



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

## Université 20 août 1955-Skikda

Faculté des Sciences

Département de Physique

N° :

# Mémoire de Master

**Filière : Physique**

**Spécialité : Physique des Matériaux**

**Thème**

---

**Études quantique et thermo-statistique d'un couplage de deux  
particules sans Spin**

---

Présenté par :Saadali Sara

Soutenu le: 30/06/2024

devant le jury composé de:

K.Khounfais	Prof	Université de Skikda	Président
A.Merdaci	MCA	Université de Skikda	Rapporteur
	MRA		Co- Rapporteur
F.Khelili	MCB	Université de Skikda	Examineur

Année Universitaire : 2023/2024

## الشكر

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات  
في المقام الأول، أتوجه بالشكر الجزيل إلى مشرفي الأكاديمي الدكتور مرداسي عبد الجليل ، الذي قدم لي  
الدعم والإرشاد اللازم طوال فترة البحث. شكرًا له على توجيهاته القيمة ونصائحه الثمينة التي كان لها أثر  
كبير في تطوير هذا العمل. أود أيضًا أن أعرب عن امتناني لأساتذتي الكرام في قسم الفيزياء بجامعة 20 اوت  
1955 سكيكدة ، الذين لم يخلوا عليّ بخبراتهم وعلمهم.  
أتوجه بالشكر الجزيل الى أعضاء لجنة المناقشة الدكتور خنفايس كمال والدكتور خليلي فريد.  
أود أن أوجه شكرًا خاصًا للدكتور لبيض سمير، الذي ساعدنا في رسم الرسومات باستخدام برنامج المثلاب.  
شكرًا له على دعمه التقني وإبداعه في تنفيذ الرسومات التي أضافت قيمة كبيرة لبحثي.  
أتقدم بالشكر إلى عائلتي وأصدقائي الأعزاء، الذين كانوا دائمًا بجانبني لتقديم الدعم والمساعدة. شكرًا لهم على  
تشجيعهم المتواصل وعلى كل لحظة قضيتموها معي في هذا المشوار الأكاديمي.

## الإهداء

بسم الله و الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله وآله وصحبه  
أحمد الله تعالى وأشكره على توفيقه وهدايته، وعلى منحه لي القوة والصبر لإتمام هذا العمل الذي يعتبر فريد  
من نوعه.

إلى عائلتي العزيزة، والتي تضع دائماً قلبها ودعمها خلفي:  
-والدتي ووالدي الغاليين، أنتم الروح التي تنير لي الطريق، شكراً لكما على الحب الذي لا ينضب والدعم  
الذي لا يعلو.

-أختي الحبيبة، كنت دائماً بجانبني تشجيعي ودعمي، لا توجد كلمات تعبر عن شكري لك.  
-جدتي وجدتي، لكما الشكر الجزيل على الحنان والدعم الذين أسهما في بناء شخصيتي ونجاحي.  
صديقتي العزيزة أسماء بوالسيوف، أنت رمز الصداقة الحقيقية التي تعبر عنها الكلمات، شكراً لدعمك  
وتشجيعك المستمرين خلال مسيرتي الدراسية.

إلى أصدقائي الأعمام في شعبة الرياضيات، الذين أصبحوا عائلتي الثانية، لقد كانت رحلتي معكم ممتعة  
ومثمرة. شكراً لكم على التعاون والمساعدة المستمرة، وعلى الأوقات الجميلة التي قضيناها معاً.  
شكر خاص للأستاذ بوزنزانة محمد الطاهر، الذي كان لي أستاذاً وموجهاً رائعاً، قدم لي الدعم والإرشاد خلال  
رحلتي الجامعية، وأثرت نصائحه على مسيرتي الأكاديمية

إلى جامعتي الحبيبة 20 أوت 1955، وإلى أساتذتها الكرام، أنتم من فتحت لي أبواب العلم والمعرفة. شكراً  
لكم على التحفيز والإرشاد، وعلى كل ما قدمتموه لي من معرفة وتعليم.

وأخيراً، إلى فلسطين والجزائر، أرضي الأم والكرامة، وإلى أهلي وأصدقائي هناك، أنتم جزء لا يتجزأ من  
هويتي وتاريخي، أحبكم من القلب وأفتخر بكم دائماً.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Études quantique d'un couplage de deux oscillateurs sans spin</b>	<b>6</b>
1.1 Solutions de spectre d'énergie . . . . .	6
1.1.1 Operateur densité . . . . .	9
1.1.2 Mesures de l'intrication . . . . .	10
1.1.3 La pureté . . . . .	11
1.1.4 Propriétés de la pureté . . . . .	12
<b>2 Matrice de densité</b>	<b>16</b>
2.1 Matrices de densité . . . . .	16
2.2 Cas spéciaux . . . . .	27
2.2.1 basse température . . . . .	27
2.2.2 haute température . . . . .	28
2.2.3 Couplage faible . . . . .	29
<b>3 Entropies</b>	<b>30</b>
3.0.4 Entropie de Rényi . . . . .	31
3.0.5 Entropie de von Neumann . . . . .	35
3.0.6 Entropie thermique . . . . .	40
<b>Conclusion</b>	<b>43</b>

# Introduction

L'intrication est une corrélation quantique fascinante sans équivalent classique. Son histoire est riche et a profondément influencé notre compréhension de la mécanique quantique [1, 2]. Elle a suscité, au cours des dernières décennies, un regain d'intérêt principalement en raison du développement de la théorie de l'information quantique et de ses applications possibles pour effectuer diverses tâches de communication et de calcul qui seraient beaucoup plus efficaces et rapides par rapport à leurs homologues conventionnelles. [3]. Au-delà de la théorie de l'information quantique, une activité de recherche intensive a été menée pour explorer les perspectives supplémentaires que l'intrication quantique pourrait conduire dans d'autres domaines de la physique [4]. À cet égard, la machinerie des oscillateurs harmoniques s'avère jouer un rôle important.

L'intérêt d'utiliser les modèles d'oscillateurs harmoniques dans le contexte de l'intrication quantique peut être justifié par deux motivations importantes : i) La première est que ces modèles sont traitables. ii) La seconde est leur polyvalence, dans le sens où ils jouent un rôle de premier plan dans de nombreuses branches de la physique. Par conséquent, ces considérations ont conduit, au cours des trois dernières décennies, à l'utilisation de divers types d'oscillateurs et au développement d'un nombre impressionnant d'approches pour saisir les caractéristiques fondamentales des aspects multiformes de l'intrication quantique.[5, 6, 7, 8].

Dans ce mémoire nous avons l'intention d'étudier l'intrication quantique et thermique de deux oscillateurs harmonique quantique couplés . La motivation pour mener cette étude est d'étudier les nouvelles fonctionnalités liées à ce type particulier de couplage. Du point de vue mathématique, l'investigation reposera sur l'évaluation du degré d'intrication en utilisant les notions d'entropies quantique et de fonctions de pureté.

Ce memoire est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, nous formulons notre problème. Nous rédigeons l'Hamiltonien décrivant le système qui nous intéresse qui est deux oscillateurs harmonique quantique couplés. Des transformations unitaires appropriées seront utilisées pour dériver les solutions au spectre d'énergie. Cela nous permettra de calculer la fonction de pureté et de discuter des conditions pour lesquelles le système est fortement intriqué dans l'état fondamental.

Dans le chapitre 2, l'approche intégral de chemin a été utilisée pour étudier l'aspect ther-

mique du problème. Cela nous permet d'étudier l'intrication dans le système décrit par le couplage entre les deux oscillateurs simplement en évaluant les fonctions de pureté non seulement pour l'état fondamental mais aussi pour l'ensemble du spectre. Nous montrerons que le résultat intéressant qui en ressort est que la pureté peut être exprimée en termes d'un paramètre de couplage  $\eta$  ainsi que d'un paramètre de mélange (angle  $\theta$ ) et d'un paramètre de température  $\beta$ . Pour illustrer graphiquement ce résultat, nous traçons des figures pour les fonctions de pureté en termes de paramètres  $\eta$  et  $\beta$ . en fixant trois valeurs de l'angle  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

Au chapitre 3, nous considérons différents types d'entropies quantiques. Nous montrons que l'entropie de von Neumann peut être obtenue comme limite de l'entropie de Rényi et nous avons pu écrire les deux directement en termes de la fonction de pureté. Pour illustrer graphiquement ce résultat, nous traçons des figures pour les fonctions des deux entropies en termes de paramètres  $\eta$  et  $\beta$ . en fixant trois valeurs de l'angle  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

Pour aller plus loin on calcule la fonction de partition puis l'entropie thermique.

# Chapitre 1

## Études quantique d'un couplage de deux oscillateurs sans spin

### 1.1 Solutions de spectre d'énergie

Dans ce chapitre, nous étudions le problème d'un système de deux oscillateurs quantiques couplés pour déterminer les solutions du spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes. Notre objectif est de quantifier l'intrication quantique présente dans ce système à l'aide de la fonction dite pureté.

L'hamiltonien décrivant un tel système peut s'écrire sous la forme

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2x_2^2 + \frac{1}{2}Cx_1x_2 \quad (1.1)$$

où  $m_1, \omega_1, x_1, p_1$  (respectivement  $m_2, \omega_2, x_2, p_2$ ) sont la masse, la fréquence angulaire, la position et impulsion du premier oscillateur (respectivement du deuxième oscillateur) et  $C$  est la constante de couplage.

Les relations de commutations sont  $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$  (tous les autres commutateurs disparaissent). Notons que lorsque  $C = 0$ , on retrouve le cas simple de deux oscillateurs indépendants.

Parce qu'il est difficile de traiter l'hamiltonien (1.1) tel qu'il est, un certain nombre de transformations appropriées seraient nécessaires pour lui donner une forme diagonale. Dans un premier temps, redimensionnons la position et les variables d'impulsion comme suit

$$X_1 = \mu x_1, X_2 = \mu^{-1} x_2 \quad (1.2)$$

$$P_1 = \mu^{-1} p_1, P_2 = \mu p_2 \quad (1.3)$$

L'hamiltonien est maintenant réécrit comme suit

$$H_2 = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2} m \omega_1^2 X_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 X_2^2 + \frac{1}{2} C X_1 X_2 \quad (1.4)$$

les paramètres résultants étant donnés par

$$\mu = \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{1}{4}}, m = \sqrt{m_1 m_2} \quad (1.5)$$

Nous devons maintenant éliminer le terme de couplage  $C$  de l'hamiltonien  $H_2$ . Pour cela nous utilisons les deux rotations suivantes

$$\begin{cases} X_1 = q_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + q_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); P_1 = \mathcal{P}_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathcal{P}_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ X_2 = -q_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + q_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); P_2 = -\mathcal{P}_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathcal{P}_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.6)$$

où nous avons introduit deux paramètres

$$e^{\pm 2\eta} = \frac{m\omega_1^2 + m\omega_2^2 \pm \sqrt{(m\omega_1^2 - m\omega_2^2)^2 + C^2}}{2k}, k = \sqrt{m^2 \omega_1^2 \omega_2^2 - \frac{C^2}{4}}, \quad (1.7)$$

En imposant

$$\tan(\theta) = \frac{C}{m\omega_2^2 - m\omega_1^2}, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (1.8)$$

L'Hamiltonien  $H_2$  est alors réécrit comme suit

$$H_3 = \frac{1}{2m} (\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2) + \frac{1}{2} k (e^{-2\eta} q_1^2 + e^{+2\eta} q_2^2) \quad (1.9)$$

Où  $\eta$  est le paramètre de couplage. Notez qu'afin de s'assurer que le système reste stable nous imposons la condition  $-2m\omega_1\omega_2 < C < 2m\omega_1\omega_2$

Il est clair que l'Hamiltonien (1.9) est diagonal car il s'écrit sous la forme d'une somme de

deux oscillateurs unidimensionnels indépendants de masse  $m$  et de pulsations respectives

$$\Omega_1 = \omega e^{-\eta}, \Omega_2 = \omega e^{+\eta}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.10)$$

Afin de déterminer le spectre (valeurs propres) de cet Hamiltonien, on introduit deux familles d'opérateurs d'annihilation et de création définies par [11]

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}} e^{-\frac{1}{2}\eta} q_1 + i\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar k}} e^{\frac{1}{2}\eta} \mathcal{P}_1 & \hat{a}_1^+ = \sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}} e^{-\frac{1}{2}\eta} q_1 - i\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar k}} e^{\frac{1}{2}\eta} \mathcal{P}_1 \\ \hat{a}_2 = \sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}} e^{+\frac{1}{2}\eta} q_2 + i\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar k}} e^{-\frac{1}{2}\eta} \mathcal{P}_2 & \hat{a}_2^+ = \sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}} e^{+\frac{1}{2}\eta} q_2 - i\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar k}} e^{-\frac{1}{2}\eta} \mathcal{P}_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Le commutateur  $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^+] = 1; k = 1, 2$  (tous les autres commutateurs sont identiques à zéro). En conséquence, l'hamiltonien s'écrit comme suit

$$H_3 = \hbar\omega e^{-\eta} \left( \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega e^{+\eta} \left( \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (1.12)$$

Nous pouvons, maintenant, résoudre aisément l'équation de Schrödinger aux valeurs propres

$$H_3 |n_1, n_2\rangle = \mathcal{E}_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle \quad (1.13)$$

Il est facile de montrer que les solutions de l'équation propre de  $H_3$  se lisent comme suit

$$\mathcal{E}_{n_1, n_2} = \hbar\Omega_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega e^{-\eta} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega e^{\eta} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \quad (1.14)$$

$$\psi_{n_1, n_2}(q_1, q_2) = \frac{\varpi e^{-\frac{\varpi^2 e^{-\eta}}{2} q_1^2 - \frac{\varpi^2 e^{\eta}}{2} q_2^2}}{\sqrt{\pi 2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}} H_{n_1} \left( \varpi e^{-\frac{\eta}{2}} q_1 \right) H_{n_2} \left( \varpi e^{\frac{\eta}{2}} q_2 \right), \varpi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (1.15)$$

Nous sommes maintenant en mesure de voir comment utiliser l'inverse de la transformation (1.6) pour obtenir des états intriqués. Cela peut être implémenté en réécrivant simplement les états propres en termes de  $(x_1, x_2)$  au lieu de  $(q_1, q_2)$ . En utilisant

$$\begin{cases} q_1 = X_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - X_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \mu x_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu^{-1} x_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_2 = X_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + X_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = q_2 = \mu x_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mu^{-1} x_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.16)$$

nous nous retrouvons avec les fonctions propres de notre système ayant l'hamiltonien  $H_1$

$$\begin{aligned} \psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) &= \frac{\varpi e^{-\frac{\varpi^2}{2}} e^{-\eta \left( \mu x_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu^{-1} x_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2 - \frac{\varpi^2}{2} e^{\eta} \left( \mu x_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mu^{-1} x_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2}}{\sqrt{\pi 2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}} \\ &\times H_{n_1} \left( \varpi e^{-\frac{\eta}{2}} \left( \mu x_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mu^{-1} x_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \right) \\ &\times H_{n_2} \left( \varpi e^{+\frac{\eta}{2}} \left( \mu x_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mu^{-1} x_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

où  $H_{n_i}(z)$  dans l'expression (1.15) ou (1.17) sont des polynôme d'Hermite d'ordre  $n_i$  ème.

### 1.1.1 Operateur densité

La notion d'opérateur densité (souvent appelé matrice densité) a été introduite par von Neumann comme une alternative pour décrire les états d'un système quantique[11].

#### Etats purs

Si l'on considère un état  $|\varphi\rangle$  unitaire parfaitement connu qui appartient à l'espace de Hilbert d'un système quantique alors l'opérateur densité est nécessairement un projecteur

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle\varphi| \quad (1.18)$$

Dans ce cas, on dit que  $\hat{\rho}$  représente un état pur[11].

#### Etats de mélange

Si par exemple un système quantique peut se trouver dans l'un des états  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle$  (tous unitaires) avec des probabilités respectives  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (où  $\sum_{i=1}^n p_n = 1$ ) alors l'opérateur densité s'écrit sous la forme

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \quad (1.19)$$

Dans ce cas on dit que l'opérateur densité représente un état de mélange.

### Propriétés de l'opérateur densité

L'opérateur densité vérifie les propriétés qui suivent :

- $\hat{\rho}$  est hermitique
- la trace de  $\hat{\rho}$  vaut l'unité  $Tr\rho = 1$
- est défini positif quel que soit on a  $\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0, \quad \forall |\phi\rangle$
- si  $\hat{\rho}$  représente état pur alors  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$
- Les théorèmes généraux de l'algèbre linéaires permettent d'associer à toute matrice densité  $\rho$  une matrice unitaire  $U$  telle que  $U\rho U^{-1}$  soit diagonale.

### Matrice densité réduite

Si  $\rho = \rho^{AB}$  correspond à un système " bipartite " composé de deux sous-systèmes  $A$  et  $B$  alors les densités réduite exprimées par

$$\rho^A = Tr_B (\rho^{AB}) \quad (1.20)$$

$$\rho^B = Tr_A (\rho^{AB}) \quad (1.21)$$

#### 1.1.2 Mesures de l'intrication

Si l'état étudié est un état bipartite pur  $\rho^{AB}$  l'entropie de Von Neumann (dite aussi entropie d'intrication) est définie comme suit

$$S_{vN} = -Tr\rho^A \ln \rho^A = -Tr\rho^B \ln \rho^B \quad (1.22)$$

Si les valeurs propres de l'opérateur densité réduit sont notés par  $\lambda_n$  l'entropie d'intrication

s'écrit sous la forme

$$S_{vN} = - \sum_n \lambda_n \ln \lambda_n \quad (1.23)$$

Quant à l'entropie de Shannon d'une distribution  $S$  de probabilité  $p_n$  d'un ensemble fini  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

elle est donnée par[11]

$$H(S) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (1.24)$$

ou  $p_i$  est la probabilité associée à l'élément  $s_i$  avec  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . L'entropie de Shannon est interprétée comme étant une mesure de l'imprévisible (ou de l'incertitude) à une distribution de probabilité  $S$ .

L'analogie formelle entre les équations  $S_{vN}$  et  $H(S)$  montre que l'entropie de von Neumann est l'analogie quantique de l'entropie de Shannon.

### 1.1.3 La pureté

La fonction pureté est intimement liée à l'entropie de Von Neumann. Elle en est issue par simple linéarisation. Cette fonction permet d'évaluer quantitativement le degré d'intrication d'un état quantique.

Si on considère un état  $|\varphi\rangle_{AB}$  d'un système bipartite  $\{A, B\}$  alors l'entropie d'intrication est donnée par

$$S(|\varphi\rangle_{AB}) = -Tr \rho^A \ln \rho^A = -Tr \rho^B \ln \rho^B \quad (1.25)$$

$\rho^A$  et  $\rho^B$  les densités réduites.

La pureté  $P$  est obtenue par linéarisation de (1.25). Elle est exprimée par

$$P = Tr (\rho^A)^2 = Tr (\rho^B)^2 \quad (1.26)$$

### 1.1.4 Propriétés de la pureté

Dans le cas où l'état considéré n'est pas intriqué alors

$$P = 1 \quad (1.27)$$

Dans le cas où  $P \neq 1$ , l'état est nécessairement intriqué.

$$0 < P < 1 \quad (1.28)$$

## Pureté de l'état fondamental

Afin d'évaluer la fonction de pureté de l'état fondamental, nous devons tout d'abord déterminer :

– l'état fondamental  $|\psi_{0,0}\rangle$

La fonction d'onde de l'état fondamental peut être obtenue avec un simple remplacement, il suffit de mettre  $(n_1, n_2) = (0, 0)$  dans l'équation (1.17) de la fonction d'onde

$$\begin{aligned} \psi^{AB}(x_A, x_B) &= \psi_{0,0}(x_1, x_2) \\ &= \frac{\varpi}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\varpi^2}{2}} e^{-\eta} (\mu x_1 \cos(\frac{\theta}{2}) - \mu^{-1} x_2 \sin(\frac{\theta}{2}))^2 - \frac{\varpi^2}{2} e^{\eta} (\mu x_1 \sin(\frac{\theta}{2}) + \mu^{-1} x_2 \cos(\frac{\theta}{2}))^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

– La matrice de densité  $\rho^{AB}$  de l'état pur  $\rho^{AB} = |\psi_{0,0}\rangle \langle \psi_{0,0}|$  dans la représentation position  $\rho^{AB}$  s'écrit

$$\rho^{AB}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \langle x_1, x_2 | \rho^{AB} | x'_1, x'_2 \rangle = \psi_{0,0}(x_1, x_2) \psi_{0,0}^*(x'_1, x'_2) \quad (1.30)$$

– La matrice de densité réduite  $\rho_{\text{red}}^A$  de la première particule est obtenue en traçant (1,30) par rapport à la variable  $x_2$  il vient

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{red}}^A(x_1, x'_1) &= \text{Tr}_B(\rho^{AB}) = \int \psi_{0,0}(x_1, x_2) \psi_{0,0}^*(x'_1, x_2) dx_2 \\
&= \frac{\varpi e^{-\frac{\varpi^2}{2}e^{-\eta}(\mu x_1 \cos(\frac{\theta}{2}) - \mu^{-1}x_2 \sin(\frac{\theta}{2}))^2 - \frac{\varpi^2}{2}e^{\eta}(\mu x_1 \sin(\frac{\theta}{2}) + \mu^{-1}x_2 \cos(\frac{\theta}{2}))^2}}{\sqrt{\pi}} \\
&\times \frac{\varpi e^{-\frac{\varpi^2}{2}e^{-\eta}(\mu x'_1 \cos(\frac{\theta}{2}) - \mu^{-1}x_2 \sin(\frac{\theta}{2}))^2 - \frac{\varpi^2}{2}e^{\eta}(\mu x'_1 \sin(\frac{\theta}{2}) + \mu^{-1}x_2 \cos(\frac{\theta}{2}))^2}}{\sqrt{\pi}} dx_2 \\
&= \frac{\varpi^2}{\pi} e^{-\alpha(x_1^2 + x'_1{}^2)} \int e^{-2\beta x_2^2 + 2\gamma(x_1 + x'_1)x_2} dx_2 \\
&= \frac{\varpi^2}{\pi} e^{-\alpha(x_1^2 + x'_1{}^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} e^{\frac{\gamma^2(x_1 + x'_1)^2}{2\beta}} \tag{1.31}
\end{aligned}$$

Où

$$\alpha = \frac{\varpi^2 \mu^2}{2} \left( e^{-\eta} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{\eta} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \tag{1.32}$$

$$\beta = \frac{\varpi^2}{2\mu^2} \left( e^{-\eta} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{\eta} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \tag{1.33}$$

$$\gamma = -\frac{\varpi^2}{2} \sinh(\eta) \sin(\theta) \tag{1.34}$$

Où la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}, \text{Re}(a) > 0 \tag{1.35}$$

a été utilisé pour dériver la densité réduite  $\rho_{\text{red}}^A(x_1, x'_1)$

$$\rho_{\text{red}}^A(x_1, x'_1) = N^A \exp\left(-\frac{2\alpha\beta - \gamma^2}{2\beta}(x_1^2 + x'_1{}^2) + \frac{\gamma^2}{\beta}x_1x'_1\right) \tag{1.36}$$

En utilisant la condition de normalisation, nous trouvons que

$$N^A = \sqrt{\frac{\alpha\beta - \gamma^2}{2\pi\beta}} \tag{1.37}$$

De même, la matrice de densité réduite pour la partie B se lit comme suit

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{red}}^B(x_2, x'_2) &= \text{Tr}_A(\rho^{AB}) = \int \psi_{0,0}(x_1, x_2) \psi_{0,0}^*(x_1, x'_2) dx_1 \\
&= \left( \frac{m\omega^2}{\pi^2 \hbar^2 k} \right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{\omega e^{-\eta}}{2\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} (\mu^{-1} x_1 \cos(\frac{\theta}{2}) - \mu x_2 \sin(\frac{\theta}{2}))^2 - \frac{\omega e^{\eta}}{2\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} (\mu^{-1} x_1 \sin(\frac{\theta}{2}) + \mu x_2 \cos(\frac{\theta}{2}))^2} \\
&\times e^{-\frac{\omega e^{-\eta}}{2\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} (\mu^{-1} x_1 \cos(\frac{\theta}{2}) - \mu x'_2 \sin(\frac{\theta}{2}))^2 - \frac{\omega e^{\eta}}{2\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} (\mu^{-1} x_1 \sin(\frac{\theta}{2}) + \mu x'_2 \cos(\frac{\theta}{2}))^2} dx_1 \\
&= \frac{\varpi^2}{\pi} e^{-\alpha(x_2^2 + x'_2{}^2)} \int e^{-2\beta x_1^2 + 2\gamma(x_2 + x'_2)x_1} dx_1 \\
&= \frac{\varpi^2}{\pi} e^{-\alpha(x_2^2 + x'_2{}^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} e^{\frac{4\gamma^2(x_2 + x'_2)^2}{8\beta}} \tag{1.38}
\end{aligned}$$

Avec ces résultats en réserve, nous pouvons maintenant évaluer la pureté donnée par

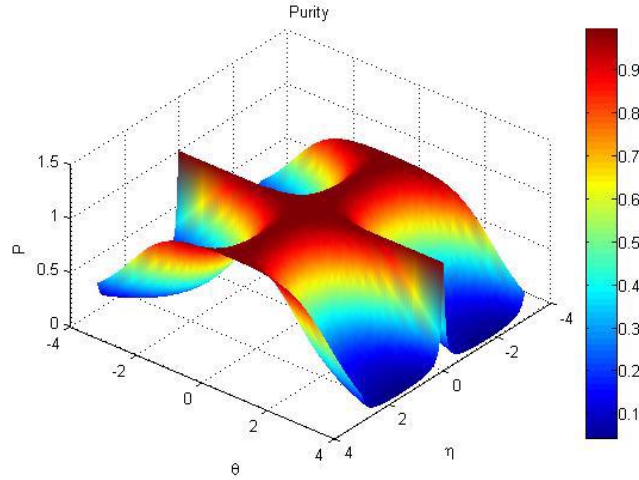
$$P = \text{Tr}_A(\rho_{\text{red}}^A)^2 \tag{1.39}$$

Notez que parce que  $\rho_{\text{red}}^B$  est similaire à  $\rho_{\text{red}}^A$ , on peut facilement établir que  $P^A = P^B = P_{0,0}(\eta, \theta)$

$$\begin{aligned}
P_{0,0}(\eta, \theta) &= \int \rho_{\text{red}}^A(x_1, x'_1) \rho_{\text{red}}^A(x'_1, x_1) dx_1 dx'_1 \\
&= (N^A)^2 \int e^{-\frac{2\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} x_1^2 - \frac{2\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} x_1'^2 + 2\frac{\gamma^2}{\beta} x_1 x_1'} dx_1 dx'_1 \tag{1.40}
\end{aligned}$$

En effectuant les deux intégrations nous obtenons

$$P_{0,0}(\eta, \theta) = \sqrt{\frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^4(\frac{\theta}{2}) + \sin^4(\frac{\theta}{2}) + 2 \cosh(2\eta) \sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2(\frac{\theta}{2})}} \tag{1.41}$$



**Figure 1.1** : Pureté  $P$  en termes de paramètres de couplage  $\eta$  et d'angle de mélange  $\theta$ .

De la figure 1.1 nous pouvons conclure ce qui suit :

- si  $\eta = 0$  ou  $\theta = 0$  alors  $P(\eta, \theta) = 1$

Dans ce cas l'état fondamental est non intriqué. Ceci est tout à fait attendu et ce dans la mesure où  $\eta = 0$  ou  $\theta = 0$  correspond à un système de deux oscillateurs découplés.

- si  $\eta \neq 0$  et  $\theta \neq 0$  alors  $0 < P(\eta, \theta) < 1$

L'intrication est induite par le couplage des deux oscillateurs.

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur la dépendance de la fonction de pureté sur les paramètres de couplage  $\eta$  et de l'angle de mélange  $\theta$ .

Dans le prochain chapitre, nous prendrons en compte l'effet de la température.

## Chapitre 2

# Matrice de densité

Dans ce chapitre, nous utilisons l'approche intégrale de chemin pour dériver les fonctions de pureté thermiques en termes du paramètre de la température  $\beta$ . Pour pouvoir effectuer les calculs, nous représentons l'inverse de la température comme l'évolution temporelle imaginaire. Cela nous permettra d'obtenir les matrices de densité ainsi que les fonctions de pureté.

### 2.1 Matrices de densité

Dans cette section, nous avons l'intention de déterminer la matrice de densité en calculant le propagateur de notre système. Rappelons que le propagateur d'un système donné peut être vu comme l'amplitude de probabilité d'une trajectoire de particule depuis une position initiale vers une position finale pendant un temps donné.

Le système qui nous intéresse est constitué de deux oscillateurs harmoniques couplés dans l'espace unidimensionnel des masses  $(m_1, m_2)$ . Alors, si l'on paramètre les coordonnées par  $(x_1, x_2)$ , les impulsions par  $(p_1, p_2)$ , et les fréquences par  $(\omega_1, \omega_2)$  alors l'hamiltonien décrivant le système se lit comme suit

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2x_2^2 + \frac{1}{2}Cx_1x_2 \quad (2.1)$$

La tâche à accomplir consiste à déterminer la matrice de densité dépendante de la température correspondant aux deux oscillateurs harmonique couplés. Pour cela, nous commençons par

introduire d'abord l'opérateur d'évolution qui est donné par[15]

$$\hat{\mathbf{U}}(\beta) = \mathcal{T}_D \exp \left( - \int_0^\beta \hat{H} d\tau \right) \quad (2.2)$$

Où  $\mathcal{T}_D$  est l'opérateur chronologique de Dyson et le paramètre  $\beta$  est donné par  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  avec  $T$  étant la température et  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

En utilisant l'équation (2.2), le propagateur qui est devenue maintenant la matrice densité peut s'écrire dans representation position sous la forme[15]

$$\rho^{AB}(x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2a}; \beta) = \langle x_{1b}, x_{2b} | \hat{\mathbf{U}}(\beta) | x_{1a}, x_{2a} \rangle \quad (2.3)$$

Où  $|x_{1a}, x_{2a}\rangle$  et  $|x_{1b}, x_{2b}\rangle$  représentent respectivement les états initial et final.

Pour raccourcir la notation, écrivons  $\rho^{AB}(x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2a}; \beta) = \rho^{AB}(b, a; \beta)$ .

Pour modéliser la matrice densité en termes de formalisme intégral de chemin, nous divisons le paramètre  $\beta$  en  $N + 1$  intervalles de longueur  $\epsilon = \frac{\beta}{N+1}$  pour chacun, nous utilisons la formule de Trotter et nous insérons la relation de completeness (fermeture)

$$\int |x_1, x_2\rangle \langle x_1, x_2| dx_1 dx_2 = \mathbb{I} \quad (2.4)$$

La formulation intégrale de chemin de l'opérateur de densité en termes de variables d'espace de phase continue se lit comme suit [9]

$$\rho^{AB}(b, a; \beta) = \int \int \frac{Dx_1 Dx_2 Dp_1 Dp_2}{(2\pi\hbar)^2} \exp \int_0^\beta [ip_1 \dot{x}_1 + ip_2 \dot{x}_2 - H(x_1, x_2, p_1, p_2)] d\tau \quad (2.5)$$

où les positions initiales et finales sont données par  $x_1(0) = x_{1a}, x_2(0) = x_{2a}, x_1(\beta) = x_{1b}, x_2(\beta) = x_{2b}$ .

En revanche, il est difficile d'effectuer le calcul à l'aide de la fonction hamiltonienne donné ci-dessus en raison de la présence d'un terme de couplage. Pour résoudre ce problème, nous utilisons les mêmes transformations que le chapitre précédent.

Nous réécrivons la fonction d'hamilton comme suit

$$H_2(q_1, q_2, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1) = \frac{1}{2m} (\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2) + \frac{1}{2} k (e^{-2\eta} q_1^2 + e^{+2\eta} q_2^2) \quad (2.6)$$

Sous ces transformations, la matrice de densité se lit comme

$$\rho^{AB}(b, a; \beta) = \int \int \frac{Dq_1 Dq_2 DP_1 DP_2}{(2\pi\hbar)^2} \exp \left\{ \int_0^\beta (i\mathcal{P}_1 \dot{q}_1 + i\mathcal{P}_2 \dot{q}_2 - H_2(q_1, q_2, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)) d\tau \right\} \quad (2.7)$$

Après avoir éliminé le terme de couplage, la matrice densité peut être écrite sous la forme factorisée suivante

$$\rho^{AB}(q_{1b}, q_{2b}, q_{1a}, q_{2a}; \beta) = \rho_1(q_{1b}, q_{1a}; \beta) \rho_2(q_{2b}, q_{2a}; \beta) \quad (2.8)$$

où

$$\rho_1(q_{1b}, q_{1a}; \beta) = \int \frac{Dq_1 DP_1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \int_0^\beta \left( i\mathcal{P}_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{2m} \mathcal{P}_1^2 - \frac{1}{2} k e^{-2\eta} q_1^2 \right) d\tau \right\} \quad (2.9)$$

et

$$\rho_2(q_{2b}, q_{2a}; \beta) = \int \frac{Dy_2 DP_2}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \int_0^\beta \left( i\mathcal{P}_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{2m} \mathcal{P}_2^2 - \frac{1}{2} k e^{2\eta} q_2^2 \right) d\tau \right\} \quad (2.10)$$

De plus, nous montrons que

$$\begin{aligned} \rho_1(q_{1b}, q_{1a}; \beta) &= \int \frac{Dq_1 DP_1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \int_0^\beta \left( i\mathcal{P}_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{2m} \mathcal{P}_1^2 - \frac{1}{2} k e^{-2\eta} q_1^2 \right) d\tau \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega e^{-\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta)}} \exp \left( -\frac{m\omega e^{-\eta}}{2\hbar \sinh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta)} (q_{1a}^2 + q_{1b}^2) \cosh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta) - 2q_{1a}q_{1b} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\omega e^{-\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta)}} \\ &\times e^{-\frac{\omega e^{-\eta}}{2\hbar \sinh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta)} \left[ \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right)^2 + \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)^2 \right]} \cosh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta) \\ &\times e^{\frac{2\omega e^{-\eta}}{2\hbar \sinh(\hbar\omega e^{-\eta}\beta)} \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right) \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

et

$$\begin{aligned}
\rho_2(q_{2b}, q_{2a}; \beta) &= \int \frac{Dy_2 D\mathcal{P}_2}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \int_0^\beta \left( i\mathcal{P}_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{2m} \mathcal{P}_2^2 - \frac{1}{2} k e^{2\eta} q_2^2 \right) d\tau \right\} \\
&= \sqrt{\frac{m e^\eta}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^\eta \beta)}} \exp \left( -\frac{m e^\eta}{2\hbar \sinh(\hbar e^\eta \beta)} \left( (q_{2a}^2 + q_{2b}^2) \cosh(\hbar \omega e^\eta \beta) - 2q_{2a} q_{2b} \right) \right) \\
&= \sqrt{\frac{\omega e^\eta}{2\pi\hbar \sinh(\hbar \omega e^\eta \beta)}} \\
&\times e^{-\frac{\omega e^\eta}{2\hbar \sinh(\hbar \omega e^\eta \beta)} \left[ \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right)^2 + \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)^2 \right]} \cosh(\hbar \omega e^\eta \beta) \\
&\times e^{\frac{2\omega e^\eta}{2\hbar \sinh(\hbar e^\eta \beta)} \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right) \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)} \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Avec ces quantités en réserve, nous pouvons maintenant écrire la matrice de densité en termes de variables d'origine. Un calcul simple conduit à[9]

$$\begin{aligned}
\rho^{AB}(b, a; \beta) &= \sqrt{\frac{\omega e^{-\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^{-\eta} \beta)}} \sqrt{\frac{\omega e^\eta}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^\eta \beta)}} \\
&\times e^{-\frac{\omega e^{-\eta}}{2\hbar \sinh(\hbar e^{-\eta} \beta)} \left( \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right)^2 + \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)^2 \right)} \cosh(\hbar e^{-\eta} \beta) \\
&\times e^{\frac{2\omega e^{-\eta}}{2\hbar \sinh(\hbar e^{-\eta} \beta)} \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right) \left( \mu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} - \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)} \\
&\times e^{-\frac{\omega e^\eta}{2\hbar \sinh(\hbar e^\eta \beta)} \left( \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right)^2 + \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)^2 \right)} \cosh(\hbar e^\eta \beta) \\
&\times e^{\frac{2\omega e^\eta}{2\hbar \sinh(\hbar e^\eta \beta)} \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1a} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2a} \right) \left( \mu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{1b} + \frac{1}{\mu} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_{2b} \right)} \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Cela peut être reformulé sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\rho^{AB}(b, a; \beta) &= \left( \frac{\omega^2}{(2\pi\hbar)^2 \sinh(\hbar e^{-\eta} \beta) \sinh(\hbar e^\eta \beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \exp \left[ -ax_{1b}^2 - bx_{2b}^2 - ax_{1a}^2 - bx_{2a}^2 + 2cx_{1b}x_{2b} + 2cx_{1a}x_{2a} \right. \\
&\quad \left. + 2dx_{1b}x_{1a} + 2fx_{2b}x_{2a} - 2gx_{1b}x_{2a} - 2gx_{1a}x_{2b} \right] \tag{2.14}
\end{aligned}$$

où les constantes sont données par

$$a = \frac{\mu^2 \omega}{2\hbar} \left[ e^{-\eta} \coth(\hbar\omega\beta e^{-\eta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{\eta} \coth(\hbar\omega\beta e^{\eta}) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.15)$$

$$b = \frac{\omega}{2\hbar\mu^2} \left[ e^{-\eta} \coth(\hbar\omega\beta e^{-\eta}) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{\eta} \coth(\hbar\omega\beta e^{\eta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.16)$$

$$c = \frac{\omega}{2\hbar} \left[ e^{-\eta} \coth(\hbar\omega\beta e^{-\eta}) - e^{\eta} \coth(\hbar\omega\beta e^{\eta}) \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.17)$$

$$d = \frac{\mu^2 \omega}{2\hbar} \left[ \frac{e^{-\eta}}{\sinh(\hbar\omega\beta e^{-\eta})} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{e^{\eta}}{\sinh(\hbar\omega\beta e^{\eta})} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.18)$$

$$f = \frac{\omega}{2\hbar\mu^2} \left[ \frac{e^{-\eta}}{\sinh(\hbar\omega\beta e^{-\eta})} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{e^{\eta}}{\sinh(\hbar\omega\beta e^{\eta})} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.19)$$

$$g = \frac{\omega}{2\hbar} \left( \frac{e^{-\eta}}{\sinh(\hbar\omega\beta e^{-\eta})} - \frac{e^{\eta}}{\sinh(\hbar\omega\beta e^{\eta})} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.20)$$

## Les fonctions Pureté

A ce stade, nous pouvons dire que nous avons rassemblé les outils nécessaires pour mesurer les degrés d'intrications du système. Ces mesures sont fournies par les fonctions de pureté qui sont trois dans notre cas.

Tout d'abord, nous déterminons l'état du système selon qu'il est pur ou mélange. Pour cela, nous commençons par utiliser la décomposition spectrale du propagateur de Feynman bien connu.

$$K(x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2a}; t) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} e^{-i\frac{E_{n_1, n_2}}{\hbar} t} \psi_{n_1, n_2}(x_{1b}, x_{2b}) \psi_{n_1, n_2}^*(x_{1a}, x_{2a}) \quad (2.21)$$

Cette expansion pour le temps imaginaire  $t \rightarrow -i\hbar\beta$  devient l'expansion de la fonction de densité.

$$\rho^{AB}(x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2a}; \beta) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} e^{-E_{n_1, n_2} \beta} \psi_{n_1, n_2}(x_{1b}, x_{2b}) \psi_{n_1, n_2}^*(x_{1a}, x_{2a}) \quad (2.22)$$

Quand on compare cet écrit à la relation (1.19), il apparaît clairement qu'il s'agit d'un état de mélange, par conséquent, dans notre cas, il y aura plus d'une intrication pouvant être mesurée à l'aide des fonctions de pureté.

Réécrivons la fonction de densité du système (2.14) à nouveau sous la forme

$$\begin{aligned}
& \rho^{AB}(x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2a}; \beta) \\
= & N^{AB} e^{-ax_{1b}^2 - bx_{2b}^2 - ax_{1a}^2 - bx_{2a}^2 + 2cx_{1b}x_{2b} + 2cx_{1a}x_{2a} + 2dx_{1b}x_{1a} + 2fx_{2b}x_{2a} - 2gx_{1b}x_{2a} - 2gx_{1a}x_{2b}} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

la matrice de densité réduite  $\rho_{red}^A$  de la premiere particule est obtenu en traçant (2,23) par rapport à la variable  $x_2$  il vient

$$\begin{aligned}
\rho_{red}^A & \equiv Tr_B \rho^{AB} = \int \rho^{AB}(x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2b}; \beta) dx_{2b} \\
& = N^A e^{\frac{[(c-g)^2 - 2a(b-f)]x_{1b}^2 + [(c-g)^2 - 2a(b-f)]x_{1a}^2 + 2[(c-g)^2 + 2(b-f)d]x_{1b}x_{1a}}{2(b-f)}} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

la matrice de densité réduite  $\rho_{red}^B$  de la deuxieme particule est obtenu en traçant (2,23) par rapport à la variable  $x_1$  il vient

$$\begin{aligned}
\rho_{red}^B & \equiv Tr_A \rho^{AB} = \int \rho^{AB}(x_{1b}, x_{2b}, x_{1b}, x_{2a}; \beta) dx_{1b} \\
& = N^B e^{\frac{[(c-g)^2 - 2b(a-d)]x_{2b}^2 + [(c-g)^2 - 2b(a-d)]x_{2a}^2 + 2[(c-g)^2 + 2(a-d)f]x_{2b}x_{2a}}{2(a-d)}} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Nous utilisons la condition de normalisation de von Neumann pour obtenir les trois constantes de normalisation  $N^{AB}$ ,  $N^A$  et  $N^B$

$$Tr_{AB} \rho^{AB} = 1, \quad Tr_A \rho_{red}^A = 1, \quad Tr_B \rho_{red}^B = 1 \quad (2.26)$$

Après avoir effectué tous les calculs nécessaires, qui sont tous des intégrales Gaussien, on trouve

$$N^{AB} = \frac{2}{\pi} \sqrt{(a-d)(b-f) - (c-g)^2} \quad (2.27)$$

$$N^A = \sqrt{2 \frac{(a-d)(b-f) - (c-g)^2}{\pi(b-f)}} \quad (2.28)$$

$$N^B = \sqrt{2 \frac{(a-d)(b-f) - (c-g)^2}{\pi(a-d)}} \quad (2.29)$$

Nous disposons désormais de toutes les relations qui permettent de calculer la pureté du

systeme AB et des deux sous-systèmes A et B. Commençons par calculer la pureté  $P^{AB}$

$$\begin{aligned}
P^{AB} &= Tr (\rho^{AB})^2 = \int \int \langle x_{1b}, x_{2b} | (\rho^{AB})^2 | x_{1b}, x_{2b} \rangle dx_{1b} dx_{2b} \\
&= \int \int \langle x_{1b}, x_{2b} | \rho^{AB} \left( \underbrace{\int \int |x_{1a}, x_{2a}\rangle \langle x_{1a}, x_{2a}| dx_{1a} dx_{2a}}_{=I} \right) \rho^{AB} | x_{1b}, x_{2b} \rangle dx_{1b} dx_{2b} \\
&= \int \int \int \int \langle x_{1b}, x_{2b} | \rho^{AB} | x_{1a}, x_{2a} \rangle \langle x_{1a}, x_{2a} | \rho^{AB} | x_{1b}, x_{2b} \rangle dx_{1a} dx_{2a} dx_{1b} dx_{2b} \\
&= \int \int \int \int \rho^{AB} (x_{1b}, x_{2b}, x_{1a}, x_{2a}; \beta) \rho^{AB} (x_{1a}, x_{2a}, x_{1b}, x_{2b}; \beta) dx_{1a} dx_{2a} dx_{1b} dx_{2b} \\
&= (N^{AB})^2 \int \int \int \int e^{-2ax_{1b}^2 - 2bx_{2b}^2 - 2ax_{1a}^2 - 2bx_{2a}^2 + 4cx_{1b}x_{2b} + 4cx_{1a}x_{2a} + 4dx_{1b}x_{1a} + 4fx_{2b}x_{2a} - 4gx_{1b}x_{2a} - 4gx_{1a}x_{2b}} \\
&\quad \times dx_{1a} dx_{2a} dx_{1b} dx_{2b} \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Après un calcul simple mais long on trouve

$$P^{AB} = \sqrt{\frac{(a-d)(b-f)-(c-g)^2}{(a+d)(b+f)-(c+g)^2}} = \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta}\beta}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{\eta}\beta}{2}\right) \tag{2.31}$$

de meme

$$\begin{aligned}
P^A &= Tr_A (\rho_{red}^A)^2 = \int \int \langle x_{1a} | (\rho_{red}^A)^2 | x_{1a} \rangle dx_{1a} \\
&= \int \langle x_{1a} | \rho_{red}^A \underbrace{\int |x_{1b}\rangle \langle x_{1b}| dx_{1b} \rho_{red}^A}_{=I} | x_{1a} \rangle dx_{1a} \\
&= \int \int \langle x_{1a} | \rho_{red}^A | x_{1b} \rangle \langle x_{1b} | \rho_{red}^A | x_{1a} \rangle dx_{1b} dx_{1a} \\
&= \int \int \rho_{red}^A (x_{1a}, x_{1b}) \rho_{red}^A (x_{1b}, x_{1a}) dx_{1a} dx_{1b} \\
&= (N^A)^2 \int \int e^{\frac{[(c-g)^2 - 2a(b-f)]x_{1b}^2 + [(c-g)^2 - 2a(b-f)]x_{1a}^2 + 2[(c-g)^2 + 2(b-f)d]x_{1b}x_{1a}}{(b-f)}} dx_{1a} dx_{1b} \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Après avoir effectué ces deux intégrales qui sont de type Gaussien on trouve

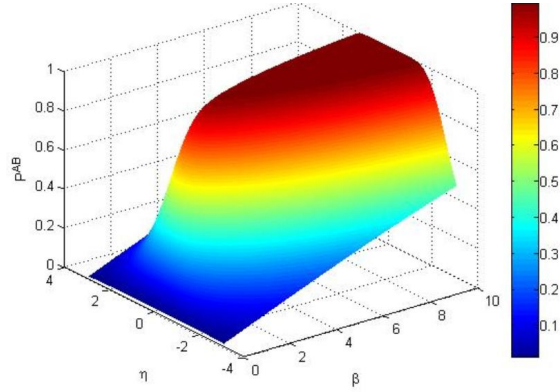
$$P^A = \sqrt{\frac{\tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{\eta}\beta}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta}\beta}{2}\right)}{\left(e^{\eta} \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{\eta}\beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-\eta} \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta}\beta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(e^{\eta} \coth\left(\frac{\hbar\omega\beta e^{\eta}}{2}\right) \cos^2\frac{\theta}{2} + e^{-\eta} \coth\left(\frac{\hbar\omega\beta e^{-\eta}}{2}\right) \sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \tag{2.33}$$

de même

$$\begin{aligned}
P^B &= Tr_B (\rho_{red}^B)^2 = \int \int \langle x_{1b} | (\rho_{red}^B)^2 | x_{1b} \rangle dx_{1b} \\
&= \int \int \langle x_{1b} | \rho_{red}^B | x_{1a} \rangle \langle x_{1a} | \rho_{red}^B | x_{1b} \rangle dx_{1a} dx_{1b} \\
&= \int \int \rho_{red}^B(x_{1b}, x_{1a}) \rho_{red}^B(x_{1a}, x_{1b}) dx_{1a} dx_{1b} \\
&= (N^B)^2 \int \int e^{\frac{[(c-g)^2 - 2a(b-f)]x_{1b}^2 + [(c-g)^2 - 2a(b-f)]x_{1a}^2 + 2[(c-g)^2 + 2(b-f)d]x_{1b}x_{1a}}{(b-f)}} dx_{1a} dx_{1b} \quad (2.34)
\end{aligned}$$

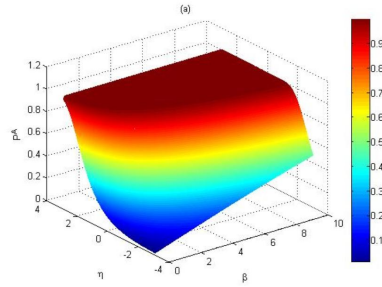
Après un calcul simple comme le précédent on trouve

$$P^B = \sqrt{\frac{\tanh\left(\frac{\hbar\omega e^\eta \beta}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta} \beta}{2}\right)}{\left(e^\eta \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^\eta \beta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-\eta} \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta} \beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(e^{-\eta} \coth\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta} \beta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^\eta \coth\left(\frac{\hbar\omega e^\eta \beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \quad (2.35)$$

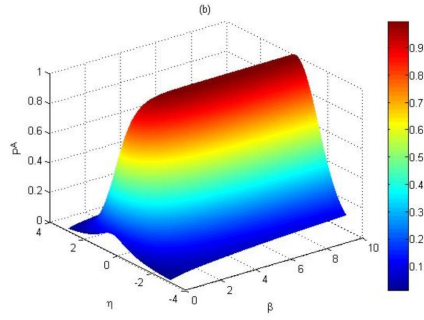


**Figure 2.1** :Pureté  $P^{AB}$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$ .

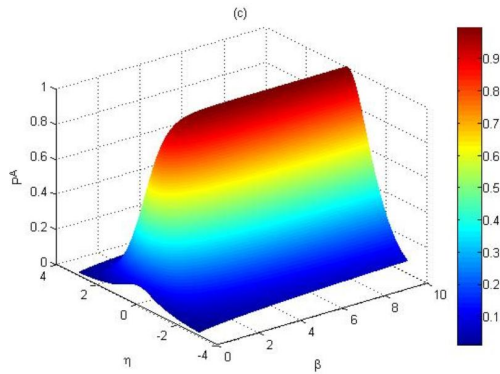
La **Figure 2.1** montre que la fonction de pureté  $P^{AB}$  prend toutes ses valeurs possibles lorsqu'on change la température de  $\beta = 0$  jusqu'à  $\beta = 10$ , aussi  $P^{AB}$  est une fonction complètement symétrique par rapport à sa valeur maximale qui se produit lorsque le terme d'interaction n'existe pas c'est à dire  $\eta = 0$ . Cette condition est automatiquement remplie lorsque  $(C = 0, \omega_1 = \omega_2)$ .



**Figure 2.2** :Pureté  $P^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = 0$ .



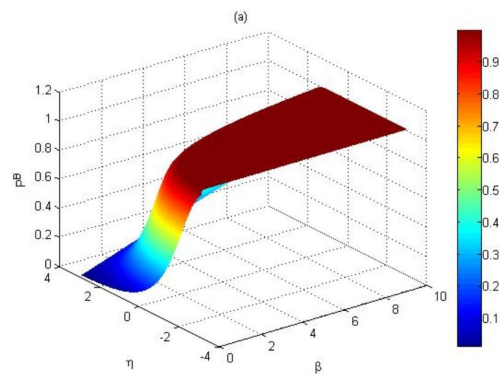
**Figure 2.3** :Pureté  $P^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \pi/4$ .



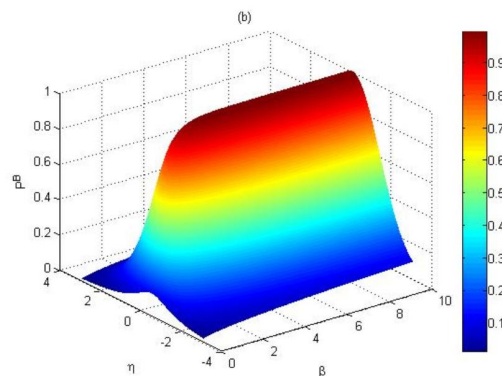
**Figure 2.4** : Pureté  $P^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \pi/2$ .

Les **Figures 2.2** , **2.3** et **2.4** explique l'effet de l'angle du mélange sur la fonction de pureté locale  $P^A$ . Où le paramètre de la température  $\beta$  est compris entre 0 et 10 et la constante de couplage  $\eta$  est comprise entre  $-4$  et  $4$ . Lorsque l'angle de mélange a une valeur minimale  $\theta = 0$  comme dans (a), la fonction de pureté augmente globalement. À mesure que la valeur de l'angle de mélange augmente, la fonction de pureté chute globalement comme en (b) et en (c). Plus

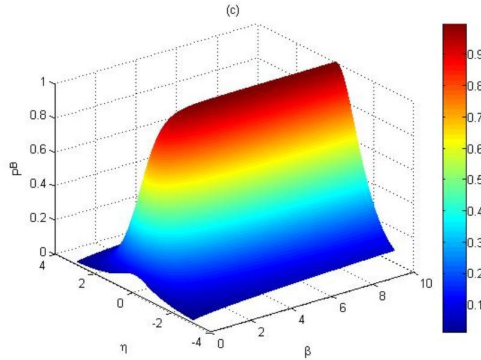
la fonction de pureté est élevée, plus l'intrication faible que nous obtenons. Il existe donc une relation inverse entre l'angle de mélange et la fonction de pureté. En raison de la relation inverse entre la fonction de pureté et l'intrication, il existe une relation positive entre l'intrication et l'angle de mélange.



**Figure 2.5 :** Pureté  $P^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = 0$ .



**Figure 2.6 :** Pureté  $P^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



**Figure 2.7** : Pureté  $P^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \pi/2$ .

Les **Figures 2.5** , **2.6** et **2.7** explique l'effet de l'angle du mélange sur la fonction de pureté locale  $P^B$ . d'une façon générale, les mêmes observations concernant la fonction de pureté  $P^A$  s'appliquent ici.

Sur la base des résultats obtenus, nous pouvons aller plus loin et porter notre attention sur l'étude des entropies de ce système. Cette question fera l'objet du prochain chapitre.

## 2.2 Cas spéciaux

Il est intéressant d'étudier quelques cas limites afin de caractériser le comportement de notre système. Puisque notre système implique trois paramètres libres, on peut examiner différentes situations selon certaines configurations choisies pour simplifier les fonctions pureté et donc extraire plus d'informations sur les intrications de notre système. Celles-ci concernent des limites de température, et des limites de couplage.

### 2.2.1 basse température

En prenant la limite  $\beta \rightarrow \infty$  on s'assure que le système est dans l'état fondamental

$$P^{AB}(\eta, \theta; \beta \longrightarrow \infty) = 1 \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} P^A(\eta, \theta; \beta \longrightarrow \infty) &= P^B(\eta, \theta; \beta \longrightarrow \infty) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(e^\eta \sin^2(\frac{\theta}{2}) + e^{-\eta} \cos^2(\frac{\theta}{2}))(e^{-\eta} \sin^2(\frac{\theta}{2}) + e^\eta \cos^2(\frac{\theta}{2}))}} = P_{00}(\eta, \theta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

ce qui garantit que notre système est bien dans l'état fondamental et donc c'est exactement la pureté  $P_{00}(\eta, \theta)$  correspondant à l'état fondamental ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ) obtenu dans le chapitre précédent. Ce résultat confirme que considérer la température de l'environnement comme un réservoir agissant sur notre système est un bon candidat pour décrire ces degrés d'intrication.

Ce résultat est en accord avec notre approche qui utilise la notion de température du réservoir au moyen du formalisme intégral de chemin.

### 2.2.2 haute température

pour examiner cette situation, nous prenons  $\beta \longrightarrow 0$

$$P^{AB}(\eta, \theta; \beta \longrightarrow 0) \longrightarrow \frac{\hbar^2 \omega^2}{4} \beta^2 \longrightarrow 0 \quad (2.38)$$

$$P^A(\eta, \theta; \beta \longrightarrow 0) \longrightarrow \frac{\frac{\hbar \omega \beta}{2}}{\sqrt{e^{2\eta} \sin^2(\frac{\theta}{2}) + e^{-2\eta} \cos^2(\frac{\theta}{2})}} \longrightarrow 0 \quad (2.39)$$

$$P^B(\eta, \theta; \beta \longrightarrow 0) \longrightarrow \frac{\frac{\hbar \omega \beta}{2}}{\sqrt{e^{2\eta} \cos^2(\frac{\theta}{2}) + e^{-2\eta} \sin^2(\frac{\theta}{2})}} \longrightarrow 0 \quad (2.40)$$

Les **Figures 2.1**  $\longrightarrow$  **2.7** Concernant les fonctions de pureté, on constate que l'effet fort de la température sur celles-ci, comme à très haute température, les fonctions de pureté sont à leur plus petite valeur, quelle que soit les valeurs des autres paramètres. Cela fait que l'intrication thermique est très importante. On observe que les puretés sont des fonctions décroissantes avec  $\eta$  croissant. À  $\eta = 0$ , Les fonctions de pureté atteignent leur valeur maximale là où le système se sépare complètement.

### 2.2.3 Couplage faible

$$P^A(\eta, \theta \longrightarrow 0; \beta) = \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta}\beta}{2}\right) \quad (2.41)$$

$$P^B(\eta, \theta \longrightarrow 0; \beta) = \tanh\left(\frac{\hbar\omega e^{\eta}\beta}{2}\right) \quad (2.42)$$

L'étude graphique correspondant à ces deux limites  $P^A(\eta, \theta \longrightarrow 0; \beta)$  et  $P^B(\eta, \theta \longrightarrow 0; \beta)$  est présente dans les deux **Figures** 2.2 et 2.5.

Sur la base des résultats obtenus, nous pouvons aller plus loin et porter notre attention sur l'étude des entropies de ce système. Cette question fera l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre 3

# Entropies

Dans ce chapitre, nous étudions l'idée de l'entropie quantique qui est pertinente pour traiter diverses tâches liées à l'intrication thermique. L'entropie est un outil important qui peut être utilisé pour mesurer le manque d'information ou la mixité dans la préparation d'un état donné.

La définition de l'entropie ne nécessite pas l'idée d'un observateur, mais nécessite de préciser le sous-espace du système considéré afin d'obtenir la matrice de densité. Un observateur peut mesurer différentes entropies selon les aspects du système pris en compte. Concrètement, pour un système de deux particules intriquées, on mesurera des entropies différentes pour chacune des particules indépendamment de l'état complètement intriqué. En général, le manque d'informations ou la mixité concernant la préparation d'un état donné peuvent être quantifiés en utilisant des mesures entropiques généralisées, telles que l'entropie de Bastiaans-Tsallis[12, 13]

$$S_q = \frac{1 - \text{Tr}(\rho^q)}{q - 1} \quad (3.1)$$

et l'entropie de Rényi[14]

$$S_q^R = \frac{\log \text{Tr}(\rho^q)}{1 - q} \quad (3.2)$$

où le paramètre est  $q > 1$ .

Ces familles d'entropies peuvent être réduites à l'entropie de von Neumann  $S_{vN}$  dans la limite suivante

$$S_1 = \lim_{q \rightarrow 1^+} S_q = \lim_{q \rightarrow 1^+} S_q^R = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = S_{vN} \quad (3.3)$$

qui est additif sur les états du produit tensoriel et fournit une autre mesure pratique du mélange de l'état quantique.

Dans la suite, nous étudierons l'entropie de Rényi ainsi que l'entropie de von Neumann pour le système actuel et en obtiendrons des résultats intéressants.

### 3.0.4 Entropie de Rényi

L'entropie de Rényi est généralement considérée comme un outil permettant de révéler l'ensemble du spectre d'intrication. A cet égard, nous mentionnons que les auteurs de la référence [10] ont traité des mesures d'intrication spatiale dans un modèle atomique à deux électrons en formulant la trace de la matrice densité en termes de fonction de pureté comme suit

$$\text{Tr} \rho^q = \frac{(2P)^q}{(1+P)^q - (1-P)^q} \quad (3.4)$$

Ainsi, l'entropie de Rényi correspondante se lit comme suit

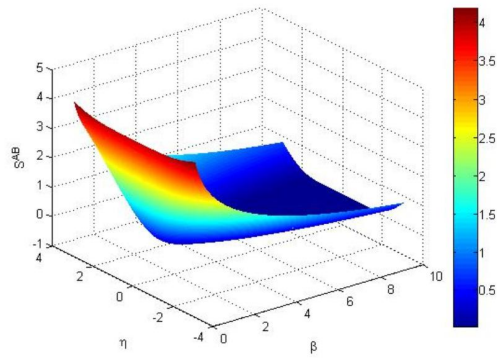
$$S_q^R = \frac{q}{1-q} \ln \left( 1 - \frac{1-P}{1+P} \right) - \frac{1}{1-q} \ln \left( 1 - \left( \frac{1-P}{1+P} \right)^q \right) \quad (3.5)$$

D'autre part, comme l'entropie de Bastiaans-Tsallis se réduit à l'entropie linéaire pour  $q = 2$

$$S_L = S_2 = \frac{1 - \text{Tr}(\rho^2)}{2-1} = 1 - \text{Tr}(\rho^2) = 1 - P \quad (3.6)$$

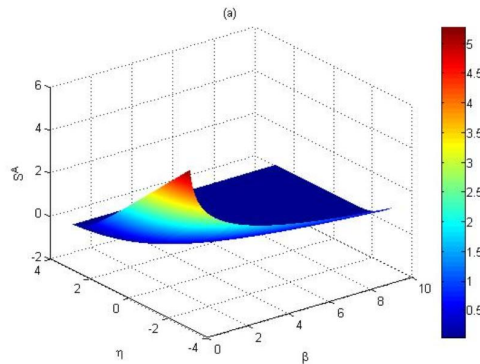
il devient clair que, dans ce cas, l'équation (3.4) donne pour  $q = 2$

$$S_2^R = -\ln P. \quad (3.7)$$

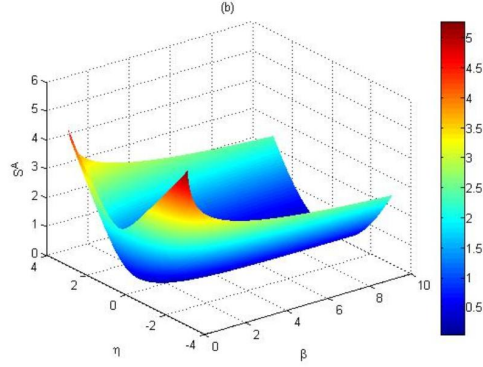


**Figure 3.1** : Entropie de Rényi  $S^{AB}$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$ .

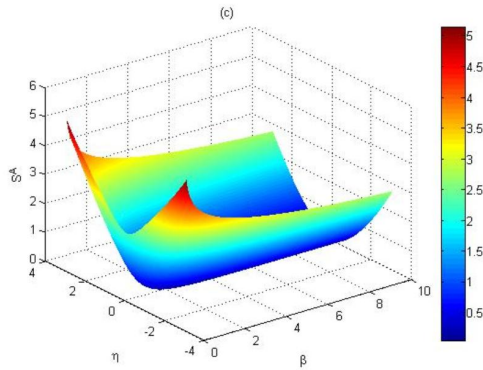
La **Figure 3.1** montre que l'entropie de Rényi  $S^{AB}$  est affectée par le changement de température à partir de la valeur  $\beta = 0$  jusqu'à la valeur  $\beta = 10$ , aussi  $S^{AB}$  est une fonction complètement symétrique par rapport à  $\eta = 0$ .



**Figure 3.2** : Entropie de Rényi  $S^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = 0$ .



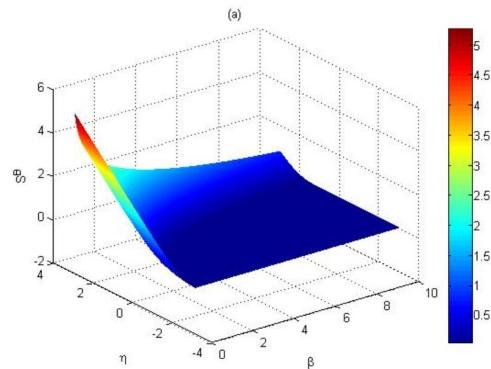
**Figure 3.3** : Entropie de Rényi  $S^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



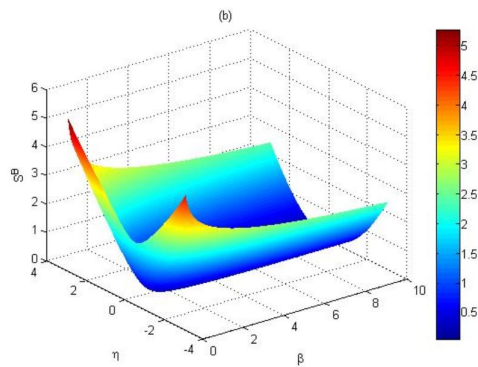
**Figure 3.4** : Entropie de Rényi  $S^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

L'effet de l'angle de mélange sur l'entropie de Rényi  $S^A$  est illustré sur les **Figure 3.2, 3.2** et **3.4** . Lorsque l'angle de mélange prend des valeurs  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$  respectivement, la constante de couplage  $\eta$  varie de  $-4$  à  $+4$  et le paramètre  $\beta$  est vari de  $0$  à  $10$ . L'entropie maximale est de  $4.5 J/K$  pour  $\theta = 0$ . Cette valeur a été augmentée en appliquant la valeur d'angle de mélange égale à  $\frac{\pi}{4}$ . Plus nous appliquons une valeur d'angle de mélange plus élevée

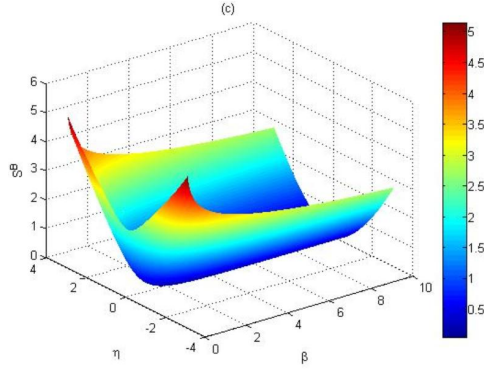
dans le système, plus l'entropie que nous obtenons est élevée. La valeur maximale d'entropie que nous avons trouvée égale à  $5J/K$  après application d'un angle de mélange égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Cela révèle la relation positive entre l'angle de mélange et l'intrication du sous système  $A$ .



**Figure 3.3 :** Entropie de Rényi  $S^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = 0$ .



**Figure 3.6 :** Entropie de Rényi  $S^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



**Figure 3.7** : Entropie de Rényi  $S^B$  en termes des paramètres

de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Les **Figures 3.5** , **3.6** et **3.7** explique l'effet de l'angle du mélange sur l'entropie de Rényi locale  $S^B$ . d'une façon générale, les mêmes observations concernant l'entropie de Rényi  $S^A$  s'appliquent ici.

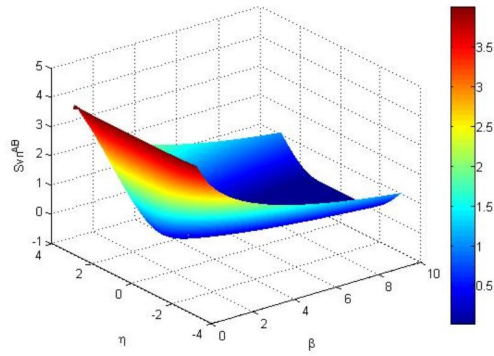
### 3.0.5 Entropie de von Neumann

L'entropie de von Neumann répond aux besoins du traitement des états purs. En partant des équations (3.1) et (3.2) on peut facilement montrer que l'entropie de von Neumann est dérivée en prenant simplement la limite  $q \rightarrow 1$ . On peut alors écrire :

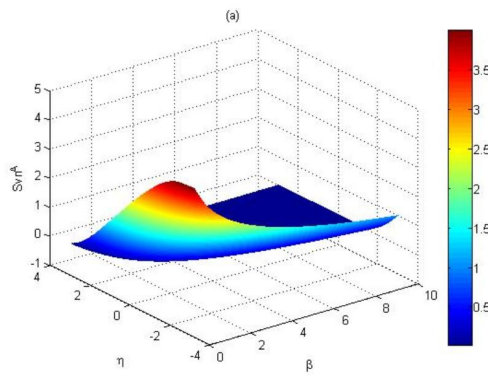
$$S_{vN} = -Tr(\rho \log \rho) \quad (3.8)$$

représente l'entropie de von Neumann. Ainsi, sur la base de l'entropie de Rényi, le  $S_{vN}$  peut être exprimé en termes de pureté comme suit :

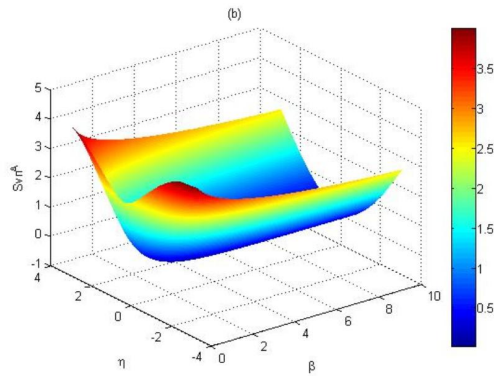
$$S_1 = S_{vN} = -\ln \left( \frac{2P}{1+P} \right) - \frac{1-P}{2P} \ln \frac{1-P}{1+P} \quad (3.9)$$



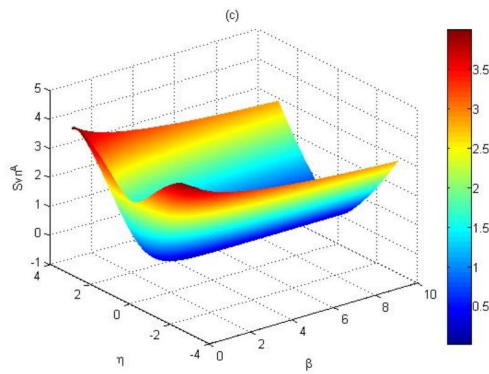
**Figure 3.8** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^{AB}$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$ .



**Figure 3.9** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = 0$ .



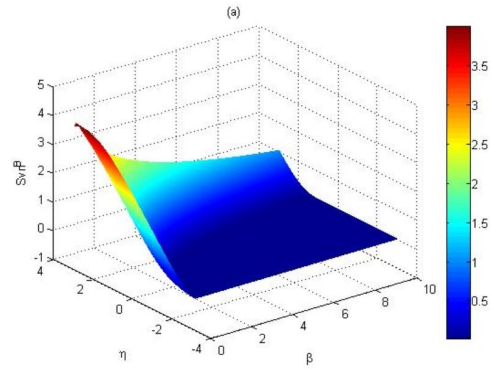
**Figure 3.10** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



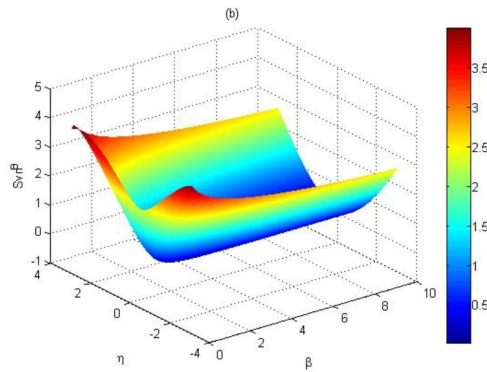
**Figure 3.11** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^A$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Cette figure explique l'effet de l'angle de mélange sur l'entropie de von Neumann. Où l'angle de mélange prend des valeurs  $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , la constante de couplage  $\eta$  varie de  $-4$  à

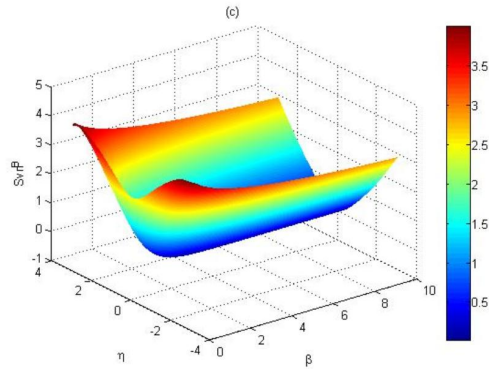
+4 et le paramètre  $\beta$  est vari de 0 à 10.



**Figure 3.6** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = 0$ .



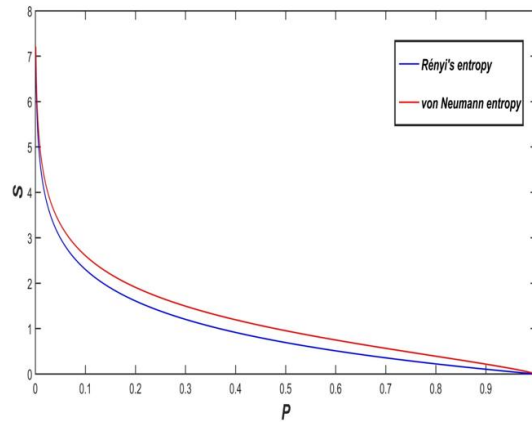
**Figure 3.13** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .



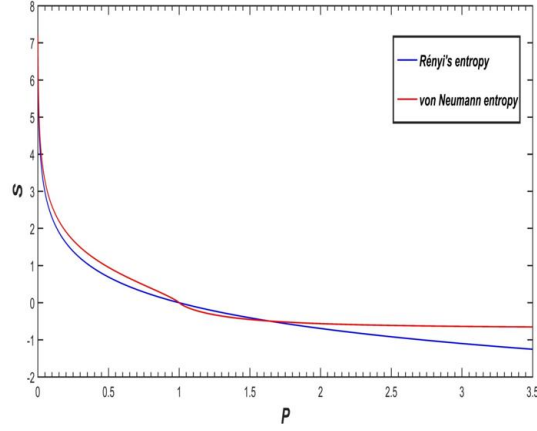
**Figure 3.14** : Entropie de von Neumann  $S_{vN}^B$  en termes des paramètres de couplage  $\eta$  et de température  $\beta$  pour une valeur fixe de l'angle de mélange  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

A travers tous ces figures des fonctions d'entropies de Von Neumann, on remarque une quasi identité entre elles et les fonctions d'entropies de Rényi. En fait, la raison est que les deux fonctions sont liées aux fonctions de pureté, qui varient dans une intervalle étroite de 0 à 1.

Pour illustrer cela, nous dessinons les deux fonctions d'entropies en termes de la fonction de pureté dans les deux graphes suivants.



Ce graphique représente une étude des fonctions d'entropie de Rényi (3.7) et de Von Neumann (3.9) en termes de la fonction de pureté  $P$  lorsqu'elle évolue dans l'intervalle de 0 à 1.



Ce graphique représente une étude des fonctions d'entropie de Rényi (3.7) et de Von Neumann (3.9) en termes de la fonction de pureté  $P$  lorsqu'elle évolue dans l'intervalle  $P \in ]0, 3.5[$ .

À partir de là, nous nous concentrerons sur la fonction de partition.

### 3.0.6 Entropie thermique

Pour évaluer l'entropie thermique, on a besoin de la fonction de partition qui est généralement notée  $Z$ . Elle est définie comme

$$S = \frac{\partial}{\partial T} (k_B T \ln Z) \quad (3.10)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

### Fonction de partition

Pour évaluer la fonction de partition  $Z$  correspondant à un système donné, il faut utiliser la notion de densité de probabilité et la tracer. Ceci est réalisé en effectuant dans (2.14) la substitution de variable  $(x_{1a}, x_{2a}) = (x_{1b}, x_{2b}) = (x_1, x_2)$

$$Z = \text{Tr} \rho^{AB} = \int \int P_\beta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.11)$$

où  $P_\beta(x_1, x_2)$  est la densité de probabilité qui est liée aux éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur de densité  $\rho^{AB}$  par

$$P_\beta(x_1, x_2) = \rho^{AB}(x_{1a} = x_1, x_{2a} = x_2, x_{1b} = x_1, x_{2b} = x_2; \beta) \quad (3.12)$$

Alors la fonction de partition peut s'écrire

$$\begin{aligned} Z &= \int \int P_\beta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \sqrt{\frac{\omega e^{-\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^{-\eta}\beta)}} \sqrt{\frac{\omega e^{\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^{\eta}\beta)}} \int \int e^{-2(a-d)x_1^2 - 2(b-f)x_2^2 + 4(c-g)x_1 x_2} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Maintenant, pour évaluer l'intégrale du membre droit, nous utilisons la formule bien connue (1.35). Ce faisant, nous terminons par

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{\omega e^{-\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^{-\eta}\beta)}} \sqrt{\frac{\omega e^{\eta}}{2\pi\hbar \sinh(\hbar e^{\eta}\beta)}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(b-f)(a-d) - (c-g)^2}} \\ Z &= \frac{1}{4 \sinh\left(\frac{\hbar\omega e^{-\eta}\beta}{2}\right) \sinh\left(\frac{\hbar\omega e^{\eta}\beta}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega e^{-\eta}\beta}{2}} e^{-\frac{\hbar\omega e^{\eta}\beta}{2}}}{(1 - e^{-\hbar\omega e^{-\eta}\beta})(1 - e^{-\hbar\omega e^{\eta}\beta})} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comme

$$\frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega e^{-\eta}\beta}} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(e^{-\hbar\omega e^{-\eta}\beta}\right)^{n_1}, \quad \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega e^{\eta}\beta}} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(e^{-\hbar\omega e^{\eta}\beta}\right)^{n_2} \quad (3.15)$$

En revanche, en procédant par comparaison avec l'expansion formelle

$$Z = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} e^{-E_{n_1, n_2}\beta} \quad (3.16)$$

nous en déduisons bientôt que les énergies propres sont données par

$$E_{n_1, n_2} = \hbar\omega e^{-\eta} \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega e^{+\eta} \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \quad (3.17)$$

Celles-ci s'avèrent exactement identiques aux énergies propres que nous avons déjà obtenues au chapitre 1.

A ce stade, on peut dire que l'on est en mesure d'évaluer l'entropie thermique. Elle est donnée par

$$S_{th} = k_B \ln Z + k_B \beta \langle E \rangle \quad (3.18)$$

où  $\langle E \rangle$  représente la valeur moyenne de l'énergie qui est liée à la fonction de partition comme

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (3.19)$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left( \frac{1}{4 \sinh \left( \frac{\hbar \omega e^{-\eta} \beta}{2} \right) \sinh \left( \frac{\hbar \omega e^{+\eta} \beta}{2} \right)} \right) \quad (3.20)$$

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar \omega e^{-\eta}}{2} \coth \left( \frac{\hbar \omega e^{-\eta} \beta}{2} \right) + \frac{\hbar \omega e^{+\eta}}{2} \coth \left( \frac{\hbar \omega e^{+\eta} \beta}{2} \right) \quad (3.21)$$

Maintenant, en regardant ce qui nous attend, nous montrons que l'entropie thermique globale correspondant à notre système est donnée par

$$\begin{aligned} S_{th}^{AB} = & -k_B \ln \left( 4 \sinh \left( \frac{\hbar \omega e^{-\eta} \beta}{2} \right) \sinh \left( \frac{\hbar \omega e^{+\eta} \beta}{2} \right) \right) \\ & + k_B \beta \left( \frac{\hbar \omega e^{-\eta}}{2} \coth \left( \frac{\hbar \omega e^{-\eta} \beta}{2} \right) + \frac{\hbar \omega e^{+\eta}}{2} \coth \left( \frac{\hbar \omega e^{+\eta} \beta}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

# Conclusion

Dans ce memoire, nous avons étudié quelques facettes de l'intrication dans le couplage de deux oscillateurs couplés sans spin. Une première façon de réaliser cette étude consiste à utiliser des transformations unitaires globales appropriées pour mapper l'hamiltonien sous une forme diagonale. Cela nous a permis de déterminer les solutions du spectre d'énergie, et les fonctions d'onde correspondantes puis d'évaluer la fonction de pureté pour l'état fondamental qui est une mesure du degré d'intrication présent dans le système. La pertinence physique intéressante de l'expression analytique de la pureté des états fondamentaux est sa dépendance à l'égard de l'angle de mélange ainsi que de la constante de couplage et le fait qu'elle appartient à l'intervalle  $[0, 1]$  comme il se doit. La chose utile qui est rapidement apparue est la dépendance de cette fonction (la pureté) sur les paramètres de couplage  $\eta$  et de l'angle de mélange  $\theta$ . Cela représente un ajout physique et pratique dans le sens d'accéder à un contrôle facile de l'intrication dans le système actuel. Nous avons montré que le système est fortement intriqué pour  $\eta$  grand et qu'il est complètement non intriqué pour  $\eta = 0$ , comme prévu. Nous avons également étudié une autre facette de l'intrication dans le système en considérant son aspect thermique. Nous avons donc utilisé le formalisme intégral de chemin. Nous avons commencé par considérer l'évolution du système par rapport à la température à travers un propagateur global. Ensuite, à l'aide de deux transformations unitaires, nous avons explicitement dérivé la matrice de densité thermique correspondant à l'ensemble du spectre de notre système. Nous avons également exploré les possibilités offertes par ce traitement. Sur la base du propagateur de Feynman en temps imaginaire, nous avons défini la matrice de densité du système, à partir de laquelle nous avons dérivé les deux matrices de densité réduites pour les deux sous-systèmes A et B. Après cela, nous avons calculé trois fonctions de pureté et tracé leurs courbes correspondantes en termes de paramètres de température et de couplage pour trois valeurs de l'angle de mélange. L'étude graphique a permis de déterminer plus facilement les conditions dans lesquelles l'intrication thermique est forte ou faible pour les différents paramètres.

Sur la base des résultats obtenus dans les chapitres 1 et 2, nous avons examiné consécutivement les entropies de Rényi, de von Neumann et thermique. Il s'avère que la seconde peut être obtenue comme cas limite de la première. Pour obtenir l'expression de ce dernier, nous avons

utilisé la fonction de partition. Ensuite, en imposant des conditions adaptées sur l'angle du couplage  $\theta$  nous avons réalisé une analyse numérique (graphique) des deux premiers entropies.

# Bibliographie

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* 23 807(1935).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen *Phys. Rev.* 47 (1935) 777
- [3] M. Nielsen and I. Chang, 2004 *Quantum Computation and Quantum information* (Cambridge University Press, Cambridge, UK)
- [4] L. Amico et al., *Rev. Mod. Phys.* 80,(2008) 517.
- [5] N. L. Harshman and W. F. Flynn, *Quantum Inf. Comput.* 11, 278 (2011).
- [6] A. Jellal, F. Madouri and A. Merdaci, *J. Stat. Mech.* Vol. 2011, (2011) P09015
- [7] A. Merdaci, A. Jellal, A. AlSawalha and A. Bahaoui, *J. Stat. Mech.* Vol.2018 (2018) P09101
- [8] Fethi Madouri and Abdeldjalil Merdaci to appear in *int. J. Mod. Phys.B*
- [9] Merdaci A, A. Jellal, Ayman Al Sawalha and Abdelhadi Bahaoui, *J. Stat. Mech.* (2018) 093101.
- [10] Pipek.J and I. Nagy, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 052501.
- [11] M. Le Bellac “*Physique Quantique*”, CNRS éditions 2007
- [12] M. J. Bastiaans, *J. Opt. Soc. Am.* 1 (1984) 711 ; *ibid.* 3 (1986) 1243.
- [13] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* 52 (1988) 479.
- [14] A. Rényi, ”*Probability Theory*“ (North Holland, Amsterdam, 1970).
- [15] H. Kleinert, ” *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*“ (World Scientific, Singapore 2009).