplacement.

λ_i, β_i : Les multiplicateurs de Lagrange.

ϕ_i : Forces de volume données.

\bar{u}_i : Déplacement imposé sur S_u .

\bar{T}_i : Traction imposée sur S_σ

S_{ijkl} : Les composantes de la matrice de souplesse.

$RMQ - 7$: Reissner's Modified Quadrilateral with 7-nodes.

\dot{a} : La vitesse de la fissure.

K_i : matrice de rigidité l'élément i , et l'exposant t indique la transposition,

$\{V\}_i$: Vecteur colonne contenant les valeurs nodales de l'élément i ,

ne : nombre total d'élément dans la structure discrétisée,

Liste des tableaux

4.1	Valeurs du taux de restitution d'énergie G .	71
4.2	Taux de restitution d'énergie G pour différents valeurs de l'angle.	71
4.3	G pour différents valeurs de Δa et $\theta^\circ = 0$.	71
4.4	G pour différents valeurs de Δa et $\theta^\circ = 60$.	71
4.5	G pour différents valeurs de Δa et $\theta^\circ = 90$.	72

Table des figures

1.1	Différentes familles de renfort	6
2.1	Propagation d'une fissure δa	11
2.2	Cas de chargement en bord de fissure.	13
2.3	Champ des contraintes au voisinage de la fissure.	13
2.4	Mode de fissure – ouverture -.	15
2.5	Mode de fissure – cisaillement plan -.	15
2.6	Mode de fissure – cisaillement anti -plan.	16
2.7	Défaut elliptique dans une plaque infinie.	17
2.8	Contour d'intégration.	18
2.9	Distance entre lèvres de la fissure φ (CTOD).	19
2.10	Zones distinguées au tour de la pointe de fissure.	20
2.11	les zones identifiées autour de la pointe de fissure.	23
2.12	Application soudaine d'une pression uniforme.	24
3.13	La continuité géométrique entre les éléments n'est pas satisfaite [26].	40
3.14	mise en place des nœuds pour le carré de Lagrange (degrés 1,2 et 3).	42
3.15	Illustration d'un mode bulle lié à un nœud interne.	42
3.16	L'interpolation est une fonction liée à un nœud sommet.	43
3.17	Interpolation avec une géométrie.	43
3.18	Conditions aux limites mixtes dans une structure.	46
3.19	l'élément fini mixte RMQ-7.	49
3.20	Élément de Reissner.	50
3.21	Élément de référence RMQ-5.	53
3.22	Élément de référence RMQ-11.	55
3.23	Élément RMQ-7.	57
3.24	l'élément d'interface RMQ-7 inversé.	60
3.25	assemblage de deux éléments RMQ-7.	62
3.26	Construction de l'élément RMQ-7 [6].	62
4.27	propagation d'une fissure incliné (coudage -Kinking).	64
4.28	Configuration de l'élément RMQ-7.	66
4.29	Le maillage atour de la nouvelle pointe de fissure est réorganisé.	67
4.30	Coudage (kinking).	69
4.31	Plaque étudiée.	70
4.32	Maillage avec RMQ-7.	70

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
ملخص	iii
Abstract	iv
Résumé	v
Nomenclature	vi
Introduction	1
1 Matériaux composites	3
1.1 Introduction	3
1.2 Définition d'un matériau composite	3
1.3 Caractéristiques des matériaux composites	4
1.4 Les constituants des matériaux composites	5
1.5 Les avantages des matériaux composites	6
1.6 Les inconvénients des matériaux composites	7
1.7 Fissuration dans les Matériaux Composites	8
1.8 Prévention et Gestion des Fissures :	8
2 Mécanique de la rupture	9
2.1 Introduction	9
2.2 Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture	9
2.2.1 Approche énergétique de Griffith	9
2.2.2 Approche cinématique d'Irwin	11
2.2.3 Le facteur d'intensité de contrainte (K)	12
2.2.4 Ténacité (K_c)	14
2.2.5 Modes de rupture	14
2.2.6 Le facteur de concentration de contrainte (K_t)	16
2.2.7 Relation entre le facteur d'intensité de la contrainte (K) et le taux de restitution d'énergie (G)	17
2.2.8 L'intégrale de Rice (J) :	18
2.2.9 Le déplacement de l'ouverture de la pointe de fissure (CTOD)	19
2.3 Phénomène de la propagation de la fissure	20
2.3.1 Mécanique linéaire, et non linéaire de la rupture	21
2.3.2 Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques	21
2.4 Méthodes de simulation numérique pour étudier la propagation de fissure	35

2.4.1	Méthodes sans maillage	36
2.4.2	Méthodes basées sur la partition de l'unité	36
2.4.3	Méthodes des éléments de frontière	36
2.4.4	Méthodes des éléments finis	36
3	Élément fini mixte RMQ-7	38
3.1	Introduction	38
3.2	Formulation d'un élément	39
3.2.1	Famille de Lagrange	40
3.2.2	Les éléments isoparamétriques	43
3.3	Formulation variationnelle	44
3.3.1	Les types de formulation des champs	44
3.3.1.1	Formulation à un seul champ :	44
3.3.1.2	Formulation à plusieurs champs :	45
3.3.2	Fonctionnelle de Reissner (R)	45
3.3.3	Les éléments finis mixtes	48
3.3.3.1	Bref historique	48
3.3.3.2	Modèle utilisé :	49
3.3.3.3	L'élément RMQ-7	49
3.3.3.4	Construction de l'élément d'interface RMQ-7	50
3.4	Conclusion :	63
4	Modèle de calcul du taux de restitution d'énergie G	64
4.1	Introduction	64
4.2	Un rappel historique	65
4.3	Approche proposée pour l'étude du coudage	65
4.4	Modèle d'évaluation du taux restitution d'énergie dans le cas du coudage	66
4.5	Conclusion :	72
	Références	76

Introduction

Les matériaux composites offrent une grande diversité d'applications grâce à leurs propriétés remarquables, telles qu'une résistance mécanique élevée, une légèreté importante et une faible sensibilité à la fatigue. Ces caractéristiques en font des matériaux de choix dans de nombreux domaines, notamment les structures civiles, les systèmes mécaniques, l'aéronautique et l'aérospatiale.

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs composants distincts – généralement une matrice et des renforts – dont la synergie confère au matériau final des performances supérieures à celles des constituants pris individuellement. À titre d'exemple, les matériaux polymères renforcés de fibres (PRF) sont largement utilisés dans l'aéronautique, l'automobile et les infrastructures, en raison de leur légèreté et de leur grande résistance [1].

Cependant, malgré leurs nombreux avantages, les matériaux composites présentent aussi certaines limitations et défis techniques qu'il convient de maîtriser, notamment en ce qui concerne leur comportement à la fissuration. En effet, en raison de leur structure hétérogène et anisotrope, les composites sont sujets à des phénomènes de fissuration complexes, dont les fissures avec coudage, aussi appelées fissures en coin ou en forme de L.

Les fissures avec coudage apparaissent lorsque la trajectoire de propagation d'une fissure change brutalement de direction, formant ainsi un angle ou un coude. Ce changement peut résulter de variations locales des contraintes, de changements de propriétés mécaniques du matériau, ou encore d'imperfections dans la structure. Ces fissures peuvent compromettre l'intégrité structurelle des matériaux composites en concentrant les efforts dans certaines zones critiques.

Le phénomène de coudage désigne ici une modification de la direction de propagation d'une fissure, influencée par la géométrie, les interfaces matériau/matrice, ou les conditions de chargement. Ce phénomène modifie les champs de contraintes autour de la fissure, créant potentiellement des zones de concentration de contraintes, qui peuvent accélérer ou freiner la propagation selon les directions considérées.

Les fissures peuvent être induites par des chargements mécaniques (traction, compression, flexion), mais aussi par des conditions environnementales telles que les variations de température, l'humidité, ou les cycles de chargement/déchargement. L'anisotropie inhérente aux matériaux composites joue également un rôle crucial dans le comportement de propagation des fissures, les interactions entre la matrice et les fibres influençant fortement leur direction et leur vitesse de développement.

La propagation d'une fissure peut se faire selon différents modes de rupture :

- Mode I : ouverture normale (traction perpendiculaire).
- Mode II : glissement en plan (cisaillement pur).
- Mode III : décollement hors-plan (cisaillement anti-plan) [2].

Les conditions de chargement et les propriétés du matériau composite influencent directement l'angle du coude formé par la fissure et sa direction de propagation.

La propagation dynamique des fissures avec coudage constitue un domaine d'étude particulièrement complexe. Contrairement à la propagation statique (chargements constants), la propagation dynamique fait intervenir des chargements variables dans le temps, tels que les impacts, les vibrations ou les fluctuations climatiques saisonnières [3].

Dans ce contexte, la vitesse de propagation et la direction de la fissure peuvent évoluer de manière rapide et imprévisible. En effet, des ondes de contraintes se propagent le long de la fissure et dans le matériau environnant, induisant des variations localisées qui modifient les trajectoires de propagation [4].

Ce type de comportement est courant dans les matériaux composites soumis à des conditions de service dynamiques, où les changements de direction de la fissure (coudage) sont souvent liés à des variations d'interface, de géométrie, ou à des discontinuités mécaniques internes.

Pour analyser ce phénomène, les chercheurs ont recours à deux grandes approches :

- Les expérimentations en laboratoire, telles que les essais de fatigue, essais d'impact, ou tests de propagation de fissures, permettent d'observer le comportement réel des matériaux sous charges dynamiques.
- Les simulations numériques, notamment par la méthode des éléments finis, sont largement utilisées pour représenter la complexité des géométries, des matériaux et des conditions de chargement.

Dans cette étude, l'approche retenue est celle de la méthode des éléments finis, appliquée au cas des fissures avec coudage en régime dynamique. Plus précisément, le travail s'appuie sur un élément fini mixte [5].

Cet élément est appelé l'élément quadrilatère mixte, nommé RMQ-7 (Reissner Modified Quadrilateral), comportant 7 nœuds et 14 degrés de liberté, destiné à représenter aussi bien les interfaces cohérentes que les interfaces fissurées [5].

Cet élément se distingue par :

- Trois côtés compatibles avec des éléments classiques linéaires
- Un quatrième côté enrichi par cinq nœuds (dont deux nœuds cinématiques aux extrémités, un nœud médian, et deux nœuds intermédiaires) permettant d'introduire les composantes du vecteur contrainte le long de l'interface.

Cette configuration permet de modéliser de manière précise les discontinuités de déplacement et de contraintes sur l'interface étudiée. L'approche a été couplée avec la méthode d'extension virtuelle de fissure, utilisée pour évaluer le taux de restitution d'énergie, ce qui est essentiel pour l'étude de la propagation des fissures. Les résultats obtenus pour des matériaux isotropes homogènes ou des bi-matériaux ont montré une excellente concordance avec les solutions analytiques de référence [5].

Chapitre 1

Matériaux composites

1.1 Introduction

Les besoins des utilisateurs (constructeurs) influencent le développement de nouveaux matériaux. Certains souhaitent toujours des matériaux plus efficaces, plus économiques et qui ont une durée de vie plus longue. Il arrive fréquemment que les chercheurs doivent améliorer les solutions déjà employées, mais dans certains cas, ils doivent revoir complètement le problème et envisager de nouveaux matériaux. Effectivement, il n'y a plus de nouvelles découvertes de matériaux, mais des associations de matériaux nouvelles. Un des effets de cette collaboration est la création d'un matériau composite, qui est l'objet de notre module. Les matériaux composites sont des matériaux fabriqués en combinant deux ou plusieurs substances distinctes pour obtenir des propriétés améliorées par rapport à celles des matériaux individuels. Cette combinaison permet de tirer parti des avantages de chaque composant tout en minimisant leurs inconvénients. Un matériau composite est formé en combinant deux ou plusieurs matériaux de différentes natures. Ils se complètent mutuellement et donnent naissance à un matériau dont les performances souhaitées seront supérieures à celles des composants pris individuellement. Dans la plupart des cas, un matériau composite est composé d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue.

1.2 Définition d'un matériau composite

Un composite est un matériau structurel qui se compose de deux ou plusieurs combinés Les composants qui sont combinés à un niveau macroscopique et ne sont pas solubles dans un constituant est appelé la phase de renforcement et celui dans lequel il est incorporé est appelé la matrice. Le matériau de phase de renforcement peut être sous forme de fibres, de particules ou de flocons. Les matériaux de phase de matrice sont. Les exemples de systèmes composites comprennent le béton renforcé avec de l'acier et l'époxy renforcé avec des fibres de graphite, etc. En général, la phase discontinue, connue sous le nom de renfort ou de matériau renforçant, présente une dureté accrue et des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue, connue sous le nom de matrice.

La matrice

Les renforts sont l'un des deux principaux composants des matériaux composites, avec la matrice. Il s'agit du nom de la résine polymérisée qui a pour fonction de maintenir les renforts en place et de garantir leur cohésion et leur protection. De plus, elle facilite le passage des efforts mécaniques aux renforts. En général, la matrice est homogène et isotrope ; on peut distinguer : les matrices céramiques, les matrices métalliques, les matrices minérales et les matrices organiques.

Le renfort

Le renfort se compose habituellement d'un matériau plus rigide que la résine, et son rôle principal est de garantir une grande résistance, en particulier à la traction, et se présente généralement sous forme de fibres :

- Fibres longues à un seul sens.
- Fibres de longueur renforcée.
- Les fibres courtes sont dispersées de manière aléatoire, sans orientations privilégiées.

Selon la forme des renforts, il existe deux catégories de composites :

- Les composites à fibres : composés de fibres qui peuvent être continues ou discontinues (fibres coupées ou courtes). Grâce à leur position, ils peuvent influencer les caractéristiques mécaniques du matériau et produire des matériaux isotropes ou anisotropes.
- Les matériaux composites à particules sont souvent employés afin d'améliorer certaines caractéristiques des matériaux, comme la dureté, la conductivité électrique, etc.

1.3 Caractéristiques des matériaux composites

Les caractéristiques des matériaux composites sont influencées par de nombreux facteurs et varient en fonction des différents types de matériaux composites. Ces caractéristiques découlent :

- Des caractéristiques, de la nature et de la quantité des composants.
- Les composants, la structure et la répartition du renfort.
- Sur leurs échanges, sur la nature de l'interface matrice-renfort, etc.

Les caractéristiques principales des pièces en matériaux composites sont les suivantes :

- La perte de poids (légèreté).
- Forte capacité à résister à la fatigue.
- Liberté d'expression.
- Faible phénomène de vieillissement causé par l'humidité, la chaleur et la corrosion.
- Indifférent aux substances chimiques, à l'exception des décapants de peinture qui affectent les résines.
- Une isolation électrique efficace.
- Résistance aux chocs et aux impacts très faible.
- Une grande anisotropie.

1.4 Les constituants des matériaux composites

a) Les Matrices

La structure des pièces composites est influencée par les matrices, qui assurent la dispersion géométrique des fibres.

- Les caractéristiques chimiques et thermiques du composite sont apportées par elles.
- Elles transmettent les demandes mécaniques.

Différentes catégories de matrices peuvent être classées dans les catégories ci-dessous : Les matrices qui se dégradent naturellement.

- Les matrices métalliques.
- Les matrices thermoplastiques.
- Les matrices qui sont thermodurcissables.

b) Les composants et les additifs

Les charges et les additifs sont des composés minéraux, végétaux, synthétiques ou organiques qui se manifestent sous forme de liquide ou de fibres, qui sont chimiquement pures et inertes par rapport aux résines. Lorsqu'elles sont combinées avec une résine, elles ajoutent de nouvelles caractéristiques et altèrent les propriétés du produit final. Exemple :

- Le carbonate de calcium a pour effet d'augmenter la viscosité et de réduire le coût.
- L'hydratation d'alumine : renforce la résistance au feu.
- Oxyde de titane : teinte extrêmement claire.
- Poudre de Quartz : Améliore la résistance à l'abrasion, accroît la résistance à la rayure, offre des propriétés diélectriques.

c) Les gelcotas

Un gelcoat est une couche de surface fabriquée à partir de résine spécialement conçue pour répondre à différentes fonctions, comme :

- Vue d'ensemble.
- Brillance.
- La couleur.
- Résistance.
- Diminution de la corrosion.
- Résistance aux impacts.
- Longévité du feu.
- Résistant aux rayures.

Les gelcoats sont un liquide homogène qui est constitué de :

- Une résine de base.
- De différentes charges.
- Des pigments.
- Divers additifs disponibles.

En général, les gelcoats sont utilisés en fond de moule, que ce soit à la brosse ou en pulvérisation, avec des épaisseurs variant de 0,4 à 0,6 mm. Les gelcoats sont principalement employés dans le domaine de l'automobile pour la production de carrosseries de véhicules industriels ou de chantier.

d) Les renforts

Les éléments supplémentaires garantissent les caractéristiques mécaniques du matériau composite. On trouve une multitude de fibres sur le marché en fonction des caractéristiques et des coûts de revient recherchés pour la structure à réaliser. La nature des fibres qui les constituent et leur apparence commerciale les distinguent.

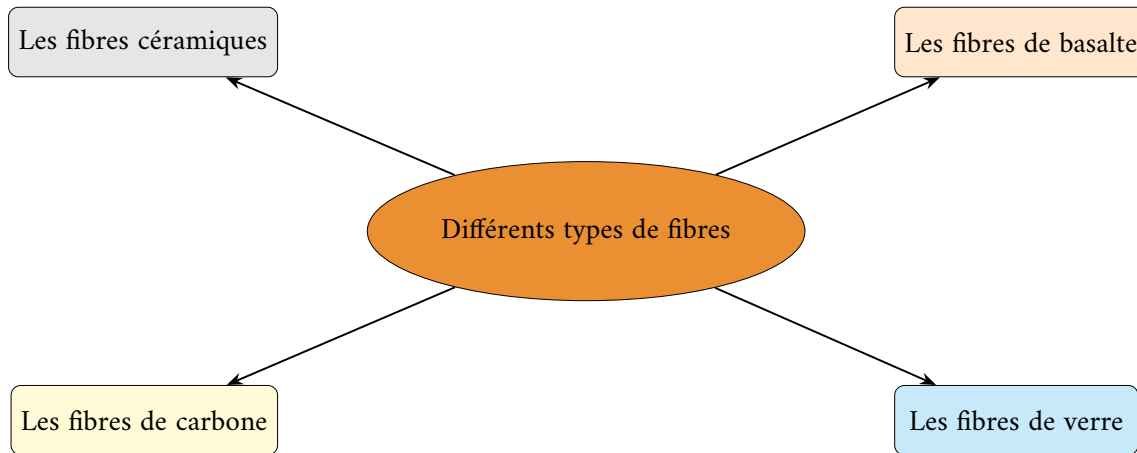


Fig. 1.1 : Différentes familles de renfort

Les matériaux composites sont le résultat de la fusion de divers autres matériaux, qui, combinés entre eux, présentent des caractéristiques particulières avantageuses pour diverses applications dans divers domaines tels que l'industrie, le transport, la défense, le nautique, le médical, l'espace... Les matériaux composites connaissent une croissance constante sur le marché. Pourquoi est-ce que? Étant donné la structure particulière de ce matériau, il répond efficacement aux exigences fonctionnelles et économiques des utilisateurs. Et pour illustrer cela : un vaste liste d'avantages établie par Ouest Composites Industries, votre partenaire privilégié, spécialiste des matériaux composites.

1.5 Les avantages des matériaux composites

a) Les avantages structurels des matériaux composites

- Légèreté et flexibilité :

Les matériaux composites ont une masse volumique extrêmement faible. Ils ont une légèreté de 50 % par rapport à l'acier et de 30 % par rapport à l'aluminium. L'utilisation d'une pièce en matériaux composites pour remplacer un élément métallique permet d'alléger l'ensemble de la structure. La légèreté assure une souplesse qui facilite les manipulations : transport, organisation. La flexibilité est également présente dans la conception en utilisant le modelage. Les composites peuvent adopter les formes les plus variées et les plus variées.

- Résistance et durabilité :

Résistance à la chimie : Les milieux agressifs tels que l'eau, l'oxygène, les agents chimiques

ou l'environnement leur permettent de résister aux attaques chimiques. Les matériaux composites conviennent donc parfaitement aux zones humides, côtières et aux projets architecturaux en plein air. Résistance à l'impact : Les composites à fibres longues peuvent avoir une résistance allant jusqu'à 1000 Mpa. Les matériaux composites se révèlent parfaits pour renforcer la résistance et la sécurité dans divers domaines, tels que les véhicules de loisirs, les véhicules militaires, les gilets pare-balles, les sous-marins... Résistance aux pressions hydrostatiques Résistance aux processus de cavitation Résistance aux incendies.

- Radio densité :

L'opacité aux ondes radio et aux rayons X est connue sous le nom de radio densité. Les rayonnements électromagnétiques ne traversent pas les composites, ce qui en fait des matériaux parfaits pour concevoir des avions ou des navires "furtifs" qui ne peuvent pas être détectés par des radars.

- Isolation :

Les matériaux composites ne possèdent aucune capacité de conduite électrique, ce qui est extrêmement bénéfique, en particulier dans la production d'outils électriques. De plus, ils présentent une conductivité acoustique et thermique faible.

b) Les avantages fonctionnels

- Écologique :

Les matériaux composites jouent un rôle positif dans la préservation de l'environnement. Effectivement, ils ne nécessitent pas de maintenance et sont, pour certains, réutilisables. Une fois broyés, ils ont une capacité de stockage restreinte.

La légèreté des bâtiments en matériaux composites entraîne également une diminution des dépenses énergétiques et donc des émissions de CO₂. Cela s'applique à la fois au transport des pièces et à leur utilisation, par exemple en utilisant des fondations réduites, ce qui permet de préserver les sols et de limiter le nombre d'engins.

1.6 Les inconvénients des matériaux composites

Les matériaux composites offrent de nombreux bénéfices, tels qu'une grande résistance et une légèreté, mais ils présentent également certains désavantages. Voici quelques-uns des principaux :

- Coût élevé : La production de matériaux composites peut être onéreuse, en particulier pour les matériaux haut de gamme tels que les fibres de carbone. Les dépenses liées à la production et aux matériaux eux-mêmes peuvent être supérieures à celles des matériaux classiques.
- Problèmes de compatibilité : Les composites peuvent rencontrer des difficultés de compatibilité lorsqu'ils sont utilisés en collaboration avec d'autres matériaux, en particulier en ce qui concerne leurs propriétés thermiques et mécaniques.
- Compétence et expertise requises : Il est nécessaire d'avoir des compétences et une expertise spécifiques pour concevoir et fabriquer des composites. Il est essentiel de bien former les ingénieurs et les techniciens afin de pouvoir faire face à ces matériaux.
- Difficulté de recyclage : Les composites présentent souvent des difficultés de recyclage en raison de leur structure complexe. Cela peut engendrer des dangers pour l'environnement à la fin de la durée de vie du produit.

- Sensibilité aux dommages :

Les composites peuvent être vulnérables aux impacts, et il arrive parfois que les dommages ne soient pas immédiatement perceptibles. La détection précoce des dommages peut conduire à des problèmes de défaillance structurelle.

1.7 Fissuration dans les Matériaux Composites

La fissuration des matériaux composites représente un défi majeur qui peut avoir un impact sur leur efficacité et leur longévité. Voici une étude approfondie des différentes formes de fissures, des origines et des répercussions des fissures dans les matériaux composites :

- Fissuration de la Matrice :
Les fibres de renfort sont entourées d'une matrice (résine) qui se fissure. Elles peuvent se manifester à travers des fissures superficielles ou des fissures internes.
- Délamination :
Répartition des couches ou des plis de composite. C'est le cas aux interfaces entre diverses couches de matériaux composites.
- Fissuration Interlaminaire :
Des fissures qui se répandent le long des connexions entre les couches ou les plis de fibres.
- Fissuration de la Fibre :
Le composite présente une rupture ou une fissuration des fibres individuelles.
- Fissuration par Impact :
Des dégâts provoqués par des chocs ou des charges concentrées.

1.8 Prévention et Gestion des Fissures :

Effectuer l'utilisation de modèles et d'analyses avancées afin de créer des structures composites qui peuvent supporter les charges prévues.

Conclusion

Les matériaux composites proposent des résultats remarquables dans de multiples domaines, cependant leur utilisation nécessite une attention particulière aux aspects financiers, de conception, de production et de maintenance. Dans le domaine des composites, la recherche continue a pour objectif de surmonter ces désavantages, ce qui rend ces matériaux encore plus intéressants pour différentes industries.

Chapitre 2

Mécanique de la rupture

2.1 Introduction

Dans le domaine des matériaux et des structures, on parle de fissuration lorsque des fissures se forment à l'intérieur d'un matériau. Ces fissures peuvent résulter de différents éléments, tels que des contraintes mécaniques, des fluctuations de température, des milieux corrosifs, ou même des imperfections matérielles. La présence de fissures peut représenter une préoccupation majeure dans de nombreux secteurs de l'ingénierie, car elle peut mettre en péril l'intégrité structurelle et la longévité des éléments.

En conception, les structures composites sont couramment utilisées dans de multiples secteurs tels que les industries automobiles, aérospatiale et maritime, les sports et les transports. Afin de respecter des normes de sécurité, il est nécessaire de mesurer la taille de ces structures, il est essentiel de prendre en considération les phénomènes d'endommagement qui peuvent survenir lors de certaines sollicitations statiques et dynamiques lors du dimensionnement de ces structures. De cette manière, les matériaux composites qui sont soumis à des impacts peuvent présenter une résistance à la fissuration, ce qui peut nuire à l'intégrité mécanique de la structure.

2.2 Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture vise principalement à étudier les fissures macroscopiques : elle s'applique lorsque des discontinuités sont présentes dans le matériau, ce qui entraîne des modifications dans l'état de contrainte, de déformation et déplacement.

Les principales dates qui marquent l'évolution de la mécanique de la rupture sont 1920, lorsque Griffith démontre que la rupture d'un milieu élastique-fragile peut être caractérisée par une variable globale, également connue sous le nom de taux de restitution d'énergie, et 1956, lorsque Irwin introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes à partir de l'étude des singularités du champ de contrainte.

2.2.1 Approche énergétique de Griffith

Dans les années 1920, le physicien britannique Alan Griffith a élaboré une théorie appelée l'approche énergétique de Griffith afin d'expliquer la propagation des fissures dans des matériaux fragiles tels que les céramiques et les métaux fragiles. Cette méthode repose sur l'idée que la rupture d'un matériau se produit lorsque l'énergie libérée par la propagation d'une fissure dépasse l'énergie requise pour générer de nouvelles surfaces de fracture.

Selon Griffith, il est possible d'analyser la rupture des matériaux en utilisant l'énergie élastique et l'énergie de surface. La déformation du matériau accumule de l'énergie élastique, tandis que l'énergie de surface est liée à la formation de nouvelles surfaces de fracture lorsque la fissure se répand.

La taille critique des fissures est liée à la contrainte appliquée et aux caractéristiques du matériau, selon la théorie de Griffith. Elle a donné une compréhension de la raison pour laquelle certains matériaux ont une plus grande probabilité de se fracturer que d'autres et a joué un rôle essentiel dans l'élaboration de techniques visant à améliorer la résistance des matériaux, en particulier dans le domaine de la science des matériaux et de l'ingénierie des matériaux.

Selon Griffith, la théorie de la propagation des fissures dans un matériau est basée sur une analyse énergétique, la fissure se propage et absorbe de l'énergie. On nomme cette énergie, énergie de surface. Supposons qu'un matériau présente une fissure de longueur (a), la conservation de l'énergie totale (W_{tot}) est peu importante pour une extension (∂a) de la fissure, les principales équations de la théorie de Griffith sont [1] :

$$\partial W_{tot} = 0 = \partial W_{els} + \partial W_{ext} + \partial W_{cin} + \partial W_{surf} \quad (2.1)$$

∂W_{els} : Variation de l'énergie de déformation élastique.

∂W_{ext} : Variation du travail des forces extérieures.

∂W_{cin} : Variation de l'énergie cinétique.

∂W_{surf} : Energie dissipée lors de la propagation sur surface de la fissure.

L'énergie de surface associée à la création de nouvelles surfaces de fracture est donnée :

$$\partial W_{surf} = \gamma_s A \quad (2.2)$$

γ_s : l'énergie spécifique de création de surface (énergie par unité de surface).

A : la surface de la fissure.

$$\partial W_{surf} = -(\partial W_{els} + \partial W_{ext} + \partial W_{cin}) \quad (2.3)$$

Au début de la théorie de Griffith, qui concerne une rupture fragile, l'énergie correspond à l'énergie nécessaire pour générer de nouvelles surfaces dans le matériau. L'énergie de Griffith est appliquée à l'unité de surface; elle est calculée à partir δU par :

$$G = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left(-\frac{\delta U}{\delta A} \right) = -\frac{\partial U}{\partial A} = -\frac{\partial U}{B \partial a} \quad (2.4)$$

$$\delta A = B \cdot \delta a \quad (2.5)$$

δA : La surface fissurée est obtenue lorsque la fissure se propage sur la longueur δ dans une éprouvette largeur (B) , En général, une largeur unité ($B = 1$) , G est prise en compte et rapportée à l'unité largeur est donnée par :

$$G = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \left(-\frac{\delta U}{\delta a} \right) = -\frac{\partial U}{\partial a} \quad (2.6)$$

$$G = -\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial a} \quad (2.7)$$

On désigne cette quantité d'énergie G sous le nom de taux de restitution d'énergie.

$$G_c = 2\gamma_s A \quad (2.8)$$

Lorsque le seuil critique de G est dépassé, la fissure se propage. Il s'agit du critère de Griffith.

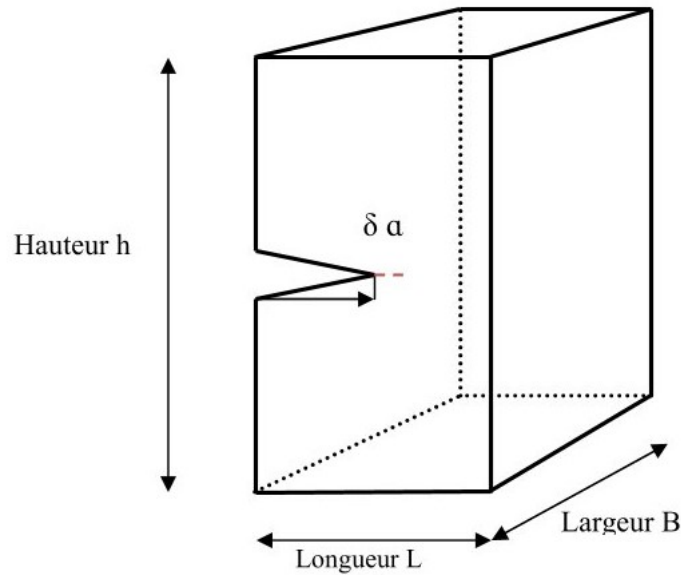


Fig. 2.1 : Propagation d'une fissure δa .

Critère de Griffith

Le critère de rupture, dans le cadre de la théorie de Griffith, définit les conditions permettant à une fissure de se propager dans un matériau. Cette évaluation repose sur l'équilibre entre les énergies élastiques et de surface. Lorsque l'énergie libérée par la propagation de la fissure est égale à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces de fracture, la rupture se produit dans la théorie de Griffith. Le critère de rupture peut être calculé de la manière suivante [2] :

$$G < G_c \quad \text{pas de propagation} \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) exprime l'absence de propagation de fissure.

$$G = G_c \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial a} < \frac{\partial G_c}{\partial a} \quad \text{propagation stable} \quad (2.10)$$

Dans le cas de l'équation (2.10), il y a propagation de fissure, mais de manière stable.

$$G = G_c \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial a} \geq \frac{\partial G_c}{\partial a} \quad \text{propagation instable} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) la fissure poursuit sa progression, cette instabilité conduit alors à la ruine de la structure.

2.2.2 Approche cinématique d'Irwin

Dans les années 1950, George R. Irwin a élaboré ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de la contrainte d'ouverture de fissure ou approche cinétique. Cette théorie repose sur des éléments énergétiques similaires à ceux de la théorie de Griffith, mais met l'accent sur les contraintes à la pointe de la fissure.

La propagation de la fissure débute selon la théorie d'Irwin lorsque la contrainte tangentielle atteint une valeur critique à l'extrémité de la fissure. Une formule mathématique a été suggérée pour représenter la contrainte d'ouverture de fissure (σ_f), qui correspond à la contrainte tangentielle critique requise pour entraîner la propagation de la fissure. L'énergie de déformation élastique près de l'extrémité de la

fissure est utilisée pour définir cette contrainte d'ouverture de fissure.

La théorie d'Irwin représente une avancée significative dans la compréhension de la propagation des fissures, car elle permet de prédire la propagation des fissures en fonction des contraintes appliquées. De plus, elle a donné naissance à des techniques permettant de mesurer expérimentalement les contraintes critiques à l'extrémité des fissures, ce qui est crucial pour évaluer la résistance des matériaux à la rupture.

La contrainte d'ouverture de fissure (σ_f), qui correspond à la contrainte tangentielle critique requise pour entraîner la propagation d'une fissure dans un matériau, est exprimée par l'équation d'Irwin. La formule d'Irwin est fournie par [3] :

$$\sigma_f = K\sqrt{\pi a} \quad (2.12)$$

Où :

σ_f : Est la contrainte d'ouverture de fissure,

K : Facteur d'intensité de contrainte,

a : La longueur de la fissure.

La relation entre la contrainte d'ouverture de fissure (σ_f), la longueur de la fissure et l'intensité de contrainte est établie par cette équation. Selon elle, la contrainte critique à l'extrémité de la fissure est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de celle-ci.

L'équation d'Irwin (2.12) joue un rôle essentiel dans le domaine de la mécanique de la rupture et est couramment employée pour anticiper la propagation des fissures dans les matériaux et pour élaborer des structures qui résistent à la rupture. Il s'agit d'une avancée significative dans le domaine de l'ingénierie des matériaux, car elle a donné naissance à des techniques permettant d'évaluer la résistance des matériaux à la rupture en fonction des contraintes appliquées.

2.2.3 Le facteur d'intensité de contrainte (K)

Le facteur d'intensité de contrainte (K) est un paramètre essentiel dans le domaine de la mécanique de la rupture, qui permet de définir la répartition des contraintes autour des points de fissure ou d'autres ruptures dans un matériau. On l'emploie dans les études de la propagation des fissures et dans la prévision de la rupture des matériaux.

Le facteur d'intensité de contrainte (K) est calculé en fonction de l'intensité de la contrainte locale à l'extrémité de la fissure. Cela illustre l'effet de la concentration de contrainte près de la pointe de la fissure et permet de mesurer la propension d'une fissure à se propager sous une contrainte spécifique [4].

$$K = \frac{\sigma_f}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+e}{a-e}} \quad (2.13)$$

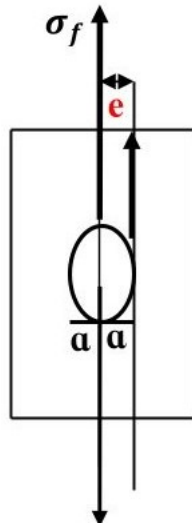


Fig. 2.2 : Cas de chargement en bord de fissure.

On mesure généralement le facteur d'intensité de contrainte de manière expérimentale ou en utilisant des méthodes analytiques ou numériques. Il est employé dans des modèles de rupture comme l'équation d'Irwin, ainsi que dans des normes et des codes de conception afin d'évaluer la capacité des matériaux et des structures à résister à la rupture [5].

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_M \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f g_{ij}^M \\ \varepsilon_{ij} = K_M \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^M \end{cases} \quad (2.14)$$

Où :

$M = 1, 2, 3$ représente le nombre des modes de rupture.

Les fonctions f et g donnent la répartition angulaire

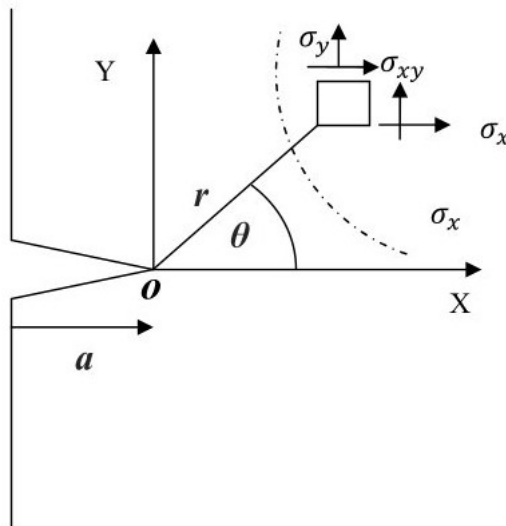


Fig. 2.3 : Champ des contraintes au voisinage de la fissure.

En résumé, le facteur d'intensité de contrainte est corrélé à la charge exercée et à la longueur de la fissure, à la géométrie. $K = (\text{charge, longueur de fissure, géométrie})$.

2.2.4 Ténacité (K_c)

La résistance d'un matériau à la propagation de fissures ou de défauts sous contrainte est une caractéristique essentielle. Elle joue un rôle crucial dans l'évaluation de la capacité d'un matériau à résister à la rupture et dans la conception de structures et de composants qui peuvent fonctionner de manière fiable dans des environnements où les charges sont variables.

On définit la ténacité comme l'énergie totale absorbée par unité de volume d'un matériau avant qu'il ne se dilate. La capacité du matériau à absorber l'énergie de déformation plastique et à retarder ou à empêcher la propagation des fissures ou des défauts critique est représentée par cela, La résistance d'un matériau est un élément clé qui définit sa capacité à s'écrouler et à se propager des fissures.

De nombreux plusieurs facteurs influencent la ténacité d'un matériau :

- La résistance à la rupture et la propagation des fissures peuvent être influencées par la vitesse de chargement, la température et l'environnement chimique ou physique.
- La résistance et la durabilité d'un matériau sont influencées par la composition chimique, la microstructure et les traitements thermiques.

$$K_c = Y \sigma_c \sqrt{\pi a} \quad (2.15)$$

Le facteur géométrique Y vaut 1 dans le cas d'une fissure elliptique située au centre d'une plaque de dimensions infinies. K_c est relié à G_c , le taux d'énergie disponible ou énergie libérée par unité de surface lors de la propagation de fissure, aussi appelée force d'extension de la fissure (Irwin a montré que cette formule est valable pour toutes les configurations de fissures).

$$K_c = \sqrt{2E'} G_c \quad (2.16)$$

Avec $E' = E$ module d'Young en contraintes planes, et $E' = E/(1 - \nu^2)$ en déformations planes. G_c , est égal à 2 fois l'énergie de surface, $G_c = 2\gamma_s$ pour une rupture fragile, et $2\gamma_s + \gamma_p$ pour une rupture ductile. Dans ce dernier cas, l'énergie de déformation plastique, γ_p , est nettement supérieur à l'énergie de surface qui peut souvent être négligée[6].

2.2.5 Modes de rupture

Selon d'Irwin, les fissures sont perçues comme des zones de discontinuité des déplacements. Étant donné qu'il est possible d'affecter chacune des trois composantes du vecteur de déplacement, il a observé et défini trois modes indépendants pour les mouvements respectifs des deux surfaces d'une fissure. Le groupe de travail dirigé par Irwin a également obtenu une méthode de calcul de la quantité d'énergie disponible pour une fracture en fonction de la contrainte asymptotique et des champs de déplacement autour d'un front de fissure dans un solide élastique idéalement. Il s'agit du facteur d'intensité de la contrainte K .

Le processus de fissuration se traduit par la division irréversible d'un milieu continu en deux parties, les lèvres de la fissure, ce qui crée une discontinuité dans le sens des mouvements. Les mouvements des lèvres de chaque fissure peuvent être regroupés en trois modes distincts :

Mode I :

Le mode I de chargement est un mode de chargement où la fissure dans le matériau est soumise à un chargement qui tend à ouvrir les faces de la fissure face à son plan. Le chargement en mode ouvert

ou chargement en traction est souvent désigné comme ce mode de chargement.

Dans l'étude de la fissuration des matériaux, le (KI) joue un rôle essentiel en permettant de prédire la propagation des fissures sous des charges de traction. Dans la réalité, il est employé afin d'évaluer la durée de vie en fatigue des matériaux et de mesurer la résistance à la rupture des structures. Des tests expérimentaux ou des simulations numériques sont fréquemment employés par les ingénieurs et les chercheurs afin de déterminer les valeurs exactes de (KI) dans différentes conditions de chargement et de géométrie de fissure [7]

$$K_I = Y_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.17)$$

Où :

σ : Est la contrainte appliquée à la pointe de la fissure.

Y_I : Facteur de géométrie spécifique au mode I, dépendant de la forme de la fissure et des conditions de chargement.

La mécanique de la rupture utilise le facteur de géométrie spécifique pour évaluer la géométrie de la fissure et les conditions de chargement dans le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Ce paramètre est influencé par la forme de la fissure et la configuration de la contrainte appliquée, et il diffère en fonction du mode de fissuration utilisé.

Dans le mode I les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, c'est le mode par ouverture [8]

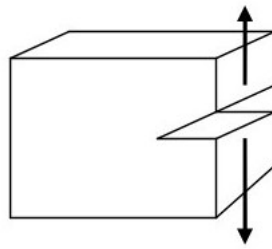


Fig. 2.4 : Mode de fissure – ouverture -.

Mode II :

Le mode II de chargement est un chargement qui entraîne un déplacement latéral des deux parties de la fissure, avec une contrainte de cisaillement parallèle à la surface de la fissure.

Dans ce mode de chargement, on utilise le facteur d'intensité de contrainte pour mesurer l'intensité de la contrainte à la pointe de la fissure

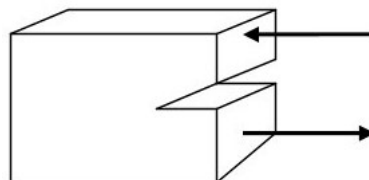


Fig. 2.5 : Mode de fissure – cisaillement plan -.

Mode III :

Une force de cisaillement appliquée tangentiellement à la surface de la fissure provoque la propagation de la fissure, faisant tourner les faces de la fissure autour d'un axe perpendiculaire à la direction de la force. Dans le mode III, une force exercée sur la fissure provoque un mouvement de cisaillement parallèle à la surface de la fissure. Il est donc crucial en ingénierie d'utiliser le Mode III afin d'évaluer la capacité des matériaux à résister à la fissuration dans des conditions de chargement particulières, ce qui permet d'améliorer la sécurité et la durabilité des structures et des composants utilisés dans différentes applications industrielles.

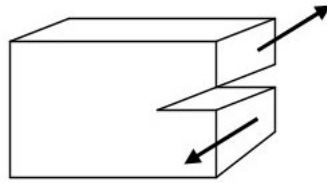


Fig. 2.6 : Mode de fissure – cisaillement anti -plan.

2.2.6 Le facteur de concentration de contrainte (K_t)

Le phénomène de concentration de contrainte se produit lorsqu'une zone donnée d'un matériau est exposée à des contraintes locales supérieures à celles de la zone environnante, souvent en raison d'une variation géométrique ou de conditions de chargement inégales. La concentration peut avoir des conséquences importantes sur la longévité et la résistance des matériaux, notamment en ce qui concerne les défauts tels que les fissures, les trous, les entailles ou les modifications soudaines de la section.

Le facteur de concentration de contrainte (ou coefficient de concentration de contrainte) est un indicateur qui permet de mesurer l'impact de la concentration de contrainte à un point spécifique dans une structure, généralement autour d'une discontinuité géométrique telle qu'un trou, une encoche ou une rainure. C'est un élément essentiel pour évaluer les contraintes locales qui peuvent être considérablement supérieures aux contraintes nominales dans la région environnante.

Définition : On peut définir le facteur de concentration de contrainte comme le rapport entre la contrainte maximale réelle observée à l'emplacement de la discontinuité et la contrainte nominale.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (2.18)$$

σ_{max} : Est la contrainte maximale à l'endroit de la discontinuité.

σ_{nom} : Est la contrainte nominale appliquée uniformément à la structure.

La sévérité de la concentration de contraintes dépend de la géométrie et de la configuration de l'entaille. Lorsqu'on conçoit une structure, on cherche à réduire autant que possible les concentrations de contraintes pour éviter notamment les problèmes de rupture par fatigue [9]. La contrainte locale à l'extrémité A' d'un défaut de forme elliptique de longueur $2a$ et de rayon à fond d'entaille est représentée par [1] :

$$\sigma_L(A') = \sigma_a \left(1 + \frac{2a}{b} \right) = \sigma_a \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.19)$$

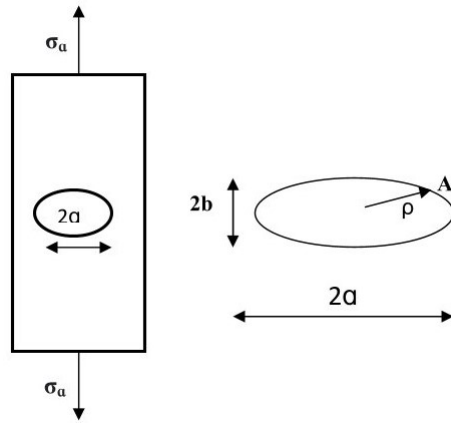


Fig. 2.7 : Défaut elliptique dans une plaque infinie.

Où :

A' : l'aire de l'élément.

ρ : Rayon à fond d'entaille

σ_L : la contrainte locale à l'extrémité A' .

Dans le cas d'une entaille très aigüe, $\rho \ll a$ et on a alors : [10]

$$\sigma_L(A') = 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.20)$$

Le facteur amplifiant la contrainte est le rapport $K_t = 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ appelé facteur de concentration de contrainte.

Le facteur de concentration de contrainte K_t peut devenir très grand pour des entailles aigües telles que des fissures.

2.2.7 Relation entre le facteur d'intensité de la contrainte (K) et le taux de restitution d'énergie (G)

Le taux de restitution d'énergie G reflète le bilan des énergies qui se produisent lors de l'augmentation des fissures (énergie élastique restituée lors de l'avancement des fissures et énergie dissipée lors de la formation de nouvelles surfaces). Il s'agit d'une différence entre l'énergie potentielle stockée dans la structure et une augmentation de la fissure [11].

$$G = \frac{\partial W_{pot}}{\partial A} = \frac{\partial W_{pot}}{B \partial a} = \frac{1}{B} \frac{\partial W_{pot}}{\partial a} \quad (2.21)$$

Lorsqu'une fissure se développe dans un matériau soumis à des contraintes, l'énergie est dissipée à la pointe de la fissure. Le taux de restitution d'énergie G quantifie la quantité d'énergie par unité de surface libérée à mesure que la fissure progresse. Physiquement G représente le travail effectué par unité d'augmentation de la surface fissurée. Il est lié au taux de libération d'énergie de déformation et fournit des idées sur la mécanique de propagation des fissures. Le lien entre le facteur d'intensité de la contrainte K et le taux de restitution d'énergie G peut être établi en utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire. Cette approche permet de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes suivant la formule D'Irwin [12].

$$G = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.22)$$

$E' = E$: en contraintes planes

$E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$: en déformations planes

$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$: est module de cisaillement

Où :

E est le module d'Young et ν le coefficient de poisson.

2.2.8 L'intégrale de Rice (J) :

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie [2]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale J de Rice (1968), l'intégrale duale I de Bui (1973), l'intégrale hybride s'appuyant sur le super-élément de Tong et Pian (1992) [2].

L'intégrale de Rice J , est une quantité significative dans le domaine de la mécanique de la rupture et des matériaux. Dans les années 1960, Jim Rice a introduit cette méthode pour évaluer l'intensité du champ de contrainte près de la pointe de la fissure dans un matériau.

Rice montre que l'intégrale J est égale à la variation d'énergie potentielle W_{pot} de la structure lors d'une avancée élémentaire de la fissure dans une direction : $J = -\frac{\partial W_{pot}}{\partial a}$. Cette quantité est également appelée taux de restitution de l'énergie G , on a donc $J = G$.

L'intégrale de Rice est définie mathématiquement comme suit [2] :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W_{els}(\varepsilon)n_1 + \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (2.23)$$

Où :

W_{els} : l'énergie de déformation élastique.

u_i : est le vecteur déplacement en un point M du contour.

n_i : est la composante de la normale à la surface de la fissure.

Γ : est un contour fermé quelconque entourant la pointe de fissure.

σ_{ij} : représente le champ de contraintes.

ds : Abscisse curviligne.

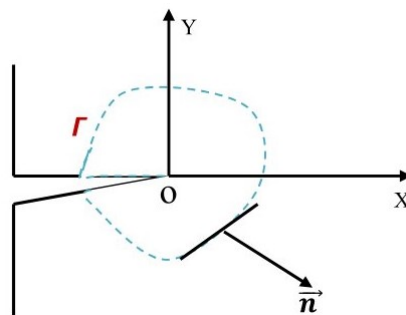


Fig. 2.8 : Contour d'intégration.

NB : L'intégrale J ne dépend pas du contour (à condition que les forces de surface ne soient pas présentes sur les lèvres de la fissure, que l'on soit en conditions isothermes et en quasi-statique).

Dans les cas où la plasticité est importante, on effectue une analogie avec un matériau élastique non linéaire. Cette hypothèse est valable à condition qu'il n'y ait pas de brusques variations dans la direction du chargement appliqué, et donc, pas de déchargement. En effet, le déchargement en élasticité non linéaire s'effectue suivant la même courbe qu'à la montée, ce qui n'est pas le cas en élastoplasticité. Dans ce cadre, l'intégrale J est étendue au cas des matériaux élastiques non linéaires, et permet ainsi d'intégrer le champ des contraintes et des déplacements à la pointe de la fissure. Ayant ainsi fait l'analogie entre l'élastoplasticité et l'élasticité non linéaire [2].

2.2.9 Le déplacement de l'ouverture de la pointe de fissure (CTOD)

On peut définir le CTOD (Crack Tip Opening Displacement) comme le mouvement relatif des faces de la fissure à la pointe de celle-ci. Il s'agit d'une évaluation directe de la déformation plastique qui survient à la pointe de la fissure en raison d'une contrainte exercée. Le CTOD revêt une importance capitale car il permet de déterminer l'énergie de déformation plastique disponible pour la mise en place de la fissure.

En élastoplasticité, la pointe de la fissure s'émousse et certains ont proposé d'utiliser l'ouverture de fissure comme paramètre de mécanique de la rupture. Le CTOD, ou écartement de fissure φ , a ainsi été défini à partir des déplacements de la pointe de fissure, mesurés à l'intersection de la frontière de la zone plastique avec les lèvres de la fissure. Il existe de nombreuses façons de calculer cet écartement φ . Par exemple, Tracey a proposé de définir cet écartement à l'intersection de deux droites passant à 45° de l'axe et des lèvres de la fissure [2].

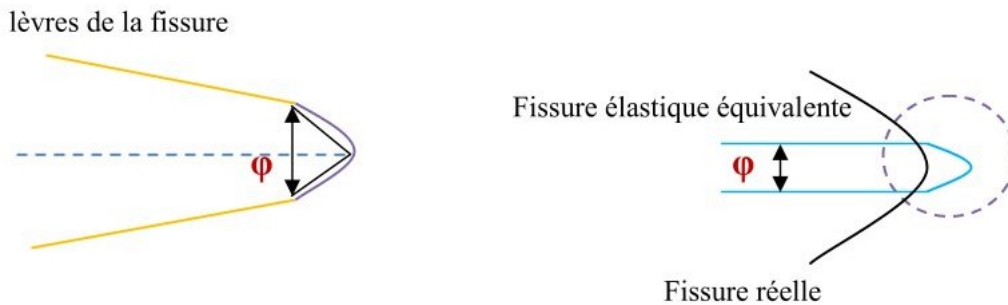


Fig. 2.9 : Distance entre lèvres de la fissure φ (CTOD).

En mécanique de la rupture, le Crack Tip Opening Displacement (CTOD) joue un rôle essentiel en étudiant la déformation plastique à la pointe de la fissure. Il est crucial de prendre cette mesure afin d'évaluer la résistance des matériaux à la rupture et de concevoir des structures qui peuvent résister efficacement à la propagation de fissures lors de charges de service.

Il est ensuite possible de relier le CTOD au taux de restitution d'énergie, ou encore à l'intégrale J en utilisant la solution asymptotique HRR [2] :

$$\varphi = d_n(\sigma_0, \eta) \frac{J}{\sigma_0} \quad (2.24)$$

où :

d_n : est un coefficient de proportionnalité sans dimension, et qui dépend fortement du coefficient d'écrouissage η , et peu de la limite d'élasticité σ_0 [2].

2.3 Phénomène de la propagation de la fissure

La fissure correspond à un défaut ou à une discontinuité soudaine qui se produit ou se produit dans un matériau en raison de contraintes internes ou externes, où la matière est séparée sur une surface spécifique. Aussi longtemps que les forces de contraintes ne sont pas libérées, elle engendre une forte concentration de contrainte à son fond. La propagation des fissures désigne le processus d'expansion et de propagation d'une fissure dans un matériau jusqu'à ce qu'elle entraîne une défaillance. Elle est influencée par des facteurs tels que la température et le nombre de cycles.

Une propagation de fissure est le processus par lequel une fissure dans un matériau ou une structure se dilate ou se développe. La vitesse et la direction de propagation des fissures sont influencées par divers facteurs tels que les propriétés du matériau, les conditions de charge et la présence de défauts ou d'autres caractéristiques microstructurales. Les fissures peuvent se propager de manière linéaire ou non linéaire et peuvent être stables ou instables. L'étude de la propagation des fissures est importante dans des domaines tels que la science des matériaux, l'ingénierie et la mécanique, car elle peut avoir des implications importantes pour la sécurité et la performance des structures et des systèmes.

La résistance statique d'un matériau avec une ou plusieurs fissures montre que lorsque la fissure se trouve à proximité, la limite d'élasticité du matériau peut être considérablement dépassée, ce qui entraîne des déformations plastiques localisées. Dans un milieu fissuré, trois zones successives peuvent être identifiées pour tous les matériaux courants.

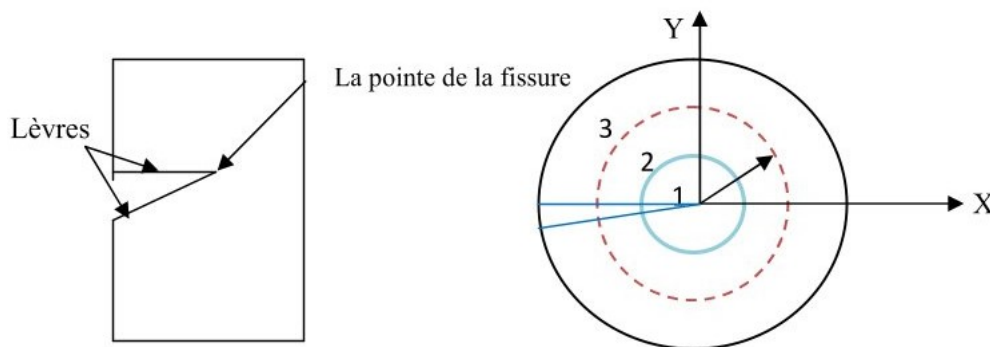


Fig. 2.10 : Zones distinguées au tour de la pointe de fissure.

Zone d'élaboration (1) :

Cette zone est située autour de la pointe de la fissure pendant la propagation. En général, cette zone a des dimensions d'environ quelques cristaux. Les processus physiques de la rupture dans cette zone sont discontinus, ce qui rend très difficile son étude, car la limite entre le microscopique et le macroscopique est mal définie. Ainsi, toute étude de la rupture par une modélisation continue dans cette zone ne peut être qu'approximative [13].

Zone singulière (2) :

La définition de cette zone est celle où les champs mécaniques sont continus et présentent une structure "autonome", caractéristique de la seule fissure. La singularité est de $\frac{1}{\sqrt{r'}}$, r' étant situé entre un rayon appelé plastique, en dessous duquel les contraintes dépasseraient σ_y (limite d'élasticité) et un rayon au-dessous duquel l'analyse mathématique serait erronée.

Les champs asymptotiques sont présents dans la zone singulière de la fissure (zone 2), qui est la zone la plus importante pour la mécanique de la rupture, en termes de contraintes et de déplacements.

Zone extérieure(3) :

Cette région dépasse les deux précédentes, où les champs mécaniques éloignés sont liés aux modifications et aux conditions aux limites. La fissure se caractérise par la division irréversible d'un milieu continu en deux parties, connues sous le nom de lèvres de fissure. Cette séparation se distingue par une rupture dans le sens des mouvements [14]

2.3.1 Mécanique linéaire, et non linéaire de la rupture

Le mécanisme de rupture consiste en un processus mécanique qui crée une discontinuité locale de matière au sein d'un matériau, connue sous le nom de fissure. On parle souvent de début de la rupture et de diffusion de la rupture. En ce qui concerne le facteur temps. Il existe deux catégories de rupture :

a- La mécanique de rupture élastique linéaire : se base sur la connaissance des caractéristiques élastiques des matériaux, l'étude des contraintes et des déformations, ainsi que l'utilisation de critères spécifiques pour anticiper le comportement de rupture des matériaux dans des conditions de chargement particulières. Cette méthode revêt une importance primordiale dans le domaine de l'ingénierie des matériaux afin de garantir la sécurité et la longévité des structures et des éléments.

Rupture fragile Une rupture fragile montre des fissures à propagation rapide avec une moindre déformation plastique. La propagation des fissures empêche toute déformation plastique autour de la surface de rupture. En règle générale, les ruptures fragiles se produisent sur les matériaux à base d'acier au cours d'un usage normal. Dans de nombreux cas, la surface de rupture se compose de plusieurs surfaces en semi-clivage, caractéristiques des aciers soumis à un traitement thermique et des aciers de construction situés dans des environnements particulièrement froids.

b -Mécanique de la Rupture Non Linéaire : Avant ou après le début de la rupture, les matériaux peuvent présenter un comportement non linéaire, ce qui implique que la relation entre la contrainte et la déformation n'est pas strictement linéaire. Les matériaux peuvent présenter un comportement non linéaire lorsqu'ils sont soumis à des charges élevées, incluant des déformations plastiques importantes, des effets de fluage et des changements dans la microstructure.

Rupture ductile

En cas de déformation plastique non négligeable (la déformation plastique macroscopique est en général importante, la rupture non linéaire par mécanique non linéaire). Dans ce cas, en fonction de l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on distingue la plasticité confinée de la plasticité étendue. [2]

2.3.2 Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques

La fissuration statique désigne la création et la diffusion de fissures dans les matériaux et les structures exposés à des charges qui fluctuent lentement ou qui sont appliquées de manière statique, c'est-à-dire des charges qui ne sont pas variables dans le temps. À la différence des charges dynamiques dont les variations sont rapides, les charges statiques peuvent englober des poids constants, des forces constantes ou des contraintes préservées pendant des périodes prolongées.

a- Fissures statiques

La fissuration statique fait référence à la création et à la diffusion de fissures dans les matériaux en

raison de charges ou de contraintes appliquées de manière continue ou à un rythme régulier et lent. Ce phénomène peut se manifester dans différents matériaux tels que les métaux, les polymères, les céramiques et les composites, et il est influencé par divers facteurs tels que la composition du matériau, sa microstructure, les conditions environnementales et la durée d'application des contraintes.

Critères d'amorçage

Le processus d'amorçage des fissures désigne la formation et la propagation des fissures à partir de défauts ou de zones de contraintes élevées dans un matériau.

Ces critères permettent de déterminer à quel moment et à quel endroit la fissure va s'amorcer. Ils sont généralement basés sur une comparaison des paramètres de fissuration (K , G , J , ...) à des valeurs critiques de ces paramètres. Pour une approche locale, et en mode (I) pur, il y aura amorçage lorsque le paramètre K_I atteint une valeur critique K_{IC} appelée ténacité du matériau. De la même manière, en ce qui concerne l'énergie, Griffith 1920 a suggéré une limite pour le taux de restitution d'énergie, connue sous le nom de résistance à la fissuration et étant notée G_C . Lorsque G atteint la valeur critique G_C , il y aura une propagation, ce qui correspond à l'énergie requise pour générer de nouvelles surfaces libres en fond de fissure. Il est important de noter que pour un matériau élastique fragile, la G_C ne dépend pas de la fragilité du matériau.

Critères de bifurcation

Si le chargement ou la géométrie d'une structure n'est pas symétrique par rapport à l'axe de la fissure, la rupture se produit en mode mixte et la fissure ne se propage pas de manière rectiligne. Des critères de bifurcation doivent alors être utilisés pour définir la nouvelle direction de propagation.

Selon Erdogan et Sih, il est supposé que le phénomène de rupture est influencé par l'intensité de la contrainte circonférentielle dans le voisinage du front de fissure. Il s'agit d'un critère spécifique, qui repose sur la compréhension du domaine des contraintes en pointe de fissure. D'après cette mesure, La bifurcation commence à la fin de la fissure dans la direction où la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est la plus forte [15] Erdogan et Sih, il est proposé le Critère de la contrainte normale maximale, ce critère est basé sur les hypothèses suivantes :

- La fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte de traction circonférentielle est maximale.
- L'augmentation de la fissure survient lorsque le fond de fissure augmente $K_{IC} = \sqrt{\sigma_{\theta\theta} 2\pi\rho}$.

La fissure s'étend dans la direction où la force de traction circonférentielle est maximale.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[K_I \left(\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - 3K_{II} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (2.25)$$

$$tg(\theta) = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \quad (2.26)$$

$$\theta = \arctg \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (2.27)$$

Enfin, la solution du système réside dans l'angle de bifurcation de la fissure, l'angle de bifurcation de la fissure est solution du système :

$$K_I \cos \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (2.28)$$

$$\text{Sous les conditions suivantes : } \begin{cases} K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0 \\ \theta \in]-\pi, \pi[\\ K_I > 0 \end{cases}$$

Cette mesure démontre également qu'il y a un angle limite ($\theta = \pm 70.54^\circ$), similaire au cas du cisaillement pur, au-delà duquel la fissure ne peut pas se propager cette technique a été étendue aux matériaux anisotropes par Saouma et al [16].

La direction de propagation est indépendamment de la nature du matériau, et plus spécifiquement du coefficient de poisson, pour ce critère. Selon la figure 2.11, l'angle θ indique la direction du maximum de la contrainte circonférentielle, ce qui détermine l'angle de bifurcation [15].

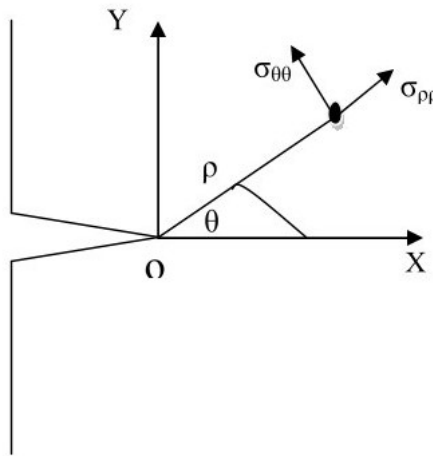


Fig. 2.11 : les zones identifiées autour de la pointe de fissure.

Son utilisation fréquente, entièrement fondée sur la notion de facteurs d'intensité de contraintes, est due à sa facilité de mise en œuvre. Cependant, cela peut sembler être discutable, car le champ de contraintes locales en fond de fissure n'est qu'un champ proche . En outre, la présence d'une zone non élastique au fond de la fissure fait également varier la répartition des contraintes. Elle est donc fortement influencée par la finesse du maillage en pointe de fissure, ainsi que par la modélisation plus ou moins bonne de la zone élasto-plastique par le code. D'où l'intérêt des critères énergétiques, qui impliquent des grandeurs globales au niveau de la structure, qui peuvent sembler plus adaptés.

b-Propagation dynamique de fissure

La recherche sur la rupture dynamique est une partie de la mécanique de la rupture où les effets de l'inertie prennent une importance plus grande que le chargement, tandis que le taux de déformation a un impact important sur les caractéristiques du matériau et sur l'évolution de la rupture.

Les ruptures dynamiques ou la propagation dynamique d'une fissure existante peuvent être causées par un impact sur la structure concernée ou par l'application brutale d'un chargement qui peut causer des dommages et ainsi créer des discontinuités dans le matériau.

On présente la rupture dynamique. Les paramètres caractéristiques de ce phénomène sont caractérisés par deux méthodes : la détermination des champs asymptotiques du domaine linéaire-élastique autour de la pointe de fissure et les paramètres du modèle de cohésion de la zone endommagée. Les

aspects énergétiques de la rupture dynamique sont particulièrement pris en compte, ce qui conduit à l'identification de paramètres essentiels tels que le facteur d'intensité dynamique de contrainte et le taux dynamique de restitution d'énergie.

La dynamique peut être le résultat de deux éléments :

- Un chargement rapide, tel que celui causé par un impact ou une onde de traction ou de cisaillement rapide.
- La fissure se propage à une vitesse non négligeable.

La première hypothèse consiste à appliquer la mécanique de la rupture aux phénomènes transitoires. Selon ses recherches, il est démontré que le niveau de chargement appliqué n'est pas adéquat pour décrire la concentration de contraintes en pointe de fissure, mais que la façon dont ce chargement est appliqué (aspect temporel) est également cruciale. Une contrainte proportionnelle au facteur d'intensité des contraintes instantanées est produite par l'application brusque d'une pression uniforme σ^∞ sur les lèvres d'une fissure semi-infinie entraîne une contrainte en fonction du degré d'intensité des contraintes instantanées.

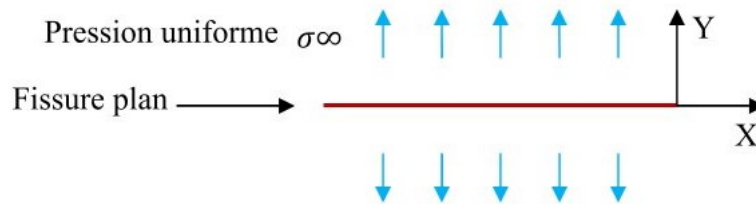


Fig. 2.12 : Application soudaine d'une pression uniforme.

$$\sigma_{YY} = (X, Y = 0, t) \simeq \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi X}} \quad (2.29)$$

$$K_I(t) = 2\sigma^\infty \sqrt{\frac{c_d t (1 - 2\nu)\pi}{1 - \nu}} \quad (2.30)$$

C_d : Est la vitesse des ondes de dilatation

Une fois que la longueur de la fissure est ajoutée comme dimension caractéristique, cette solution est invalidée après un temps $\frac{C_d}{a}$ qui caractérise la propagation des ondes. On peut observer une variation temporaire du facteur d'intensité des contraintes calculé en dynamique par rapport à celui calculé en appliquant la charge de manière statique, ce qui est appelé "overshoot dynamique" [17]

Pour la rupture dynamique, les facteurs d'intensité de contrainte sont également influencés par le temps. Les contraintes et les déplacements dans les zones voisines des fonds de fissures sont représentés dans trois situations différentes : fissure stationnaire, fissure en mouvement à vitesse constante et fissure en mouvement à vitesse variable. On accorde une attention particulière au concept de facteur d'intensité de contraintes pour la rupture dynamique, en mettant en évidence les distinctions par rapport au cas de la rupture statique. On peut décrire certaines formulations analytiques pour des situations spécifiques de chargements et de géométrie.

La compréhension du processus de rupture dynamique nécessite une connaissance des champs asymptotiques de contrainte et de déplacement autour de la pointe de fissure. Après avoir identifié les équations qui régissent ces domaines, il est possible de déterminer les autres paramètres essentiels pour l'analyse de la rupture dynamique, tels que le facteur d'intensité dynamique des contraintes et le taux

de restitution dynamique de l'énergie.

Les équations de ces champs ont été déterminées et résolues pour le cas statique par Irwin [18]. en 1957, en se basant sur les travaux de Griffith [11]. Il a démontré que les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure ont la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^1 \quad (2.31)$$

Les facteurs K_{I-III} sont utilisés pour évaluer l'intensité des contraintes pour les trois modes principaux de la rupture, f_{ij}^{I-III} Les fonctions angulaires sont connues pour chaque mode, tandis que σ_{ij}^1 représentent les contraintes appliquées au front de la fissure.

Les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements dépendent exclusivement des expressions analytiques des trois facteurs d'intensité de contraintes, tels que la rupture statique, la longueur de la fissure, la géométrie et le chargement.

Westergaard a commencé les premiers développements théoriques et l'exposition de ces fonctions angulaires pour le cas statique vers 1940, tandis que Radok, Nilsson, Freund, Achenbach, Nishioka et Atluri ont apporté une solution générale pour les champs asymptotiques autour de la fissure plus tard [19].

On considère que les fissures sont bidimensionnelles et situées dans un milieu semi-infini; les actions extérieures σ et τ qui interviennent dans les relations sont directement appliquées sur les lèvres de la fissure. Ci-dessous, nous exposons certains paramètres et variables spécifiques. Les paramètres de Lamé sont donc établis comme suit :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.32)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.33)$$

Où : E (module de Young) et ν (coefficient de Poisson), sont les caractéristiques élastiques du matériau. La constante de Kolosov, , prend également différentes valeurs en fonction du cas en question, qu'il s'agisse d'un état plan de contraintes ou d'un état plan de déformations :

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & : \text{en déformation planes} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & : \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

$$C_s = \sqrt{\frac{E}{2Y(1+\nu)}} \quad (\text{vitesse de cisaillement } C_s) \quad (2.34)$$

$$C_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{Y(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (\text{vitesse d'onde de dilatation } C_d) \quad (2.35)$$

Y : Représente la masse volumique.

précédemment, sont introduits, définis par :

$$\alpha_s = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_s^2}}; \alpha_d = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_d^2}} \text{ où } v \text{ représente la vitesse d'avancement de la pointe de la fissure.}$$

b-1 - Fissure stationnaire

Pour une fissure stationnaire soumise à un chargement dynamique, il est nécessaire de suivre le développement d'Irwin [20] pour déterminer les champs de contrainte et de déplacement autour de la pointe de fissure. Cependant, le facteur d'intensité de contrainte est influencé par le temps. L'échelle générale des contraintes est la suivante :

$$\sigma_{ij}^M = \frac{K_M(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} f_{ij}^M(\theta) + \sigma_{ij}^1, \quad M = \text{les modes } (I, II, III) \quad (2.36)$$

Les expressions pour le champ singulier de contraintes pour le corps fissuré soumis à un chargement dynamique correspondant aux trois modes fondamentaux sont les suivantes :

En mode I :

$$\sigma_x = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.37)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.38)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (2.39)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0, \text{ à l'état de contraintes planes} \\ \tau(\sigma_x + \sigma_y), \text{ à l'état de déformations planes} \end{cases} \quad (2.40)$$

En mode II :

$$\sigma_x = \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \left[-\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (2.41)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.42)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.43)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0, \text{ à l'état de contraintes planes} \\ \tau(\sigma_x + \sigma_y), \text{ à l'état de déformations planes} \end{cases} \quad (2.44)$$

En mode III :

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.45)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.46)$$

On peut prendre l'exemple d'un solide élastique infini avec une fissure (Fig. 12), dont les lèvres sont soumises à une pression uniforme et brutale appliquée sur $y = \pm 0$ comme l'illustre la figure 12.

$$\sigma_y = \pm \sigma^* H(t) \quad (2.47)$$

Ainsi, pour $t < 0$, les lèvres de la fissure sont libres de contraintes et soumises à une pression uniforme et normale pour $t > 0$. Où $\sigma^* > 0$ et $H(\cdot)$ est la fonction échelle.

Freund a obtenu une expression du facteur d'intensité dynamique de contraintes en utilisant la technique de Weiner-Hopf, qui a été utilisée pour la première fois par Hoop pour résoudre les problèmes de dynamique élastique :

$$K_I(t) = 2\sigma^* \sqrt{\frac{c_d t (1 - 2\nu)\pi}{1 - \nu}} \quad (2.48)$$

Ce résultat a notamment permis à de nombreux chercheurs de valider des techniques numériques pour la modélisation de la rupture dynamique. Grâce à ce résultat, plusieurs chercheurs ont pu confirmer des méthodes numériques pour la modélisation de la rupture dynamique stationnaire [19]. Dans les mêmes conditions cinématiques, des résultats correspondant aux facteurs d'intensité dynamique de contraintes ont été dérivés pour les chargements générant les deux autres modes fondamentaux de rupture, en utilisant la même technique :

$$K_{II}(t) = 2\tau^* \sqrt{\frac{2c_s t}{\pi(1-\nu)}} \quad (2.49)$$

$$K_{III}(t) = 2\tau^* \sqrt{\frac{2c_s t}{\pi}} \quad (2.50)$$

Dans les équations (49, 50), τ^* correspond l'amplitude de la pression uniformément distribuée sur les lèvres de la fissure qui agit en cisaillement qui correspond au mode II pur (49) et en déchirement qui correspond au mode III pur (50).

Les équations de l'élasticité permettent d'obtenir les composantes du champ de déplacements en utilisant les relations obtenues pour le champ de contraintes pour chaque mode pur de rupture.

En mode I :

$$u_x = \frac{K_I(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.51)$$

$$u_y = \frac{K_I(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left[\sin \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.52)$$

En mode II :

$$u_x = \frac{K_{II}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left[\sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.53)$$

$$u_y = \frac{K_{II}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left[-\cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.54)$$

En mode III :

$$u_z = \frac{K_{III}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.55)$$

On trouve dans la littérature d'autres formulations pour les facteurs d'intensité dynamique des contraintes, tels que pour une fissure de trois dimensions ou pour une fissure de longueur finie, ou encore pour un chargement impulsionnel de la structure fissurée. Dans le cas des fissures stationnaires, notre travail se restreint à la validation numérique des résultats mentionnés précédemment, car notre but est d'étudier les fissures en mouvement, dont la description est présentée dans les deux paragraphes suivants.

b-2 -Fissure en mouvement à vitesse constante

La méthode de la variable complexe permet de déterminer les champs asymptotiques de contraintes et de déplacements pour une fissure dynamique en mouvement.

La différence principale par rapport au cas de la fissure stationnaire réside dans la corrélation entre le facteur d'intensité dynamique de contrainte et la vitesse d'avancement de la fissure.

Les contraintes dans le cas d'une fissure en mouvement à vitesse constante, v , sont exprimées de la manière suivante :

$$\sigma_{ij}^M = \frac{K_M(t, v)}{\sqrt{2\pi\rho}} f_{ij}^M(\theta, v) + \sigma_{ij}^1 + O(1), \quad M = \text{les modes } (I, II, III) \quad (2.56)$$

La relation (2.56) montre que les fonctions angulaires sont influencées par la vitesse de propagation de la fissure.

Plusieurs recherches dans la littérature ont étudié la fissure dynamique en mouvement à vitesse constante dans un matériau élastique, dans le but de déterminer des relations analytiques pour le facteur d'intensité dynamique des contraintes. Trois cas sont particulièrement pris en compte :

- Dans la première situation, tous les champs mécaniques sont indépendants du temps lorsqu'ils sont observés par un observateur solidaire de la pointe de fissure en mouvement. Cette classe est illustrée par le problème proposé par Yoffe [21] qui examine une fissure de longueur fixée en propagation dans un corps soumis à un chargement de traction uniforme, appliquée dans un plan éloigné.
- Les fissures en propagation sont une autre classe de problèmes dont la caractéristique principale est que les champs, à deux moments de temps différents, sont identiques, à l'exception de leur échelle spatiale. Le cas typique de cette catégorie est celui de Broberg, où la fissure se propage rapidement à partir d'une longueur initiale nulle, à une vitesse constante, dans un corps soumis à une traction uniforme [19].
- Le cas le plus complexe, représenté par la propagation d'une fissure préexistante dans un corps soumis à un chargement indépendant du temps, que ce soit sous forme de traction ou de forces internes, est examiné ci-dessous.

L'exemple du mode I pur en déformations planes illustrera l'approche générale de la propagation soudaine d'une fissure préexistante à vitesse constante sous l'effet d'un chargement arbitraire échelon. L'étude concerne une fissure semi-infinie dans un corps infini, dont les résultats sont strictement applicables à un corps fini, avant que les ondes réfléchies par les bords ne perturbent le champ autour de la pointe de la fissure.

La solution dite "fondamentale" est obtenue en utilisant la technique de Wiener-Hopf et la transformation intégrale, qui consiste à propager la fissure sous l'effet d'un couple de forces concentrées et opposées qui agissent sur des points matériels fixes.

$$K_I = P^* \sqrt{\frac{2}{\pi vt}} \kappa_I(v) \quad (2.57)$$

$\kappa_I(v)$ Qui représente la fonction universelle de vitesse [17] et qui peut être approximée par l'expression :

$$\kappa_I(v) \approx \frac{1 - \frac{v}{c_R}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c_d}}} \quad (2.58)$$

La vitesse d'onde de Rayleigh est définie par le c_R . Pour une fissure stationnaire, cette fonction diminue de manière monotone et quasi-linéaire de $\kappa_I(v) = 1$ à $\kappa_I(v) = 0$ pour une vitesse de propagation de la fissure égale à la vitesse d'onde de Rayleigh.

À l'étape suivante est de trouver la solution correspondant à un chargement arbitraire $p(x)$ réparti sur le plan de la fissure pour $0 < x < vt$. Il ressort donc que pour un chargement global, le facteur d'intensité dynamique des contraintes en mode I pur est de

$$K_I(v, t) = \kappa_I(v) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{vt} \frac{p(x)}{\sqrt{vt-x}} dx \quad (2.59)$$

$$K_I(v, t) = \kappa_I(v) K_I^*(t, 0) \quad (2.60)$$

$K_I^*(t, 0)$ nommé aussi facteur "statique".

En mode II :

$$\kappa_{II}(v) \approx \frac{1 - \frac{v}{c_R}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c_s}}} \quad (2.61)$$

En mode III :

$$\kappa_{III}(v) \approx \sqrt{1 - \frac{v}{c_s}} \quad (2.62)$$

Ces conclusions concernant la propagation d'une fissure préexistante à vitesse constante sous l'effet d'un chargement arbitraire indépendant du temps sont significatives, car elles permettent d'analyser certains problèmes de propagation dynamique à vitesse variable.

b-3- Fissure en mouvement à vitesse variable

La mise en place de la fissure en mouvement à différentes vitesses ajoute une difficulté supplémentaire à la modélisation de la rupture dynamique. Les résultats actuels sont assez limités, mais ils sont assez élevés pour fournir des fondements conceptuels assez complets pour l'analyse de la propagation dans des milieux bidimensionnels, pour des structures simples.

Après avoir déterminé les expressions des champs de contrainte et de déplacement pour une fissure en mouvement à vitesse constante, Freund et Clifton, Nilsson ou encore Achenbach et Bazant ont indiqué que les fonctions angulaires de ces champs sont applicables à toute fissure en mouvement, qu'elle soit uniforme ou non-uniforme, au moins pour les contributions singulières étudiées à cette époque [19]. Les équations des champs de contrainte et de déplacement pour une fissure dynamique à vitesse variable ont récemment été dérivées par Nishioka et Kondo, où l'accélération et la vitesse d'avancement de la fissure ont un impact. Les auteurs concluent que les expressions analytiques pour les fonctions angulaires correspondant à ces champs sont lourdes et que les effets transitoires, c'est-à-dire liés à la non-uniformité de la vitesse, ne se manifestent que dans les termes d'ordre élevé et non dans les termes singuliers d'ordre 1, qui sont les plus importants en ce qui concerne la valeur des contraintes ou des déplacements. Cela facilite l'apprentissage des fonctions angulaires pour les fissures en mouvement à vitesse constante et celles à changement de vitesse [19].

Le facteur d'intensité dynamique de contraintes dans ce cas, écrit comme suit :

$$K_I(L(t), v_k) = \kappa_I(v_k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{v_k t} \frac{p(x, 0)}{\sqrt{v_k t - x}} dx \quad (2.63)$$

$$K_I(L(t), v_k) = \kappa_I(v_k) K_I(L(t), 0) \quad (2.64)$$

$$K_I(l, i) = \kappa_I(i) K_I^*(l, 0) \quad (2.65)$$

En résumé, le facteur d'intensité dynamique des contraintes pour une fissure en mouvement à vitesse variable peut être représenté par le produit de la fonction universelle de vitesse (56) pour les valeurs instantanées de celle-ci, ainsi que par le facteur d'intensité des contraintes à l'équilibre, qui dépend cette fois de la longueur instantanée de la fissure. Les formules (60-63) peuvent être utilisées pour les deux autres modes essentiels, dans les conditions de chargement appropriées [19].

b-4-Le taux de restitution d'énergie

Le taux de restitution d'énergie correspond à la quantité d'énergie requise pour faire avancer la fissure d'une longueur unité. La décroissance de l'énergie potentielle totale W_p correspond à la transition d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur ∂a .

$$\begin{cases} G = - \frac{\partial W_p}{\partial A} \\ W_p = W_{ext} + W_{els} \end{cases} \quad (2.66)$$

W_{els} : représente l'énergie de déformation élastique.

W_{ext} : l'énergie potentielle des forces extérieures.

∂A : l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

En appliquant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, on peut établir une corrélation entre le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensités de contraintes en utilisant les formules (22) :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{K'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.67)$$

Une des analyses théoriques les plus efficaces de la rupture dynamique repose sur les concepts énergétiques. En utilisant des modèles numériques, elle peut fournir les principaux paramètres du phénomène, tels que le facteur d'intensité dynamique des contraintes.

Griffith a été le premier à utiliser des méthodes énergétiques pour étudier la rupture, en réalisant l'importance de l'évaluation de la variation de l'énergie pendant l'évolution de la fissure fragile. Lorsqu'une fissure se développe, il est nécessaire de créer de nouvelles surfaces avec leur énergie de surface correspondante. Ainsi, lorsque la fissure progresse, l'énergie totale du corps diminue d'une quantité égale à l'énergie de création des nouvelles surfaces de clôture. Le taux de restitution d'énergie, correspond au taux d'échange du potentiel énergétique total pour un corps élastique fissuré. [19]

En fonction de sa définition, G correspond à la quantité d'énergie absorbée par l'énergie élastique du corps et du chargement externe pour générer les fissures. Selon l'analyse énergétique d'Irwin, il a été démontré que la relation entre G et le facteur d'intensité de contrainte K est présente pour le cas statique de la rupture. Son analyse a principalement consisté à examiner les deux états énergétiques d'un corps fissuré, correspondant aux positions $x = 0$ et $x = \partial x$ pour la tête de la fissure spécifique. Il est donc démontré que l'énergie varie dans le système.

$$\partial W = \int_0^{\partial x} \sigma(x)u(x)dx = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \left(1 + \frac{\delta K_I}{K_I} \right) \delta x \quad (2.68)$$

Où $u(x)$ représente le déplacement, perpendiculaire aux bords de la fissure, après l'avancement de celle-ci. Selon sa définition mentionnée précédemment, le taux de restitution de l'énergie sera représenté par :

$$G = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta x} = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (2.69)$$

Où on considère que $\frac{\delta K_I}{K_I} \rightarrow 0$ lorsque $\delta x \rightarrow 0$.

La relation d'Irwin (66) joue un rôle essentiel dans la mécanique de la rupture en établissant un lien évident entre le facteur d'intensité des contraintes et le taux de restitution de l'énergie. L'intégrale indépendante du contour J de Eshelby et Rice a été une autre avancée majeure dans l'étude de la mécanique de la rupture [19]

Trois traits distinctifs l'ont rendue indispensable lors de la création des modèles numériques utilisés ensuite pour simuler la rupture :

- Son sens physique est celui d'un taux de restitution de l'énergie.
- Chaque contour arbitraire autour de la pointe de la fissure a une valeur unique.
- On peut l'attribuer au facteur d'intensité des contraintes en approchant le contour d'évaluation à la pointe de la fissure.

Les idées énergétiques mentionnées précédemment ont servi de fondement à l'élaboration de concepts similaires pour la rupture dynamique. Les idées essentielles de cette approche sont développées dans les paragraphes qui suivent, ce qui conduit aux concepts de taux dynamique de restitution d'énergie et d'intégrales « dynamiques » indépendantes du contour. elle peut être rapportée au facteur d'intensité de contraintes en approchant le contour d'évaluation à la pointe de la fissure

Supposons que la fissure se propage dynamiquement, à une vitesse variable, dans un corps élastique. Le front de la fissure progresse d'une distance δx pendant la période δt sous l'effet des charges appliquées.

On peut mesurer le taux de restitution de l'énergie, comme dans le cas statique, en utilisant le bilan énergétique global divisé par la longueur de fissure pendant l'extension (dx) :

$$G = \frac{dW_{ext}}{dx} - \frac{dW_{els}}{dx} - \frac{dW_{cin}}{dx} \quad (2.70)$$

W_{ext} : le travail des forces extérieures.

W_{els} : l'énergie de déformation élastique.

W_{cin} : l'énergie cinétique.

La vitesse instantanée d'avancement de la fissure v est utilisée pour l'extension dx pendant le temps dt , l'équation (2.70) peut être écrite comme suit :

$$G = \frac{1}{v} \left(\frac{dW_{ext}}{dx} - \frac{dW_{els}}{dx} - \frac{dW_{cin}}{dx} \right) \quad (2.71)$$

Le point de départ pour la détermination de l'intégrale indépendante de contour J est la relation (2.71).

Pour illustrer la corrélation entre le taux de restitution de l'énergie et le facteur d'intensité de contraintes, dans le cas de la propagation dynamique d'une fissure, l'analyse énergétique proposée par Irwin en statique peut être utilisée (66). Comme l'élasticité est réversible, l'énergie libérée pour l'avancement de la fissure de (dx) est égale à l'énergie requise pour la fermeture de celle-ci sur la même longueur.

Ce terme désigne le travail accompli par les contraintes de la surface de la fissure σ_{2i} sur $x \in [0, x]$ et $y = 0$ afin de fermer la fissure sur la longueur δx (on prend en compte le système cartésien (x, y, z) centré sur le front de la fissure à $\delta t = 0$). Donc, on peut évaluer le taux de restitution de l'énergie en :

$$G = l_i \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\delta x} \int_0^{\delta x} \sigma_{2i}(x, 0) [u_i^+(\delta x - x, 0) - u_i^-(\delta x - x, 0)] dx \right\} \quad (2.72)$$

Où $u_i^+(\delta x - x, 0)$ et $u_i^-(\delta x - x, 0)$ sont les déplacements des lèvres supérieure et inférieure de la fissure.

Le lien entre le taux de restitution de l'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte est exposé :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1}{2\mu} \{ A_I(v)K_I^2 + A_{II}^2(v)K_{II}^2 + A_{III}^2(v)K_{III}^2 \} \quad (2.73)$$

Les fonctions de vitesse A_{I-III} sont des termes universels.

$$A_I(v) = \frac{\alpha_d(1 - \alpha_s^2)}{D} \quad (2.74)$$

$$A_{II}(v) = \frac{\alpha_s(1 - \alpha_s^2)}{D} \quad (2.75)$$

$$A_{III}(v) = \frac{1}{\alpha_s} \quad (2.76)$$

Lorsqu'on prend en compte les trois modes fondamentaux, avec leurs facteurs dynamiques d'intensité de contraintes définis en (2.60) ou (2.65), et après substitution dans (2.73), on trouve :

$$G(t, v) = g_M(v)G_M^*(t) \quad (2.77)$$

$$G(t, v) = g_M(v)G_M^*(t) \quad (2.78)$$

$$g_M(v) \text{ sont } g_M(v) = \kappa^2(v) = \frac{A_M(v)}{A_M(0)} \quad (2.79)$$

Le facteur statique du taux de restitution de l'énergie est $G_M^*(t)$

$$G_M^*(t) = \frac{A_M(0)}{2\mu} \{ \kappa_M(t) \}^2 \quad (2.80)$$

Les fonctions $A_M(v)$ sont diminuées pour les fissures stationnaires ($v = 0$), avec $A_I(0) = A_{II}(0) = (\kappa + 1)/4$ et $A_{III}(0) = 1$.

Par conséquent, il y a de nombreuses méthodes pour calculer Le taux de restitution d'énergie, que nous étudions dans les paragraphes suivants.

Les techniques de calcul du taux de restitution d'énergie conviennent parfaitement aux calculs éléments finis car elles se situent à une distance relativement élevée de la pointe de fissure, afin d'éviter toute interaction avec les singularités. En revanche, elles ont souvent l'inconvénient de ne pas permettre de séparer les divers modes. Étant donné le grand nombre de méthodes, nous nous concentrerons sur celles qui sont les plus couramment employées.

Calcul par avancée réelle de fissure

En utilisant une force appliquée, il est possible de calculer G en mesurant l'évolution de l'énergie élastique lors d'un léger changement de longueur de la fissure. On obtient donc G en lisant la quantité : $\frac{\partial W_{els}}{\partial a}$. La méthode utilisée dans la pratique consiste à réaliser deux ou trois calculs élastiques successifs à partir d'un maillage identique, mais sur lequel on relâche un ou plusieurs nœuds en fond de fissure entre les différents calculs. Les éléments quadratiques courants peuvent être utilisés, mais il est important de ne pas placer la pointe de fissure sur un nœud central. Il est recommandé d'effectuer au moins deux déterminations (3 calculs) avant d'évaluer G par extrapolation lorsque $\rho \rightarrow 0$.

Cette approche, fondée sur un raisonnement physique, présente l'avantage de s'adapter parfaitement aux codes, sans avoir recours à des éléments spécifiques. Néanmoins, elle demande une finition fine en pointe de fissure et est très coûteuse en termes de temps de calcul, car elle demande au moins deux calculs pour une longueur de fissure spécifique.

Méthode de l'intégrale J

Le calcul de l'intégrale de Rice à partir des résultats du code éléments finis est possible grâce à cette méthode. Définissons à nouveau l'intégrale J , et exprimé dans l'équation (2.23) :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W_{els}(\varepsilon)n_1 - \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (2.81)$$

L'énergie disponible en fond de fissure est représentée par cette intégrale. Il est toutefois possible de la calculer assez loin de cette zone. En outre, sa séparabilité du contour d'intégration permet de prendre ce dernier assez large, afin d'éviter la zone de singularité.

Dans les situations réelles, le contour d'intégration Γ est défini par un ensemble de nœuds du maillage. En utilisant le code de calcul, nous pouvons obtenir les valeurs des contraintes et du gradient des déplacements dans chaque élément aux points d'intégration, puis les lisser à ses sommets. On peut donc calculer la valeur de J en fonction des éléments intérieurs du contour (J_{int}), celle en fonction des éléments extérieurs (J_{ext}), et enfin celle obtenue par moyenne arithmétique en chaque nœud du contour (J_m) pour un contour donné Γ . Pour que le choix du contour soit justifié, il faut que ces trois quantités soient très proches.

À la différence de la théorie, la fiabilité des résultats numériques obtenus par cette méthode est grandement influencée par le choix du contour. Elle est encore meilleure lorsque le contour est éloigné de la pointe de fissure. Il peut être intéressant de sélectionner comme contour d'intégration, pour les maillages composés d'éléments quadrilatères, disposés "circulairement" autour de la pointe de la fissure, le contour qui passe directement aux points d'intégration de l'élément. Effectivement, cela donne la valeur précise de la contrainte ou de la déformation, qui sont calculées aux points d'intégration. Cette méthode est rarement employée pour des éléments triangulaires, car elle donne alors des contours très irréguliers.

En 1990 Petit montre que la précision est améliorée par l'utilisation d'éléments singuliers avec nœuds au quart [2]

Calcul par avancée virtuelle de fissure

Selon Hellen 1975 et Parks 1974, cette méthode permet de déterminer la variation d'énergie potentielle totale en utilisant une extension virtuelle de fissure ∂a . En déplaçant les points nodaux du réseau,

on obtient le processus d'extension de la fissure, plutôt que de retirer les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure et de procéder à une seconde analyse comme dans la méthode d'extension réelle.

Si l'on considère $[k]$ comme la matrice de rigidité du système, $\{u\}$ comme le vecteur de déplacement et $\{F\}$ comme le vecteur de charge aux nœuds du maillage, le système à résoudre est représenté par : $[k]\{u\} = \{F\}$

Une légère perturbation ∂a est effectuée à la pointe de fissure (environ 10^{-2} à 10^{-3} fois la dimension de la première maille en pointe). Cette extension entraîne une modification du champ des déplacements, ce qui entraîne une variation potentielle d'énergie dW_p . Ainsi, on obtient le taux de restitution d'énergie grâce à :

$$G = -\frac{dW_p}{da} = -\frac{1}{2} \{u\}^t \left[\frac{\partial k}{\partial a} \right] \{u\} - \{u\}^t \left[\frac{\partial f}{\partial a} \right] \quad (2.82)$$

Pour la détermination de G , la zone touchée par la transformation est très importante, tant au niveau de la précision que du temps de calcul. Afin de résoudre ce problème, on ajoute un contour Γ_0 à l'intérieur duquel les éléments sont déplacés avec l'avancement de la fissure, et un contour Γ_1 à l'extérieur duquel la structure n'est pas altérée. Dans cette situation, les éléments entre ces deux contours sont les seuls responsables de la perturbation de la matrice de raideur.

Le calcul de $[\partial K]$ peut être réalisé en utilisant une méthode d'intégration directe proposée par Lin et Abel, en plus de la méthode classique de différences finies (peu précise). Dans cette approche, on utilise des variations virtuelles de géométrie et des développements en série des grandeurs impliquées dans la formulation du problème pour calculer les dérivées de la matrice de rigidité par rapport à la longueur de fissure.

La méthode de Parks a été élargie à la plasticité par De Lorenzi en 1985, qui a converti l'intégrale de contour en une intégrale de surface, ce qui a donné une plus grande précision et autonomie par rapport au maillage. Il démontre ainsi que la restitution d'énergie peut être écrite comme suit :

$$G = J = \frac{1}{\delta a} \int \int_{A''} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{i1} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dx \quad (2.83)$$

A'' Étant la surface comprise entre les contours Γ_0 et Γ_1 , et Δx_1 représentant l'extension virtuelle [2]

La précision de cette méthode a été démontrée par les applications numériques Zhang en 1992, Lin et al en 1988, Burlet en 1998. En outre, les résultats obtenus ne sont pas influencés par les contours sélectionnés lorsqu'on utilise la méthode d'intégration directe pour calculer la perturbation de la matrice de raideur.

Méthode $G\theta$

En substituant Δx_1 par une fonction vectorielle θ avec des composantes nulles dans le contour Γ_0 , une norme unité dans le contour Γ_1 et des composantes qui varient constamment entre ces valeurs sur la $\Gamma_0 \Gamma_1$. Couronnes situées entre Γ_0 et Γ_1 et les lèvres de la fissure, selon le principe de la méthode $G\theta$. Le calcul du taux de restitution d'énergie G par dérivation (par la méthode lagrangienne²) de l'énergie potentielle d'une structure fissurée par rapport à un domaine est une méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980.

Elle consiste à intégrer non pas un contour, mais une couronne C_{cour} autour de la pointe de fissure. Il est nécessaire de prendre cette couronne dont les limites sont en accord avec les côtés des éléments

afin de pouvoir obtenir une bonne approximation de la solution. En outre, les points de Gauss des éléments de la couronne sont intégrés numériquement, ce qui lui confère une plus grande précision.

Méthode de découplage des modes

Les méthodes énergétiques ne peuvent, pour la plupart, séparer les deux modes de rupture lorsque la fissuration se produit en mode mixte, car l'expression de G ou J est une forme quadratique des facteurs d'intensité de contraintes. En utilisant la méthode de découplage, les paramètres énergétiques sont divisés en deux termes, chaque terme étant associé au facteur d'intensité de contraintes correspondant :

$$\begin{cases} J = J_I + J_{II} \\ G = G_I + G_{II} \end{cases} \quad \text{avec donc :} \quad \begin{cases} J_I = G_I = \frac{K_I^2}{E'} \\ J_{II} = G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \end{cases} \quad (2.84)$$

On procède alors au calcul de ces termes en divisant le champ de déplacement en une partie symétrique et une partie anti-symétrique par rapport à l'axe de la fissure, chacune de ces parties correspondant respectivement au mode I et II . Pour effectuer ce calcul, il est nécessaire de prendre en compte deux points (m) et (m') qui sont symétriques par rapport à l'axe de la fissure. Cela nous permettra d'obtenir les contributions aux modes I et II en combinant les déplacements de ces deux points de manière linéaire.

D'un point de vue numérique, cette approche est plutôt complexe à mettre en place, car les points (m) et (m') doivent être liés à un contour, ce qui implique qu'ils doivent être des nœuds du maillage. Il est donc indispensable d'avoir un maillage et un contour symétriques par rapport à l'axe de la fissure dans la zone de calcul pour pouvoir appliquer cette méthode. Il existe également d'autres techniques comme celles qui utilisent les intégrales T et \hat{A} (Bui 1985) qui permettent de découpler les différents modes tout en évitant le problème de maillage symétrique, mais elles sont principalement employées dans le domaine de la thermoélasticité.

Comparaison des différentes méthodes

Différentes études ont été menées pour comparer ces différentes méthodes (Elouard 1993), (Zhang 1992), (Petit 1990). La méthode de l'extension virtuelle de la fissure associée à la méthode d'intégration directe et la méthode $G\theta$ semblent être les deux méthodes les plus précises, à finesse de maillage donnée. La précision des résultats obtenus par ces deux méthodes dépend très peu de la finesse du maillage, mais elle influence considérablement le temps de calcul. La méthode locale par extrapolation des déplacements, utilisée pour un même maillage, est moins précise que les deux méthodes précédentes, mais elle est plus rapide ; elle permet de découper en modes I et II et ne requiert pas de code spécialisé.

2.4 Méthodes de simulation numérique pour étudier la propagation de fissure

Cette section expose les diverses techniques numériques actuellement utilisées pour simuler la propagation dynamique de fissures. On explique notamment la discrétisation selon la méthode des éléments finis. Tout d'abord, nous exposerons un aperçu des méthodes de simulation numériques actuelles qui permettent de traiter la propagation dynamique de fissures. De cette manière, nous décrirons brièvement les différentes méthodes telles que les éléments de frontière, sans maillage, les éléments finis et les méthodes basées sur la partition de l'unité, en mettant en évidence leurs avantages et inconvénients respectifs.

2.4.1 Méthodes sans maillage

Il existe différentes méthodes sans maillage, mais la méthode EFG (Méthode Galerkin sans éléments) est la plus couramment utilisée et développée. La proposition a été faite par Belytschko il y a environ douze ans. On a rapidement utilisé cette technique pour éviter la propagation de fissures. On connaît désormais l'implémentation numérique de cette technique.

Les développements principaux sont décrits dans. Par la suite, on examine le traitement de la discontinuité en déplacement, qui se produit lorsqu'il y a une fissuration, dans. Finalement, des publications ont également été publiées sur l'utilisation de fonctions de forme qui décrivent la discontinuité. L'intégration, en particulier les fonctions de forme, constitue les principales difficultés. Ces opérations ne sont pas simples et souvent très onéreuses financièrement [22]

2.4.2 Méthodes basées sur la partition de l'unité

L'inconvénient de la méthode des éléments finis est de faire appel à une procédure de remaillage lorsque la fissure se propage. En prenant en considération l'interface lors de la discrétisation, il serait possible de se débarrasser de cette opération complexe. La partition de l'unité est présentée par Melenk et Babuska, qui démontrent que l'étude de cette dernière permet l'ajout de fonctions de forme spécifiques. Ainsi, la discrétisation est complétée par des fonctions de forme qui décrivent le comportement à l'interface. Il est important de prendre en considération, dans la discrétisation, la fissure actuelle. Les méthodes en trois dimensions sont d'autant plus intéressantes qu'elles ne requièrent pas de remaillage.

Ces approches ont été particulièrement intéressantes au cours des dix dernières années; d'abord pour renforcer la validité de la description X-FEM et pour établir des schémas d'intégration stables. De nombreuses publications ont abordé des développements plus approfondis des critères de propagation pour les zones cohésives associées à X-FEM, pour le contact, ainsi que pour aborder la simulation numérique de coupe sur le sujet. Deux problèmes sont à traiter séparément : la localisation de l'interface et le calcul de mécanique [22]

2.4.3 Méthodes des éléments de frontière

Cette approche repose sur les calculs réalisés aux limites du domaine. En ce qui concerne la propagation de fissures, elle facilite la description de la fissure en effet, la méthode ne représente que les limites du domaine. Ainsi, il est naturel de représenter l'évolution de la fissure. Néanmoins, cette méthode présente des limites en ce qui concerne les problèmes numériques d'intégration en espace et en temps, principalement en ce qui concerne la gestion des calculs volumiques sur la structure ou la partie.

2.4.4 Méthodes des éléments finis

En mécanique, la méthode des éléments finis est déjà largement employée, ainsi qu'en mécanique de la rupture. Un premier désavantage réside dans le fait que la fissure doit faire partie intégrante du maillage de la structure. Fréquemment, le maillage est amélioré en pointe de fissure pour améliorer l'évaluation des singularités [22]

La structure et la fissure doivent donc être maillées. Le deuxième, qui est le résultat du premier, survient lorsque la fissure se propage : il est nécessaire de remailler la structure et la nouvelle fissure, à moins que la fissure ne suive les bords des supports. Il est possible d'utiliser la méthode de déboulochage dans cette situation. Ces opérations peuvent être extrêmement nombreuses en dynamique : la zone remaillée peut être limitée ou étendue. Le fait que la fissure se déplace dans le temps offre

deux possibilités : soit le trajet de la fissure est prévisible, soit pas. Deux situations sont possibles en raison de l'évolution temporelle de la fissure : soit le trajet de la fissure est prévisible, ne soit pas. Dans la première disposition, la structure est maîtrisée, c'est-à-dire que le parcours de la fissure est déjà prédéterminé à l'avance. Il peut s'agir, par exemple, d'une propagation de fissure en mode I pur où la fissure se propage de manière homogène.

Si le trajet n'est pas connu à l'avance, et c'est le cas en mode mixte, où la fissure a une trajectoire courbe, le maillage est altéré si la fissure avance : cela nécessite une procédure de remaillage de la structure qui se fait principalement à proximité de la pointe de fissure. On modifie alors la configuration et il faut initialiser certaines quantités (déplacement, déformation, contraintes) sur la nouvelle configuration : il faut donc effectuer une projection de champs. Les deux désavantages de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la propagation de fissures en dynamique sont les deux méthodes de remaillage et de projection de champs. La rénovation est une opération techniquement possible et fiable en 2D, mais elle est coûteuse. En ce qui concerne la projection de champs, elle a connu une amélioration progressive, mais elle ne pourra jamais restituer avec précision toutes les quantités d'intérêt localement et globalement. Le changement de maillage entraîne donc une diminution de l'exactitude et du coût des calculs.

La méthode des éléments finis propose de découper le système réel en un certain nombre d'éléments à géométries simples. Cette procédure est appelée « discrétisation » car le milieu est remplacé par une série d'éléments discrets. La transformation de problème continu en un problème discret par maillage de l'élément fini dans les caractéristiques est connue et qui permet d'approximation de l'équilibre d'une structure pour obtenir une solution qui approche des champs de déplacement (Déformation ; contrainte). Il existe de nombreux éléments durables utilisés pour étudier le phénomène des fissures comme l'élément Reissner. Dans cette étude, un élément fini mixte développé par Bouzard (1992) a été utilisé à partir de l'élément Reissner.

Compte tenu des résultats de ces études comparatives, nous avons opté dans ce travail pour l'association de la méthode d'extension virtuelle de fissure à l'élément mixte d'interface présenté (RMQ-7). Dans le cas d'une extension colinéaire à la fissure, Bouzard a montré qu'une seule discrétisation suffit pour calculer le taux de restitution d'énergie (Bouzard et Courtade, 1992) [23].

Chapitre 3

Élément fini mixte RMQ-7

3.1 Introduction

Un élément fini correspond à une subdivision discrète d'un domaine plus large (généralement géométrique) sur lequel on cherche à résoudre des équations aux dérivées partielles ou d'autres problèmes physiques ou d'ingénierie. On utilise fréquemment cette méthode afin d'obtenir des solutions numériques approximatives pour des problèmes complexes pour lesquels les solutions précises ne sont pas facilement accessibles. En termes pratiques, un tel élément est défini par quatre données :

- Un domaine géométrique dont la taille varie en fonction de la théorie en question, tel qu'un polyèdre, un polygone ou un segment ;
- Les nœuds sont un ensemble de points situés dans ce domaine ou sur son bord.
- Les fonctions de base (scalaires) sont un ensemble de fonctions, chacune liée à un nœud, définies sur le domaine et ayant des valeurs réelles.
- Une hypothèse cinématique implique d'exprimer une grandeur physique (ici, le champ de déplacement) à l'intérieur du domaine en utilisant une combinaison linéaire des fonctions de base, dont les coefficients peuvent être n'importe quels ; chaque terme de cette combinaison linéaire est connu sous le nom de degré de liberté.

Les éléments finis ont de nombreuses caractéristiques principales dont nous mentionnons :

- Une forme géométrique simple est généralement utilisée pour définir un élément fini, telle qu'un triangle, un quadrilatère (en 2D) ou un tétraèdre, un hexaèdre (en 3D). Ces formes offrent une découpe efficace du domaine et une représentation de la géométrie complexe.
- La solution à l'équation de départ est approximée à l'intérieur de chaque élément fini par une combinaison linéaire (ou parfois non linéaire) de fonctions de base. En général, ces fonctions de base sont polynomiales et sont utilisées pour interpoler la solution sur l'élément.
- Les éléments finis sont reliés entre eux grâce à des nœuds communs, ce qui permet de créer un réseau global du domaine. Il est essentiel d'avoir cette connectivité afin de rassembler le système d'équations linéaires obtenues par discrétisation.
- Le maillage désigne l'ensemble des éléments finis qui constituent une subdivision du domaine. La finesse, la forme des éléments, etc., du maillage ont un impact direct sur la précision de la solution obtenue.

3.2 Formulation d'un élément

Les fonctions de forme, également connues sous le nom de fonctions d'interpolation, sont les fonctions (N) qui relient les déplacements d'un point intérieur à un élément aux (η) déplacements nodaux (φ_i) . Pour l'approche cinématique, il existe autant de fonctions de forme que de degrés de liberté pour un élément.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)\varphi_i \quad (3.85)$$

Elles garantissent la transition du problème continu au problème discret, en étudiant le déplacement en quelques nœuds discrets, ce qui permet de reconstruire le champ de déplacement dans l'élément en question.

Le mouvement en un point donné de l'élément est une combinaison linéaire des mouvements nodaux, dont les coefficients sont les valeurs des fonctions de forme en ce point. La connexion entre les éléments respecte certaines règles car la non-respect du critère de continuité entre les éléments entraîne des déformations physiquement inacceptables pour une structure continue, telles que l'effet « boutonnière ». Dans les deux cas ci-dessous Figure 3.13, les nœuds ont été positionnés à l'intérieur de chaque élément afin de mieux comprendre les problèmes de continuité. L'équation d'équilibre intégrée ne prend en compte que la dérivée première des déplacements (déformations) dans les problèmes d'élasticité : il est donc nécessaire que le champ de déplacement soit au moins de classe (\bar{C}^0) pour chaque élément.

Dans le cas des problèmes de flexion, l'équation d'équilibre implique la dérivée seconde des déplacements : il est nécessaire que les déplacements soient au moins de classe (\bar{C}^1) sur chaque élément. Il est nécessaire d'assurer une continuité des déplacements et des pentes normales le long des interfaces. Pour les problèmes d'élasticité, la continuité des degrés de liberté nodaux garantit une continuité parfaite des mouvements le long de tous les bords. La complétude est un élément fini qui peut représenter n'importe quelle valeur des déformations (ou des courbures) lorsque sa taille diminue.

Plus précisément, les modes rigides et les états de déformation constante (comme les cas académiques où la déformation est constante ou où le maillage est suffisamment fin pour que la déformation soit considérée comme constante sur l'élément). Les déformations sont nulles dans le cas d'un mode rigide (connu également sous le nom de mouvement d'ensemble) car tous les points de la structure se déplacent de la même manière lors des translations.

En ce qui concerne les rotations globales, les points présentent des translations différentes, mais leur distance relative reste constante. Il est nécessaire d'utiliser un terme constant dans l'expression analytique du champ de déplacement afin de passer ces modes. Pour les problèmes d'élasticité, il est nécessaire que le déplacement inclue au moins un polynôme complet d'ordre (1) pour représenter les modes de déformation constante. En ce qui concerne les problèmes de flexion, il est important que la courbure reste constante, plutôt que la déformation [26].

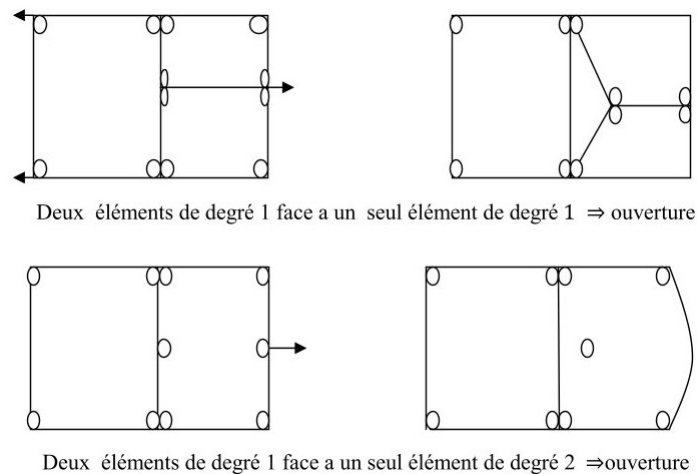


Fig. 3.13 : La continuité géométrique entre les éléments n'est pas satisfaite [26].

L'invariance géométrique est une caractéristique désirée dont la nécessité n'est pas prouvée. La notion d'invariance implique que l'énergie de déformation ne doit pas être influencée par le repère dans lequel les calculs sont effectués. Elle nécessite l'emploi de polynômes complets lorsque l'élément est défini dans son propre repère unique. Dans le cas où l'élément est élaboré dans un système d'axes appelés « intrinsèques », il n'est nécessaire que les polynômes soient symétriques des variables d'espace.

3.2.1 Famille de Lagrange

La base de l'espace des fonctions sélectionnées pour représenter le déplacement dans l'élément est constituée de fonctions de forme N : tout déplacement interne est une combinaison linéaire des fonctions d'interpolation.

De nombreuses familles sont connues qui établissent des fondements fonctionnels et qui peuvent être directement employées pour les fonctions de forme. On en trouve des exemples dans les séries de Fourier, les polynômes de Lagrange, Hermite, Legendre... La valeur exacte du polynôme de Lagrange d'ordre i est 1 au point x_i , et 0 sur tous les autres points x_j . Il est donc possible de l'utiliser comme fonction formelle :

$$N_i(i) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} \quad (3.86)$$

Afin de visualiser un champ de premier degré le long d'un bord, ce qui implique donc deux inconnues, il est nécessaire d'utiliser deux connecteurs indépendants, c'est-à-dire deux nœuds, l'un à chaque extrémité de l'emprise.

Pour une barre de longueur L de premier degré et de caractéristiques constantes, il est possible d'écrire :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = L.$$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \quad (3.87)$$

Les deux fonctions d'interpolation calculées précédemment sont présentes. Dans la base définie par les « vecteurs » 1 et x , toute fonction linéaire à $x + \square$ peut être exprimée de manière unique, les variables

internes α et β étant les éléments constitutifs de la fonction \square dans la base sélectionnée. Cependant, toute fonction linéaire peut aussi être exprimée de manière spécifique dans la base définie par les « vecteurs » $\frac{(1-x)}{L}$ et $\frac{x}{L}$, les variables externes u_1 et u_2 étant les éléments constitutifs de cette même fonction \square dans la nouvelle base sélectionnée. Il est nécessaire de trois connecteurs pour représenter un champ parabolique le long d'un bord, ce qui implique trois inconnues.

Il est possible de sélectionner un nœud à chaque extrémité ainsi qu'un nœud au centre de l'arête, ou un nœud à chaque extrémité avec un connecteur de bord, comme tout le déplacement sur l'arête. Supposons une barre de longueur L et qui présente des caractéristiques constantes, à un degré deux : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{L}{2}$ et $x_3 = L$. En utilisant la formule qui donne l'expression des polynômes de Lagrange, les trois fonctions d'interpolation liées aux trois degrés de liberté de cet élément de barre du second degré sont déterminées :

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \\ N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ N_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{cases} \quad (3.88)$$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)(x-L)}{\left(0 - \frac{L}{2}\right)(0-L)} = \frac{(2x-L)(x-L)}{L^2} \\ N_2(x) = \frac{(x-0)(x-L)}{\left(\frac{L}{2}-0\right)\left(\frac{L}{2}-L\right)} = \frac{4x(L-x)}{L^2} \\ N_3(x) = \frac{(x-0)\left(x - \frac{L}{2}\right)}{(L-0)\left(L - \frac{L}{2}\right)} = \frac{x(2x-L)}{L^2} \end{cases} \quad (3.89)$$

Toute parabole est une série linéaire des trois monômes 1 , x et x^2 , mais elle est également une série linéaire unique des trois fonctions mentionnées précédemment. Pour les éléments rectangulaires ou cubiques dont les faces sont parallèles aux axes structuraux, il est facile de produire des fonctions de forme en utilisant des produits de polynômes pour chaque variable, en respectant la continuité le long des bords d'un élément à celui qui lui est adjacent. Cette condition de continuité exige que les valeurs connues sur les bords d'un élément de degré n soient exactement $(n+1)$, c'est-à-dire n nœuds. À partir d'une approximation linéaire pour chaque axe.

Il est possible d'effectuer ce même type de développement pour des interpolations paraboliques, cubiques ou plus dans chaque direction. Il est essentiel de définir des nœuds sur chaque arête ainsi que des nœuds internes pour des degrés supérieurs à 1, ce qui améliore le comportement de l'élément tout en augmentant le nombre de degrés de liberté de l'élément figure 3.14. Les propriétés de forme liées

aux nœuds internes, connues sous le nom de « modes bulles », ne sont pas affectées par les éléments adjacents figure 3.15. C'est pourquoi des degrés de liberté interne sont parfois supprimés par condensation, le temps requis pour cette opération au niveau de chaque élément étant largement compensé par le gain de temps obtenu par la réduction de taille du système à résoudre [26].

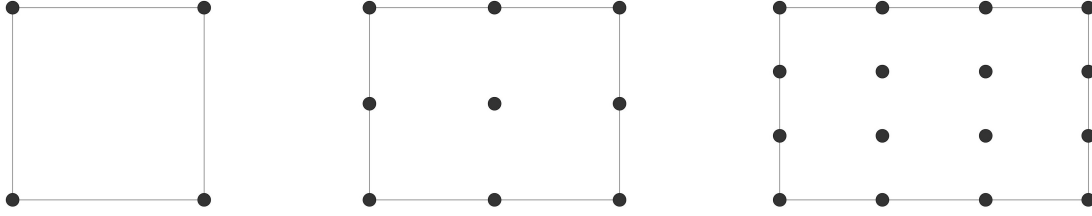


Fig. 3.14 : mise en place des nœuds pour le carré de Lagrange (degrés 1, 2 et 3).

Les produits de chaque direction des polynômes de Lagrange sont des fonctions de forme N, d'où le nom de cette famille. Il est également possible de les créer directement en utilisant la formule qui les définit. Lorsqu'une barre du premier degré est parallèle à l'axe des X : $x_1 = 0$ et $x_2 = L$.

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (3.90)$$

Au deuxième degré, on effectue directement des calculs avec :

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{L}{2} \text{ et } x_3 = L$$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right) \\ N_2(x) = \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ N_3(x) = \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \end{cases} \quad (3.91)$$

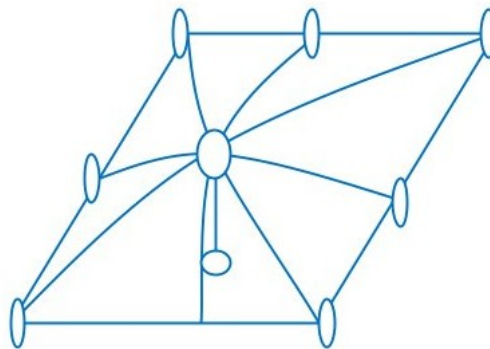


Fig. 3.15 : Illustration d'un mode bulle lié à un nœud interne.

Même dans le cas de fonctions de forme liées à des degrés de liberté dans le plan de l'élément, la représentation graphique qui en est faite est transversale, ce n'est que la valeur de la fonction en un

point. La fonction de forme liée à un nœud d'élément quadrangulaire linéaire est illustrée dans la figure 3.16 : elle prend la valeur 1 sur le nœud en question et 0 sur les autres afin de garantir la continuité inter-éléments. [26].

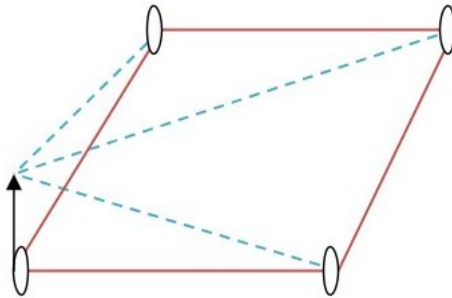


Fig. 3.16 : L'interpolation est une fonction liée à un nœud sommet.

3.2.2 Les éléments isoparamétriques

Supposons un quadrilatère donné, avec ses quatre sommets, dont les nœuds ont des coordonnées connues dans un système global (x,y) . Pour un élément de référence, on considère un élément carré de côté 2 dans le système de coordonnées (ζ, η) . Les coordonnées intrinsèques d'un élément 3D, que ce soit (ζ, η) ou (ζ, η, ξ) , sont de -1 à +1, à l'exception du triangle où elles sont de 0 à 1 figure 3.17. En réalité, la transformation f , qui correspond à un changement de système de coordonnées, est la suivante : À un point de coordonnées (ζ, η) , il n'y a qu'un seul point de coordonnées (x,y) .

- Les nœuds et les frontières des deux éléments associés sont représentés par f .
- f est définie par les mêmes nœuds que ceux utilisés pour les degrés de liberté.

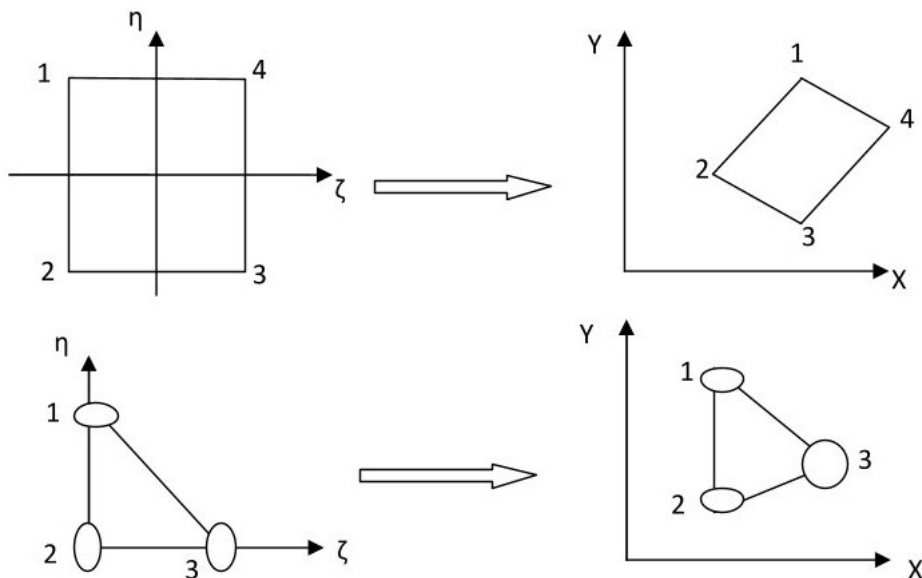


Fig. 3.17 : Interpolation avec une géométrie.

On peut écrire la coordonnée d'un point physique de l'élément réel de la manière suivante, car c'est l'image par f d'un point de coordonnées réduites (ζ, η) dans l'élément de référence [26].

$$(x) = (\check{a}_0 + \check{a}_1\zeta + \check{a}_2\eta + \check{a}_3\zeta\eta) \quad (3.92)$$

3.3 Formulation variationnelle

Les équations fondamentales de la théorie de l'élasticité peuvent être exprimées de différentes façons :

- Une description locale en utilisant des équations différentielles.
- Une structure générale en utilisant des équations intégrales.
- Une variété de formes (fonctionnelles et de conditions de stationnement).

On peut toujours formuler un problème de mécanique des milieux continus de manière locale ou globale, et on peut également le formuler de manière variationnelle. En mathématiques, ces trois méthodes sont équivalentes. Les variations se manifestent lors des méthodes de calcul des solutions approchées. Les méthodes variationnelles jouent un rôle crucial en tant que fondement de la formulation des divers modèles de calculs par éléments finis. Il y a plusieurs principes variationnels de nature énergétique en mécanique des solides qui permettent de représenter les conditions d'équilibre. Les principaux sont :

- La notion de l'énergie potentielle totale minimale.
- Le concept de maximisation de l'énergie complémentaire potentielle.

Les règles de stabilité des fonctionnelles à deux ou plusieurs champs (formulations mixtes).

Le prochain paragraphe présentera les techniques de formulation des éléments finis basées sur les principes variationnels.

3.3.1 Les types de formulation des champs

3.3.1.1 Formulation à un seul champ :

- Formulation des déplacements ou approche des déplacements (modèle adapté) :

Les variables inconnues dans cette formulation sont les déplacements. Ce procédé est dérivé du principe du minimum de l'énergie potentielle totale. En général, ce modèle garantit la continuité des déplacements à tous les endroits, mais les contraintes sont discontinues aux frontières entre les éléments. Les conditions de continuité du vecteur contrainte à l'interface ne sont donc pas vérifiées, et les conditions aux limites de bord libre ne peuvent pas être parfaitement respectées.

- Méthode des forces ou formulation en contrainte (modèle d'équilibre) :

Elle repose sur le principe variationnel de l'énergie complémentaire maximale. Dans cette méthode, puisque les contraintes sont les inconnues qui interviennent dans la formulation, la continuité des déplacements n'est pas garantie au passage entre les éléments. Ce modèle nécessite également une forte continuité sur toutes les contraintes aux frontières des éléments, tandis que seules certaines d'entre elles doivent être maintenues.

3.3.1.2 Formulation à plusieurs champs :

- formulations hybrides :

Pian a développé le concept des modèles hybrides. Ces approches reposent sur des variantes du principe de l'énergie potentielle minimale ou du principe de l'énergie complémentaire maximale. Le modèle hybride est basé sur un premier calcul de champ de contraintes ou de déplacements à l'intérieur de l'élément et sur une seconde forme indépendante de champ de contraintes et/ou de déplacements définie à la limite de l'élément. Les paramètres généralisés sont utilisés pour exprimer tous les champs, à l'exception d'un seul champ qui est donné en fonction de variables nodales. On exprime les équations finales de l'élément en fonction de ce champ unique. On peut donc considérer cette formulation comme une méthode de déplacement ou une méthode de force, c'est-à-dire la continuité d'un seul champ à l'interface. [27].

- Formulations mixtes :

Les techniques variationnelles mixtes offrent la possibilité d'utiliser les variables statiques et cinématiques en même temps. En théorie, elles pourraient garantir toutes les continuités requises à l'interface, à condition de faire un choix éclairé des types de variables nodales en contraintes avec lesquelles les champs de contraintes sont interpolés aux frontières entre les éléments spécifiques.

Le principe variationnel de Reissner [28] est probablement la méthode variationnelle qui a le plus attiré l'attention dans la formulation d'éléments finis mixtes. En utilisant le champ de déformations comme variable indépendante, Hu [29] et Washizu [30] ont développé un principe variationnel à trois champs qui se rapproche du principe variationnel de Reissner lorsque la compatibilité cinématique des déformations est vérifiée. Verchery [31] a développé plusieurs fonctionnelles mixtes intermédiaires où certaines grandeurs statiques et cinématiques sont présentes en même temps. Ces caractéristiques ont principalement été employées dans les modélisations théoriques de plaques sandwichs.

3.3.2 Fonctionnelle de Reissner (R)

Le comportement énergétique des plaques minces est décrit par la fonctionnelle de Reissner, souvent abrégée par R, en mécanique des structures. La définition de cette fonctionnelle est basée sur la théorie des plaques de Kirchhoff-Love. On utilise cette fonctionnelle pour élaborer les équations d'équilibre et les conditions aux limites, en fonction des déformations et des forces internes dans la structure.

La fonctionnelle de Reissner est une fonctionnelle de variation, c'est-à-dire qu'elle permet de dériver les équations d'équilibre en réduisant l'énergie totale de la structure dans certaines conditions (comme les conditions de frontière et d'équilibre). Son utilisation est fréquente dans l'étude des structures composites, des coques minces (telles que les coques de bateaux et les enveloppes de bâtiments), ainsi que dans d'autres domaines où la flexion et les déformations planes sont des aspects essentiels.

Le principe mixte de variation de Hellinger-Reissner est formulé de la manière suivante : Les champs de déplacements u et les contraintes σ des solutions des équations d'équilibre de l'élasticité linéaire rendent la fonctionnelle de Reissner stationnaire parmi tous les champs de contraintes et de déplacements cinématiquement admissibles [32].

$$\Pi_c(\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i) = -\frac{1}{2} \int_v S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j dS_u - \int_v \lambda_i (\sigma_{ij} + \phi_i) dV + \int_{S_\sigma} \beta_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}) dS_\sigma \quad (3.93)$$

λ_i, β_i : Les multiplicateurs de Lagrange sont utilisés pour prendre en considération les conditions aux limites et l'équilibre.

En traduisant la condition de stationnarité de $\prod_c(\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i)$:

$$\delta \prod_c(\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i) = 0$$

La variation du premier ordre de \prod_c s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \prod_c(\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i) = & \int_v \{ \varepsilon_{ij}(\lambda) - (S_{ijkl} \sigma_{kl}) \delta \delta_{ij} - (\sigma_{ij,j} + \phi_i) d\lambda_i \} dV + \int_{S_u} (\bar{u}_i - \lambda_i) \delta_{ij} n_j dS_u \\ & + \int_{S_\sigma} \{ (\beta_i - \lambda_i) \delta \sigma_{ij} n_j dS_\sigma + (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) \delta \beta_i \} ds_\sigma \end{aligned} \quad (3.94)$$

ϕ_i : Forces de volume données.

\bar{u}_i : Déplacement imposé sur S_u .

\bar{T}_i : Traction imposée sur S_σ

S_{ijkl} : Les composantes de la matrice de souplesse.

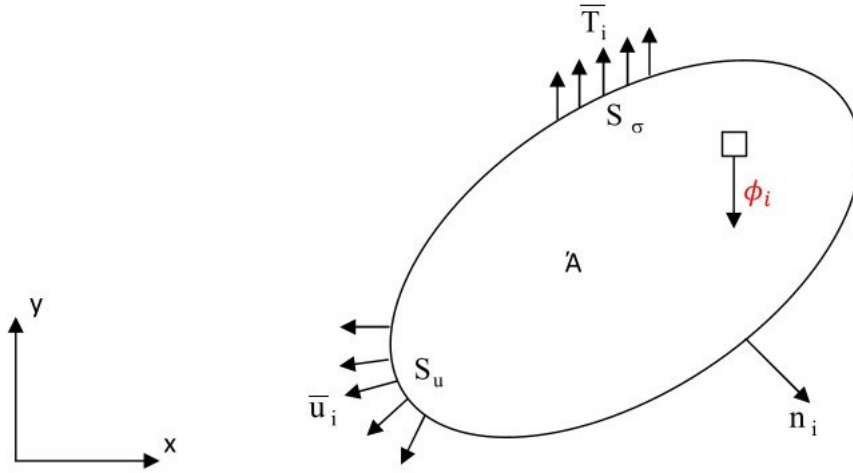


Fig. 3.18 : Conditions aux limites mixtes dans une structure.

Les variables $\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i$ sont perçues comme des variables autonomes, ce qui nous donne l'équation de stationnarité.

$$\begin{aligned} \lambda_i = \bar{u}_i \text{ Sur } S_u, \quad \lambda_i = \beta_i \text{ Sur } S_\sigma, \quad \sigma_{ij} = n_j = \bar{T}_i \text{ Sur } S_\sigma \\ \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \varepsilon_{ij}(\lambda) = S_{ijkl} \sigma_{kl} \end{aligned}$$

En prenant :

$$\begin{aligned} \lambda_i = u_i & \text{ dans } V \\ \beta_i = u_i & \text{ sur } S_\sigma \end{aligned}$$

En substituant leurs valeurs physiques dans, nous obtenons la fonction mixte de Reissner définie par :

$$R(\sigma_{ij}, u_i) = \frac{1}{2} \int_v \{(S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}) + u_i(\sigma_{ij,j} + \phi_i)\} dV + \int_{S_u} \sigma_{ij}n_j \bar{u}_i dS_u + \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij}n_j - \bar{T}_i) dS_\sigma \quad (3.95)$$

$$R(\sigma_{ij}, u_i) = \int_v \left(\sigma_{ij}u_{i,j} - \frac{1}{2}S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \right) dV - \int_{S_\sigma} u_i \bar{T}_i dS_\sigma - \int_{S_u} T_i (u_i - \bar{u}_i) dS_u \quad (3.96)$$

Selon la condition de stationnarité de R, les variables σ_{ij}, u_i sont considérées comme indépendantes, ce qui nous donne les équations d'équilibre, les lois de comportement et les conditions aux limites mixtes :

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{dans } S_u \\ T_i &= \bar{T}_i & \text{sur } S_\sigma \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ dans } V, \quad \varepsilon_{ij}(\lambda) = S_{ijkl}\sigma_{kl} \text{ dans } V$$

En calculant la deuxième variation de R, on peut observer que la valeur stationnaire de la fonctionnelle R est un point scelle, ce qui signifie qu'elle n'a ni maximum ni minimum.

$$\delta^2 R(\sigma_{ij}, u_i) = -2 \int_v \left\{ \left((\delta\sigma_{ij})_{,j} \right) \delta u_i + \frac{1}{2} S_{ijkl} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} dV + 2 \int_{S_\sigma} \delta(\sigma_{ij}n_j) \delta u_i dS_\sigma \right\} \quad (3.97)$$

Actuellement, nous mettons en place une notation matricielle afin de rendre la discrétisation de la fonctionnelle plus pratique.

Lorsqu'il s'agit d'un système bidimensionnel, les équations locales d'élasticité sont telles que :

$$\begin{bmatrix} -[S] & [L_2] \\ [L_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix}^t = \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad u_1 \quad u_2 \} \quad (3.99)$$

avec $[L_1]$ est un opérateur linéaire défini par :

$$[L_1] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1122} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{1222} \\ S_{1122} & S_{1222} & S_{1212} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$[L_2] = [L_1]^t$$

$$\{f\}^t = \{f_1 \quad f_2\} \quad (3.102)$$

Les conditions aux limites mixtes s'écrivent :

$$\{u\} = \{\bar{u}_i\} \quad \text{Sur } L_u \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Sur } L_\sigma \quad (3.104)$$

En introduisant ces notations dans la fonctionnelle (eq 3.96), nous obtenons :

$$\begin{aligned} R(\{\sigma\}, \{u\}) = & \frac{e}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} -[S] & [L_2] \\ [L_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} dS - e \int_{L_\sigma} \{\bar{T}\} \{u\} dL_\sigma - e \int_A \{\phi\}^t \{u\} dS \\ & - e \int_{L_u} \{T\}^t (\{u\} - \{\bar{u}\}) dL_u \end{aligned} \quad (3.105)$$

3.3.3 Les éléments finis mixtes

3.3.3.1 Bref historique

Les premières utilisations du principe variationnel de Hellinger-Reissner remontent à 1966, lorsque Herrmann et Hellen ont proposé plusieurs modèles mixtes de calcul de flexion des plaques minces. Des modèles mixtes ont été créés par Dunhan et Pister afin d'analyser des problèmes liés à l'élasticité plane. Ces modèles appliquent directement le principe variationnel de Reissner, qui considère tous les déplacements et toutes les contraintes comme des variables indépendantes. La continuité des déplacements est assurée naturellement par ces dispositifs, mais leur désavantage réside dans le fait que toutes les contraintes sont considérées comme des variables essentielles à l'interface entre deux matériaux, ce qui entraîne une continuité excessive des contraintes [6].

Différents auteurs ont proposé d'autres éléments finis mixtes : Chatterjee et Setlur en 1972, Tseng et Olson en 1981, afin d'analyser les problèmes d'élasticité plane, de plaque en flexion et de contact dans le cas bidimensionnel.

Une famille d'éléments d'interface similaires a été développée par Aivazzadeh et Habib pour le cas plan et pour le cas axisymétrie. Les degrés de liberté de contrainte, à l'exception des contraintes d'interface, sont définis dans des nœuds internes qui ne participent pas au processus d'assemblage avec d'autres éléments. Cette approche, idiote.

Une famille d'éléments d'interface similaires a été développée par Aivazzadeh pour le cas plan, tandis qu' Habib développée pour le cas d'axisymétrie. À l'exception des contraintes d'interface, les degrés de liberté de contrainte sont localisés dans des nœuds internes qui ne sont pas impliqués dans le processus d'assemblage avec d'autres détails. La relocalisation, également appelée méthode, permet d'éviter les écarts excessifs entre les interfaces [6].

Noor a mené une étude approfondie sur les modèles éléments finis mixtes. Selon Wu et Lin [6], un élément fini mixte bidimensionnel a été proposé pour analyser une structure sandwich en utilisant un modèle de déplacement d'ordre élevé. Les conditions de continuité de déplacement à l'interface entre les couches ont été prises en compte, tandis que les contraintes interlaminaires ont été utilisées comme multiplicateurs de Lagrange [33].

3.3.3.2 Modèle utilisé :

Un élément fini mixte a été créé par Bouzerd qui peut représenté à la fois des interfaces cohérentes et des interfaces fissurées. Cet aspect a été lié à l'utilisation de la méthode d'extension virtuelle de fissure afin d'évaluer le taux de restitution d'énergie. L'emploi de cette substance dans l'analyse des matériaux isotropes homogènes ou des bimatériaux a obtenu des résultats remarquables par rapport aux solutions analytiques [5].

3.3.3.3 L'élément RMQ-7

Il est fréquemment employé la méthode des éléments finis afin de simuler la propagation de fissures. En utilisant l'élément fini mixte RMQ-7 (Reissner's Modified Quadrilateral with 7-nodes) dans cette étude. Bouzerda créé cet élément d'interface en utilisant une formulation directe, c'est-à-dire : les fonctions de forme des champs cinématique et statique sont constituées directement à partir de la configuration réelle de l'élément en se positionnant dans un repère global (x, y). C'est un élément d'interface qui est base sur le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner [5].

RMQ-7 (Reissner Modified Quadrilateral) est un élément quadrilatère mixte avec 7 nœuds et 14 degrés de liberté. Trois de ses côtés peuvent être utilisés avec des éléments classiques linéaires et sont munis d'un nœud de déplacement à chaque endroit. En plus de ses deux nœuds cinématiques d'extrémités (nœud 1 et nœud 2), le quatrième côté présente trois nœuds supplémentaires : un nœud médian (nœud 5) et deux nœuds intermédiaires au milieu de chaque demi-côté (nœuds 6 et 7), qui introduisent les composantes du vecteur contrainte le long de l'interface. Il est possible de prendre en considération les continuités des vecteurs de déplacement et de contrainte sur ce côté spécifique, qui doit être positionné le long de l'interface.

Le nœud médian est lié à la pointe de fissure dans les structures fissurées. Les deux nœuds statiques de part et d'autre permettent de répondre aux deux exigences essentielles d'une telle situation, à savoir la condition de bord libre sur les lèvres de la fissure et les conditions de continuité le long de la partie cohérente. Dans cette partie, l'élément RMQ-7 a été réécrit à partir d'un élément de référence dans un repère naturel (ξ, η).

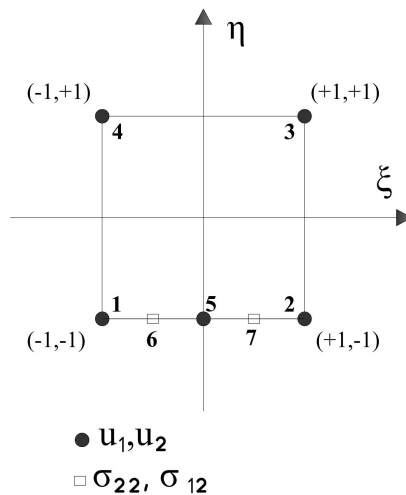


Fig. 3.19 : l'élément fini mixte RMQ-7.

3.3.3.4 Construction de l'élément d'interface RMQ-7

On commence par utiliser la formulation mixte de Reissner, où tous les déplacements et toutes les contraintes sont utilisés comme variables nodales, afin de créer l'élément mixte d'interface. Au début, on trouve donc des variables nodales supplémentaires :

- En ce qui concerne l'interface, cette formulation exige une continuité excessive. En effet, la contrainte σ_{11} est l'une des variables prises en compte dans la fonctionnelle de Reissner, mais elle n'est pas incluse dans les contraintes d'interface (contrainte de décollement σ_{22} et contrainte de cisaillement σ_{12}). Par conséquent, nous allons supprimer cette contrainte σ_{11} dans la formulation de l'élément de lien.
- La fonctionnelle de Reissner entraîne l'obtention d'éléments avec un nombre très élevé de degrés de liberté ; cependant, en pratique, il est évidemment intéressant de disposer d'éléments avec un nombre aussi faible que possible de degrés de liberté.

Elément mixte de Reissner Il s'agit d'un élément composé de quatre nœuds et de cinq degrés de liberté par nœud (tous les déplacements et toutes les contraintes). Cet élément est formulé selon le principe variationnel de Reissner. [34]

1. Elément de Reissner.

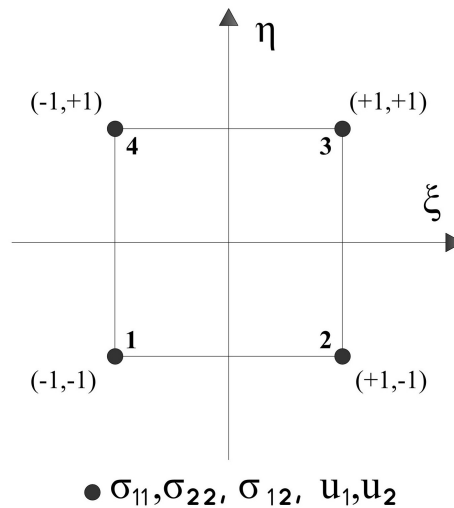


Fig. 3.20 : Elément de Reissner.

$$\{\varepsilon^e\} = [L_2] \{u^e\} \quad \text{sur } A^e, \quad \{u^e\} = \{u^{-e}\} \quad \text{sur } L_u \quad (3.106)$$

La fonctionnelle de Reissner (eq 3.105) s'écrit :

$$R(\{\sigma\}, \{u\}) = \frac{e}{2} \int_{A^e} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} -[S] & [I] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} dA^e - e \int_{L_\sigma} \{\overline{T}^e\}^t \{u^e\} dL_\sigma - e \int_{A^e} \{\phi^\varepsilon\}^t \{u^e\} dA^e \quad (3.107)$$

Où :

[I] : est la matrice unité.

[S] : est la matrice des souplesses.

A^e : est l'aire élémentaire .

e : est l'épaisseur de l'élément (supposée constante)

L_σ est la partie du contour de l'élément où les efforts $\{\bar{T}^e\}$ sont imposés.

$\{\sigma\}$ est le vecteur de contraintes pour un élément.

$\{\varepsilon\}$ est le vecteur de déformations pour un élément.

$\{u\}$ est le champ de déplacements.

$\{\phi^e\}$ est le vecteur forces de volume.

Le champ de contrainte en tout point s'écrit :

$$\{\sigma\} [M'] \{\tau\} \quad (3.108)$$

Où $[M']$ est la matrice des fonctions de forme (linéaire en ξ , linéaire en η).

Avec

$$\begin{aligned} \{\sigma^t\} &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\} \\ \{\tau\}^t &= \{\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \sigma_{12}^1, \sigma_{11}^2, \sigma_{22}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{11}^3, \sigma_{22}^3, \sigma_{12}^3, \sigma_{11}^4, \sigma_{22}^4, \sigma_{12}^4\} \\ [M] &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Les fonctions de forme sont données par [35] :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & M_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ M_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & M_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3.111)$$

Où N :

$[M]$ est la matrice des fonctions de forme (linéaire en ξ , linéaire en η) des déplacements (bilinéaire).

Avec :

$$\begin{aligned} \{u\}^t &= \{u_1, u_2\} \\ \{q\}^t &= \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3\} \\ [N] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Les fonctions de forme sont données par :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (3.113)$$

En introduisant les déformations à l'aide de la matrice $[B]$:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad (3.114)$$

Avec :

$[B]$ matrice liant les déformations aux déplacements.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Étant donné que la matrice $[N]$ dépend des variables (ξ, η) , on peut utiliser le jacobien $[J]$ -1 de la transformation géométrique inverse pour exprimer les dérivées par rapport à (x, y) en fonction de (ξ, η) .

On définit la matrice jacobienne $[J]$ comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

On a :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{cases} \quad (3.117)$$

Donc les termes de la matrice jacobienne peuvent être calculés par :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i; \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i.$$

Lorsque la matrice jacobienne $[J]$ n'est pas singulière, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.119)$$

L'approximation nodales des champs cinématique et statique est exprimée par :

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (3.120)$$

$$R = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}^t [K_e] \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{\Phi_\sigma^e\} \\ \{\Phi_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (3.121)$$

où $[K_e]$ est la matrice élémentaire de rigidité-souplesse définie par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Avec :

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (3.123)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M]^t [B] dA^e \quad (3.124)$$

Il y a deux vecteurs dans le vecteur des forces élémentaires équivalentes : l'un représentant les déplacements $\{\Phi_u^e\}$, le deuxième représentant les contraintes $\{\Phi_\sigma^e\}$, et il est nul en l'absence de déformations initiales.

Les vecteurs $\{\Phi_u^e\}$ et $\{\Phi_\sigma^e\}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \{\Phi_u^e\} &= e \int_{L_\sigma} [N]^t \{\bar{T}^e\} dL_\sigma \\ \{\Phi_\sigma^e\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.125)$$

Avec :

L_σ : Partie du contour où les contraintes sont imposées .

$[N]$: Matrice des fonctions de forme des déplacements.

$\{\bar{T}^e\}$: Traction imposée sur L_σ

2. Etude de la référence de l'élément RMQ-5 :

On obtient l'élément RMQ-5 en intégrant un nœud de déplacement à l'élément mixte de Reissner. Il s'agit d'un composant mixte comportant 5 nœuds et 22 degrés de liberté. Il a un côté (connecté à l'interface) qui comporte trois nœuds, le nœud central (nœud de déplacement) représente le fond de la fissure dans la version finale de l'accessoire.

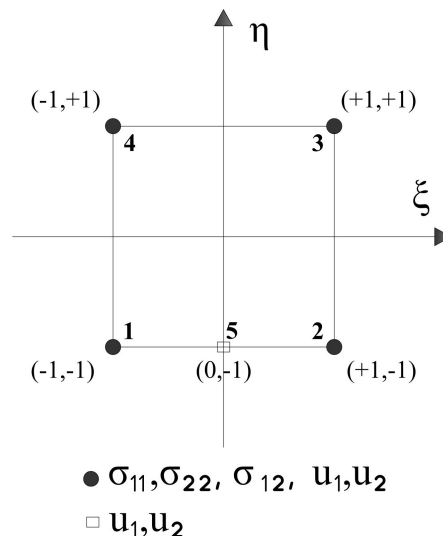


Fig. 3.21 : Élément de référence RMQ-5.

Alors que ni le nombre ni la position des nœuds contrainte n'ont changé, les éléments RMQ-5 et celui de Reissner ont le même comportement statique. Les mêmes fonctions de forme expriment le champ de contraintes.

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3.126)$$

Avec :

$$\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

Les fonctions de formes s'écrivent :

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi, \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi \quad (3.128)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \quad N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta).$$

La matrice $[B]$ liant les déformations aux déplacements est définie par :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Dans le cas de l'élément RMQ-5, les termes de la matrice jacobienne sont donnés par :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i; \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i.$$

Les champs cinématique et statique sont exprimés par :

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (3.131)$$

3. L'élément RMQ-11 :

On obtient l'élément RMQ-11 en relocalisant certaines variables à l'intérieur de l'élément de référence RMQ-5 et en déplaçant des nodales statiques inconnues des extrémités vers le côté lui-même. La méthode de relocalisation offre la possibilité d'éviter une continuité excessive à l'interface. L'élément RMQ-11 possède 11 nœuds et une liberté de 22 degrés [36].

En l'absence de changement de nombre ou de position des nœuds de déplacement, les éléments RMQ-5 et RMQ-11 ont conservé le même comportement cinématique. Les mêmes fonctions de forme expriment le champ de déplacement.

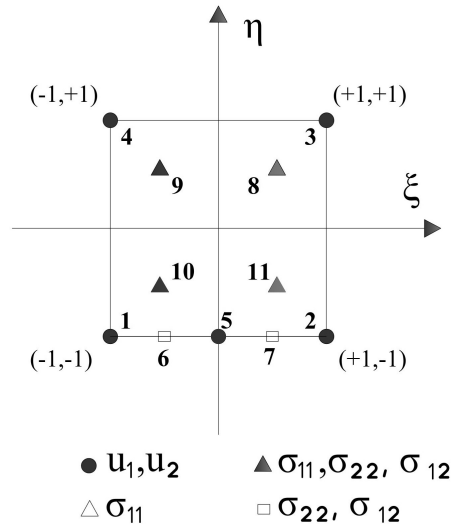


Fig. 3.22 : Élément de référence RMQ-11.

Le champ de contrainte dans l'élément RMQ-11 est approximativement généralisé.

$$\sigma(\xi, \eta) = \{p(\xi, \eta)\} \{\zeta\} \quad (3.132)$$

Avec : $\{P(\xi, \eta)\} = (1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta)$ est la base polynomiale de l'élément.

$\{\zeta\}$: Sont les variables généralisées.

On a :

$$\{\tau\} = [P_n] \{\zeta\} \quad (3.133)$$

Avec :

$[P_n]$: est la matrice nodale.

Donc l'approximation du champ de contraintes en fonction des variables nodales $\{\tau\}$ est :

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_n]^{-1} \{\tau\} \quad (3.134)$$

La contrainte σ_{11} dans l'élément est exprimée par :

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (3.135)$$

Avec :

$$[P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0.5 & +0.5 & +0.25 \\ 1 & -0.5 & +0.5 & -0.25 \\ 1 & -0.5 & -0.5 & +0.25 \\ 1 & +0.5 & -0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \text{ et } [M_{11}] = \{1 \ \xi \ \eta \ \eta\xi\} [P_{n11}]^{-1}$$

Dans la configuration de la figure 6.2, les fonctions de formes sont données :

$$M_{11}^8 = \frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 + 2\eta), \quad M_{11}^9 = \frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 + 2\eta);$$

(3.136)

par :

$$M_{11}^{10} = \frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 - 2\eta), \quad M_{11}^{11} = \frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 - 2\eta).$$

Les contraintes σ_{22} et σ_{12} sont évaluées par l'expression :

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (3.137)$$

Avec :

$$[P_{ni2}] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -1 & +0.5 \\ 1 & +0.5 & -1 & -0.5 \\ 1 & +0.5 & +0.5 & +0.25 \\ 1 & -0.5 & +0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \text{ et } [M_{i2}] = \{1 \ \xi \ \eta \ \eta\xi\} [P_{ni2}]^{-1} \quad i = 1, 2 \quad (3.138)$$

$$M_{i2}^6 = \frac{1}{6}(1 - 2\xi)(1 - 2\eta), \quad M_{i2}^7 = \frac{1}{6}(1 + 2\xi)(1 - 2\eta);$$

(3.139)

$$M_{i2}^8 = \frac{1}{3}(1 + 2\xi)(1 + \eta), \quad M_{i2}^9 = \frac{1}{3}(1 - 2\xi)(1 + \eta).$$

Le champ de contraintes est donné par :

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [M] \{\tau\} \quad (3.140)$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

et

$$\{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^6, \sigma_{22}^7, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{12}^6, \sigma_{12}^7, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9\} \quad (3.142)$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse est donnée par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Avec :

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (3.144)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M]^t [B] dA^e \quad (3.145)$$

La matrice élémentaire est calculée en utilisant une méthode d'intégration numérique basée sur la méthode de Gauss, où le déterminant du jacobien de la transformation géométrique est utilisé pour passer de l'élément réel à celui de référence.

4. Construction de l'élément RMQ-7 :

On obtient l'élément RMQ-7 en supprimant les variables internes de l'élément RMQ-11 par condensation statique.

L'inclusion des quatre nœuds internes de l'élément RMQ-11 dans l'assemblage rend l'opération de mise en donnée plus complexe et augmente la taille de la demi-largeur de bande pendant l'assemblage, ce qui entraîne une augmentation du temps de calcul.

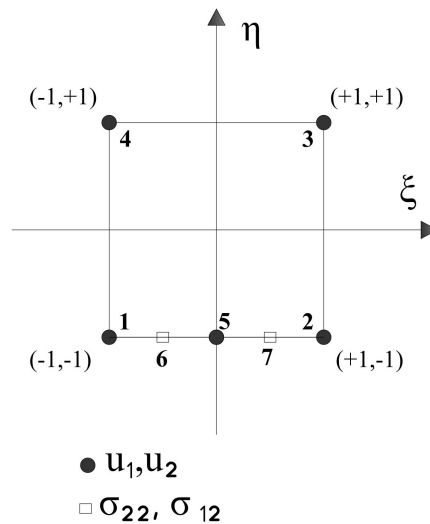


Fig. 3.23 : Élément RMQ-7.

Dans cette section, nous exposons une technique de condensation des variables internes au contour qui est associée à la notion générale de réduction de la taille d'un système d'équations en éliminant un certain nombre de degrés de liberté. Dans le domaine du calcul de structures, cette méthode est appelée analyse par sous-structures [37].

Initialement, la forme discrétisée de la fonctionnelle de Reissner est utilisée.

$$R = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t [K_e] \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\Phi_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (3.146)$$

Afin de simplifier la réalisation des calculs de l'opération de condensation, les degrés de liberté de contraintes au niveau élémentaire sont divisés en deux catégories :

$\{\tau_c\}$: Contraintes sur les contours de l'élément.

$\{\tau_i\}$: Contraintes à l'intérieur de l'élément.

La structure de la matrice élémentaire en ce qui concerne les groupes de degrés de liberté est représentée par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}]_i & [K_{\sigma\sigma}]_{ci} & [K_{\sigma u}]_i \\ [K_{\sigma\sigma}]_{ci}^t & [K_{\sigma\sigma}]_c & [K_{\sigma u}]_c \\ [K_{\sigma u}]_i^t & [K_{\sigma u}]_c^t & [0] \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Il n'y a pas d'assemblage des variables de contraintes, donc les équations qui leur sont associées ne prennent en compte que les degrés de liberté. Ainsi, nous pouvons établir une relation entre ces différents types de ddl en traduisant la condition de stationnarité de R par rapport à :

$$\frac{\partial R}{\partial \tau_i} = 0 \quad (3.148)$$

Ce qui donne comme relation :

$$[K_{\sigma\sigma}]_i \{\tau_i\} + [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_i\}_c + [K_{\sigma u}]_i \{q\} \quad (3.149)$$

ou encore :

$$\{\tau_i\} = -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau\}_c - [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \{q\} \quad (3.150)$$

La matrice $[K_{\sigma\sigma}]_i$ est un sous bloc diagonal d'une matrice symétrique définie négative, donc elle est toujours inversible.

On peut définir une matrice $[\varpi]$ de transformation des ddl permettant de définir la matrice de rigidité réduite relatives aux variables $\{q\}$ et $\{\tau_c\}$.

On a :

$$\begin{Bmatrix} \{\tau_i\} \\ \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = [\overline{W}] \begin{Bmatrix} \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (3.151)$$

Avec :

$$[\overline{W}] = \begin{bmatrix} -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} & -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \\ [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

et :

$[I]$: la matrice unité.

En remplaçant la relation (150) dans la fonctionnelle R (144), nous obtenons une fonctionnelle réduite qui ne dépend que des variables de contour et :

$$R^* = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} [K_e]^* \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\Phi_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (3.153)$$

où :

$[K_e]^*$ est la matrice élémentaire réduite définie par :

$$[K_e]^* = [\overline{W}]^t [K_e] [\overline{W}] \quad (3.154)$$

La matrice $[K_e]^*$ s'écrit :

$$[K_e]^* = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}]^* & [K_{\sigma u}]^* \\ [K_{u\sigma}]^* & [K_{uu}]^* \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

Avec :

$$[K_{\sigma\sigma}]^* = [K_{\sigma\sigma}]_c - [K_{\sigma\sigma}]_{ci} [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci}^t \quad (3.156)$$

$$[K_{\sigma u}]^* = [K_{\sigma u}]_c - [K_{\sigma u}]_i [K_{\sigma u}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i^t \quad (3.157)$$

$$[K_{u\sigma}]^* = [K_{\sigma u}]_i^{*t} \quad (3.158)$$

$$[K_{uu}]^* = [K_{\sigma u}]_i [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i^t \quad (3.159)$$

Le bloc $[K_{uu}^*]$ semi-défini positif est présent dans la matrice de rigidité réduite, tandis que dans la forme non réduite, ce bloc est toujours nul. La condensation des variables internes présente un grand intérêt en réduisant le temps de calcul lors d'une application. Sa mise en œuvre pratique est extrêmement simple, d'autant plus qu'il n'est pas nécessaire de modifier le vecteur du deuxième membre, car par hypothèse, les nœuds statiques ne sont pas chargés. Grâce à la méthode de condensation statique, nous parvenons à obtenir l'élément RMQ-7 qui ne comporte que 7 nœuds avec deux degrés de liberté par nœud (les nœuds 6 et 7 sont contraints par les variables σ_{22} et σ_{12} , tandis que le reste des nœuds sont en déplacement pur).

Les nœuds contenus à l'intérieur de l'élément renferment des degrés de liberté afin de compléter le jeu de variables dans l'interpolation polynomiale du champ de contrainte, ce qui entraîne la présence de nombreux nœuds et de nature variable. Ces nœuds rendent l'opération de mise en donnée plus complexe et augmentent la taille de la demi-largeur de bande lors de l'assemblage, ce qui entraîne une augmentation du temps de calcul.

La méthode employée pour condenser les degrés de liberté internes au contour est associée à la notion générale de réduction de la taille d'un système d'équations par élimination d'un certain nombre de variables. En 1976, Gallagher a employé ce genre de méthode pour calculer des structures (analyse par sous-structures).

5. L'élément d'interface RMQ-7 inversé :

En assemblant des éléments RMQ-7, il est nécessaire de prendre en compte des éléments d'interface inversés. Cela nous amène à réélaborer l'élément RMQ-7 inversé. En reprenant les étapes précédentes :

- Création d'un ensemble de références mixtes ;
- Déplacement de certains DDL à l'intérieur de l'élément et d'autres sur le contour - condensation statique des DDL placés à l'intérieur de l'élément, obtenant ainsi l'élément RMQ-7 inversé (élément d'interface inférieur).

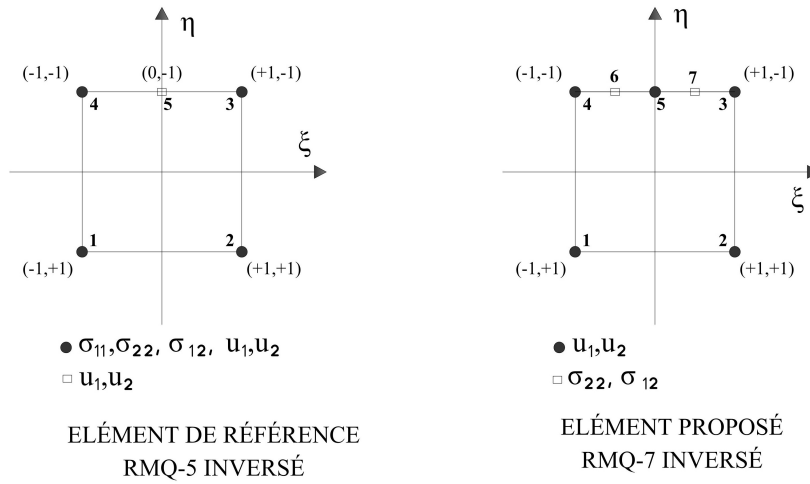


Fig. 3.24 : l'élément d'interface RMQ-7 inversé.

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3.160)$$

Avec :

$$\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\}$$

Les nouvelles fonctions de formes N_i sont données par :

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.161)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)\xi, \quad N_4 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)\xi, \quad N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta).$$

L'approximation du champ de contraintes en fonction des variables nodales $\{\tau\}$ est :

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_n]^{-1} \{\tau\} = [M] \{\tau\} \quad (3.162)$$

La contrainte σ_{11} dans l'élément est exprimée par :

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (3.163)$$

Avec :

$$[P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0.5 & -0.5 & -0.25 \\ 1 & -0.5 & -0.5 & +0.25 \\ 1 & -0.5 & +0.5 & -0.25 \\ 1 & +0.5 & +0.5 & +0.25 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [M_{11}] = \{1 \ \xi \ \eta \ \eta\xi\} [P_{n11}]^{-1}$$

Dans la configuration de la figure. 3.24 , les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned}
 M_{11}^8 &= \frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 - 2\eta), & M_{11}^9 &= \frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 - 2\eta); \\
 \text{par :} & & & \\
 M_{11}^{10} &= \frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 + 2\eta), & M_{11}^{11} &= \frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 + 2\eta).
 \end{aligned} \tag{3.164}$$

Les contraintes σ_{22} et σ_{12} sont évaluées par l'expression :

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \tag{3.165}$$

Avec :

$$[P_{ni2}] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & +1 & -0.5 \\ 1 & +0.5 & +1 & +0.5 \\ 1 & +0.5 & -0.5 & -0.25 \\ 1 & -0.5 & -0.5 & +0.25 \end{bmatrix} \quad \text{et } [M_{i2}] = \{1 \ \xi \ \eta \ \eta\xi\} [P_{ni2}]^{-1} \quad i = 1, 2 \tag{3.166}$$

Dans la configuration de la figure. 3.24 , les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned}
 M_{i2}^6 &= \frac{1}{6}(1 - 2\xi)(1 + 2\eta), & M_{i2}^7 &= \frac{1}{6}(1 + 2\xi)(1 + 2\eta); \\
 M_{i2}^8 &= \frac{1}{3}(1 + 2\xi)(1 - \eta), & M_{i2}^9 &= \frac{1}{3}(1 - 2\xi)(1 - \eta).
 \end{aligned} \tag{3.167}$$

Le champ de contraintes est donné par : Le champ de contraintes est donné par :

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [M] \{\tau\} \tag{3.168}$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \tag{3.169}$$

et

$$\{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^6, \sigma_{22}^7, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{12}^6, \sigma_{12}^7, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9\} \tag{3.170}$$

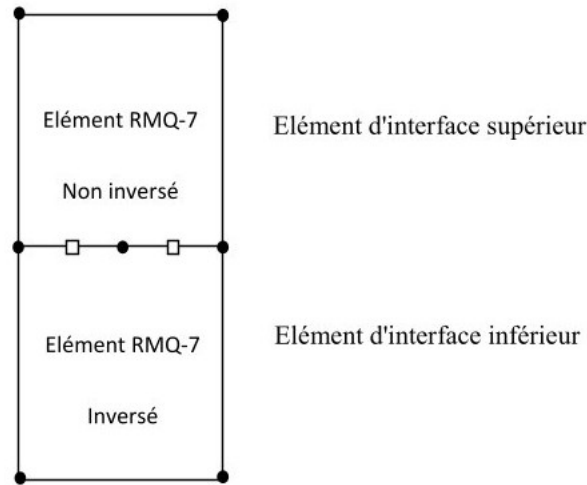


Fig. 3.25 : assemblage de deux éléments RMQ-7.

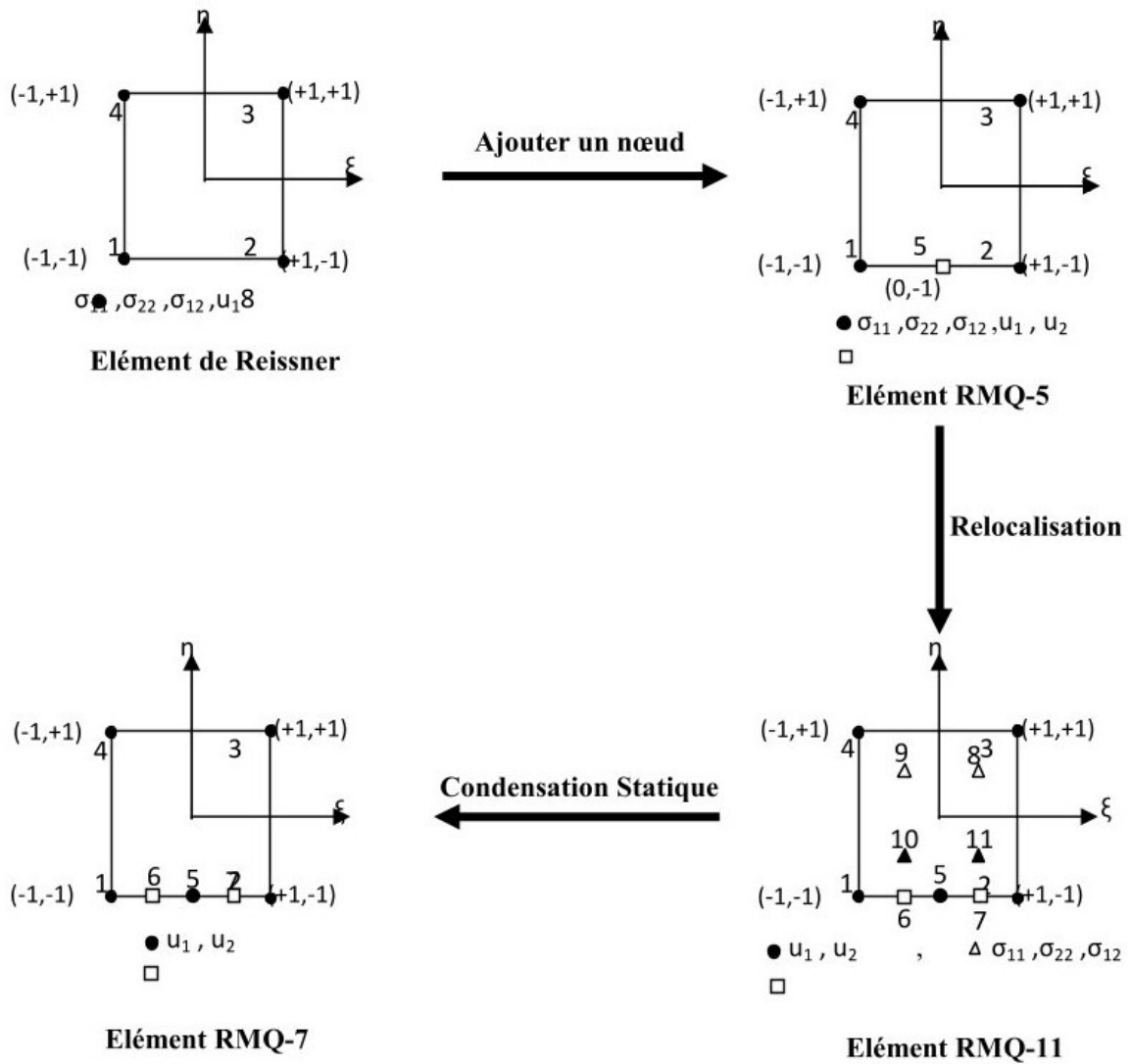


Fig. 3.26 : Construction de l'élément RMQ-7 [6].

3.4 Conclusion :

L'élément de fini mixte RMQ-7 (Reissner's Modified Quadrilateral with 7-nodes) peut être utilisé pour résoudre des problèmes avec des matériaux composites tels que le phénomène de fissuration.

Il a été utilisé dans cette étude pour calculer le taux restitution d'énergie de en cas de fissuration avec coudage (kinking).

Chapitre 4

Modèle de calcul du taux de restitution d'énergie G de la propagation dynamique d'une fissure (coudage ou kinking).

4.1 Introduction

Le coudage ou le branchement se produit lorsque la fissure se propage dans une direction inclinée de sa direction initiale. Il existe de nombreuses raisons pour ce changement de direction, mais les principales sont : la non-symétrie géométrique et des charges, les différences de caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites.

Le coudage d'une fissure, également connu sous le nom de kink en anglais, est utilisé lorsque celle-ci se propage dans son plan sans être linéaire à son axe, mais se coude d'un angle par rapport à son axe. Ce coudage peut entraîner des dommages catastrophiques si on ne connaît pas son chemin, ce qui soulève la nécessité de le prévoir. Il est essentiel d'analyser le coudage (kinking) d'une fissure afin de prévenir la fissuration des structures à l'avenir. Souvent, cela se produit en réponse aux contraintes antisymétriques situées à la pointe de la fissure préexistante (appelée principale).

On peut observer le coudage (kinking) en raison de la configuration géométrique (non symétrique), du chargement ou de l'anisotropie du matériau. Les causes peuvent également être la microstructure du matériau et les défauts initiaux, mais ils demeurent complexes à comprendre. Le coudage évolue en mode mixte, c'est-à-dire en combinant le mode I (ouverture de fissure) et le mode II (glissement dans le plan des lèvres).

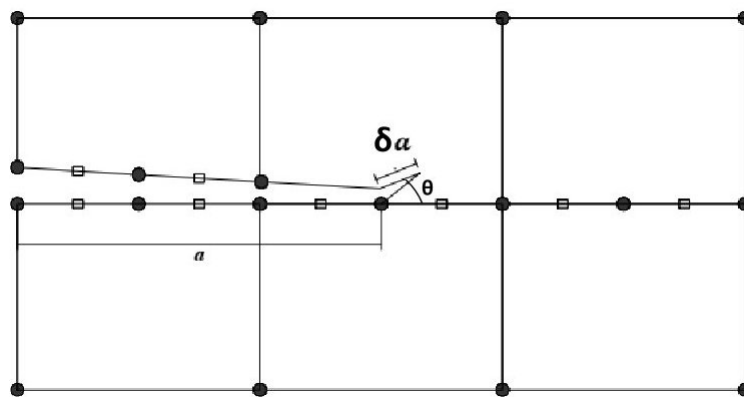


Fig. 4.27 : propagation d'une fissure inclinée (coudage -Kinking).

4.2 Un rappel historique

La détermination de la direction du coudage est d'une importance capitale et de nombreux auteurs ont développé des techniques pour anticiper l'angle de coudage par rapport à la direction initiale de fissure. De Xie ainsi que ses collègues [38]; Azdhari et Nemat-Nasser [39]. Ce phénomène a été examiné dans plusieurs études pour des solides isotropes.

En utilisant des angles de coudage de petite taille (Kink), Hayashi et Nemat Nasser ont obtenu les formes des expressions finales du taux de restitution d'énergie G . De plus, Hayashi et Nemat Nasser ont étudié la validité de la forme d'Irwin pour le coudage [40].

Plusieurs chercheurs ont examiné la question du calcul du taux de restitution d'énergie d'une fissure liée à une extension avec coudage (kinking) (Anderson [41]; Cotterell et Rice [42]; Maiti [43]). Des solutions analytiques ont été élaborées principalement pour les matériaux isotropes. Ces recherches se sont étendues aux matériaux orthotropes (Maiti) [43] et aux matériaux bi-matériaux (Zak et Williams) [44]. Plusieurs études ont également porté sur des modèles numériques utilisant la méthode des éléments finis.

Il est très important d'étudier une fissure existante et de sa stabilité. En effet, la croissance d'une fissure peut entraîner la rupture d'un élément qui entraînerait la détérioration complète de la structure. On peut utiliser la mécanique de la rupture pour analyser ce type de situation en se référant aux caractéristiques intrinsèques de rupture du matériau, telles que le facteur d'intensité de contrainte critique (K_c) ou le taux de restitution d'énergie critique (G_c), également connu sous le nom de ténacité.

L'ingénierie utilise fréquemment des structures avec des configurations géométriques complexes et un environnement de chargement variable. Cela rend l'analyse des problèmes de mécanique de la rupture impossible, ce qui entraîne l'utilisation d'approches numériques comme la méthode des éléments finis. Les calculs numériques se basent sur les résultats expérimentaux afin d'obtenir certains paramètres d'entrée des modèles et de vérifier les résultats de calcul.

4.3 Approche proposée pour l'étude du coudage

Les recherches théoriques menées dans le domaine des structures fissurées ne portent que sur des situations simples (plaques infinies...) où les champs de contraintes et de déplacements à la pointe de fissure sont entièrement définis, permettant ainsi de déterminer analytiquement le taux de restitution d'énergie. Étant donné leur complexité, il est impossible de traiter analytiquement les structures réelles, ce qui a conduit les ingénieurs et les chercheurs à utiliser des méthodes numériques afin d'atteindre la solution précise.

De nos jours, les méthodes numériques sont classées en deux grandes catégories : les méthodes locales et les méthodes globales.

- Méthodes locales

Il y a deux approches dans les méthodes locales, l'une appelée cinématique et la seconde appelée statique. La méthode cinématique utilise les déplacements des lèvres de fissure pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes, tandis que la méthode statique utilise le champ de contraintes à proximité de la pointe de fissure pour évaluer ces mêmes facteurs. Après avoir identifié les facteurs d'intensité des contraintes, on calcule le taux de restitution d'énergie en utilisant des relations qui les relient.

- Méthodes globales

Les approches globales reposent sur des considérations énergétiques de l'ensemble de la structure. La méthode de l'intégrale J et la méthode d'extension virtuelle de fissure est parmi ces méthodes.

La formule de Rice [45] du paramètre J est utilisée pour élaborer la méthode de l'intégrale J, qui est une intégrale de contour distincte de celle-ci. On utilise cette méthode pour mesurer l'énergie à la pointe de la fissure sur un contour qui contient la fissure.

D'autres approches qui découlent de celle-ci sont également employées, comme la méthode de l'intégrale (Chen et Shield,) [46]. Le taux de restitution d'énergie est directement fourni par la méthode d'extension virtuelle de fissure, en prenant en compte une évolution de la fissure avec un incrément (∂a), ce qui entraîne une libération d'une quantité d'énergie ∂W_{els} .

La méthode de la fermeture virtuelle de fissure (Rybicki et Kanninen) [47] est également employée pour calculer directement le taux de restitution d'énergie.

4.4 Modèle d'évaluation du taux restitution d'énergie dans le cas du cou dage

En direction de son axe. On évalue à nouveau l'énergie de déformation dans cette deuxième configuration. En utilisant la méthode d'extension virtuelle de fissure, il est nécessaire de réaliser deux analyses par éléments finis pour calculer G . L'énergie de déformation dans la configuration initiale de la fissure est déterminée dans un premier calcul. Par la suite, la fissure est déplacée d'une distance infinitésimale.

- Élément utilisé : RMQ-7

C'est un élément fini de type mixte. Construit pour la modélisation des interfaces fissurées [33], il se présente sous la forme d'un quadrilatère comportant sept (7) nœuds et quatorze (14) degrés de liberté, comme illustré dans la figure 4.28. Parmi ses nœuds, cinq sont de type déplacement et les deux autres sont de type contrainte. Il y a quatre nœuds de déplacement situés aux angles du quadrilatère, tandis que le cinquième est situé au centre du côté interface spécial. Cette pointe de fissure correspond à la pointe de fissure dans la modélisation des structures fissurées.

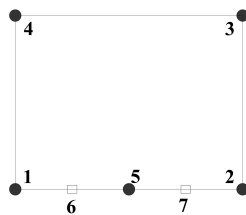


Fig. 4.28 : Configuration de l'élément RMQ-7.

- Technique d'extension virtuelle de fissure :

La méthode proposée par Parks et Hellen a été utilisée pour évaluer le taux de restitution d'énergie. Lors du premier calcul, on évalue l'énergie de déformation $W_{els}(a)$ dans la configuration initiale de la fissure [48]. Ensuite, on la quantifie une deuxième fois dans la configuration « $a + \partial a$ » où ∂a correspond à un déplacement infinitésimal de la pointe de fissure. La quantité d'énergie libérée est :

$$dW_{els} = W_{els}(a) - W_{els}(a + \partial a) \quad (4.171)$$

La relation suivante permet d'obtenir le taux de restitution d'énergie G :

$$G = \frac{dW_{els}(\varepsilon)}{\partial a} \quad (4.172)$$

Evaluation du taux de restitution d'énergie

Le taux de restitution d'énergie G est calculé en utilisant la méthode d'extension virtuelle associée à l'élément RMQ-7 lors du cou dage. Selon Bouzerd et Courtade (1992), il a été démontré que pour calculer le taux de restitution d'énergie, il suffit d'effectuer une seule discrétisation dans le cas d'une extension colinéaire à la fissure. Dans cette étude, on suit la même approche tout en ajoutant quelques ajustements afin de prendre en considération le fait que l'extension n'est pas linéaire avec la fissure .

Cette estimation est d'autant plus plausible que la valeur de ∂a est faible. C'est pourquoi le choix de ∂a est crucial dans cette analyse. En théorie, il est préférable de sélectionner une valeur de ∂a aussi faible que possible pour représenter numériquement correctement les relations (4.171) et (4.172).

La réorganisation du maillage autour de la pointe de fissure nécessite une réorganisation qui ne concerne que quatre (4) éléments : les deux éléments (supérieur et inférieur) qui contiennent la pointe de fissure et les deux éléments immédiatement liés à eux dans le sens de l'évolution de la fissuration. Le reste du maillage reste inchangé, comme illustré dans la figure 4.29.

La méthode recommandée par Bouzerd permet de calculer le taux de restitution d'énergie G . On l'évalue en analysant la configuration « $a + \partial a$ » avec une inclinaison (coudage) donnée. Dans cette étude, on calcule implicitement la configuration « a » lors d'un premier traitement en annulant ∂a et en stockant les matrices élémentaires correspondantes des éléments mentionnés.

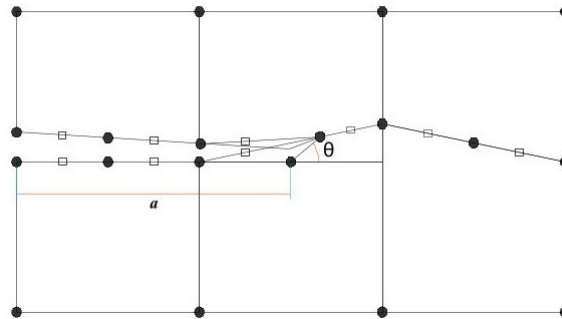


Fig. 4.29 : Le maillage autour de la nouvelle pointe de fissure est réorganisé.

Lorsque les vitesses de propagation des fissures sont élevées dans les problèmes de chargement rapide, il est essentiel de considérer les concepts d'inertie lors de la formulation et de la résolution du problème. La propagation dynamique des fissures est alors évoquée (Attigui 1997).

Le domaine de l'analyse de la rupture dynamique est une branche de la mécanique de la rupture où les effets de l'inertie prennent une importance prépondérante par rapport au chargement, tandis que le taux de déformation a une influence importante sur les caractéristiques du matériau et comment la rupture se déroule.

L'apparition d'une rupture dynamique ou la propagation dynamique d'une fissure existante peut être causée par un impact sur la structure concernée ou par l'application brutale d'un chargement qui peut endommager et créer des discontinuités dans le matériau. Les premières études empiriques sur la rupture dynamique portent sur le développement de l'artillerie au 19e siècle pour perforer des cibles.

La rupture dynamique ne devient une science de l'ingénieur que dans les années 40, en tant que partie de la mécanique de la rupture.

Les problèmes de fracture dynamique concernent l'initiation et la propagation des fissures. Il existe deux principaux types de problèmes. L'un applique une charge dynamique à un corps contenant des fissures fixes et l'autre s'intéresse à un corps avec une propagation d'une fissuration. Le deuxième type de problèmes peut être classé en deux modes différents ; propagation et génération.

Les problèmes de fissuration stationnaire comprennent des fissures dans des structures qui sont soumises à une charge dynamique, comme une charge d'impact. Par exemple, Chen a effectué une analyse numérique pour trouver le facteur d'intensité de contrainte dynamique pour une plaque rectangulaire ayant une fissure centrale. Il a utilisé la technique de différence finie et discuté du comportement dynamique du facteur d'intensité de contrainte. Il a soutenu que les oscillations sur la courbe d'intensité de contrainte par rapport au temps étaient principalement dues à des phénomènes de dispersion provenant de la pointe de fissure et des surfaces limites. Il a conclu que le dépassement du facteur d'intensité de contrainte dynamique est principalement attribué à la géométrie et au chargement [49].

La fissuration avec coudage dans un contexte dynamique présente des défis particuliers, car les charges et les forces varient avec le temps, différents paramètres intrinsèques au matériau influencent l'évolution d'une fissure, tels que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure, ou extrinsèques tels que l'étendue de cette fissure ou la nature des charges appliquées. Il est nécessaire d'inclure tous ces paramètres dans la simulation numérique afin de pouvoir étudier la propagation d'une ou de plusieurs fissures. On pourra alors se demander : à quel moment la fissure va-t-elle se propager, puis (si le chargement ou la géométrie de la structure n'est pas symétrique) dans quelle direction, et enfin, une propagation stable ou instable ?

L'étude examine le phénomène d'une fissuration avec coudage (kinking) des matériaux composites dans le cas de dynamique définie par la structure, et l'objectif de cette étude est calculer le taux de restitution d'énergie.

Le taux de restitution d'énergie dans le cas dynamique en peu calculé par l'équation suivants :

$$G = \frac{\partial W_{els}}{\partial a} - \frac{\partial W_{ext}}{\partial a} - \frac{\partial W_{cin}}{\partial a} \quad (4.173)$$

$$W_{cin} = \frac{1}{2} k^2 \gamma a^2 \dot{a}^2 \left(\frac{P}{E} \right)^2 \quad (4.174)$$

γ : la masse volumique ;

a : La longueur de la fissure ;

\dot{a} : la vitesse de la fissure ;

k : constante ;

E : module de Young ;

P : la charge

donc l'expression du taux de restitution d'énergie G pour calcul la propagation dynamique du fissure (coudage) est donnée par la relation :

$$G = \frac{W_{els}(a + \partial a) - W_{els}(a)}{\partial a} - \frac{W_{cin}(a + \partial a) - W_{cin}(a)}{\partial a} \quad (4.175)$$

Le taux de restitution d'énergie G , représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. et pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie il y a plusieurs technique par

exemple la technique d'extension virtuelle de fissure, introduite par (Hellen 1975) et (Parks1974) , permet de calculer la variation d'énergie potentielle totale en introduisant une extension virtuelle de fissure ∂a . Le taux de restitution d'énergie est obtenu par la relation suivante :

$$G = \frac{\partial W_{els}}{\partial a} \quad (4.176)$$

$$\partial W_{els} = W_{els}(a) - W_{els}(a + \partial a) \quad (4.177)$$

Dans le cas d'une extension colinéaire à la fissure (Bouzard 1992) par la méthode d'extension virtuelle associée a' l'élément RMQ-7 est utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie dans le cas du coudage avec les hypothèses du comportement élastique linéaire en petits déplacements, et que le chargement extérieur ne varie pas au cours de l'accroissement ∂a .

le taux de restitution d'énergie se calcule comme suit :

$$G = \frac{W_{els}(a + \partial a) - W_{els}(a)}{\partial a} \quad (4.178)$$

Où $W_{els}(a + \partial a)$ et $W_{els}(a)$ représentent respectivement l'énergie de déformation de la structure fissurée dans les configuration $(a + \partial a)$ et (a) . et l'énergie de déformation s'écrit :

$$W_{els} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ne} \{V\}_i^t [K]_i \{V\}_i \quad (4.179)$$

Avec :

$[K]_i$: matrice de rigidité l'élément i , et l'exposant t indique la transposition,

$\{V\}_i$: Vecteur colonne contenant les valeurs nodales de l'élément i ,

ne : nombre total d'élément dans la structure discrétisée,

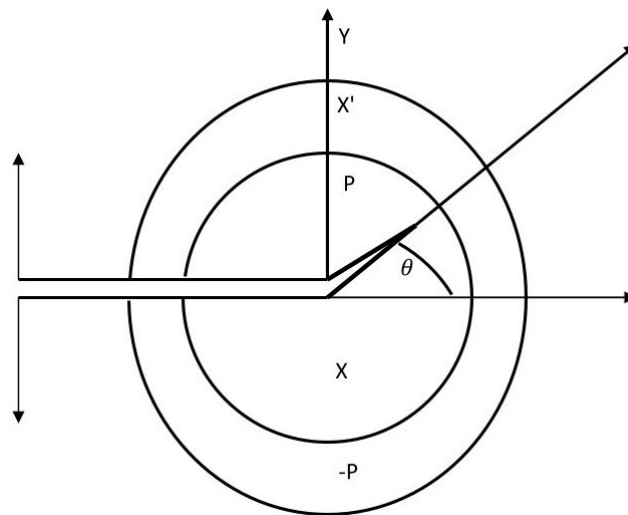


Fig. 4.30 : Coudage (kinking).

Exemple de validation :

Il s'agit d'une plaque soumise à une traction normale $\sigma = 1Mpa$, la plaque est constituée d'un matériau homogène isotrope dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

Module d'élasticité $E = 32\text{ Gpa}$, coefficient de poisson $\nu = 0.2$, la masse volumique $\rho = 2450\text{ kg/m}^3$ et les dimensions géométriques de la plaque sont : Longueur de la plaque $L = 100\text{ mm}$, la largeur de la plaque $b = 40\text{ mm}$, longueur de la fissure $a = 50\text{ mm}$, angle du cou dage : 30°

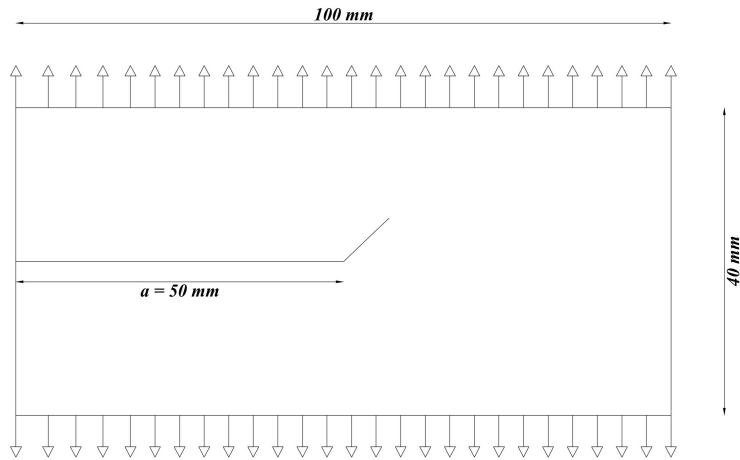


Fig. 4.31 : Plaque étudiée.

La structure a été discrétisée en utilisant l'élément RMQ-7. après une étude le maillage constitué de 4200 éléments et 10821 nœuds a été retenu , comme illustré dans la la figure 4.32.

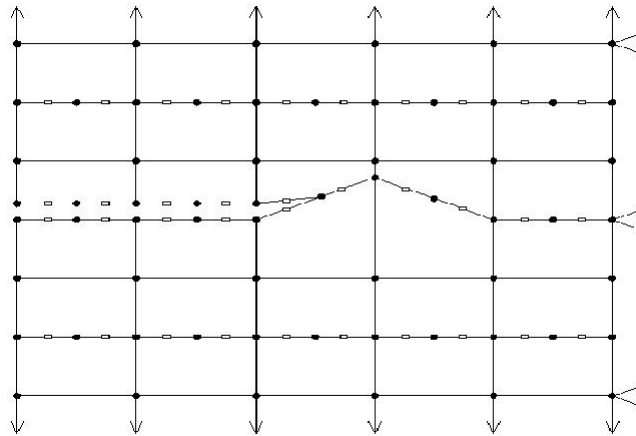


Fig. 4.32 : Maillage avec RMQ-7.

Après plusieurs essais avec de différentes vitesses (vitesse imposé), Les résultats obtenus sont comparés a' ceux de la solution analytique, et par la formule suivante :

$$G_t = \int \sigma(U_t, \theta_t) \cdot (\nabla U_t \nabla \theta_t) + \frac{1}{2} \rho \dot{U}_t \cdot \dot{U}_t (U_t) \text{div} \theta - \frac{1}{2} \sigma(U_t, \theta_t) \varepsilon(U_t) \text{div} \theta_t + \rho \ddot{U}_t \nabla U_t \theta_t + \rho U_t \nabla \dot{U}_t \theta_t \quad (4.180)$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

V (m/s)	Angle de la fissure $\theta(^{\circ})$	G calculé (J/m^2)	G analytique (J/m^2)	Erreur (%)
18.18	30	0.119	0.115	+3.361
20	30	0.120	0.125	-4.166
25	30	0.119	0.110	+7.563
33.33	30	0.120	0.125	-4.166
100	30	0.147	0.135	+8.163

Tab. 4.1 : Valeurs du taux de restitution d'énergie G.

Essai avec une vitesse $V = 100(m/s)$:

Angle de la fissure $\theta(^{\circ})$	0	15	30	50	60	75	90
G (J/m^2)	0.206	0.199	0.147	0.1332	0.1033	0.0558	0.006

Tab. 4.2 : Taux de restitution d'énergie G pour différents valeurs de l'angle.

Pour mettre en évidence l'importance du choix de d'extension Δa .nous avons fait des testes numériques en utilisant plusieurs valeurs de Δa .

Essai avec une vitesse $V = 100(m/s)$ et $\theta^{\circ} = 0$:

Δa	600	800	10^3	10^4	10^6	10^8
G (J/m^2)	0.2195	0.2113	0.2063	0.1877	0.1856	0.1856

 Tab. 4.3 : G pour différents valeurs de Δa et $\theta^{\circ} = 0$.

Essai avec une vitesse $V = 100(m/s)$ et $\theta^{\circ} = 60$:

Δa	600	800	10^3	10^4	10^6	10^8
G (J/m^2)	0.1108	0.1061	0.1033	0.0938	0.0928	0.0928

 Tab. 4.4 : G pour différents valeurs de Δa et $\theta^{\circ} = 60$.

Essai avec une vitesse $V = 100(m/s)$ et $\theta^\circ = 90$:

Δa	600	800	10^3	10^4	10^6	10^8
G (J/m^2)	0.0110	0.0082	0.0065	$6.44.10^4$	$6.43.10^6$	$7.14.10^8$

Tab. 4.5 : G pour différents valeurs de Δa et $\theta^\circ = 90$.

Les résultats obtenus de la valeur du taux de restitution d'énergie dans le cas dynamique par la méthode des éléments finis mixte RMQ-7 sont proches avec les valeurs analytiques, D'après les résultats obtenus on remarque que l'énergie cinétique est très petite (négligeable) par rapport l'énergie de déformation c'est-à-dire le taux de restitution d'énergie dynamique égale le taux de restitution d'énergie statique. L'efficacité de l'élément RMQ-7 dans les cas dynamiques est soulignée par sa capacité à fournir des évaluations précises du taux de restitution d'énergie dans diverses conditions d'essai. En faisant varier la vitesse dans chaque essai.

4.5 Conclusion :

Le modèle proposé pour calculer le taux de restitution d'énergie G, utilisant l'élément RMQ-7 en conjonction avec la technique de propagation virtuelle de fissure, représente un progrès significatif dans l'analyse de la propagation des fissures, en particulier sous conditions de charge dynamique. L'élément RMQ-7 est conçu de manière unique pour évaluer le taux de restitution d'énergie G pour les scénarios impliquant la torsion de fissure, un aspect critique de la mécanique des fractures où le chemin de fissure dévie de sa trajectoire initiale. Ce modèle se distingue par l'incorporation de variables statiques et cinématiques à des nœuds spécifiques, assurant une évaluation complète des champs de contrainte et de déformation autour de la pointe de fissure.

L'élément RMQ-7 nécessite des variables statiques σ_{12} et σ_{22} aux nœuds de contrainte 6 et 7, respectivement. Ces variables sont essentielles pour capturer avec précision l'état de contrainte dans le voisinage du lèvres de fissure. Les nœuds de contrainte servent de points critiques où les contraintes locales sont évaluées, fournissant des informations cruciales sur la résistance du matériau à la propagation de fissuration.

En plus de ces variables statiques, le modèle intègre également des variables cinématiques aux nœuds restants. Cette combinaison permet une description détaillée du champ de déplacement autour de la fissure, ce qui est essentiel pour déterminer la déformation et le taux de libération d'énergie subséquente.

La fissure se forme généralement lorsqu'un matériau est soumis à des contraintes dépassant sa résistance à la rupture, créant un début de fracture. La propagation dynamique implique que cette fissure s'étend rapidement sous l'effet de charges variées, telles que des chocs, vibrations, ou variations rapides de pression. La propagation dynamique se distingue de la propagation statique par la rapidité de l'évolution de la fissure. Elle peut se produire à des vitesses proches ou supérieures à celle du son dans le matériau (vitesse de propagation supersonique dans le cas des fissures "soudaines")

La propagation dynamique est gouvernée par des critères de fracture, comme le critère de Griffith pour la rupture fragile (relatif à l'énergie de surface) et les critères de résistance au cisaillement ou à

l'ouverture pour les matériaux ductiles. Des facteurs comme l'énergie libérée par la rupture, la vitesse de propagation et l'intensité des contraintes autour de la fissure jouent un rôle majeur.

La vitesse de propagation de la fissure peut varier en fonction de la vitesse de chargement. Si la fissure dépasse une certaine vitesse, des phénomènes de rupture explosive ou de dégradation rapide peuvent se produire. Dans certains matériaux, la fissure peut atteindre des vitesses supersoniques, créant des ondes de choc dans le matériau.

La propagation dynamique d'une fissure est un phénomène complexe qui résulte de l'interaction entre les forces appliquées, les propriétés du matériau, et les conditions de fracture. Ce processus doit être soigneusement étudié pour prédire et prévenir les défaillances dans les matériaux et structures exposées à des sollicitations dynamiques.

Conclusion

Les matériaux composites, grâce à leurs propriétés uniques telles que leur légèreté, leur résistance mécanique et leur faible sensibilité à la fatigue, ont trouvé une place prépondérante dans des secteurs variés tels que l'aéronautique, l'automobile, et les infrastructures. Toutefois, leur complexité structurale les rend vulnérables à certains phénomènes, notamment la fissuration, un enjeu majeur pour leur durabilité et leur performance. Ce mémoire s'est consacré à l'étude spécifique des fissures dynamiques avec coudage, un sujet complexe mais crucial pour les applications industrielles.

L'objectif principal de cette recherche a été de développer un modèle numérique robuste capable d'évaluer le taux de restitution d'énergie (G) dans des conditions de chargement dynamique, en s'appuyant sur un élément fini mixte innovant, le RMQ-7. Ce modèle a permis d'approfondir la compréhension des mécanismes de propagation des fissures et d'étudier comment le coudage, en tant que phénomène de déviation, impacte les champs de contraintes et la stabilité des matériaux composites. Les résultats obtenus ont mis en évidence plusieurs aspects fondamentaux :

- Le coudage modifie considérablement les champs de contraintes autour de la fissure, créant des zones de concentration qui accélèrent ou freinent la propagation selon la configuration du matériau et la nature des charges appliquées.
- Les chargements dynamiques, par leur rapidité et leur intensité, amplifient les variations de vitesse et de direction des fissures, soulignant la nécessité d'une modélisation précise pour anticiper leur comportement.
- L'association de l'élément fini mixte RMQ-7 avec la technique d'extension virtuelle des fissures a démontré sa pertinence en fournissant des résultats proches des solutions analytiques, notamment pour des géométries complexes et des matériaux anisotropes.

En s'appuyant sur ces observations, cette étude contribue non seulement à enrichir la mécanique de la rupture dans le contexte des chargements dynamiques, mais également à fournir des outils et des approches méthodologiques applicables à d'autres types de matériaux ou configurations. Par exemple, les résultats pourraient être utilisés pour optimiser la conception des structures composites soumises à des conditions extrêmes, comme les impacts ou les vibrations, en améliorant leur résistance à la fissuration tout en réduisant les risques d'instabilité structurale.

Malgré les avancées significatives réalisées dans ce travail, certaines limites subsistent. L'analyse s'est concentrée principalement sur des configurations spécifiques, et l'influence des facteurs multiphysiques, tels que les variations thermiques ou les interactions hydromécaniques, n'a pas été pleinement explorée. Intégrer ces paramètres dans les futurs travaux offrirait une vision plus globale et réaliste des comportements des matériaux composites dans des environnements complexes.

Enfin, cette recherche ouvre la voie à plusieurs perspectives intéressantes :

1. Amélioration des modèles numériques : L'extension du modèle RMQ-7 à des matériaux plus hétérogènes ou multi-couches permettrait de mieux représenter la diversité des composites industriels.
2. Expérimentations avancées : La validation expérimentale des résultats numériques à l'aide d'essais dynamiques sur des échantillons composites apporterait des données concrètes pour renforcer la fiabilité des prédictions.
3. Applications pratiques : Le développement d'outils logiciels basés sur ce modèle pourrait faciliter l'analyse et la conception de structures composites dans des secteurs comme l'aéronautique ou l'énergie renouvelable.

En conclusion, ce travail met en lumière la richesse et la complexité des phénomènes dynamiques liés aux fissures dans les matériaux composites. Il illustre l'importance de combiner des approches numériques avancées avec une réflexion approfondie sur les propriétés matérielles pour proposer des solutions durables et innovantes. Grâce à ces avancées, il est possible de répondre aux exigences croissantes de l'industrie tout en contribuant à une meilleure compréhension des phénomènes de rupture dans des matériaux stratégiques.

Références

- [1] Bouchard, P. O. (2000). Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux , These de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [2] Zeghloul, A. (2016). cours concept fondamentaux de la mécanique de la rupture Master ,Mécanique, Matériaux, structures, Procédés, Université De lorraine.
- [3] Zhang, X. B. (1992). Étude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture , Thèse de Doctorat, Université de Clermont-Ferrand 2.
- [4] Michel, B. (1992). Freund, LB, Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge etc., Cambridge University Press 1990. XVII, 563 pp., L 40.00 H/b. ISBN 0-521-30330-3 ,Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.
- [5] Bouzerd, H. (1992). Elément fini mixte pour interface cohérente ou fissurée , Thèse de Doctorat, Université de Claude Bernard Lyon 1.
- [6] Bougueroua, A. (2006). Propagation du délaminage dans les stratifiés ,Mémoire de Magister ,Université du 20 Aout 1955,Skikda.
- [7] Bouchard, P. O. (2000). Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux , these de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [8] Schijve, J. (2001). Stress intensity factors of cracks. Fatigue of Structures and Materials, 84-114.
- [9] Schijve, J. (2001). Stress intensity factors of cracks. Fatigue of Structures and Materials, 84-114.
- [10] Iost, A. (2013). Détermination de la ténacité de matériaux fragiles ou ductiles à partir de l'essai d'indentation. Metallurgical Research and Technology, 110(3), 215-233.
- [11] Anderson, T. L.(1995) Fracture Mechanics-Fundamentals and Applications.
- [12] Djebbloun, Y. (2004). Etude de la rupture en MODE I d'ouverture des matériaux composites , These de Doctorat, Université de Mohamed Khider, Biskra.
- [13] Diha, A. (2018). Mécanique de la rupture, cours et exercices , Polycopie de Cours, Université de Echahid Cheikh Al-Arabi Al-Tabsi, Tbessa.
- [14] Lieurade, H. P, and Jian, L. U. (2012). Concentration de contraintes. Ed. Techniques Ingénieur.

- [15] Griffith, A. (1921). VI. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, 221(582-593), 163-198.
- [16] Leblond, JB et Germain, P. (2003). Mécanique de la rupture fragile et ductile . Publications scientifiques Hermès.
- [17] Nguyen, T. H. (2009). Prédiction de la non-rupture fragile dans un joint soudé en acier C-Mn dans le domaine de la transition fragile/ductile , Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lille.
- [18] Erdogan, F., and Sih, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear.
- [19] Saouma, V. E., Ayari, M. L., and Leavell, D. A. (1987). Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids. Engineering Fracture Mechanics, 27(2), 171-184.
- [20] Irwin, GR (1957). Analyse des contraintes et des déformations à proximité de l'extrémité d'une fissure traversant une plaque.
- [21] Nistor, I. (2005). Identification expérimentale et simulation numérique de l'endommagement en dynamique rapide (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique ,Toulouse.
- [22] Wu, S. (2017). Interface et adhésion des polymères . Routledge.
- [23] Yoffe, E. H. (1951). LXXV. The moving griffith crack. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 42(330), 739-750.
- [24] Menouillard, T. (2007). Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus , Thèse de Doctorat, Lyon, INSA.
- [25] Courtade, R., and Bouzerd, H. (1991). plasticité autour d'un trou circulaire, analyse théorique et numérique. 10ème congrès français de mécanique, pp197-200, 2-6.
- [26] Craveur, J. C. (2022). Modélisation par éléments finis. Dunod.
- [27] Pian, T. H., and Tong, P. (1969). Basis of finite element methods for solid continua. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1(1), 3-28.
- [28] Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. Journal of Mathematics and Physics, 29(1-4), 90-95.
- [29] Hu, H. C. (1955). On some variational principles in the theory of elasticity and plasticity. Sci. Sin., 4, 33-54.
- [30] Washizu, K. (1955). On the variational principles of elasticity and plasticity. MIT Aeroelastic and Structures Research Laboratory.
- [31] Verchery, G. (1974). Application aux structures minces élastiques de principes variationnels mixtes : exemple de la poutre à cisaillement transversal... Centre d'édition et de documentation de l'ENSTA.

- [32] Até, A., and Aivazzadeh, S. (1999). Un element fini mixte tridimensionnel pour le calcul des contraintes d'interface. *Revue Européenne des éléments finis*, 8(7), 791-811.
- [33] Noor, A. K. (1983). Multifield (mixed and hybrid) finite element models. *State-of-the-art surveys on finite element technology*, 127-156.
- [34] Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29(1-4), 90-95.
- [35] Dhatt, G., and Touzot, G. (1981). Une présentation de la méthode des éléments finis. Presses Université Laval.
- [36] Esteves, J. L. (1995). Joint Design : Programme D'aide a la Conception des Assemblages Colles Utilisant les Elements Finis Mixtes D'interface , Thèse de Doctorat, Universidade do Porto ,Portugal.
- [37] Gallagher, R. H., and Claudon, J. L. (1976). Introduction aux éléments finis. (No Title).
- [38] Xie, D., Waas, A. M., Shahwan, K. W., Schroeder, J. A., and Boeman, R. G. (2004). Computation of energy release rates for kinking cracks based on virtual crack closure technique. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 6(6), 515-524.
- [39] Azhdari, A., and Nemat-Nasser, S. (1996). Energy-release rate and crack kinking in anisotropic brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6), 929-951.
- [40] Hayashi, K., and Nemat-Nasser, S. (1981). Energy release rate and crack kinking. *International Journal of Solids and Structures*, 17(1), 107-114.
- [41] Sheng, CF, et Wheeler, L. (1981). Prédiction du cheminement d'une fissure coudée au voisinage d'une inclusion circulaire dans un milieu infini.
- [42] Cotterell, B., and Rice, J. (1980). Slightly curved or kinked cracks. *International journal of fracture*, 16, 155-169.
- [43] Maiti, SK (1986). Une méthode approximative de calcul du taux de restitution d'énergie de déformation associé au vrillage d'une fissure de mode I située initialement dans une direction orthotrope. *Revue internationale de fracture* , 32 , R33-R36.
- [44] Zak, A. R., and Williams, M. L. (1963). Crack point stress singularities at a bi-material interface.
- [45] Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks.
- [46] Chen, F. H., and Shield, R. T. (1977). Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 28, 1-22.
- [47] Rybicki, E. F., and Kanninen, M. F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering fracture mechanics*, 9(4), 931-938.

[48] Hellen, T. K. (1975). On the method of virtual crack extensions. *International Journal for numerical methods in engineering*, 9(1), 187-207.

[49] Bouziane, S., Bouzerd, H., and Guenfoud, M. (2009). Mixed Finite Element for Cracked Interface. In *Damage and Fracture Mechanics : Failure Analysis of Engineering Materials and Structures* (pp. 591-600). Dordrecht : Springer Netherlands.

[50] Chen, Y. M. (1975). Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method ,the HEMP code,*Engineering Fracture Mechanics*, 7(4), 653-660.

[51] Sicsic, P., and Marigo, J. J. (2013). From gradient damage laws to Griffith's theory of crack propagation, *Journal of Elasticity*, 113, 55-74.