

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم  
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**ÉTUDE DE LA STABILITÉ D'UN SYSTÈME DE  
POREUX THERMOELASTIQUE AVEC DEUXIÈME  
SON ET UN TERME DE RETARD DISTRIBUÉ**

Option : COSD

Par :

Belkhir Ghada

Encadré par : Hebhoub Fahima

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Foughali Fouzia

M.C.B U. SKIKDA

Examineur: Far Zina

M.A.A U. SKIKDA

Année : 2021/2022



## *Remerciements*

*Après avoir rendu grâce à Dieu le Tout Puissant et le Miséricordieux nous tenons à remercier vivement tous ceux qui, de près ou de loin ont participé à la rédaction de ce document. Il s'agit plus particulièrement de :*

*Madame "Hebhoub Fahima"*

*a l'Université SKIKDA pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et son sens d'écoute et d'échange.*

*J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres des jurys*

*Foughali Fouzia et Far Zina*

*pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.*

*Je ne laisserai pas cette occasion passer, sans remercier tous les enseignants et le personnel de l'Université de SKIKDA, et particulièrement ceux de le Département Mathématiques pour leur aide et leurs précieux conseils et pour l'intérêt qu'ils portent à ma formation. Tous nos camarades de promotion pour la solidarité et la collaboration durant ces cinq ans de formation.*

*Enfin, mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce projet.*

*Merci* ✍️





## *Dédicace*

*✍ ... Avec tout mon amour éternel et avec l'intensité de mes émotions.*

*Je dédie ce travail :*

*A Mon très cher père*

*L'homme qui a tellement sacrifié pour moi et qui mérite toute ma reconnaissance*

*Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour*

*exprimer ce que vous méritez.*

*Ma très chère mère*

*Je n'oublie pas ses sacrifices : l'amour qu'elle m'a donné et Pour ces encouragements, je te souhaite la joie et la bonne santé*

*A mon très cher frère*

*les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous.*

*A mes très chères sœurs*

*Affables, honorables, aimables : vous représentez pour moi le symbole de la bonté par excellence.*

*A tous mes amis*

*Pour leurs soutiens constants et encouragements tout au long de mes études.*



Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème de poreux thermoelastique avec deuxième son et avec la présence du retard distribué. L'idée importante dans ce travail, est de montrer le rôle que joue les conditions de Dirichlet dans la nature de la stabilité, où nous avons montré à l'aide de la méthode de l'énergie une stabilité exponentielle dans le cas de conditions de Dirichlet et seulement une stabilité polynomiale dans le cas des conditions de Dirichlet Newman

---

## ABSTRACT

In the present work, we consider a porous thermoelastic system with distributed delay term in second sound. The importance idea in this work lies with describing the role of Dirichlet conditions in the nature of stability, that is by using the energy method combined with multiplicative technique, we show the polynomial decay estimate of solution if we take conditions and exponential stability. A new restriction on delay term depending on the time is used to show that the solution energy should be stable.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>7</b>
1.1	Les espaces de Sobolev . . . . .	7
1.1.1	L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ . . . . .	7
1.1.2	L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$ . . . . .	8
1.1.3	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ . . . . .	8
1.2	Semi-groupe . . . . .	9
1.3	Quelques théorèmes utiles . . . . .	9
1.3.1	Théorème de Fubini . . . . .	9
1.4	Quelques inégalités importantes . . . . .	10
1.4.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	10
1.4.2	Inégalité de Young . . . . .	10
1.4.3	Inégalité de Poincaré . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Taux de décroissance polynomiale</b>	<b>12</b>
2.1	Position du problème . . . . .	12
2.2	L'énergie du système . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Taux de décroissance exponentielle</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

La propagation des ondes dans un milieu poreux est un phénomène complexe se produisant dans de nombreuses applications. Ce phénomène est transcrit au moyen d'un système couplé d'équations hyperboliques-paraboliques. Le couplage représente les effets d'un modèle utilisé en thermoélasticité. La question de la stabilité des systèmes de type Poreux ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années, et un certain nombre de résultats concernant la décroissance de l'énergie ont été établis. Un but de recherche important est de rechercher une dissipation minimale par laquelle les solutions de Poreux décroît uniformément jusqu'à zéro au fur et à mesure que le temps tend vers l'infini. A cet égard, plusieurs types de mécanismes de dissipation ont été introduits, tels que : l'amortissement par frottement, l'amortissement viscoélastique et la dissipation thermique. Nous nous intéressons dans ce travail seulement aux effets liés à la dissipation thermique dans un système de Poreux avec deuxième son en présence d'un terme de retard distribué, où nous avons considéré le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_{tt} u = \mu u_{xx} + b y_x - \gamma \theta_x + \beta \partial_t u_{xx} \\ J \partial_{tt} y = \delta y_{xx} - b u_x - \xi y - d Q_x + m \theta - \eta_1 \partial_t y - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \partial_t y(x, t - s) ds \\ \kappa \partial_t \theta = l \theta_{xx} - \gamma \partial_t u_x - m \partial_t y - k_1 Q_x \\ \alpha \partial_t Q = -k_1 \theta_x - d \partial_t y_x, \end{array} \right. \quad (1)$$

où

$$(x, s, t) \in (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty),$$

avec conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \\ y(x, 0) = y_0(x), \partial_t y(x, 0) = y_1(x) \\ Q(x, 0) = Q_0(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \end{cases} \quad (2)$$

et conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0 \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = Q(0, t) = Q(1, t) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où  $u_0, u_1, y_0, y_1, \theta_0, Q_0$ , sont données des fonctions.

Ici,  $u$  est le déplacement transversal du faisceau,  $y$  est l'angle de rotation, la fonction  $\theta$  est la différence de température,  $Q = Q(x, t)$  est le flux de chaleur et  $\rho, \mu, b, J, \delta, \xi, \gamma, \beta, d, \kappa, k_1, \alpha, m, l > 0$ . Le terme  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \partial_t y(x, t - s) ds$  est le retard distribué avec  $\tau_1, \tau_2 > 0$  et  $\eta_1$  est une constante positive,  $\eta_2$  est une fonction  $L^\infty$ .

(G1) La fonction bornée  $\eta_2 \in ([\tau_1, \tau_2], \mathbb{R})$  satisfaisant

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| ds \leq \eta_1. \quad (4)$$

De tels problèmes se posent en thermoélasticité unidimensionnelle ou longitudinale lorsque le retard distribué à long terme est pris en compte. Ici, nous étudierons comment appliquer le terme de retard distribué avec la sensibilité aux conditions de Dirichlet pour connaître le comportement de la solution de (1), en construisant une fonctionnelle de Lyapunov combinée à la méthode de l'énergie perturbée. Le résultat principal de cet article est de prouver la stabilité polynomiale et la stabilisation exponentielle du système (1) sous la condition (4).

Lorsque  $\theta = Q = \eta_1 = \eta_2 = 0$ , le système obtenu est

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt} u = \mu u_{xx} + b y_x + \beta \partial_t u_{xx}, & \text{si } (0, 1) \times (0, \infty) \\ J \partial_{tt} y = \delta y_{xx} - b u_x - \xi y, & \text{si } (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (5)$$

Dans [5], M.L. Santos et al. a prouvé que le système (5) n'a pas de décroissance exponentielle quelle que soit la relation entre les coefficients et qu'il est polynomialement stable avec un taux optimal pour les conditions aux limites D-N.

En prenant  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , le système obtenu est

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt} u = \mu u_{xx} + by_x - \gamma \theta_x + \beta \partial_t u_{xx}, & \text{si } (0, 1) \times (0, \infty) \\ J \partial_{tt} y = \delta y_{xx} - bu_x - \xi y - dQ_x + m\theta, & \text{si } (0, 1) \times (0, \infty) \\ \kappa \partial_t \theta = l \theta_{xx} - \gamma \partial_t u - m \partial_t y - k_1 Q_x, & \text{si } (0, 1) \times (0, \infty) \\ \alpha \partial_t Q = -k_1 \theta_x - d \partial_t y_x, & \text{si } (0, 1) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

En utilisant la même méthode que dans [5], on peut montrer que le modèle (6) manque de stabilité exponentielle quelle que soit la relation entre les coefficients et qu'il est polynomialement stable avec un taux optimal pour les conditions aux limites D-N-N-N.

Pour  $\theta = Q = \beta = 0$ , le système obtenu est

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt} u = \mu u_{xx} + by_x + \beta u_{txx} \\ J \partial_{tt} y = \delta y_{xx} - bu_x - \xi y - \eta_1 \partial_t y - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \partial_t y(x, t - s) ds. \end{cases} \quad (7)$$

Avec un terme de retard dépendant du temps, les auteurs dans [2] ont montré que le modèle (7) est exponentiellement stable, avec

$$0 < \eta_2 < \eta_1 \sqrt{1 - s}, \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} = 0.$$

Il y a environ un siècle, exactement en 1921, il a été développé et étudié le système Timoshenko par Timoshenko [19], où il a considéré le problème suivant

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} u &= (K(u_x - \varphi))_x, \quad \text{si } (0, L) \times (0, \infty) \\ I_\rho k \partial_{tt} \varphi &= (EI \varphi_x)_x + K(u_x - \varphi), \quad \text{si } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (8)$$

avec conditions aux limites

$$EI \varphi_x|_{x=0}^{x=L} = 0, (u_x - \varphi)|_{x=0}^{x=L} = 0,$$

un exemple simple illustre les vibrations transversales d'une poutre. Dans sa configuration d'équilibre,  $u$  est le déplacement transversal de la poutre et  $\varphi$  est l'angle de rotation. Les coefficients  $\rho, I_\rho, E, I$  et  $K$  sont respectivement la masse volumique, le moment d'inertie polaire d'une section, le coefficient d'élasticité d'Young, le moment d'inertie d'une section et

le module d'amputation.

Dans [6] les auteurs ont considéré (8) avec deux conditions aux limites

$$\begin{aligned} K\varphi(L, t) - K\frac{du}{dx}(L, t) - \alpha(L, t) &= 0, \forall t \geq 0 \\ EI\frac{d\varphi}{dx}(L, t) + \beta\frac{d\varphi}{dt}(L, t) &= 0, \forall t \leq 0. \end{aligned}$$

Les auteurs ont établi un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie (8).

Munoz et Racke dans [15] ont considéré

$$\begin{cases} \rho_1\partial_{tt}\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2\partial_{tt}\psi - \alpha\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \\ \rho_3\partial_t\theta - \kappa\theta_{xx} + y\partial_t\psi_x = 0, \end{cases} \quad (9)$$

où  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  sont respectivement le déplacement transversal, l'angle de rotation et la différence de température. Ils ont prouvé que le système est stable exponentiellement, sous différentes conditions aux limites, si et seulement si

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{\alpha}{\tau_2}. \quad (10)$$

Dans [7], les auteurs ont considéré et prouvé la stabilité du système de magnétoélasticité poreux

$$\begin{cases} \rho\partial_{tt}u = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{txx} \\ J\partial_{tt}\varphi = \alpha\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta \\ c\partial_t\theta = k\theta_{xx} - \beta\partial_tu_x - m\partial_t\varphi. \end{cases} \quad (11)$$

Dans [16] et [1] problèmes étendus pour un système de Timoshenko de second son avec terme de retard de la forme  $\mu_2\partial_t\psi(x, t - \tau)$  et  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \pi_2(s)\partial_t\psi(x, t - s)ds$  respectivement. Sous des hypothèses appropriées sur les poids du retard et de l'amortissement par frottement, les deux auteurs ont établi le résultat de l'existence et l'unicité de la solution et ont prouvé que le système est également exponentiellement stable quelles que soient les vitesses de propagation des ondes, car de nombreux auteurs ont abordé ce type de problème. (Voir [3,8-14,17,18,20,21]).

En complément de ces travaux, nous prouvons la décroissance polynomiale et exponentielle

de (1) en utilisant des techniques multiplicatives, en construisant une série de lemmes, ceci est le contenu du chapitre 2 et chapitre 3 après un chapitre de préliminaire.

## Rappels et notations

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces de Sobolev, semi-groupe, quelques théorèmes utiles et quelques inégalités importantes, que nous utilisons dans ce mémoire.

### 1.1 Les espaces de Sobolev

#### 1.1.1 L'espace de Sobolev $W^{1,p}$

Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné ou non borné et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ .

**Définition 1.1.** *L'espace de Sobolev  $W^{1,p}$  est défini par :*

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \mid \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}. \quad (1.1)$$

On pose  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ ,

pour  $u \in W^{1,p}(I)$  on note  $u' = g$ .

## Notation

L'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

(ou parfois, si  $1 < p < \infty$ , de la norme équivalente  $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{1/p}$ ).

L'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}.$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

est équivalente à la norme de  $W^{1,2}$ .

**Proposition 1.1.** *L'espace  $W^{1,p}$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace  $W^{1,p}$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .*

*L'espace  $H^1$  est un espace de Hilbert séparable.*

### 1.1.2 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$

**Définition 1.2.** *Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(I)$  la fermeture de  $C_c^1(I)$  dans  $W^{1,p}(I)$ . On note  $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ .*

*L'espace  $W_0^{1,p}$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}$ , l'espace  $H_0^1$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1$ .*

*L'espace  $W_0^{1,p}$  est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ .*

*L'espace  $H_0^1$  est un espace de Hilbert séparable.*

### 1.1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$

**Définition 1.3.** *Étant donné un entier  $m \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ . On définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), \quad u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

*On pose*

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que  $u \in W^{m,p}(I)$  si et seulement s'ils existent  $m$  fonctions  $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$  telles que :

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

où  $D^j \varphi$  désigne la dérivée de l'ordre  $j$  de  $\varphi$ , lorsque  $u \in W^{m,p}(I)$ , on peut donc considérer les dérivées successives  $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$  jusqu'à l'ordre  $m$ , on les note  $Du, D^2u, \dots, D^m u$ . l'espace  $W^{m,p}$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

et l'espace  $H^m$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

## 1.2 Semi-groupe

**Définition 1.4.** Une famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'éléments  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  pour  $t \geq 0$  forme un semi-groupe de classe  $C_0$  dans  $X$  (ou semi-groupe fortement continu), si elle vérifie les conditions suivantes :

- ❶  $S(0) = I$  (identité dans  $\mathcal{L}(X)$ ).
- ❷  $S(t+s) = S(t)S(s)$  pour tout  $t, s \geq 0$  (propriété algébrique).
- ❸  $\lim_{t \rightarrow +0} \|S(t)x - x\|_X = 0$  pour tout  $x \in X$  (propriété topologique).

## 1.3 Quelques théorèmes utiles

### 1.3.1 Théorème de Fubini

**Théorème 1.1.** On suppose que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .

Alors, pour presque tout  $x \in \Omega_1$ ,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout  $y \in \Omega_2$ ,

$$F(x, y) \in L_x^1(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L_y^1(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

## 1.4 Quelques inégalités importantes

### 1.4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $H$  un espace vectoriel, Un produit scalaire  $(u, v)$  est une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, définie positive [i.e.  $(u, v) \geq 0, \forall u \in H$  et  $(u, v) > 0$  si  $u \neq 0$ ]. Rappelons qu'un produit scalaire vérifie **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

### 1.4.2 Inégalité de Young

Soient  $p$  et  $q$  deux réels vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors :

$$\forall (f, g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g|^q dx.$$

Si  $p = q = 2$  on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g|^2 dx.$$

### 1.4.3 Inégalité de Poincaré

On suppose que  $I$  est borné.

Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $|I|$ ) telle que :

$$\|u\|_{W_{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur  $W_0^{1,p}(I)$  la quantité  $\|u'\|_L^p$  est une norme équivalente à la norme de  $W^{1,p}(I)$ .

## CHAPITRE 2

# TAUX DE DÉCROISSANCE POLYNOMIALE

Dans ce chapitre, nous traitons un problème unidimensionnel de poreux thermoelastique avec un retard soumis à des conditions de Dirichlet.

### 2.1 Position du problème

Soit  $(P)$  le problème de poreux avec deuxième son et un retard distribué imposé dans la deuxième équation, comme suit :

$$(P) \begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b y_x + \beta u_{txx} \\ J y_{tt} = \delta y_{xx} - b u_x - \xi y - d q_x + m \theta - \eta_1 y_t - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t(x, t-s) ds \\ k \theta_t = l \theta_{xx} - \gamma u_{tx} - m y_t - k_1 q_x \\ \alpha q_t = -k_1 \theta_x - d y_{tx}. \end{cases}$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \\ y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = y_1(x) \\ q(x, 0) = q_0(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0 \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour traiter de tels problème, nous commençons par faire un changement de variable comme dans [4].

$$X(x, \varpi, s, t) = y_t(x, t - s). \quad (2.3)$$

une simple dérivation, nous donne

$$\begin{cases} sX_t(x, \varpi, s, t) = -X_\varpi(x, \varpi, s, t) \\ X(x, 0, s, t) = y_t(x, t), \end{cases} \quad (2.4)$$

En considérant (2.1) et (2.2), le problème (P) devient

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + by_x - \gamma \theta_x + \beta u_{txx} \\ Jy_{tt} = \delta y_{xx} - bu_x - \xi y - dq_x + m\theta - \eta_1 y_t - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X_t(x, 1, s, t) ds \\ k\theta_t = l\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - my_t - k_1 q_x \\ \alpha q_t = -k_1 \theta_x - \alpha y_{tx} \\ sX_t(x, \varpi, s, t) = -X_\varpi(x, \varpi, s, t) \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $x, \varpi \in (0, 1)$ ,  $s \in (\tau_1, \tau_2)$  et  $t \in (0, \infty)$ .

## 2.2 L'énergie du système

**Lemme 2.1.** *L'énergie du système (2.5) est donnée par*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \rho u_t^2 - \mu u_x^2 + Jy_t^2 - \delta y_x^2 + \xi y_t^2 + k\theta_t^2 + \alpha q_t^2 + 2bu_x y \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

*Satisfait*

$$E'(t) \leq -l \int_0^1 \theta_x^2 dx - \beta \int_0^1 u_{tx}^2 - \eta_0 \int_0^1 y_t^2 dx \quad (2.7)$$

Où  $\eta_0 = \eta_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| ds \geq 0$ .

**Preuve.** On multiplie le système (2.5)<sub>1</sub>-(2.5)<sub>4</sub> respectivement par  $u_t, y_t, \theta, \omega$  et intégrant sur  $(0, 1)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \rho \int_0^1 u_{tt} u_t dx - \mu \int_0^1 u_{xx} u_t dx - b \int_0^1 y_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx - \beta \int_0^1 u_{txx} u_t dx = 0 \\ \bullet J \int_0^1 y_{tt} y_t dx - \delta \int_0^1 y_{xx} y_t dx + b \int_0^1 u_x y_t dx + \xi \int_0^1 y y_t dx + d \int_0^1 q_x y_t dx \\ - m \int_0^1 \theta y_t dx + \eta_1 \int_0^1 y_t y_t dx + \int_0^1 y_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t(x, t-s) ds dx = 0 \\ \bullet k \int_0^1 \theta_t \theta dx - l \int_0^1 \theta_{xx} \theta dx + \gamma \int_0^1 u_{tx} \theta dx + m \int_0^1 y_t \theta dx + k_1 \int_0^1 q_x \theta dx = 0 \\ \bullet \alpha \int_0^1 q_t q dx + k_1 \int_0^1 \theta_x q dx + d \int_0^1 y_{tx} q dx = 0, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

à l'aide de l'intégration par partie et d'après les conditions aux bords, nous trouvons :

$$\begin{array}{l} \bullet - \int_0^1 y_x u_t dx = \int_0^1 y u_{tx} dx - [y u_t]_0^1 = \int_0^1 y u_{tx} dx \\ \bullet - \int_0^1 u_{txx} u_t dx = \int_0^1 u_{tx} u_{tx} dx - [u_{tx} u_t]_0^1 = \int_0^1 u_{tx}^2 dx \\ \bullet - \int_0^1 u_x y_t dx = - \int_0^1 u y_{tx} dx + [u y_t]_0^1 = - \int_0^1 u y_{tx} dx \\ \bullet - \int_0^1 \theta_{xx} \theta dx = \int_0^1 \theta_x \theta_x dx - [\theta_x \theta]_0^1 = \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ \bullet \int_0^1 u y_{tx} dx = \int_0^1 u_x y_t dx - [u y_t]_0^1 = \int_0^1 u_x y_t dx. \end{array}$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx - \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx + b \int_0^1 u_x y_t dx + \beta \int_0^1 u_{tx}^2 dx = 0 \\ \bullet \frac{J}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 y_t^2 dx - \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 y_x^2 dx - b \int_0^1 u y_{tx} dx + \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 y_t^2 dx \\ + \int_0^1 y_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t(x, t-s) ds dx = 0 \\ \bullet \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta_t^2 dx + l \int_0^1 \theta_x^2 dx = 0 \\ \bullet \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q_t^2 dx = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

et comme

$$b \int_0^1 y u_{tx} dx + b \int_0^1 u_x y_t dx = b \int_0^1 (y u_{tx} + u_x y_t) dx = b \frac{d}{dt} (y u_x) dx.$$

par addition, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho u_t^2 - \mu u_x^2 + J y_t^2 - \delta y_x^2 + \xi y_t^2 + k \theta_t^2 + \alpha q_t^2 + 2b u_x y) dx \\ & = -\beta \int_0^1 u_{tx}^2 - l \int_0^1 \theta_x^2 dx - \int_0^1 y_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t(x, t-s) ds dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En multipliant (2.5)<sub>5</sub> par  $X|\eta_2(s)|$ , et en intégrant sur  $(0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$ , on obtient

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s X X_t(x, \varpi, s, t) |\eta_2(s)| ds d\varpi dx + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} X X_\varpi(x, \varpi, s, t) |\eta_2(s)| ds d\omega dx = 0$$

d'après le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s X X_t(x, \varpi, s, t) |\eta_2(s)| ds d\varpi dx = - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{2} |\eta_2(s)| \frac{dX}{d\omega} X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx$$

et intègre par rapport  $\varpi$  sur  $(0, 1)$  on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} [|\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t)]_0^1 ds dx = \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} [|\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) - |\eta_2(s)| X^2(x, 0, s, t)] ds dx \end{aligned}$$

notons que :  $X(x, 0, s, t) = y_t(x, t)$ ,

alors

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| [X^2(x, 1, s, t) - y_t^2(x, t)] ds dx,$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X X_\varpi(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t^2(x, t) ds dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

D'autre part

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X X_\varpi(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X X_\omega(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx. \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t^2 ds dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx. \end{aligned}$$

par comparaison entre (2.10) et (2.11)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \rho u_t^2 - \mu u_x^2 + J y_t^2 - \delta y_x^2 + \xi y_t^2 + k \theta_t^2 + \alpha q_t^2 + 2b u_x y \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\ &= -\beta \int_0^1 u_{tx}^2 - l \int_0^1 \theta_x^2 dx - \int_0^1 y_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t^2(x, t) d\omega ds dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 y_t \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s) ds \right) dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 y_t^2 \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s) ds dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Insertion (2.12) dans (2.11) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E(t)) &\leq \left( \eta_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \right) \int_0^1 y_t^2 dx - \beta \int_0^1 u_{tx}^2 - l \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s) ds dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s) ds dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t^2(x, t) d\omega ds dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E(t)) &\leq - \left( \eta_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \right) \int_0^1 y_t^2 dx - \beta \int_0^1 u_{tx}^2 dx - l \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_t^2(x, t) d\omega ds dx, \end{aligned} \tag{2.13}$$

par conséquent

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \leq -l \int_0^1 \theta_x^2 dx - \beta \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \left( \eta_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \right) \int_0^1 y_t^2 dx.$$

**Remarque 2.1.** *Donc la fonction énergétique est décroissante.*

*Cependant, cette inégalité n'implique pas la décroissance exponentielle. Nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov appropriée afin d'établir une estimation de décroissance exponentielle de l'énergie.*

*À ce stade, nous allons introduire les fonctionnalités.*

**Lemme 2.2.** *Soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du système (2.5) alors le fonction*

$$D_1(t) = \rho \int_0^1 uu_t dx \quad t \geq 0, \quad (2.14)$$

*satisfait :*

$$D'_1(t) \leq -\frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx. \quad (2.15)$$

**Preuve.** En différenciant  $D_1(t)$  par rapport à  $t$

$$D'_1(t) = \rho \int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 uu_{tt} dx \quad t \geq 0.$$

On utilise (2.5)<sub>1</sub>, on trouve :

$$D'_1(t) = \rho \int_0^1 u_t^2 dx + \mu \int_0^1 uu_{xx} dx + b \int_0^1 uy_x dx - \gamma \int_0^1 u\theta_x dx + \beta \int_0^1 u_{txx} u dx.$$

D'après l'intégration par parties et les conditions aux bords on trouve :

- $\int_0^1 uu_{xx} dx = - \int_0^1 u_x^2 dx + [uu_x]_0^1 = - \int_0^1 u_x^2 dx$
- $\int_0^1 uy_x dx = - \int_0^1 u_x y dx + [yu]_0^1 = - \int_0^1 u_x y dx$
- $\int_0^1 uu_{txx} dx = - \int_0^1 u_x u_{tx} dx + [uu_{tx}]_0^1 = - \int_0^1 u_x u_{tx} dx.$

Finalemnt

$$D'_1(t) = \rho \int_0^1 u_t^2 dx - \mu \int_0^1 u_x^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx - \gamma \int_0^1 u\theta_x dx - \beta \int_0^1 u_x u_{tx} dx, \quad (2.16)$$

en utilisant l'inégalité de Young et Poincaré

$$\bullet \gamma \int_0^1 u \theta_x dx \leq \frac{\mu}{4} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{\mu} \int_0^1 \theta_x^2 dx \quad (2.17)$$

$$\bullet \beta \int_0^1 u_x u_{tx} dx \leq \frac{\mu}{4} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\beta^2}{\mu} \int_0^1 u_{tx}^2 dx \quad (2.18)$$

$$\bullet \rho \int_0^1 u_t^2 dx \leq \rho \int_0^1 u_{tx}^2 dx. \quad (2.19)$$

Substituant (2.17), (2.18), (2.19) dans (2.16) nous obtenus

$$D'_1(t) \leq -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx.$$

**Lemme 2.3.** Soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du système (2.5) alors le fonction

$$D_2(t) = J \int_0^1 y_t y dx + \frac{\eta_1}{2} \int_0^1 y^2 dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y \theta dx, \quad (2.20)$$

satisfait :

$$\begin{aligned} D'_2(t) \leq & -\frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 dx - \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx \\ & c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx + c \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

**Preuve.** En différenciant  $D_2(t)$  par rapport à  $t$  :

$$D'_2(t) = J \int_0^1 y_t^2 dx + J \int_0^1 y y_{tt} dx + \eta_1 \int_0^1 y y_t dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 (y_t \theta + y \theta_t) dx$$

On utilisant (2.5)<sub>2</sub>, (2.5)<sub>3</sub> on trouve :

$$\begin{aligned} D'_2(t) = & J \int_0^1 y_t^2 dx + \delta \int_0^1 y y_{xx} dx - b \int_0^1 y u_x dx - \xi \int_0^1 y^2 dx - d \int_0^1 y q_x dx \\ & + m \int_0^1 y \theta dx - \eta_1 \int_0^1 y y_t dx - \int_0^1 y \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds dx \\ & + \eta_1 \int_0^1 y y_t dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y_t \theta dx - \frac{dl}{k_1} \int_0^1 y \theta_{xx} dx + \frac{d\gamma}{k_1} \int_0^1 y u_{tx} dx \\ & + \frac{dm}{k_1} \int_0^1 y y_t dx + \frac{dk_1}{k_1} \int_0^1 y q_x dx. \end{aligned}$$

D'après l'intégration par partie et les condition aux bords on trouve

$$\bullet \int_0^1 yy_{xx}dx = - \int_0^1 y_x^2 dx + [yy_x]_0^1 = - \int_0^1 y_x^2 dx.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} D'_2(t) &= J \int_0^1 y_t^2 dx - \delta \int_0^1 y_x^2 dx - b \int_0^1 yu_x dx - \xi y^2 dx + m \int_0^1 y\theta dx \\ &\quad - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y_t \theta dx - \frac{dl}{k_1} \int_0^1 y\theta_{xx} dx + \frac{d\gamma}{k_1} \int_0^1 yu_{tx} dx + \frac{dm}{k_1} \int_0^1 yy_t dx \\ &\quad - \int_0^1 y \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds dx \end{aligned} \quad (2.22)$$

en utilisant l'inégalité de Young et point carré

$$\bullet m \int_0^1 y\theta dx \leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 dx + \frac{2m^2}{\xi} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (2.23)$$

$$\bullet \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y_t \theta dx \leq \frac{dk\varepsilon}{2k_1} \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{dk}{2\varepsilon k_1} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (2.24)$$

$$\bullet \frac{dl}{k_1} \int_0^1 y\theta_{xx} dx \leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 dx + \frac{c}{\xi} \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx \quad (2.25)$$

$$\bullet \frac{d\gamma}{k} \int_0^1 yu_{tx} dx \leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 dx + \frac{c}{\xi} \int_0^1 u_{tx}^2 dx \quad (2.26)$$

$$\bullet \frac{dm}{k_1} \int_0^1 yy_t dx \leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 dx + \frac{c}{\xi} y_{tx}^2 dx \quad (2.27)$$

$$\bullet \int_0^1 y \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds dx \leq \frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 + \frac{1}{2\delta} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx, \quad (2.28)$$

substituant (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) dans (2.22)

$$\begin{aligned} D'_2(t) &\leq -\frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 dx - \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 yu_x dx + c \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx + c \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

**Lemme 2.4.** Soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du (2.5) alors la fonction

$$D_3(t) = -Jk \int_0^1 \theta y_t dx - \frac{Jk_1 \alpha}{2d} \int_0^1 q^2 dx, \quad (2.30)$$

satisfait

$$\begin{aligned}
 D'_3(t) \leq & -\frac{mk}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 y_x^2 dx \\
 & 2\varepsilon_4 \int_0^1 q^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_0^1 y_t^2 dx + c \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^1 \theta_x^2 dx \\
 & + c \int_0^1 u_x^2 dx + c \int_0^1 y^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

**Preuve.** En différenciant  $D_3(t)$  par rapport à  $t$  :

$$D'_3(t) = -Jk \int_0^1 \theta_t y_t dx - Jk \int_0^1 \theta y_{tt} dx - \frac{Jk_1 \alpha}{2d} \int_0^1 2qq_t dx.$$

On utilisant (2.5)<sub>2</sub>, (2.5)<sub>3</sub>, (2.5)<sub>4</sub> on trouve :

$$\begin{aligned}
 D'_3(t) = & -Jl \int_0^1 y_t \theta_{xx} dx + J\gamma \int_0^1 y_t u_{tx} dx + Jm \int_0^1 y_t^2 dx + Jk \int_0^1 y_t q_x dx - k\delta \int_0^1 \theta y_{xx} dx \\
 & + kb \int_0^1 \theta u_x dx + k\xi \int_0^1 \theta y_t dx + kd \int_0^1 \theta q_x dx - mk \int_0^1 \theta^2 dx + k\eta_1 \int_0^1 \theta y_t dx \\
 & + k \int_0^1 \theta \int_{\tau_1}^{\tau_2} X(x, 1, s, t) ds dx + \frac{Jk_1^2}{d} \int_0^1 q\theta_x dx + Jk_1 \int_0^1 qy_{tx} dx.
 \end{aligned}$$

D'après l'intégration par partie et les condition aux bords on trouve

$$\bullet \int_0^1 qy_{tx} = - \int_0^1 q_x y_t dx + [qy_t]_0^1 = - \int_0^1 q_x y_t dx.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 D'_3(t) = & -Jl \int_0^1 y_t \theta_{xx} dx + J\gamma \int_0^1 y_t u_{tx} dx + Jm \int_0^1 y_t^2 dx - k\delta \int_0^1 \theta y_{xx} dx \\
 & + kb \int_0^1 \theta u_x dx + k\xi \int_0^1 \theta y_t dx + kd \int_0^1 \theta q_x dx - mk \int_0^1 \theta^2 dx + k\eta_1 \int_0^1 \theta y_t dx \\
 & + k \int_0^1 \theta q_x dx - mk \int_0^1 \theta^2 dx + k\eta_1 \int_0^1 \theta y_t dx + k \int_0^1 \theta \int_{\tau_1}^{\tau_2} X(x, 1, s, t) ds dx \\
 & + \frac{Jk_1^2}{d} \int_0^1 q\theta_x dx,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

en utilisant l'inégalité de Young et Poincaré

$$\bullet J_l \int_0^1 y_t \theta_{xx} dx \leq \frac{c}{\varepsilon_1} \int_0^1 y_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx \quad (2.33)$$

$$\bullet J_\gamma \int_0^1 u_{tx} y_t dx \leq \varepsilon_2 \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_2} \int_0^1 y_t^2 dx \quad (2.34)$$

$$\bullet k\delta \int_0^1 y_{xx} \theta dx \leq \frac{k^2 \delta^2}{4\varepsilon_3} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 y_x^2 dx \quad (2.35)$$

$$\bullet Dk \int_0^1 u_x \theta dx \leq c \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{mk}{8} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (2.36)$$

$$\bullet \xi k \int_0^1 y \theta dx \leq \frac{8\xi^2 k}{m} \int_0^1 y^2 dx + \frac{mk}{8} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (2.37)$$

$$\bullet dk \int_0^1 q \theta_x dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 q^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_4} \int_0^1 \theta_x^2 dx \quad (2.38)$$

$$\bullet k\eta_1 \int_0^1 y_t \theta dx \leq c \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{mk}{8} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (2.39)$$

$$\bullet k \int_0^1 \theta \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) dx \leq \frac{mk}{8} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta^2 dx + \frac{k}{8m} \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) dx \quad (2.40)$$

$$\bullet \frac{Jk_1}{d} \int_0^1 q \theta_x \leq \varepsilon_4 \int_0^1 q^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_4} \int_0^1 \theta_x^2 dx \quad (2.41)$$

substituant (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) dans (2.32)

$$\begin{aligned} D'_3(t) &\leq -\frac{mk}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \theta_{xx} dx + \varepsilon_2 \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 y_x^2 dx + 2\varepsilon_4 \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_0^1 y_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_x^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 y^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)|^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned}$$

**Lemme 2.5.** soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du (2.5) alors le fonction

$$D_4(t) = k \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \int_0^x \theta(y) dy dx, \quad (2.42)$$

satisfait

$$\begin{aligned} D'_4(t) &\leq -\frac{k\alpha k_1}{2} \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 y_x^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx \end{aligned} \quad (2.43)$$

**Preuve.** En différenciant  $D_4(t)$  par rapport à  $t$  :

$$D'_4(t) = k \int_0^1 (\alpha q_t + dy_{xt}) \int_0^x \theta(y) dy dx + k \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \int_0^x \theta_t(y) dy dx.$$

On utilisant (2.5)<sub>3</sub> et (2.5)<sub>4</sub> on trouve :

$$\begin{aligned} .D'_4(t) &= k \int_0^1 -k_1 \theta_x \int_0^x \theta(y) dy dx + k \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \int_0^x (l\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - k_1 q_x) dx \\ &\quad - km \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \int_0^1 y_t dy dx \end{aligned}$$

D'après l'intégration par partie et les condition aux bords on trouve

$$\begin{aligned} \bullet & \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \left( \int_0^x l\theta_{xx} dy \right) dx - \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \left( \int_0^x \gamma u_{tx} dy \right) dx \\ &\quad - \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \left( \int_0^x k_1 q_x dy \right) dx = \\ & \int_0^1 (\alpha q + dy_x) l\theta_x dx - \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \gamma u_t dx - \int_0^1 (\alpha q + dy_x) k_1 q dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_4(t) &= -kk_1 \int_0^1 \theta_x \int_0^x \theta(y) dy dx + k \int_0^1 (\alpha q + dy_x) (l\theta_x - \gamma u_t - k_1 q) dx \\ &\quad - km \int_0^1 (\alpha q + dy_x) \int_0^x y_t dy dx \end{aligned} \quad (2.44)$$

en utilisant l'inégalité de young et point carré

$$\bullet kk_1 \int_0^1 \theta_x \int_0^x \theta(y) dy dx \leq \frac{k^2 k_1^2}{4\varepsilon_5} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 \left( \int_0^x \theta(y) dy \right)^2 dx \quad (2.45)$$

$$\bullet k\alpha l \int_0^1 q \theta_x dx \leq \frac{k\alpha k_1}{8} \int_0^1 q^2 dx + \frac{2k\alpha l^2}{k_1} \int_0^1 \theta_x^2 dx \quad (2.46)$$

$$\bullet k\alpha \gamma \int_0^1 q u_t dx \leq \frac{k\alpha k_1}{8} \int_0^1 q^2 dx + \frac{2k\alpha \gamma^2}{k_1} \int_0^1 u_t^2 dx \quad (2.47)$$

$$\bullet k\alpha l \int_0^1 y_x \theta_x dx \leq \frac{k\alpha l \varepsilon}{2} \int_0^1 y_x^2 dx + \frac{k\alpha l}{2\varepsilon} \int_0^1 \theta_x^2 dx \quad (2.48)$$

$$\bullet kd\gamma \int_0^1 y_x u_t dx \leq \frac{kd\gamma \varepsilon}{2} \int_0^1 y_x^2 dx + \frac{kd\gamma}{2\varepsilon} \int_0^1 u_{tx}^2 dx \quad (2.49)$$

$$\bullet kk_1 d \int_0^1 y_x q dx \leq \frac{8kk_1 d^2}{\alpha} \int_0^1 y_x^2 dx + \frac{k\alpha k_1}{8} \int_0^1 q^2 dx \quad (2.50)$$

$$\bullet mkd \int_0^1 q \int_0^x y_t dy dx \leq \frac{k\alpha k_1}{8} \int_0^1 q^2 dx + \frac{2mkd^2}{k_1} \int_0^1 \left( \int_0^x y_t dy \right)^2 dx \quad (2.51)$$

$$\bullet mkd \int_0^1 y_x \int_0^x y_t dy dx \leq \frac{mkd \varepsilon}{2} \int_0^1 y_x^2 dx + \frac{mkd}{2\varepsilon} \int_0^1 \left( \int_0^x y_t dy \right)^2 dx. \quad (2.52)$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz :

- $\left(\int_0^x \theta(y)dy\right)^2 \leq \left(\int_0^1 \theta dx\right)^2 \leq \int_0^1 \theta^2 dx.$
- $\left(\int_0^x y_t dy\right)^2 \leq \left(\int_0^1 y_t dx\right)^2 \leq \int_0^1 y_t^2 dx.$

substituant (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.49), (2.50), (2.51), (2.52) dans (2.44)

$$\begin{aligned} D'_4(t) \leq & -\frac{k\alpha k_1}{2} \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 y_x^2 dx \\ & + c \int_0^1 y_t^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx \end{aligned} \quad (2.53)$$

■

**Lemme 2.6.** soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du (2.5) alors le fonction

$$D_5(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\varpi} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \quad (2.54)$$

satisfait

$$\begin{aligned} D'_5(t) \leq & -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\ & + \eta_1 \int_0^1 y_t^2 dx - \eta_3 \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \end{aligned}$$

**Preuve.**

En différenciant  $D'_5(t)$  par rapport à  $t$  :

$$D'_5(t) = -2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\varpi} |\eta_2(s)| X_t(x, \varpi, s, t) X(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx.$$

On utilisant (2.5)<sub>5</sub> on trouve :

$$\begin{aligned} D'_5(t) = & - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \frac{d}{d\omega} \left( e^{-s\omega} X^2(x, \varpi, s, t) \right) ds d\omega dx \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\varpi} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \end{aligned}$$

on utilise théorème de fubini

$$\begin{aligned}
 D'_5(t) &= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \frac{d}{d\omega} \left( e^{-s\omega} X^2(x, \varpi, s, t) \right) X(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\
 &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\
 &= - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \left[ e^{-s} X^2(x, 1, s, t) - X^2(x, 0, s, t) \right] ds dx \\
 &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \omega, s, t) ds d\omega dx
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $X(x, 0, s, t) = y_t(x, t)$  et  $e^{-s} \leq e^{-s\omega} \leq 1 \forall \omega \in [0, 1]$  on trouve

$$\begin{aligned}
 D'_5(t) &= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \omega, s, t) ds d\omega dx \\
 &\quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| e^{-s} X^2(x, 1, s, t) ds dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| ds \int_0^1 y_t^2 dx
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

par ce que  $-se^{-s}$  est une fonction croissant, nous avons  $-se^{-s} \leq -se^{-\tau_2}$  pour tout  $s \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &< s < \tau_2 \\
 -\tau_2 &< -s < -\tau_1 \\
 e^{-\tau_2} &< e^{-s} < e^{-\tau_1} \\
 se^{-\tau_2} &< se^{-s} < se^{-\tau_1} \\
 \tau_1 &< s\omega < \tau_2
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 -\tau_2 &< -s\omega < -\tau_1 \\
 e^{-\tau_2} &< e^{-s\omega} < e^{-\tau_1} \\
 -e^{-\tau_1} &< -e^{-s\omega} < -e^{-\tau_2}
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
 D'_5(t) &\leq -e^{-\tau_1} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\
 &\quad + \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| ds \right) \int_0^1 y_t^2 dx - e^{-\tau_2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx
 \end{aligned}$$

Finalement on pose  $\eta_3 = e^{-\tau_2}$  avec  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \leq \eta_1$  on obtient

$$\begin{aligned} D'_5(t) &\leq -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\ &\quad - \eta_3 \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx + \eta_1 \int_0^1 y_t^2 dx \end{aligned} \quad (2.56)$$

■

**Théorème 2.1.** *Sous  $(G_1)$  la fonction énergie (2.6) du problème (1) – (3) satisfait*

$$E(t) \leq c(E_1(0) + E_3(0))t^{-1} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.57)$$

**Preuve.**

L'énergie de premier ordre est définie comme suit :

$$E_1(t) = E(t, u, y, \theta, q, X).$$

L'énergie du second ordre est introduite comme suit :

$$E_2(t) = E(t, u_t, y_t, \theta_t, q_t, X_t).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \rho \int_0^1 u_{ttt} u_{tt} dx - \mu \int_0^1 u_{xxt} u_{tt} dx - b \int_0^1 y_{xt} u_{tt} dx + \gamma \int_0^1 \theta_{xt} u_{tt} dx - \beta \int_0^1 u_{ttxx} u_{tt} dx = 0 \\ \bullet J \int_0^1 y_{ttt} y_{tt} dx - \delta \int_0^1 y_{xxt} y_{tt} dx + b \int_0^1 u_{xt} y_{tt} dx + \xi \int_0^1 y_t y_{tt} dx + d \int_0^1 q_{xt} y_{tt} dx \\ \quad - m \int_0^1 \theta_t y_{tt} dx + \eta_1 \int_0^1 y_{tt} y_{tt} dx + \int_0^1 y_{tt} \int_0^1 |\eta_2(s)| X_t(x, \omega, s, t) ds d\omega dx = 0 \\ \bullet k \int_0^1 \theta_{tt} \theta_t dx - l \int_0^1 \theta_{xxt} \theta_t dx + \gamma \int_0^1 u_{ttx} \theta_t dx + m \int_0^1 y_{tt} \theta_t dx + k_1 \int_0^1 q_{xt} \theta_t dx = 0 \\ \bullet \alpha q_{tt} q_t dx + k_1 \int_0^1 \theta_{xt} q_t dx + d \int_0^1 y_{ttx} q_t dx = 0. \end{array} \right.$$

On fait l'intégration par partie d'après les condition aux bords, nous trouvons

$$\begin{aligned} \bullet & - \int_0^1 y_{xt} u_{tt} dx = \int_0^1 y_t u_{ttx} - [y_t u_{tt}]_0^1 = \int_0^1 y_t u_{ttx} dx \\ \bullet & - \int_0^1 u_{ttxx} u_{tt} dx = \int_0^1 u_{ttx} u_{ttx} - [u_{ttx} u_{tt}]_0^1 = \int_0^1 u_{ttx}^2 dx \\ \bullet & - \int_0^1 \theta_{xxt} \theta_t dx = \int_0^1 \theta_{xt} \theta_{xt} dx - [\theta_{xt} \theta_t]_0^1 = \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx. \end{aligned}$$

Par addition, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \rho u_{tt}^2 - \mu u_{xt}^2 + J y_{tt}^2 - \delta y_{xt}^2 + \xi y_{tt}^2 + k \theta_{tt}^2 + \alpha q_{tt}^2 + 2b u_{xt} y_t \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X_t^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\ & = -\beta \int_0^1 u_{ttx}^2 dx - l \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_{tt}^2 dx - \eta_1 \int_0^1 y_{tt}^2 dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} E_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \rho u_{tt}^2 - \mu u_{xt}^2 + J y_{tt}^2 - \delta y_{xt}^2 + \xi y_{tt}^2 + k \theta_{tt}^2 + \alpha q_{tt}^2 + 2b u_{xt} y_t \right) dx \\ \partial_t E_2(t) &\leq -\beta \int_0^1 u_{ttx}^2 dx - l \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_{tt}^2 dx. \end{aligned}$$

L'énergie du troisième ordre est fournie par

$$E_3(t) = E(t, u_x, y_x, \theta_x, q_x, X_x),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \rho \int_0^1 u_{ttx} u_{tx} dx - \mu \int_0^1 u_{xxx} u_{tx} dx - b \int_0^1 y_{xx} u_{tx} dx + \gamma \int_0^1 \theta_{xx} u_{tx} dx - \beta \int_0^1 u_{txxx} u_{tx} dx = 0 \\ \bullet J \int_0^1 y_{ttx} y_{tx} dx - \delta \int_0^1 y_{xxx} y_{tx} dx + b \int_0^1 u_{xx} y_{tx} dx + \xi \int_0^1 y_x y_{tx} dx + d \int_0^1 q_{xx} y_{tx} dx \\ \quad - m \int_0^1 \theta_x y_{tx} dx + \eta_1 \int_0^1 y_{tx} y_{tx} dx + \int_0^1 y_{tx} \int_0^1 |\eta_2(s)| X_x(x, \omega, s, t) ds d\varpi dx = 0 \\ \bullet k \int_0^1 \theta_{tx} \theta_x dx - l \int_0^1 \theta_{xxx} \theta_x dx + \gamma \int_0^1 u_{txx} \theta_x dx + m \int_0^1 y_{tx} \theta_x dx + k_1 \int_0^1 q_{xx} \theta_x dx = 0 \\ \bullet \alpha q_{tx} q_x dx + k_1 \int_0^1 \theta_{xx} q_x dx + d \int_0^1 y_{txx} q_x dx = 0. \end{array} \right.$$

On fait l'intégration par partie d'après les condition aux bords, nous trouvons

$$\begin{aligned} \bullet & - \int_0^1 y_{xx} u_{tx} dx = \int_0^1 y_x u_{txx} - [y_x u_{tx}]_0^1 = \int_0^1 y_x u_{txx} dx \\ \bullet & - \int_0^1 u_{txxx} u_{tx} dx = \int_0^1 u_{txx} u_{txx} - [u_{txx} u_{tx}]_0^1 = \int_0^1 u_{txx}^2 dx \\ \bullet & - \int_0^1 \theta_{xxx} \theta_x dx = \int_0^1 \theta_{xx} \theta_{xx} dx - [\theta_{xx} \theta_x]_0^1 = \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

Par addition, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \rho u_{tx}^2 - \mu u_{xx}^2 + J y_{tx}^2 - \delta y_{xx}^2 + \xi y_{tx}^2 + k \theta_{tx}^2 + \alpha q_{tx}^2 + 2b u_{xx} y_x \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X_x^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\ & = -\beta \int_0^1 u_{txx}^2 dx - l \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| y_{tt}^2 dx - \eta_1 \int_0^1 y_{tx}^2 dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} E_3(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \rho u_{tx}^2 - \mu u_{xx}^2 + J y_{tx}^2 - \delta y_{xx}^2 + \xi y_{tx}^2 + k \theta_{tx}^2 + \alpha q_{tx}^2 + 2b u_{xx} y_x \right) dx \\ \partial_t E_3(t) &\leq -\beta \int_0^1 u_{txx}^2 dx - l \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_{tx}^2 dx. \end{aligned}$$

et nous avons

$$\partial_t E_2(t) \leq -l \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx - \beta \int_0^1 u_{txx}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_{tx}^2 dx \quad (2.58)$$

et

$$\partial_t E_3(t) \leq -l \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx - \beta \int_0^1 u_{txx}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_{tx}^2 dx \quad (2.59)$$

Lyapunov fonctionnel est définie comme

$$L(t) = N E_1(t) + N_1 D_1(t) + N_2 D_2(t) + N_3 D_3(t) + N_4 D_4(t) + N_5 D_5(t) + N_6 E_3(t) \quad (2.60)$$

où  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 > 0$

En différenciant (2.60) et on utilisant (2.7), (2.15), (2.21), (2.30), (2.42), (??), (2.68) nous avons

$$L'(t) = N E_1'(t) + N_1 D_1'(t) + N_2 D_2'(t) + N_3 D_3'(t) + N_4 D_4'(t) + N_5 D_5'(t) + N_6 E_3'(t)$$

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & N \left( -l \int_0^1 \theta_x^2 dx - \beta \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_t^2 dx \right) \\
& + N_1 \left( -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx \right) \\
& + N_2 \left( -\frac{8}{2} \int_0^1 y_x^2 dx - \xi \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx \right. \\
& \left. + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx + c \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx \right) \\
& + N_3 \left( -\frac{mk}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 y_x^2 dx + 2\varepsilon_4 \int_0^1 q^2 dx \right. \\
& \left. + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 y_t^2 dx + c \left( \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^1 y^2 dx \right. \\
& \left. + \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \right) \\
& + N_4 \left( -\frac{k\alpha k_1}{2} \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 y_x^2 dx \right. \\
& \left. + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_5} \right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx \right) \\
& + N_5 \left( -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \right. \\
& \left. + \eta_1 \int_0^1 y_t^2 dx - \eta_3 \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \right) \\
& + N_6 \left( -l \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx - \beta \int_0^1 u_{txx}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_{tx}^2 dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & -[N\beta - N_1c - N_2c - N_3\varepsilon_2 - N_4c] \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \left[ N_2 \frac{8}{2} - N_3\varepsilon_3 - N_4c \right] \int_0^1 y_x^2 dx \\
& - \left[ N_2 \frac{\xi}{2} \right] \int_0^1 y^2 dx - \left[ N_1 \frac{\mu}{2} - N_3c \right] \int_0^1 u_x^2 dx - \left[ N_4 \frac{k\alpha k_1}{2} - 2N_3\varepsilon_4 \right] \int_0^1 q^2 dx - [C - N_3c \\
& + N_5\eta_3] \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx - [N_5\eta_3] \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\
& - \left[ N\eta_0 - N_2c - N_3c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - N_4c - N_5\eta_1 \right] \int_0^1 y_t^2 dx - \left[ -N_2c - N_4c + N_3 \frac{mk}{2} \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
& - \left[ Nl - N_1c - N_3c \left( \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) - N_4c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_5} \right) \right] \int_0^1 \theta_x^2 dx - \left[ \frac{1}{2} (N_1 + N_2) \right] \int_0^1 2bu_x dx \\
& - [-N_2c - N_3\varepsilon_1 + N_6l] \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx - \eta_0 N_6 \int_0^1 y_{tx} dx - N_6\beta \int_0^1 u_{txx}^2 dx.
\end{aligned}$$

En réglant  $\varepsilon_1 = \frac{N_6l}{2N_3}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\beta N}{2N_3}$ ,  $\varepsilon_3 = \frac{8N_2}{4N_3}$ ,  $\varepsilon_4 = \frac{k k_1 \alpha N_4}{8N_3}$ ,  $\varepsilon_5 = \frac{mk N_3}{4N_4}$ .

On obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & - \left[ N \frac{\beta}{2} - cN_1 - cN_2 - N_3 \varepsilon_2 - N_4 c \right] \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \left[ N_2 \frac{\delta}{4} - cN_4 \right] \int_0^1 y_x^2 dx \\
& - \left[ -N_3 c + N_2 \frac{\xi}{2} \right] \int_0^1 y^2 dx - \left[ N_1 \frac{\mu}{2} - cN_3 \right] \int_0^1 u_x^2 dx - \left[ N_4 \frac{\alpha k k_1}{2} \right] \int_0^1 q^2 dx \\
& - [N_5 \eta_3 - cN_2 - cN_3] \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \\
& - [N_5 \eta_3] \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\
& - \left[ N \eta_0 - cN_2 - cN_3 \left( 1 + \frac{N_3}{N_6} + \frac{N_3}{N} \right) - cN_4 - \eta_1 N_5 \right] \int_0^1 y_t^2 dx - \left[ N_3 \frac{mk}{2} - cN_2 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
& - \left[ Nl - cN_1 - c \left( \frac{N_3}{N_2} + \frac{N_3}{N_4} \right) N_3 - c \left( 1 + \frac{N_4}{N_3} \right) N_4 \right] \int_0^1 \theta_x^2 dx - \left[ \frac{1}{2} (N_1 + N_2) \right] \int_0^1 2bu_x dx \\
& - \left[ N_6 \frac{l}{2} - cN_2 \right] \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx - \eta_0 N_6 \int_0^1 y_{tx} dx - \beta N_6 \int_0^1 u_{txx}^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

On choisit maintenant  $N_2$  suffisamment grand pour que

$$N_2 \frac{\delta}{4} - cN_4 > 0.$$

On peut ensuite choisir  $N_3$  suffisamment grand pour que

$$N_3 \frac{mk}{2} - cN_2 > 0.$$

En outre, nous choisissons  $N_1$  et  $N_5$  assez grand pour que

$$\begin{aligned}
N_1 \frac{\mu}{2} - cN_3 &> 0 \\
N_5 \eta_3 - cN_2 - cN_3 &> 0.
\end{aligned}$$

En fin, nous choisissons  $N_6$  assez grand pour que

$$N_6 \frac{l}{2} - cN_2 > 0.$$

D'un autre côté

$$H(t) = N_1 D_1(t) + N_2 D_2(t) + N_3 D_3(t) + N_4 D_4(t) + N_5 D_5(t).$$

$$\begin{aligned}
|H(t)| &= N_1|D_1(t)| + N_2|D_2(t)| + N_3|D_3(t)| + N_4|D_4(t)| + N_5|D_5(t)| \\
&= N_1|\rho uu_t|dx + N_2\left|y_t y dx + \frac{\eta_1}{2} \int_0^1 y^2 dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y \theta dx\right| \\
&+ N_3\left|-Jk \int_0^1 \theta y_t dx - \frac{Jk_1 \alpha}{2d} \int_0^1 q^2 dx\right| + N_4\left|k \int_0^1 (\alpha q + \alpha y_x) \int_0^1 \theta(y) dy dx\right| \\
&+ N_5\left|\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\varpi} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx\right| \\
&= N_1 \rho \int_0^1 |uu_t| dx + N_2 \int_0^1 |y_t y| dx + \frac{N_2 \eta_1}{2} \int_0^1 |y^2| dx \\
&- \frac{dk}{k_1} N_2 \int_0^1 |y \theta| dx - N_3 Jk \int_0^1 |\theta y_t| dx - N_3 \frac{Jk_1 \alpha}{2d} \int_0^1 |q^2| dx \\
&+ N_4 k \int_0^1 \left|(\alpha q + dy_x) \int_0^1 \theta(y) dy dx\right| \\
&+ N_5 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |s e^{-s\varpi} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

en utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz nous obtenons

$$N_1 \rho \int_0^1 uu_t dx \leq \frac{N_1 \rho \varepsilon}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{N_1 \rho}{2\varepsilon} \int_0^1 u_t^2 dx \tag{2.63}$$

$$N_2 \int_0^1 y_t y dx \leq \frac{N_2 \varepsilon}{2} \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{N_2}{2\varepsilon} \int_0^1 y^2 dx \tag{2.64}$$

$$\frac{dk}{k_1} N_2 \int_0^1 y \theta dx \leq \frac{dk N_2 \varepsilon}{2} \int_0^1 y^2 dx + \frac{dk N_2}{2\varepsilon} \int_0^1 \theta^2 dx \tag{2.65}$$

$$N_3 Jk \int_0^1 \theta y_t dx \leq \frac{N_3 Jk \varepsilon}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{N_3 Jk}{2\varepsilon} \int_0^1 y_t^2 dx \tag{2.66}$$

$$N_4 k \alpha \int_0^1 q \int_0^x \theta(y) dy dx \leq \frac{N_4 k d \varepsilon}{2} \int_0^1 y_x^2 dx + \frac{N_4 k d}{2\varepsilon} \left(\int_0^x \theta dy\right)^2 dx \tag{2.67}$$

$$N_4 k d \int_0^1 y_x \int_0^1 \theta(y) dy dx \leq \frac{N_4 k d \varepsilon}{2} \int_0^1 y_x^2 dx + \frac{N_4 k d}{2\varepsilon} \left(\int_0^x \theta(y) dy\right)^2 dx \tag{2.68}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \theta(y) dy\right)^2 dx \leq \left(\int_0^1 \theta dx\right)^2 \leq \int_0^1 \theta^2 dx.$$

substituant (2.63), (2.64), (2.66), (2.67), (2.68) dans (2.62).

$$\begin{aligned}
|H(t)| &\leq c \int_0^1 (u_t^2 + y_t^2 + y_x^2 + u_x^2 + y^2 + q^2 + \theta^2) dx + c \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi \\
&\leq c E_1(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|H(t)| = |L(t) - N E_1(t) - N_6 E_3(t)| \leq c E_1(t).$$

Quel rendement

$$-cE_1 \leq L - NE_1 - N_6E_3 \leq cE_2$$

$$N_6E_3(t) + (N - c)E_1(t) \leq L(t) \leq (c + N)E_1(t) + N_6E_3(t), \quad (2.69)$$

choisir  $N$  assez grand pour que

$$Nl - c > 0, \quad N\frac{\beta}{2} - c > 0, \quad N\eta_0 - c > 0, \quad N - c > 0,$$

nous obtenons

$$c_1(E_1(t) + E_3(t)) \leq L(t) \leq c_2(E_1(t) + E_3(t)) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.70)$$

et utilisé (2.6), estimations (??) et (2.69) respectivement nous obtenons

$$L'(s) \leq -\lambda E_1(t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t L'(s)ds &\leq -\lambda \int_0^t E(s)ds \quad \forall t \geq t_0 \\ L(t) - L^*(0) &\leq -\lambda_1 \int_0^t E(s)ds. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Pour certains  $\lambda_1, c_1, c_2 > 0$ .

Intégration (??) over  $[0, t]$ , rendements

$$\begin{aligned} \int_0^t E(s)ds &\leq -\frac{1}{\lambda_1}[L(t) - L(0)] \\ &\leq \frac{L(0) - L(t)}{\lambda_1} \\ &\leq \frac{L(0)}{\lambda_1} \\ \int_0^t E(s)ds &\leq \frac{\gamma}{\lambda_1}[E_1(0) + E_3(0)] \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} [tE_1(t)]_t &= E(t) + tE'(t) \\ &\leq E_1(t) \\ \int_0^t [sE_1(s)]_s ds &\leq \int_0^t E_1(s)ds. \end{aligned}$$

et (2.73) nous obtenons

$$tE_1(t) \leq \int_0^t E_1(s)ds \leq \frac{c_2}{\lambda_1}[E_1(0) + E_3(0)]$$

qui donne (??), ce ci complète la preuve. ■

## CHAPITRE 3

### TAUX DE DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE

Ici, nous prouvons l'estimation de stabilité exponentielle pour le problème (1)-(2) avec

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = y(0, t) = y(1, t) = 0 \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0, \end{cases}$$

où  $u_0, u_1, y_0, y_1, \theta_0, q_0$ .

Des fonctions sont attribuées.

Entre temps, à partir des paragraphes (2.5)<sub>4</sub> et (2.3) il s'ensuit que

$$\alpha q_t = -k_1 \theta_x - d y_{tx}$$

on intègre sur  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 q_t dx &= -k \int_0^1 \theta_x dx - d \int_0^1 y_{tx} dx \\ &= -k \theta \Big|_0^1 - d y_t \Big|_0^1 \\ &= -k [\theta(1, t) - \theta(0, t)] - d [y_t(1, t) - y_t(0, t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et on a :  $\alpha \int_0^1 q_t dx = \alpha \frac{d}{dt} \int_0^1 q dx$ ,

alors

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 q dx = 0,$$

équation diff

$$\Rightarrow \int_0^1 q dx = 0, \quad (*)$$

cherchons  $c$

$$sdt = 0 \rightarrow q(x, 0) = q_0(x),$$

alors

$$\int_0^1 q(x, 0) dx = c,$$

d'où

$$\int_0^1 q(x, t) dx = \int_0^1 q_0(x) dx, \quad (**)$$

si on pose  $\bar{q}(x, t) = q(x, t) - \int_0^1 q_0(x) dx$ , on intègre

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{q}(x, t) dx &= \int_0^1 q(x, t) dx - \int_0^1 \left[ \int_0^1 q_0(x) dx \right] dx \\ &= \int_0^1 q(x, t) dx - \int_0^1 q_0 dx \int_0^1 1 dx \\ \int_0^1 q(x, t) dx &= \int_0^1 q_0(x) dx \end{aligned}$$

**Lemme 3.1.** Soit  $(u, q, \theta, x)$  solution (2.5) alors la fonctionnelle

$$F_1(t) = \int_0^1 (fuu_t + Jyy_t) dx + \frac{\eta_1}{2} \int_0^1 y^2 dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y\theta dx, \quad (3.1)$$

satisfait

$$F_1(t) \leq -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx. \quad (3.2)$$

**Preuve.** Différencier  $F_1(t)$  en utilisant (2.5)<sub>1,2</sub> et intègre par partie on obtient

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= \int_0^1 \left[ \rho u_t^2 + u(\mu u_{xx} + by_x - \gamma \theta_x - \beta u_{txx}) \right] + J y_t^2 dx + y \left( \delta y_{xx} - bu_x - \xi y - dq_x \right. \\ &\quad \left. + m\theta - \eta_1 y_t - \int_0^1 |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds d\varpi dx \right) dx + \eta_1 \int_0^1 yy_t dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y_t \theta dx \\ &\quad - \frac{d}{k_1} \int_0^1 y(l\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - my_t - k_1 q_x) \\ &= \rho \int_0^1 u_t^2 dx + \mu \int_0^1 uu_{xx} dx + b \int_0^1 uy_x dx - \gamma \int_0^1 u\theta_x dx - \beta \int_0^1 uu_{txx} + J \int_0^1 y_t^2 dx \\ &\quad + \delta \int_0^1 yy_{xx} - b \int_0^1 yu_x - \xi \int_0^1 y^2 dx + m \int_0^1 y \int_0^1 |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds d\varpi dx \\ &\quad - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y_t \theta dx - \frac{dl}{k_1} \int_0^1 y\theta_{xx} + \frac{d\gamma}{k_1} \int_0^1 yu_{tx} dx + \frac{dm}{k_1} \int_0^1 yy_t. \end{aligned}$$

D'après l'intégration par partie et les condition aux boras on troue

- $\int_0^1 uu_{xx}dx = - \int_0^1 u_x u_x + [uu_x]_0^1 = - \int_0^1 u_x^2 dx$
- $\int_0^1 uy_x dx = - \int_0^1 u_x y + [uy]_0^1 = - \int_0^1 u_x y dx$
- $\int_0^1 uu_{txx} dx = \int_0^1 u_x u_{tx} - [uu_{tx}]_0^1 = - \int_0^1 u_x u_{tx} dx$
- $\int_0^1 yy_{xx} dx = - \int_0^1 y_x y_x + [yy_x]_0^1 = - \int_0^1 y_x^2 dx$
- $\int_0^1 y\theta_{xx} dx = \int_0^1 y_x \theta_x - [y\theta_x]_0^1 = \int_0^1 y_x \theta_x dx$
- $\int_0^1 yu_{tx} dx = - \int_0^1 y_x u_t + [yu_t]_0^1 = - \int_0^1 y_x u_t dx.$

Finalement

$$\begin{aligned}
F_1'(t) &= \rho \int_0^1 u_t^2 dx + \mu \int_0^1 u_x^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx - \gamma \int_0^1 u \theta_x dx - \beta \int_0^1 u_x u_{tx} dx \\
&+ J \int_0^1 y_t^2 dx + \gamma \int_0^1 y_x^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx - \xi \int_0^1 y^2 dx + m \int_0^1 \theta y dx \\
&- \int_0^1 y \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta_2(s) X(x, 1, s, t) ds dx - \frac{dl}{k_1} \int_0^1 \theta_x y_x dx + \frac{d\gamma}{k_1} \int_0^1 u_t y_x dx \\
&+ \frac{dm}{k_1} \int_0^1 y y_t dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 \theta y_t dx
\end{aligned} \tag{3.3}$$

en utilisant l'inégalité de Young et point carré

$$\bullet \gamma \int_0^1 u \theta_x dx \leq \frac{\mu}{4} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{\mu} \int_0^1 \theta_x^2 dx \tag{3.4}$$

$$\bullet \beta \int_0^1 u_x u_{tx} dx \leq \frac{\beta^2}{\mu} \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\beta^2}{\mu} \int_0^1 u_{tx}^2 dx \tag{3.5}$$

$$\bullet m \int_0^1 \theta y dx \leq \frac{3m^2}{2\xi} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{\xi}{6} \int_0^1 y^2 dx \tag{3.6}$$

$$\bullet \int_0^1 y \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X(x, 1, s, t) ds dx \leq \frac{\xi}{6} \int_0^1 y^2 dx + \frac{3}{2\xi} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \tag{3.7}$$

$$\bullet \frac{dl}{dk} \int_0^1 \theta_x y_x dx \leq \frac{4d^2 l^2}{\delta} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{\delta}{4} \int_0^1 y_x^2 dx \tag{3.8}$$

$$\bullet \frac{d\gamma}{k_1} \int_0^1 u_t y_x dx \leq \frac{4d^2 \gamma^2}{\delta} \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \frac{\delta}{4} \int_0^1 y_x^2 dx \tag{3.9}$$

$$\bullet \frac{dm}{k_1} \int_0^1 y y_t dx \leq \frac{\xi}{6} \int_0^1 y^2 dx + \frac{3d^2 m^2}{2k_1^2 \xi} \int_0^1 y_t^2 dx \tag{3.10}$$

$$\bullet \frac{dk}{k_1} \int_0^1 \theta y_t dx \leq \frac{dk\varepsilon}{2k_1} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{dk}{2\varepsilon k_1} \int_0^1 y_t^2 dx, \tag{3.11}$$

substituant (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) dans (3.1) nous obtenus

$$F_1'(t) \leq -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 dx - \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx \\ + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx.$$

■

**Lemme 3.2.** Soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du système (2.5) alors le fonction

$$F_2(t) = -\alpha k \int_0^1 \theta \int_0^1 q(y) dy dx, \quad (3.12)$$

satisfait

$$F_2'(t) \leq -\frac{k_1 \alpha}{2} \int_0^1 q^2 dx + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx. \quad (3.13)$$

**Preuve.** Différencier de  $F_2(t)$  en utilisant (2.3)<sub>3,4</sub> et intègre par partie on obtient

$$F_2'(t) = -\alpha \left[ \int_0^1 K \theta_t \int_0^x q(y) dy dx \right] - K \left[ \int_0^1 \theta \int_0^x \alpha q_t(y) dy dx \right] \\ = -\alpha \left[ \int_0^1 l \theta_{xx} \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx - \int_0^1 \gamma u_{tx} \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx \right. \\ \left. - \int_0^1 m y_t \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx - \int_0^1 k_1 q_x \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx \right] \\ - k \int_0^1 \theta \int_0^x (k_1 \theta_x dy) dx - k \int_0^1 \theta \left( \int_0^x dy_{tx} dy \right) dx.$$

D'après l'intégration par partie et les condition aux bords on cour

- $\int_0^1 \theta_{xx} \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx = \int_0^1 \theta_x [q(x, t) - q(0, t)] dx - \left[ \theta_x \int_0^x q(y) dy \right] dx \\ = \int_0^1 \theta_x q dx + \left[ \theta_x(1, t) \int_0^1 q(y) dy dx - \theta_x(0, t) \int_0^1 q(0, t) dy \right] dx = \int_0^1 \theta_x q dx.$
- $\int_0^1 u_{tx} \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx = - \int_0^1 u_t q dx + \left[ u_t \int_0^x q(y) dy \right]_0^1 = - \int_0^1 u_t q dx.$
- $\int_0^1 q_x \left( \int_0^x q(y) dy \right) dx = \int_0^1 q q dx + \left[ q \int_0^1 q(y) dy \right]_0^1 = - \int_0^1 q^2 dx;$
- $\int_0^1 \theta \left( \int_0^x \theta_x dy \right) dx = \int_0^1 \theta \theta dx = \int_0^1 \theta^2 dx.$
- $\int_0^1 \theta \left( \int_0^x dy_{tx} dy \right) dx = \int_0^1 \theta y_t dx.$

Finalemment

$$\begin{aligned}
F'_2(t) = & -k\alpha \int_0^1 q^2 dx + l\alpha \int_0^1 \theta_x q dx - \gamma\alpha \int_0^1 u_t q dx + m\alpha \int_0^1 y_t \int_0^1 q(y) dy dx \\
& + k_1 k \int_0^1 \theta^2 dx + dk \int_0^1 \theta y_t dx,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

en utilisant l'inégalité de Young et point carré

$$\bullet \quad l\alpha \int_0^1 \theta_x q dx \leq \frac{6l^2\alpha}{k_1} \int_0^1 \theta_x dx + \frac{k_1\alpha}{6} \int_0^1 q^2 dx \tag{3.15}$$

$$\bullet \quad \gamma\alpha \int_0^1 u_t q dx \leq \frac{6\gamma^2\alpha}{k_1} \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \frac{k_1\alpha}{6} \int_0^1 q^2 dx \tag{3.16}$$

$$\bullet \quad dk \int_0^1 \theta y_t dx \leq \frac{dk\varepsilon}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{dk}{2\varepsilon} \int_0^1 y_t^2 dx \tag{3.17}$$

et

$$\bullet \quad m\alpha \int_0^1 y_t \int_0^x q(y) dy dx \leq \frac{6m^2\alpha}{k_1} \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{k_1\alpha}{6} \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right)^2 dx,$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\bullet \quad \left( \int_0^x q(y) dy \right)^2 \leq \left( \int_0^1 q dx \right)^2 \leq \int_0^1 q^2 dx.$$

substituant (3.15), (3.16), (3.17) dans (3.13) nous obtenus

$$F'_2(t) \leq -\frac{k_1\alpha}{2} \int_0^1 q^2 dx + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx.$$

■

**Lemme 3.3.** Soit  $(u, y, \theta, q)$  solution du système alors le fonction

$$F'_3(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx, \tag{3.18}$$

satisfait

$$\begin{aligned}
F'_3(t) \leq & -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx + \eta_1 \int_0^1 y_t^2 dx \\
& - \eta_3 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

**Preuve.** Différencier de  $F_3(t)$  en utilisant (2.5)<sub>5</sub>

$$\begin{aligned}
F_3' &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{s\varpi} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\
&= -2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X_t(x, \omega, s, t) X(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\
&= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \frac{d}{d\omega} \left( e^{-s\omega} X^2(x, \varpi, s, t) \right) ds d\omega dx \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx.
\end{aligned}$$

on utilise théorème du Fubini

$$\begin{aligned}
F_3'(t) &= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \frac{d}{d\omega} \left( e^{-s\omega} X^2(x, \varpi, s, t) \right) ds d\omega dx \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| Z^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx \\
&= - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| \left[ e^{-s} X^2(x, 1, s, t) - X^2(x, 0, s, t) \right] ds dx \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \omega, s, t) ds d\omega dx.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $X(x, 0, s, t) = y_t(x, t)$  et  $e^{-s} \leq e^{-s\omega} \leq 1 \forall \omega \in [0, 1]$  on trouve

$$\begin{aligned}
F_3'(t) &= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\omega} |\eta_2(s)| X^2(x, \omega, s, t) ds d\omega dx \\
&\quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| e^{-s} X^2(x, 1, s, t) ds dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| ds \int_0^1 y_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Parce que  $-se^{-s}$  est une fonction croissante, nous avons  $-se^{-s} \leq -se^{-\tau_2}$  pour tout  $s \in [\tau_1, \tau_2]$ .

Finalement, on pose  $\eta_3 = e^{-\tau_2}$  avec  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| ds \leq \eta_1$  on obtient

$$\begin{aligned}
F_3'(t) &\leq -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\
&\quad - \eta_3 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx + \eta_1 \int_0^1 y_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

■

**Théorème 3.1.** *Sous  $(G, 1)$ , la fonction énergie (15) du problème (1), (2) et (38) satisfait*

$$E(t) \leq \lambda_2 e^{-\lambda_1 t} \quad \forall t \geq 0.$$

**Preuve.** Fonctionnelle Lyapunov est définie par

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + F_1(t) + F_2(t) + N_1F_3(t), \quad (3.22)$$

où  $N.N_1 > 0$ . En différenciant (48) et en utilisant (16), (42), (43) et (45) nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &= NE'(t) + F_1'(t) + F_2'(t) + N_1F_3'(t) \\ \mathcal{L}'(t) &\leq N \left( -l \int_0^1 \theta_x^2 - \beta \int_0^1 u_{xt}^2 dx - \eta_0 \int_0^1 y_t^2 dx + \int_0^1 \theta_x^2 dx \right. \\ &\quad \left. + c \int_0^1 u_{xt}^2 + \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds \right) \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 dx - \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx - b \int_0^1 u_x y dx \\ &\quad - \frac{k_1 \alpha}{2} \int_0^1 q^2 dx + c \int_0^1 y_t^2 dx + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 u_{tx}^2 dx + N_1 \\ &\quad \left[ -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx + \eta_1 \int_0^1 y_t^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \eta_3 \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \right] \\ \mathcal{L}'(t) &\leq - [N\beta - c] \int_0^1 y_t u_x^2 dx - \frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 dx \\ &\quad - \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx - \frac{\alpha k_1}{2} \int_0^1 q^2 dx - [N_1 \eta_3 - c] \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \\ &\quad - N_1 \eta_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx. \end{aligned}$$

choisir  $N_1$  suffisamment grand pour que

$$\alpha_1 = N_1 \eta_3 - c > 0$$

ainsi, nous arrivons à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &= -[N\beta - c] \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \left[ \frac{\delta}{2} \right] \int_0^1 y_x^2 dx - \left[ \frac{\xi}{2} \right] \int_0^1 y^2 dx \\ &\quad - \left[ \frac{\mu}{2} \right] \int_0^1 u_x^2 dx - \left[ \frac{\alpha k_1}{2} \right] \int_0^1 q^2 dx - \alpha_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, 1, s, t) ds dx \\ &\quad - \alpha_2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\varpi dx - \int_0^1 2b u_x y dx \\ &\quad - [Nl - c] \int_0^1 \theta_x^2 dx - [N\eta_0 - c] \int_0^1 y_t^2 dx, \end{aligned}$$

où  $\alpha_2 = N_1 \eta_3$ .

D'autre part

$$|H(t)| \leq |F_1(t)| + |F_2(t)| + N_1|F_3(t)|$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Young et Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |L - NE| &= \int_0^1 (\rho u u_t + J y y_t) dx + \frac{\eta_1}{2} \int_0^1 y^2 dx - \frac{dk}{k_1} \int_0^1 y \theta dx + \alpha k \int_0^1 \theta \int_0^1 q(y) dy dx \\ &\quad + N_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{-s\varpi} |\eta_2(s)| X^2(s)(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} -\rho \int_0^1 u u_t &\leq \rho \frac{\mu}{2} \int_0^1 u^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_0^1 u_t^2 dx \leq \rho \frac{\mu}{2} c \int_0^1 u_x^2 + \frac{\rho}{2\mu} \int_0^1 u_t^2 \\ -J \int_0^1 y y_t &\leq J \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx + \frac{J}{2\xi} \int_0^1 y_t^2 dx \\ -\frac{dk}{k_1} \int_0^1 y \theta dx &\leq \frac{dk}{k_1} \frac{\xi}{2} \int_0^1 y^2 dx + \frac{dk_1}{2k_1\xi} \int_0^1 \theta^2 dx \\ -\alpha k \int_0^1 \theta \int_0^1 q(y) dy dx &\leq \frac{\alpha k}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\alpha k}{2} c \int_0^1 q^2 dx \\ 0 < \varpi < 1 &\Rightarrow -s < -s\varpi < 0 \Rightarrow e^{-s} < e^{-s\varpi} < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |L - NE| &\leq \frac{\mu}{2} (\rho c) \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{\mu} \right) \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \left( \frac{\eta_1}{\delta} c \right) \int_0^1 y_x^2 dx \\ &\quad \frac{\xi}{2} \left( J + \frac{dk}{k_1} \right) \int_0^1 y^2 dx + \frac{J}{2} \left( \frac{1}{\xi} \right) \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{k}{2} \left( \alpha + \frac{d}{k_1\xi} \right) \int_0^1 \theta^2 dx \\ &\quad \frac{\alpha}{2} k \int_0^1 q^2 dx + 2N_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \\ |L - NE| &\leq \frac{\mu}{2} A \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{\rho}{2} B \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\xi}{2} c \int_0^1 y^2 dx \\ &\quad + \frac{J}{2} D \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{k}{2} E \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\alpha}{2} F \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad + 2N \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx + \frac{\delta}{2} G \int_0^1 y_x^2 dx \\ &\quad \max(A, B, C, D, E, F, G, 2N_1) = C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|L - NE| &\leq c \left[ \frac{1}{2} \left( \mu \int_0^1 u_x^2 + \rho \int_0^1 u_t^2 dx + \xi \int_0^1 u_t^2 dx + \xi \int_0^1 y^2 dx + J \int_0^1 y_t^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta \int_0^1 y_x^2 + k \int_0^1 \theta^2 dx + \alpha \int_0^1 q^2 + 2bu_x y \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\eta_2(s)| X^2(x, \varpi, s, t) ds d\omega dx \right]
\end{aligned}$$

$$|L - NE| \leq cE$$

$$-cE \leq L - NE(t) \leq cE$$

$$(N - c)E(t) \leq L \leq (c + N)E(t)$$

$$\beta E(t) \leq L \leq \alpha E$$

donc

$$\beta = N - c > 0, \alpha = c + N$$

et on a,

$$\begin{aligned}
-E(t) &\leq -\frac{1}{\alpha} L(t) \\
L'(t) &\leq -\gamma E(t) \\
&\leq \frac{-\gamma}{\alpha} L(t) \\
\frac{L'(t)}{L(t)} &\leq \frac{-\gamma}{\alpha} \\
\int_0^1 \frac{L'(t)}{L(t)} &\leq \frac{-\gamma}{\alpha} t + c
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ln(L(t)) &\leq -\frac{\gamma}{\alpha} t + c \\
L(t) &\leq B e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t}
\end{aligned}$$

$$E(t) \leq \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t} B.$$

■

## CONCLUSION

Au cours des dernières années, les systèmes poreux amortis ont fait l'objet d'études quantitatives et qualitativement. L'importance de la présente recherche réside dans la description du rôle de Dirichlet conditions dans un système thermoélastique poreux avec un deuxième son et des termes de retard distribués qui rendent la question très importante du point de vue de l'application. Le taux de décroissance dans cette étude dépend du choix de conditions aux limites ce qui rend cette étude intéressante et importante à prendre en considération pour d'autres cas.

- [1] Apalara, T.A. : *Well-posedness and exponential stability for a linear damped timoshenko system with second sound and internal distributed delay*. *Electron. J. Differ. Equ.* 2014(254), 1-15 (2014)
- [2] Borges Filho, E., Santos, M.L. : *On porous-elastic system with a time-varying delay term in the internal feedbacks*. *Z. Angew. Math. Mech.* 100(8), 1-22 (2020)
- [3] Casas, P.S., Quintanilla, R. : *Exponential decay in one-dimensional porous-thermoelasticity*. *Mech. Res. Commun.* 32(6), 652-658 (2005)
- [4] Campelo, A.D.S., Santos, M.L., AlmeidaJunior, D.S. : *On the decay rates of porous elastic systems*. *J. Elast.* 127, 79-101 (2017)
- [5] Draifia, A., Boulaaras, S., Zennir, Kh. : *General decay of nonlinear viscoelastic kirchhoff equation with balakrishnan-taylor damping and logarithmic nonlinearity*. *Math. Meth. Appl. Sci.* 42(14), 4795-4814 (2019)
- [6] Hansen, S.W. : *Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod*. *J. Math. Anal. Appl.* 167, 429-442 (1992)
- [7] Magana, A., Quintanilla, R. : *On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials*. *Int. J. Solids Struct.* 43(11-12), 3414-3427 (2006)
- [8] Nicaise, A.S., Pignotti, C. : *Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay*. *Differ. Int. Equ.* 21(9-10), 935-958 (2008)
- [9] Ouchenane, D. : *A stability result of a timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback*. *Georgian Math. J.* 21(4), 475-489 (2014)

- [10] Racke, R. : *Thermoelasticity with second sound, exponential stability in linear and non linear* 1-d. Math. Meth. Appl. Sci. 25, 409-441 (2002)
- [11] Racke, R., Fernandez-Sare, H.D. : *On the stability of damped timoshenko system cattaneo versus fourier law*. Arch. Rat. Mech. Anal. 194, 221-251 (2009)
- [12] Racke, R., Munoz Rivera, J.E. : *Mildly dissipative nonlinear timoshenko systems-global existence and exponential stability*. J. Math. Anal. Appl. 276, 248-278 (2002)
- [13] Renardy, Y., Kim, J.U. : *Boundary control of the timoshenko beam*. SIAM J. Control Optim. 25(6), 1417-1429 (1987)
- [14] Rivera, J.E.M., Pamplona, P.X., Quintanilla, R. : *Stabilization in elastic solids with voids*. J. Math. Anal. Appl. 350(1), 37-49 (2009)
- [15] Rivera, J.E.M., Pamplona, P.X., Quintanilla, R. : *On the decay of solutions for porous-elastic system with history*. J. Math. Anal. Appl. 379(2), 682-705 (2011)
- [16] Rivera, J.E.M., Santos, M.L., AlmeidaJunior, D.S. : *The stability number of the timoshenko system with second sound*. J. Differ. Eqn. 253, 715-733 (2012)
- [17] Soufyane, A. : *Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type*. Appl. Anal. 87(4), 451-464 (2008)
- [18] Tarabek, M.A. : *On the existence of smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity with second sound*. Q. Appl. Math. 50, 727-742 (1992)
- [19] Timoshenko, S. : *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philos. Mag. 41, 744-746 (1921)
- [20] Zheng, S., Liu, Z. : *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, p. 224. Chapman Hall/CRC, Boca Raton (1999)
- [21] Zennir, Kh. : *Stabilization for solutions of plate equation with time-varying delay and weak-viscoelasticity in  $\mathbf{R}^n$* . Russ. Math. 64(9), 21-33 (2020)