

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude d' une équation différentielle fractionnaire non linéaire

Option : Commande Optimal et System Dynamique

Par :

1.HAZMOUNE ASMA.

Encadré par : Slimani Kamel.

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président :. Lakhal Hakim.

M.C.A U. SKIKDA

Examineur: Hamdi Zakaria.

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022

أعوذ بالله من الشيطان الرجيم

بسم الله الرحمن الرحيم

{ يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات }

سورة المجادلة: [11]

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*A celui qui à tendue avec patience les fruites de
ça bonne éducation et de ces d'évènements,*

À ma chère mère Djamaa.

*A celui qui c'est changer la nuit en jour pour
m'assurer les bonnes conditions,*

À mon cher père Makhloof.

A mon coutaient dans la vie,

*A Mes chères frères Toufik, Bilal, Abd El
momen, Boubaker, Mohamed Lamine,*

Sons oublier leurs femmes et leurs enfants.

*A ceux qui partagent la douceur et l'amerture de
la vie,*

A Mes chères sœurs Siham, Warda.

Sans oublier leurs maris et leurs jeunes enfants.

A tous ma famille qui m'a toujours soutenue.

A tous mes collègues et amis.

Asma



Remerciements

Ma gratitude doit d'abord être exprimée envers dieu **ALLAH** le tout puissant, qui ma donnée la sagesse, la patience, le courage et la volonté pour qu'on puisse terminer ce travail.

Tout d'abord, je tiens a exprimer ma gratitudes au

Dr. Slïmani kamel.

du universitaire 20 Aout 1955 de Skikda pour me guider et

Conseils

Pour ses conseils et son soutien scientifique et la confiance qu'il m'a donnée pour mener ce travail

Je voudrais également remercier Monsieur

. Dr. Lakhel Hakïm.

Pour avoir accepté de jugement ce travail et de présider le jury.

Je voudrais également à remercier Monsieur

Dr. Hamdi Zakaria.

Pour son intérêt qu'il a porter à ce travail, en acceptant son examiner.

Je vous remercie également tous ceux qui aidé moi de près ou de loin à

l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, nous n'oublions pas d'adresser nos vifs remerciements à toutes ma familles,

Qui a accompagné moi tout au long de nos études par leurs amours

inconditionnels et leur soutien constant.

Merci

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo en utilisant la transformée de Laplace.

Mots clés : L'intégral fractionnaire, Dérivation fractionnaire, Riemann-Liouville, Caputo, la transformée de Laplace.

Abstract

In this memory, we study the linear and non linear fractional differential equation with the fractional derivative of Riemann-Liouville and the fractional derivative of Caputo by using Laplace transform.

Key words : fractional Integration, fractional Derivative , Riemann-Liouville, Caputo, Laplace transform.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و الغير خطية ذات المشتق الكسري لريمان ليوفيل و المشتق الكسري لكابوتو باستعمال تحويل لابلاس.

كلمات مفتاحية: التكامل الكسري، الإشتقاق الكسري، ريمان ليوفيل، كابوتو، تحويل لابلاس.

Table des matières

1	Notion générales et définitions	1
1.1	Espace fonctionnels	1
1.1.1	Les espace L^p	1
1.1.2	Espace $C^n(I, \mathbb{R})$ et quelques notions	3
1.1.3	Espace des fonction absolument continues	4
1.1.4	Théorème du point fixe de Banach	6
1.2	Les fonctions spéciales Gamma et Bêta	6
1.2.1	La Fonction Gamma $\Gamma(\cdot)$	6
1.2.2	La Fonction Bêta	7
1.3	Fonction de Mittag-Leffler	7
1.4	La transformée de Laplace	8
1.4.1	Tableau récapitule certaines transformations de Laplace de quelque fonctions et certaines propriétés des transformées de Laplace	9
2	Notion sur la dérivé fractionnaire	10
2.1	L'intégrale de Riemann-Liouville	10
2.1.1	Intégrales d'ordre fractionnaire :	10
2.2	La dérivée de Riemann-Liouville	13
2.3	Composition des l'opérateurs au sens de Riemann-Liouville	16
2.3.1	La composition de l'opérateur D_{a+}^α avec l'opérateur I_{a+}^α au sens de Riemann-Liouville	16
2.3.2	La composition de l'opérateur D_{a+}^α avec l'opérateur D_{a+}^β ou sens de Riemann-Liouville	17
2.3.3	La composition de l'opérateur I_{a+}^α avec l'opérateur D_{a+}^α	18
2.4	Dérivées fractionnaires de Caputo	19
2.5	Composition des l'opérateurs au sens de Caputo	22
2.5.1	La Composition des l'opérateurs ${}^C D_{a+}^\alpha$ avec l'opérateur I_{a+}^α	22
2.5.2	La composition de l'opérateur ${}^C D_{a+}^\alpha$ avec l'opérateur ${}^C D_{a+}^\beta$	22
2.5.3	La composition de l'opérateur I_{a+}^α avec l'opérateur ${}^C D_{a+}^\alpha$	23
2.6	Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville	23
2.7	Quelques propriétés des dérivées fractionnaires	24
2.8	La transformée de Laplace de l'équation différentielles d'ordre frac- tionnaire	24
2.8.1	La transformé de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville	25
2.8.2	La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo	26

3	Les équations Différentielles Fractionnaires Linéaires et non Li- néaires	27
3.1	Rappels : Équation intégrales linéaires	27
3.2	Equation fractionnaire linéaire d'ordre inférieur 1.	28
3.3	Equation fractionnaire linéaire d'ordre supérieur 1	29
3.3.1	Equation Différentielle Fractionnaire Linéaire de forme général	30
3.4	Équation différentielle fractionnaire non linéaire	33

Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudie la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration.

La dérivation numérique d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de L'Hôpital et Johann Bernoulli à la fin du 17^{ème} siècle. La question des dérivées fractionnaires est abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre à de l'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc. . . Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique [9].

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons les Notions générales des espaces fonctionnels, espace de Lebesgue L^p , l'espace des fonctions continues et les fonctions absolument continues. les fonctions spéciales plus exactement la fonction Gamma et bêta, fonction de Mittag-Leffler. Nous terminons le chapitre par le théorème de point fixe de Banach, la transformation de Laplace.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé l'intégrales de Riemann-Liouville, que nous avons obtenue en généralisant l'opération inverse de la dérivation d'ordre supérieur en utilisant l'intégrale, cela nous permet d'introduire la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous étudions ensuite leurs caractéristiques distinctives par rapport à ce que nous savons sur la dérivation classique et La relation entre eux, nous terminons par la transformées de Laplace des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution des équations différentielles fractionnaires linéaires par transformée de Laplace et l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour des équations différentielles fractionnaires non linéaires .

Chapitre 1

Notion générales et définitions

Dans ce chapitre nous mentionnons les notation de base et les définition et les espaces que nous utilisons dans le calcul de dérivée fractionnaire. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n non vide et $N \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Les espace L^p

Définition 1.1. voir [1]

1. on définit

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}/f; \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f| dx < \infty\}.$$

2. Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}/f; \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega).\}$$

On définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Si $p = \infty$ on définit l'espace

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ est mesurable et } \exists C > 0 / |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

4. L^1_{loc} désigne l'ensemble des fonction localement intégrable sur Ω donc

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega\}.$$

Proposition 1.1. Voir[1] Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel muni de la norme :

1. Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Pour $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

3. Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Proposition 1.2. voir [1]

- **Inégalité de Young**

$$\forall a, b \geq 0 \quad \text{on a} \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

- **Inégalité de Hölder** Soient $f \in L^p(\Omega)$, et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

- **Inégalité de Hölder** soit $f = f_1 \times \dots \times f_k$ et $f_i \in L^{p_i}$ et $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$ alors

$$f \in L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

- **Inégalité de Minkowsk** Soient $f, g \in L^p(\Omega)$, avec $p \geq 1$ alors

$$f + g \in L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

- **Inégalité d'interpolation** Soient $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $p \leq r \leq q$ alors

$$f \in L^r(\Omega).$$

Proposition 1.3. voir[1] L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$

De la complétude de l'espace L^p nous concluons le lemme suivant

Lemme 1.1. voir [1] Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tels que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $h \in L^p(\Omega)$ tq

- $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, presque par tout sur Ω .
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ et presque par tout sur Ω .

1.1 Espace fonctionnels

Théorème 1.1. (*Théorème de convergence monotone de Beppo Levi*) voir[1]

Soit f_n une suite croissante de fonctions de L^1 telle que $\sup_n \int f_n < \infty$. Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Théorème 1.2. (*Théorème de Convergence dominée de Lebesgue*) voir[1]

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $L^1(\Omega)$ convergeant presque par tout vers une fonction mesurable f on suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que tout $n \geq 1$ on ait $|f_n| \leq g$ p.p. sur Ω , alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$$

Lemme 1.2. (*Lemme de Fatou*) voir[1] Soit f_n une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que

1. $\forall n, f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω .

2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Théorème 1.3 (Fubini). Soit f une fonction sommable de deux variables sur le produit des espaces mesurables (X, μ) et (Y, ν) . On a alors les assertions suivantes

1. Pour μ presque tous les $x \in X$, la fonction. $f(x, y)$ est sommable sur Y et son intégrale sur Y est une fonction sommable sur X .

2. Pour ν presque tous les $y \in Y$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur X et son intégrale sur X est une fonction sommable sur Y .

3. On a

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

1.1.2 Espace $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et quelques notions

1. Soit $n \in \mathbb{N}, I \subseteq \mathbb{R}$ l'espace des fonction n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue noté $\mathcal{C}^n(I)$ et définie par

$$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f, f', \dots, f^{(n)} \text{ sont exist et continue}\}.$$

2. L'application

$$N : \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f \longmapsto (f) = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{\infty}, \quad \|f^{(k)}\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)|$$

existe et continue sur $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

Théorème 1.4. $C^n(I, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|$

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{\infty},$$

est une espace de Banach.

Définition 1.2 (Lipschitzienne). Soient G une partie de \mathbb{R}^2 , $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application et L un nombre réel positif. On dit que f est lipschitzienne par rapport à y si

$$\forall (y_1, y_2) \in G, \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Où L est appelée la constante de Lipschitz. Si $0 \leq L < 1$, On dit que f est contractante par rapport à y .

Définition 1.3 (Convergence uniforme). On dit que la suite des fonctions f_n définies sur l'intervalle I de \mathbb{R} converge uniformément vers la fonction f , quand n tendant vers $+\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.4 (Fonction bornée). Une fonction $f : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si

$$\exists M > 0, \forall t \in G : |f(t)| \leq M.$$

Définition 1.5 (Fonction convexe). La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in I \subset \mathbb{R}$ et pour $t \in [0, 1]$ on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 1.6 (Fonction d'ordre exponentiel α). On dit que la fonction f est d'ordre exponentiel α , si il existe deux constantes positives M et T telles que

$$e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M \quad \text{pour tout } t > T.$$

Définition 1.7 (Intégrale de Gauss). Une intégrale de Gauss est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur l'ensemble des réels.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

1.1.3 Espace des fonction absolument continues

Définition 1.8. voir [3, 8] Soit f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . f est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout partition $\{[a_k, b_k]\}_{i=1}^n$

de $[a, b]$. si $\sum_{i=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, Alors

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

L'espace des fonction absolument continue sur $[a, b]$ noté par $AC([a, b])$

1.1 Espace fonctionnels

Définition 1.9 (voir [6]). Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $AC[a, b]$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$.

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ } n\text{-1 dérivable et } f^{n-1} \in AC([a, b])\}.$$

En particulier $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

Définition 1.10 (Fonction à variation bornée voir [3]). Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite à variation bornée, s'il existe une constante c positive telle que, pour toute subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, on ait

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c.$$

Remarque 1.1. La quantité

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|; N \geq 2, a = x_1 < \dots < x_N = b \right\},$$

s'appelle la variation totale de fonction sur $[a, b]$.

Lemme 1.3 ([3]). Si f une fonction monotone de $[a, b]$, dans \mathbb{R} , alors elle à variation bornée.

Démonstration. Il est clair qu'une fonction monotone est à variation bornée, car on peut toujours enlever les valeurs absolues lors du calcul de la variation totale, et celle-ci est égale à $|f(b) - f(a)|$.

Soit $\bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$ une partition de $[a, b]$ On suppose que f est croissante, de plus $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ça implique $f(x_k) - f(x_{k-1}) < f(b) - f(a)$ Donc :

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| < |f(b) - f(a)|,$$

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = f(x_n) - f(x_0) \leq |f(b) - f(a)|.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(b) - f(a)|.$$

□

Proposition 1.4 ([6]). • Si f est absolument continue alors elle est uniformément continue donc continue. La réciproque est, en général, fautive.

- La somme de deux fonctions absolument continues et le produit d'une telle fonction par un nombre sont absolument continues.
- Toute fonction absolument continue est à variation bornée.
- Toute fonction absolument continue est la différence de deux fonctions absolument continues croissantes.

Caractérisation d' espace des fonction $AC^n([a, b])$ et $AC([a, b])$

Théorème 1.5 ([6]). Soit $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$, alors $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est absolument continue.

- $(AC([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{AC})$ est une espace de Banach, avec

$$\|f\|_{AC} = |f(a)| + \int_a^b |f'(s)|ds.$$

- $f \in AC([a, b], \mathbb{R}) \iff f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds, f' \in L^1([a, b], \mathbb{R})$.

- $f \in AC^n([a, b], \mathbb{R}) \iff f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x f^{(n)}(s)ds.$

1.1.4 Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.11 (Point fixe). voir [4] Soit T une application d'un ensemble S dans lui même.

On appelle point fixe de T tout point $s \in S$ tel que $T(s) = s$.

Théorème 1.6 (Principe de contraction de Banach). voir [4] Soit S une espace métrique complet et soit fixe de $T : S \rightarrow S$ une application contractante, c'est à dire il existe $0 < k < 1$ telle que

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y), \forall x, y \in S$$

Alors T admet un point fixe unique $s \in S$. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(s) = s,$$

avec

$$d(T^n(s), s) \leq \frac{k^n}{1-k} d(s, T(s)).$$

1.2 Les fonctions spéciales Gamma et Bêta

1.2.1 La Fonction Gamma $\Gamma(\cdot)$

Définition 1.12. voir[2] La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivant

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0.$$

quand la partie réelle de z est strictement positive $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Propriété 1.1. voir[2]

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.1. 1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$.
(Posant le changement de variable $t = r^2$)

1.3 Fonction de Mittag-Leffler

1.2.2 La Fonction Bêta

Définition 1.13. voir [2] La fonction Bêta On définit par l'intégral : Pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ avec $\text{Re}(z) > 0$, on a

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

Propriété 1.2. voir [2] Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, avec $\text{Re}(p) > 0$. Alors

1. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
2. $B(p, q) = B(q, p)$.

1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.14. voir [5] La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonction suivant :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C},$$

La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Proposition 1.5. voir [5]

1. $E_{1,1}(z) = e^z$.
2. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$
3. $E_{1,3} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right]$
5. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$
6. $E_{2,2} = \frac{\sinh(z)}{z}$
7. la fonction Mittag-Leffler converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

Démonstration. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

2. On a

$$E_{1,2}(z) = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}.$$

3. on a

$$E_{1,3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$$

4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé on a

$$E_{1,m} = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right],$$

Montrons que $E_{1,m+1} = \frac{1}{z^m} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right],$

$$\begin{aligned} E_{1,m+1}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+m+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+m)\Gamma(k+m)} \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^{k-m}}{k\Gamma(k)} = \frac{1}{z^m} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^k}{k\Gamma(k)} \\ &= \frac{1}{z^m} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{1}{z^m} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right] = \frac{1}{z^m} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

5. $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$

6. $E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$

□

1.4 La transformée de Laplace

Définition 1.15. voir [2] Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, nulle pour $t < 0$. La fonction F de la variable s définie par

$$F(s) = L\{f(t), s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

est appelé transformé de Laplace de la fonction f .

Si f est une fonction d'ordre exponentiel alors la transformé de Laplace existe.

Propriété 1.3. voir [2]

- la transformée de Laplace inverse est

$$f(t) = L^{-1}\{F(s), t\} = \int_{i\infty}^{\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > c_0,$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

Pour indiquer que f est la transformée inverse unique de F .

1.4 La transformée de Laplace

- **Linéarité de la transformée de Laplace**

$$L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t), t, s \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(s).$$

- **La transformée de Laplace de la convolution**

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx,$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales à zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace

$$L\{f(t) * g(t), s\} = F(s)G(s),$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

- **La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$**

$$L\{f^{(n)}(t), s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

- $L\left\{ \int_0^t f(u)du, s \right\} = F(s)/s$
- $\lim_{s \rightarrow +\infty} L\{f(t), s\} = 0$, $\lim_{s \rightarrow 0^+} sL\{f(t), s\} = f(0^+)$ avec la condition f admet une limite quand t tend vers 0
- Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$L\{f(at), s\} = \frac{1}{a} F(s/a), \quad L\{f(t-a), s\} = (\exp(-as))F(s)$$

1.4.1 Tableau récapitule certaines transformations de Laplace de quelques fonctions et certaines propriétés des transformées de Laplace

Une fonction $f(t)$	Transformer $F(s)$	Une fonction $f(t)$	Transformer $F(s)$
$t^{m-1}e^{at}$	$\frac{\Gamma(m)}{(s-a)^m} (m > 0)$	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\underbrace{\int_0^t d\tau \cdots \int_0^\tau f(\tau')d\tau'}_{n \text{ fois}}$	$s^{-n}F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0)$
$t^m (m > -1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}, \operatorname{Re} s > 0$	$f(ct)$	$\frac{1}{c} F(s/c)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$tf(t)$	$-\frac{dF}{ds}$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s')ds'$
$(\pi t)^{\frac{1}{2}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$	$\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Chapitre 2

Notion sur la dérivé fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

2.1.1 Intégrales d'ordre fractionnaire :

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ou intégrable et

$$I_{a+}^1 : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (I_{a+}^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

et

$$I_{b-}^1 : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (I_{b-}^1 f)(x) = \int_x^b f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$(I_{a+}^2 f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt.$$

$$(I_{b-}^2 f)(x) = \int_x^b \left(\int_x^s f(s) ds \right) dt.$$

D'après le théorème de Fubini nous ramènonc cett intégrale double à une intégrale simple

$$(I_{a+}^2 f)(x) = \int_a^x f(s) ds \int_s^x dt = \int_a^x \frac{(x-s)}{1!} f(s) ds,$$

et

$$(I_{b-}^2 f)(x) = \int_x^b f(s) ds \int_x^s dt = \int_x^b \frac{(s-x)}{1!} f(s) ds.$$

Par une itération on obtient

$$(I_{a+}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

et

$$(I_{b-}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt.$$

Donc

$$(I_{a+}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

$$(I_{b-}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt.$$

Définition 2.1. voir [6] Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{b-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) sont définies par

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \text{Re}(\alpha) > 0), \quad (2.1)$$

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b; \text{Re}(\alpha) > 0), \quad (2.2)$$

respectivement. Ici $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma. Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires de gauche et de droite.

Remarque 2.1. voir [6] Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$. les définitions (2.1) et (2.2) coïncident avec les n ième intégrales de forme

$$(I_{a+}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}),$$

et

$$(I_{b-}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Exemple 2.1. Soit la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, et $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) > 0$
1.

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha [(t-a)^{\beta-1}](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds. \end{aligned}$$

Posons $s = x - r(x-a)$ alors on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha [(t-a)^{\beta-1}](x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 (x-a)^\alpha r^{\alpha-1} (x-a)^{\beta-1} (1-r)^{\beta-1} dr \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r)^{\beta-1} dr \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{b-}^\alpha [(b-t)^{\beta-1}](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (s-x)^{\alpha-1} (b-s)^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (s-x)^{\alpha-1} (b-s)^{\beta-1} ds. \end{aligned}$$

Posons $s = x + r(b - x)$ alors on obtient

$$\begin{aligned} I_{b-}^{\alpha} [(b - t)^{\beta-1}](x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 (b - x)^{\alpha} r^{\alpha-1} (b - x)^{\beta-1} (1 - r)^{\beta-1} dr \\ &= \frac{(b - x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 r^{\alpha-1} (1 - r)^{\beta-1} dr \\ &= \frac{(b - x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (b - x)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

2.

$$I_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (t - a)^{\alpha},$$

et

$$I_{b-}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (b - t)^{\alpha}.$$

Lemme 2.1. voir [8] Soit $f \in L^p([a, b], \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ alors

1. $\exists k > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|I_{a+}^{\alpha} f\|_{L^p} \leq k \|f\|_{L^p} \\ \text{et} \\ \|I_{b-}^{\alpha} f\|_{L^p} \leq k \|f\|_{L^p} \end{cases} \quad \text{avec } k = \frac{(b - a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad \alpha > 0.$$

2. Si $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ alors il existe $\tilde{k} > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|I_{a+}^{\alpha} f\|_{L^q} \leq \tilde{k} \|f\|_{L^p} \\ \text{et} \\ \|I_{b-}^{\alpha} f\|_{L^q} \leq \tilde{k} \|f\|_{L^p} \end{cases} \quad \forall f \in L^p([a, b], \mathbb{R}), q = \frac{p}{1 - \alpha p}.$$

Proposition 2.1. voir [6] Soit $y \in C([a, b], \mathbb{R})$. Pour $\alpha, \beta > 0$ on a

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} y = I_{a+}^{\alpha+\beta} y,$$

$$I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} y = I_{b-}^{\alpha+\beta} y.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} y)(x) &= I_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\beta} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (I_{a+}^{\beta} y)(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_a^t (t - s)^{\beta-1} y(s) ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x y(s) ds \int_s^x (x - t)^{\alpha-1} (t - s)^{\beta-1} dt. \end{aligned}$$

2.2 La dérivée de Riemann-Liouville

en y effectuant le changement de variable $t = s + r(x - s)$

$$\begin{aligned}
 \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1} (1-r)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} r^{\beta-1} (x-s) dr \\
 &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta+1} r^\beta (1-r)^{\alpha-1} dr \\
 &= (x-s)^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 r^\beta (1-r)^{\alpha-1} dr \\
 &= (x-s)^{\alpha+\beta+1} B(\alpha, \beta) \\
 &= (x-s)^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta+1} y(s) ds = (I_{a+}^{\alpha+\beta} y)(x).$$

De même manière on montre que $I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta y = I_{b-}^{\alpha+\beta} y$. □

2.2 La dérivée de Riemann-Liouville

Définition 2.2. voir [6] Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville D_{a+}^α et D_{b-}^α d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$) sont définies par

$$\begin{aligned}
 (D_{a+}^\alpha y)(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \\
 &:= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (n = [\text{Re}(\alpha)] + 1; x > a)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
 (D_{b-}^\alpha y)(x) &= \left(\frac{-d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} y)(x) \\
 &:= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \quad (n = [\text{Re}(\alpha)] + 1; x < b)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Remarque 2.2. En particulier

1. Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, alors

$$(D_{a+}^0 y) = (D_{b-}^0 y) = y(x),$$

et

$$\begin{cases} (D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)} \\ (D_{b-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

où $y^{(n)}(x)$ est la dérivée usuelle de $y(x)$ d'ordre n .

2. Pour $0 < \alpha < 1$, alors

$$\begin{cases} (D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1; x > a), \\ (D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{-d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1; x < b). \end{cases}$$

Lemme 2.2. Soit $\alpha > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}.$$

Exemple 2.2. 1. Soit la fonction on définie par

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = (x-a)^\beta, \quad \beta > 0 \end{aligned}$$

d'après la définition de D_{a+}^α , on a

•

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \end{aligned}$$

On a $(I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$

Par le changement de variable $t = x - r(x-a)$, on a $dt = -(x-a)dr$ alors

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) &= -\frac{(x-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 r^{n-\alpha-1} (1-r)^\beta (x-a)^\beta (x-a) dr \\ &= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-r)^\beta r^{n-\alpha-1} dr \\ &= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha} B(\beta+1, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} \\ &= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha} \Gamma(\beta+1) \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n) \Gamma(n-\alpha)} \\ &= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha} \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)}. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)(n+\beta-\alpha)(n+\beta-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

$$\Gamma(\beta-\alpha+n) = (\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)\dots(\beta-\alpha+n-1)\Gamma(\beta-\alpha). \quad (2.5)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+n)(n+\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

• De même manière on calcule

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

2.2 La dérivée de Riemann-Liouville

2.

$$\begin{aligned}
 (D_{a+}^{\alpha} C) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} C) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{C}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_a^x \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right] \\
 &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha}.
 \end{aligned}$$

et d'après le lemme (2.2) et (2.5) on trouve

$$(D_{a+}^{\alpha} C) = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Lemme 2.3. voir [8] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = [\alpha] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction donnée. Supposons que $D_{a+}^{\alpha} f = 0$. Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n},$$

où les c_k sont des constantes quelconques.

Démonstration. Comme $(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = 0$, alors

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = 0 \implies (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k,$$

Par composition avec I_{a+}^{α} on obtient

$$\begin{aligned}
 (I_{a+}^n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_{a+}^{\alpha} (x-a)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}.
 \end{aligned}$$

en remplaçant $(I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$ par son expression, on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha},$$

puis par dérivation classique, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}.$$

□

Lemme 2.4. voir [6] Soit $\alpha \geq 0$, et $n = [\alpha] + 1$. Si $y(x) \in AC^n[a, b]$, alors les dérivées fractionnaires $D_{a+}^\alpha y$ et $D_{b-}^\alpha y$ existent presque partout sur $[a, b]$ et peuvent être représentées sous les formes

$$(D_{a+}^\alpha y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt,$$

et

$$(D_{b-}^\alpha y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(k)} y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Corollaire 2.1. voir [6] Si $0 \leq \alpha < 1$ ($\alpha \neq 0$) et $y(x) \in AC([a, b])$, alors

$$(D_{a+}^\alpha y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{y'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right],$$

et

$$(D_{b-}^\alpha y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(b)}{(b-x)^\alpha} - \int_x^b \frac{y'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right].$$

2.3 Composition des l'opérateurs au sens de Riemann-Liouville

2.3.1 La composition de l'opérateur D_{a+}^α avec l'opérateur I_{a+}^α au sens de Riemann-Liouville

Proposition 2.2. voir [8] Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrale. Alors

$$(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^n I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^n I_{a+}^n y)(x) = Id, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y)(x) &= D_{a+}^\alpha (I_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{(I_{a+}^\alpha y)(x)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \left[\frac{(y)(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x y(s) ds \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

On pose $J = \int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} dt$, et on utilise le changement de variable $t = x - r(x-s)$ qui donne $dt = -(x-s)dr$. Alors

$$\begin{aligned} J &= \int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} dt \\ &= - \int_0^1 r^{n-\alpha-1} (x-s)^{n-\alpha-1} (1-r)^{\alpha-1} (x-s)^{\alpha-1} (x-s) dr \\ &= (x-s)^{n-1} \int_0^1 r^{n-\alpha-1} (1-r)^{\alpha-1} dr \\ &= (x-s)^{n-1} B(n-\alpha, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)(x-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-s)^{n-1} y(s) ds \\ &= y(x) = (D_{a+}^n I_{a+}^n y)(x). \end{aligned}$$

Puisque $I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha} y = I_{a+}^n y$, on obtient

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^n I_{a+}^n y)(x) = Id.$$

□

2.3.2 La composition de l'opérateur D_{a+}^{α} avec l'opérateur D_{a+}^{β} ou sens de Riemann-Liouville

Théorème 2.1. voir [8] Soient $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \varphi \in L^1([a, b], \mathbb{R})$, et $y = I_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi$. Alors

$$D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} y = D_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} y = D_{a+}^{\alpha_2 + \alpha_1} y.$$

Démonstration. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 = [\alpha_1] + 1$ et $n_2 = [\alpha_2] + 1$.

$$D_{a+}^{\alpha_2} y = D_{a+}^{\alpha_2} I_{a+}^{\alpha_2 + \alpha_1} \varphi = D_{a+}^{n_2 - \alpha_2} I_{a+}^{n_2} I_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi.$$

D'après la proposition on trouve

$$D_{a+}^{\alpha_2} y = D_{a+}^{n_2} I_{a+}^{n_2 + \alpha_1} \varphi \implies D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} y = D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{n_2} I_{a+}^{n_2 + \alpha_1} \varphi.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} y &= D_{a+}^{n_1} I_{a+}^{n_1 - \alpha_1} D_{a+}^{n_2} I_{a+}^{n_2 + \alpha_1} \varphi \\ &= D_{a+}^{n_1} I_{a+}^{n_1 - \alpha_1} D_{a+}^{n_2} I_{a+}^{n_2} I_{a+}^{\alpha_1} \varphi \\ &= D_{a+}^{n_1} I_{a+}^{n_1 - \alpha_1} I_{a+}^{\alpha_1} \varphi \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

D'autre part on a $D_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} y = D_{a+}^m I_{a+}^{m - (\alpha_1 + \alpha_2)} y$, avec $m = [\alpha_1 + \alpha_2] + 1$. Alors

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} y &= D_{a+}^m I_{a+}^{m - (\alpha_1 + \alpha_2)} y I_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi \\ &= D_{a+}^m I_{a+}^m \varphi = \varphi. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} y = D_{a+}^{\alpha_1 + \alpha_2} y = D_{a+}^{\alpha_2} D_{a+}^{\alpha_1} y.$$

□

Exemple 2.3. On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} y : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y(x) = 1 \end{aligned}$$

Calculons : $D_0^{\frac{1}{2}} y, D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} y$ et $D_0^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} y$

On a $D_0^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$ ceci nous donne

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{\frac{1}{2}} dt &= \int_0^1 r^{-\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}} dr \\ &= \int_0^1 r^{-\frac{1}{2}-1}(1-r)^{-\frac{1}{2}-1} dr \\ &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc $D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 = 0 = D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} 1$.

Remarque 2.3. En général $D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} y \neq D_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2} y$ et $D_{b-}^{\alpha_1} D_{b-}^{\alpha_2} y \neq D_{b-}^{\alpha_1+\alpha_2} y$.

Exemple 2.4. Soit la fonction y définie par

$$\begin{aligned} y : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Calculons : $D_0^{\frac{1}{2}} y, D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} y$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} y$.

De la même manière que l'exemple précédent, on trouve que $(D_0^{\frac{1}{2}} y) = 0$, de plus on a

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} y)(x) = (D^1)(x) = \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{9}{2}}.$$

D'où $(D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} y)(x) = 0 \neq -\frac{1}{2} x^{-\frac{9}{2}}$.

2.3.3 La composition de l'opérateur I_{a+}^{α} avec l'opérateur D_{a+}^{α}

Proposition 2.3. voir [8] Si $\alpha > 0$ et $y(x) \in L^p(a, p)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors les égalités suivantes :

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) \quad \text{et} \quad (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} y)(x) = y(x) \quad (\alpha > 0).$$

sont valables presque partout sur $[a, b]$.

Proposition 2.4. voir [8] Si $\alpha > \beta > 0$, alors, pour $y(x) \in L^p(a, b)$ et ($1 \leq p \leq \infty$), les relation :

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} y(x) \quad \text{et} \quad (D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} y)(x) = I_{b-}^{\alpha-\beta} y(x),$$

tiennent presque partout sur $[a, b]$. En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\alpha > k$, alors

$$(D_{a+}^k I_{a+}^{\alpha} y)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} y(x) \quad \text{et} \quad (D_{b-}^k I_{b-}^{\alpha} y)(x) = I_{b-}^{\alpha-k} y(x).$$

Proposition 2.5. voir [8] Soit $\alpha \geq 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dx}$.

1. Si les dérivée fractionnaires $(D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ et $(D_{a+}^{\alpha+m} y)(x)$ existent, alors

$$(D_{a+}^m D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} y)(x).$$

2. Si les dérivée fractionnaires $(D_{b-}^{\alpha} y)(x)$ et $(D_{b-}^{\alpha+m} y)(x)$ existent, alors

$$(D_{b-}^m D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} y)(x).$$

2.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

Pour présenter la propriété suivant, nous utilisons les espace de la fonction $I_{a_+}^\alpha(L^p)$ et $I_{b_-}^\alpha(L^p)$ définie pour $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$ par

$$I_{a_+}^\alpha(L^p) = \{y : y = I_{a_+}^\alpha \varphi, \varphi \in L^p(a, b)\},$$

et

$$I_{b_-}^\alpha(L^p) = \{y : y = I_{b_-}^\alpha \varphi, \varphi \in L^p(a, b)\}.$$

Lemme 2.5. voir [8] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ et soit $y_{n-\alpha}(x) = (I_{a_+}^{n-\alpha}y)(x)$ l'intégrale fractionnaire (2.1) d'ordre $n - \alpha$.

1. Si $1 \leq p \leq \infty$ et $y(x) \in I_{a_+}^\alpha(L^p)$ alors

$$(I_{a_+}^\alpha D_{a_+}^\alpha y)(x) = y(x),$$

2. Si $y(x) \in L^1(a, b)$ et $y(x) \in AC^n[a, b]$, alors l'égalité

$$(I_{a_+}^\alpha D_{a_+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}.$$

tient presque partout sur $[a, b]$.

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$(I_{a_+}^\alpha D_{a_+}^\alpha y)(x) = y(x) - \frac{y_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1},$$

où $y_{1-\alpha}(x) = (I_{a_+}^{1-\alpha}y)(x)$, tandis que pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, l'égalité suivante est vérifiée

$$(I_{a_+}^n D_{a_+}^n y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Lemme 2.6. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$.

Soit également $g_{n-\alpha}(x) = (I_{b_-}^{n-\alpha}g)(x)$. l'intégral fractionnaire (2.2) d'ordre $n - \alpha$.

1. Si $1 \leq p \leq \infty$ et $g(x) \in I_{b_-}^\alpha(L^p)$, alors

$$(I_{b_-}^\alpha D_{b_-}^\alpha g)(x) = g(x).$$

2. Si $g(x) \in L^1(a, b)$ et $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n([a, b])$, alors la formule

$$(I_{b_-}^\alpha D_{b_-}^\alpha g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{(n-j)} g_{n-\alpha}^{(n-j)}(b)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (b - x)^{\alpha-j}.$$

tient presque partout sur $[a, b]$.

2.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 2.3. voir [6] La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche et à droite $({}^C D_{b_-}^\alpha y)(x)$ et $({}^C D_{a_+}^\alpha y)(x)$ respectivement d'ordre α . avec $\alpha \geq 0$ sur $[a, b]$ sont définis par

$$({}^C D_{a_+}^\alpha y)(x) = \left(D_{a_+}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right] \right) (x), \quad (2.6)$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \left(D_{b-}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x), \quad (2.7)$$

où

$$n = [\alpha] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}_0; n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

Proposition 2.6. voir [6] Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$ on a

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y(t))(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha},$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y(t))(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - x)^{k-\alpha}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) &= \left(D_{a+}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \\ &= D_{a+}^\alpha y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} D_{a+}^\alpha (t-a)^k \\ &= D_{a+}^\alpha y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \\ &= D_{a+}^\alpha y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4. Cas particulières

1. Si $\alpha = n$ on a

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y) = (D^n y)(x).$$

2. Si $0 < \alpha < 1$ on a

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha},$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha}.$$

Proposition 2.7. voir [6]

Soit $\alpha > 0$

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) = y^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k,$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) = y^{(k)}(b) = 0 \quad \forall k.$$

Théorème 2.2. voir [6] Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$

2.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

— Si $y \in AC^n([a, b])$, Alors

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}} dt,$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{n-\alpha+1}} dt.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left\{ -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \Big|_{t=a}^x \right. \\ &\quad \left. + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \frac{d}{dt} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[y'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k-1} \right] dt \\ &= \dots = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} [y^{(n-\alpha-1)}(t) - y^{(n-\alpha-1)}(a)] dt. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'argument ci-dessus, nous déduisons que

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t) dt.$$

□

Proposition 2.8. voir [8] Soit $y \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$, avec α un réel strictement positif et $[\alpha] = n$. On a ${}^C D_{a+}^\alpha y = 0$ alors

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k \quad \text{pour } c_k \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a ${}^C D_{a+}^\alpha y = 0$ ça implique que $D_{a+}^\alpha \left[y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] = 0$, et alors

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}.$$

D'où

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad \text{pour } x \in [a, b],$$

avec $c_k = \tilde{c} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, pour $k = 1, \dots, n-1$. □

Exemple 2.5. 1. Soit la fonction $y(t) = (t-a)^{\beta-1}$ et $\beta > 0$,
La dérivée fractionnaire de la fonction $y(t)$ est

$$({}^C D_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-1} \quad (\beta > n),$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-1} \quad (\beta > n).$$

2. La dérivée fractionnaire de la fonction constant :

$$({}^C D_{a+}^\alpha C)(x) = 0, \quad C = \text{const},$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha C)(x) = 0, \quad C = \text{const}.$$

2.5 Composition des l'opérateurs au sens de Caputo

2.5.1 La Composition des l'opérateurs ${}^C D_{a+}^\alpha$ avec l'opérateur I_{a+}^α

Lemme 2.7. voir [6] Soit $\text{Re}(\alpha) > 0$ et soit $y(x) \in L^\infty[(a, b)]$ ou $y(x) \in C[a, b]$.

1. Si $\text{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N}$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$$({}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y)(x) = y(x),$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha y)(x) = y(x).$$

2. Si $\text{Re}(\alpha) \in \mathbb{N}$ et $\text{Im}(\alpha) \neq 0$, alors

$$({}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - \frac{(I_{a+}^{\alpha+n-1} y)(a)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha}.$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha y)(x) = y(x) - \frac{(I_{b-}^{\alpha+n-1} y)(b)}{\Gamma(n-\alpha)} (b-x)^{n-\alpha}.$$

2.5.2 La composition de l'opérateur ${}^C D_{a+}^\alpha$ avec l'opérateur ${}^C D_{a+}^\beta$

Lemme 2.8. voir [8] Soit $\alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et $y \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ alors :

$${}^C D_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\beta y = {}^C D_{a+}^{\alpha+\beta} y = {}^C D_{a+}^\beta {}^C D_{a+}^\alpha y.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\beta y) &= {}^C D_{a+}^\alpha ({}^C D_{a+}^\beta y) = {}^C D_{a+}^\alpha (I_{a+}^{1-\beta} y') \\ &= D_{a+}^\alpha (I_{a+}^{1-\beta} y') = D I_{a+}^{1-\alpha} (I_{a+}^{1-\beta} y') \\ &= (D I_{a+}^{1-\beta} I_{a+}^{1-\alpha}) y' = D I_{a+}^{1-\beta} (I_{a+}^{1-\alpha} y') \\ &= D I_{a+}^{1-\beta} ({}^C D_{a+}^{1-\alpha} y) = {}^C D_{a+}^\beta {}^C D_{a+}^\alpha y \\ &= D_{a+}^\alpha (I_{a+}^{1-\beta} y') = D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha (I_{a+}^{1-\alpha-\beta} y'), \\ &= I_{a+}^{1-\alpha-\beta} y' = {}^C D_{a+}^{\alpha+\beta} y. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$({}^C D_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\beta y)(x) = {}^C D_{a+}^{\alpha+\beta} y = ({}^C D_{a+}^\beta {}^C D_{a+}^\alpha y)(x).$$

□

2.5.3 La composition de l'opérateur $I_{a_+}^\alpha$ avec l'opérateur ${}^C D_{a_+}^\alpha$

Théorème 2.3. voir [8] Soit $\alpha > 0$ avec $[\alpha] = n \in \mathbb{N}$ et $y \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$(I_{a_+}^\alpha {}^C D_{a_+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Démonstration. Soit $y \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$, don

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (I_{a_+}^n y^{(n)})(x), \quad (2.8)$$

et

$${}^C D_{a_+}^\alpha y = (I_{a_+}^{n-\alpha} y^{(n)}) \longrightarrow I_{a_+}^\alpha {}^C D_{a_+}^\alpha y = I_{a_+}^\alpha I_{a_+}^{n-\alpha} y^{(n)},$$

Donc on obtient $I_{a_+}^\alpha {}^C D_{a_+}^\alpha y = I_{a_+}^n y^{(n)}$. Finalement d'après (2.8) on a

$$(I_{a_+}^\alpha {}^C D_{a_+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

□

2.6 Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville

Lemme 2.9. voir [7] Soit $y(x)$ est une fonction tel que les deux opérateurs $(D_{a_+}^\alpha y)(x)$ avec ${}^C(D_{a_+}^\alpha y)(x)$ et $(D_{b_-}^\alpha y)(x)$ avec ${}^C(D_{b_-}^\alpha y)(x)$ existent, avec $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, alors

$$(D_{a_+}^\alpha y)(x) \neq ({}^C D_{a_+}^\alpha y)(x),$$

et

$$(D_{b_-}^\alpha y)(x) \neq ({}^C D_{b_-}^\alpha y)(x).$$

Proposition 2.9. voir [7] Soit $n-1 < \alpha < n$, alors :

$$\lim D_{a_+}^\alpha y(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_{a_+}^\alpha y(t) = y^{(n)}(t),$$

et

$$\lim D_{b_-}^\alpha y(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_{b_-}^\alpha y(t) = y^{(n)}(t),$$

Remarque 2.5. (Commutativité) Soit la fonction $y(t)$ telle que $y^{(s)}(a) = 0, s = 0, 1, 2, \dots, m$, alors les deux dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont commutatives avec la dérivée d'ordre $m, m \in \mathbb{N}$

$$D_{a_+}^m D_{a_+}^\alpha y(t) = D_{a_+}^{\alpha+m} y(t) = D_{a_+}^\alpha D_{a_+}^m y(t),$$

et

$${}^C D_{a_+}^\alpha D_{a_+}^m y(t) = {}^C D_{a_+}^{\alpha+m} y(t) = D_{a_+}^m {}^C D_{a_+}^\alpha y(t).$$

Proposition 2.10. voir [7] Soit $y(t)$ une fonction telle que $y^{(s)}(a) = 0, s = 0, 1, 2, \dots, n-1$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo coïncident, i.e :

$${}^C D_{a_+}^\alpha y(t) = D_{a_+}^\alpha y(t).$$

2.7 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Théorème 2.4. [2] *L'Opérateur de dérivée fractionnaire est un Opérateur linéaire*

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x), \quad x > 0.$$

Démonstration. Par exemple, pour l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α , ($b - 1 \leq \alpha < n$)

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &\quad + \frac{\mu}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} g(t) dt \\ &= \lambda_0 D_{a+}^\alpha f(x) + \mu_0 D_{a+}^\alpha g(x), \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2. (Règle de Leibniz) voir[7] *Soit $t > a, a \in \mathbb{R}, n - 1 < a < n \in \mathbb{N}$. Si $y_1(x), y_2(x)$ et tous ses dérivées continues sur $[a, t]$, alors*

$${}^C D_{a+}^\alpha (y_1(t)y_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D_{a+}^\alpha y_1(t)) y_2^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} ((y_1(t)y_2(t))^k(a)).$$

Démonstration. On applique consécutivement la relation

$${}^C D_{a+}^\alpha y(t) = D_{a+}^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} y^{(k)}(a),$$

et la règle de Leibniz pour la drivée de Riemann-Liouville

$${}^C D_{a+}^\alpha (y_1(t)y_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D_{a+}^{\alpha-k} y_1(t)) y_2^{(k)}(t),$$

Après, la règle de Leibniz pour la drivée de Caputo est obtenue :

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^\alpha (y_1(t)y_2(t)) &= D_{a+}^\alpha (y_1(t)y_2(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} ((y_1(t)y_2(t))^{(k)}(a)), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D_{a+}^{\alpha-k} y_1(t)) y_2^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} ((y_1(t)y_2(t))^{(k)}(a)). \end{aligned}$$

□

2.8 La transformée de Laplace de l'équation différentielles d'ordre fractionnaire

Dans se section, nous calculons la formule de transformé de Laplace de la dérivée fractionnaire .

2.8 La transformée de Laplace de l'équation différentielles d'ordre fractionnaire

2.8.1 La transformé de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Proposition 2.11. [2] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$L\{D_{a+}^{\alpha} f(x), s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_{a+}^{\alpha-k-1} f(x)]_{x=0} \quad (n-1 \leq \alpha < n).$$

Démonstration. Nous allons commencer par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$. On peut écrire la définition sous forme Le produit de convolution de deux fonctions $g(x) = x^{\alpha-1}$ et $f(x)$

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} * f(x),$$

La transformée de Laplace de la fonction $x^{\alpha-1}$ est

$$G(s) = L\{x^{\alpha-1}, s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha},$$

On obtient la transformé de Laplace de l'intégrale fractionnelle de Riemann Liouville

$$L\{D_{a+}^{\alpha} f(x), s\} = s^{\alpha} F(s),$$

On peut écrire la transformée de Laplace de la drivée fractionnaire de Riemann Liouville comme suit

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = g^{(n)}(x)$$

$$g(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} y(t) dt \quad (n-1 \leq p < n),$$

Nous utilisons la transformée de Laplace pour la dérivée d'ordre entier

$$L\{D_{a+}^{\alpha} f(x), s\} = s^{\alpha} G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) .$$

La transformé de Laplace de la fonction $g(x)$ est

$$G(s) = s^{n-\alpha} F(s)$$

En outre, de la définition du la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on a

$$g^{(n-k-1)}(x) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-k-1} I^{n-\alpha} f(x) = D_{a+}^{\alpha-k-1} f(x),$$

Au final, nous obtenons la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$

$$L\{D_{a+}^{\alpha} f(x), s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_{a+}^{\alpha-k-1} f(x)]_{x=0} \quad (n-1 \leq \alpha < n).$$

□

2.8.2 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

Proposition 2.12. [2] *La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est définie par*

$$L\{ {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x), s \} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n).$$

Démonstration. On peut écrire la définition de la dérivée de Caputo comme suit

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} g(x), \quad g(x) = f^{(n)}(x), \quad (n-1 < \alpha \leq n).$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de l'intégration de Riemann-Liouville, nous donnons

$$L\{ {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x), s \} = s^{n-\alpha} G(s)$$

Nous utilisons la transformée de Laplace de la dérivé d'ordre entier comme suit

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0),$$

D'où, la formule de la transformée de Laplace de la dérivé fractionnaire de Caputo est

$$L\{ {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x), s \} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

□

Chapitre 3

Les équations Différentielles Fractionnaires Linéaires et non Linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation différentielle fractionnaire linéaire et non linéaires et l'existence et l'unicité de la solution .

3.1 Rappels : Équation intégrales linéaires

Définition 3.1. voir [3] On appelle équation intégrale une équation qui contient la fonction inconnue sous le signe d'intégration. Telle est, par exemple, l'équation

$$\varphi(s) = \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt + f(s), \quad (3.1)$$

où f et k sont des fonction continues et φ est la fonction inconnue. Les variables s et t parcourent ici un segment donné $[a, b]$.

La particularité caractéristique de l'équation (3.1) réside dans sa linéarité : elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue φ . De nombreux problèmes conduisent à des équation intégrales non linéaires, par exemple, à des équations de la forme

$$\varphi(s) = \int_a^b k(s, t) g(\varphi(t), t) dt,$$

L'équation (3.1) s'appelle équation de Fredholm de deuxième espèce

$$\int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt + f(s) = 0 \quad (3.2)$$

la fonction inconnue φ seulement sous le signe d'intégration s'appelle équation de Fredholm de première espèce.

Equation de Volterra de première espèce

$$\int_a^s k(s, t) \varphi(t) dt = f(s) \quad (3.3)$$

Equation de Volterra de deuxième espèce

$$\varphi(s) = \int_a^s k(s, t) \varphi(t) dt + f(s) \quad (3.4)$$

Il est clair que l'équation de Volterra peut être considérée comme une équation de Fredholm où la fonction k vérifie la condition

$$k(s, t) = 0 \quad t > s.$$

Théorème 3.1 (voir [3]). *Si $f \in L^2([a, b])$ et K est une fonction mesurable et bornée. Alors l'équation (3.4) de Volterra de deuxième espèce admet une solution unique.*

3.2 Equation fractionnaire linéaire d'ordre inférieur 1.

Nous commençons par cet exemple

Exemple 3.1. *Réolvons*

$$\begin{cases} D_{a+}^{\frac{1}{2}} y(x) + ay(x) = 0, & (x > 0), \\ \left[D_{a+}^{-\frac{1}{2}} y(x) \right]_{x=0} = C \end{cases}$$

avec a une constante. Comme la deuxième partie égal 0 alors, la première partie partie admis une transormée de Laplace.

En prenant la transformée Laplace des deux côtés de l'équation, nous obtenons :

$$L\{D_{a+}^{\frac{1}{2}} y(x) + ay(x)\} = 0,$$

Ce qui implique que

$$s^{+\frac{1}{2}} Y(s) - D_{a+}^{\frac{1}{2}-1} Y(0) + aY(s) = 0$$

Alors

$$s^{\frac{1}{2}} Y(s) + aY(s) = C, \quad \left[D_{a+}^{-\frac{1}{2}} y(x) \right]_{x=0} = C,$$

Nous obtenons

$$Y(s) = \frac{C}{s^{\frac{1}{2}+a}}$$

Nous concluons que

$$f(x) = L^{-1} \left\{ \frac{C}{s^{\frac{1}{2}+a}} \right\} = C x^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-ax^{\frac{1}{2}})$$

Théorème 3.2. *Soit $f \in L^1(0, T)$, $\alpha \in (0, 1)$ et b est une constante, alors l'équation*

$$\begin{cases} D_{a+}^{\alpha} y(x) = f(x) \\ \left[D_{a+}^{\alpha-1} y(x) \right]_{x=0} = b, \end{cases} \quad (3.5)$$

admet une solution unique $y \in L^1(0, T)$.

Si deplus $y \in AC[0, T]$ le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c D_{a+}^{\alpha} y(x) = f(x) \\ y(0) = b, \end{cases} \quad (3.6)$$

admet une solution.

3.3 Equation fractionnaire linéaire d'ordre supérieur 1

Démonstration. Nous résolvons le problème en utilise la transformation de Laplace

$$S^\alpha Y(s) - [D_{a+}^{-1+\alpha} y(t)]_{t=0} = F(s), \quad (3.7)$$

où $Y(s)$ et $F(s)$ désignent la transformation de Laplace de $y(t)$ et $f(t)$. on a utiliser la condition initiale

$$Y(s) = s^{-\alpha}(F(s) + b) \quad (3.8)$$

Et comme on a $L^{-1}\{t^{\alpha-1}, t\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$, on utilise la transformation de Laplace inverse

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}. \quad (3.9)$$

pour la deuxième équation il suffit d'apprendre l'intégral I_0^α nous obtenons le résultat. \square

3.3 Equation fractionnaire linéaire d'ordre supérieur 1

Nous commençons par des Exemples

Exemple 3.2. Soit l'équation suivants

$$D_{a+}^\alpha (D_{a+}^\beta y(x)) + D_{a+}^q y(x) = h(x) \quad (3.10)$$

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < q < 1, \quad \alpha + \beta = Q > q \quad (3.11)$$

La transformée de Laplace de l'équation (3.10) donnée par

$$(s^{\alpha+\beta} + s^q) Y(s) = H(s) + s^\alpha b_2 + b_1,$$

$$\begin{cases} b_1 = [D_{a+}^{\alpha-1}(D_{a+}^\beta y(x))]_{x=0} + [D_{a+}^{q-1}y(x)]_{x=0} \\ \text{et} \\ b_2 = [D_{a+}^{\beta-1}(D_{a+}^\beta y(x))] \end{cases}$$

On écrit $Y(s)$ à la forme

$$Y(s) = \frac{s^{-q}H(s)}{s^{\alpha+\beta-q+1}} + b_2 \frac{s^{\alpha-q}H(s)}{s^{\alpha+\beta-q+1}} + b_1 \frac{s^{-q}H(s)}{s^{\alpha+\beta-q+1}}.$$

Après la transformée inverse Laplace, nous trouvons la solution du problème (3.10) comme suit

$$\begin{aligned} y(x) &= b_2 x^{\beta-1} E_{\alpha+\beta-q, \beta}(-x^{\alpha+\beta-q}) + b_1 x^{\alpha+\beta-q} E_{\alpha+\beta-q, \beta}(-x^{\alpha+\beta-q}) \\ &+ \int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta-q, \alpha+\beta}(-(x-t)^{\alpha+\beta-q}) h(t) dt. \end{aligned}$$

Exemple 3.3. Considérons le problème de valeur initiale suivant pour l'équation différentielle fractionnaire non homogène dans des conditions initiales non nulles

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(x) + \lambda y(x) = h(x), & (x > 0) \\ [D_0^{\alpha-k} y(x)]_{x=0} = b_k, & k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Avec $n - 1 < \alpha < n$ et b_k , $k = 1, 2, \dots, n$ des constantes réelles . En prenant la transformée Laplace des deux côtés de l'équation que nous avons

$$L\{D_0^\alpha y(x) + \lambda y(x)\} = L\{h(x)\},$$

Par la linéarité de la transformée nous obtenons

$$s^\alpha Y(s) + \lambda Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^n b_k s^{k-1},$$

et comme

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^\alpha - \lambda} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \lambda},$$

d'où

$$y(x) = \sum_{k=1}^n b_k x^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) h(t) dt.$$

3.3.1 Equation Différentielle Fractionnaire Linéaire de forme général

Considérons le problème (voir [2]) de valeur initiale suivant

$$D_0^{\sigma_n} y(x) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) D_0^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(x) y(x) = f(x), \quad (0 < x < T < \infty) \quad (3.12)$$

$$[D_0^{\sigma_k-1} y(x)]_{x=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.13)$$

où

$$\begin{cases} D_0^{\sigma_k} \equiv D_0^{\alpha_k} D_0^{\alpha_{k-1}}, \dots, D_0^{\alpha_1} \\ D_0^{\sigma_{k-1}} \equiv D_0^{\alpha_{k-1}}, \dots, D_0^{\alpha_1} \\ \sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ 0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Et $f \in L^1(0, T)$, et on suppose que $f(t) \equiv 0$ pour $t > T$.

Comme première étape, considérons le cas de $p_k(x) \equiv 0$, ($k = 1, \dots, n$).

Théorème 3.3. [2] Si $f \in L^1(0, T)$, alors l'équation

$$D_0^{\sigma_n} y(x) = f(x), \quad (3.14)$$

admet une solution unique $y \in L^1(0, T)$, qui vérifie les condition initiales (3.13)

Démonstration. Nous résolvons le problème en utilise la transformation de La place

$$S^{\sigma_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} [D^{\sigma_{n-k}-1} y(t)]_{t=0} = F(s), \quad (3.15)$$

où Y et F désignent la transformation de Laplace de y et f . On utilise la condition initiale nous obtenons

$$Y(s) = s^{-\sigma_n} F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} s^{-\sigma_{n-k}-1} \quad (3.16)$$

3.3 Equation fractionnaire linéaire d'ordre supérieur 1

Par la transformation de Laplace inverse on a

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1} f(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} x^{\sigma_{n-k}-1}. \quad (3.17)$$

on pose $i = n - k$

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1} f(t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} x^{\sigma_i-1} \quad (3.18)$$

Nous utilisons les propriétés de la différentiabilité de Riemann-Liouville de la fonction de puissance et en tenant compte de cela

$$\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

On a

$$D_0^{\sigma_k} \left(\frac{x^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)} \right) = \begin{cases} \frac{x^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)}, & (k < i) \\ 0, & (k \geq i) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$D_0^{\sigma_k - 1} \left(\frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{x^{\sigma_i - \sigma_k}}{\Gamma(1 + \sigma_i - \sigma_k)}, & (k < i) \\ 1, & (k = i) \\ 0, & (k > i) \end{cases} \quad (3.20)$$

Il résulte de (3.18) que y appartient $L^1(0, T)$.

En utilisant (3.19) et (3.20), par substitution directe de la fonction y définie par l'expression (3.18) dans l'équation (3.6) et les conditions initiales (3.13) montre que y les satisfait, et donc, l'existence de la solution est prouvée.

Reste à montrer l'unicité de la solution, pour cela posons $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ où y_1 et y_2 sont deux solutions dans $L^1(0, T)$ du problème (3.6) Et donc z sera solution du problème suivant

$$\begin{cases} D_{a+}^{\sigma_n} z(x) = 0 \\ [D_{a+}^{\sigma_{n-1}} z(x)]_{x=0} = 0 \end{cases}$$

En appliquant la transformé de Laplace dans les deux membres de la première équation de (3.20), on obtient

$$z(s) = L\{z(x), s\} = 0,$$

et donc $z = 0$ pour presque tout $x \in (0, T)$, ce qui prouve que la solution y est l'unique solution dans $L^1(0, T)$ du problème (3.6).

Maintenant, nous pouvons prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.14)-(3.13). □

Théorème 3.4 ([2]). *Si $f \in L^1(0, T)$, et $p_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) sont des fonctions continues dans l'intervalle fermé $[0, T]$, alors le problème du valeur initiale (3.12)-(3.13). admet une solution unique $y \in L^1(0, T)$.*

Preuve. On suppose que le problème (3.12)-(3.13) admet une solution, et on pose :

$$D_0^{\sigma_n} y(x) = \varphi(x). \quad (3.21)$$

En utilisant le théorème (3.3), on a

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha-1} \quad (3.22)$$

Nous substituons (3.22) à l'équation (3.12)

$$D_0^{\sigma_n} y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) D_{a_+}^{\sigma_k} y(x) + p_n(t) y(x) = f(x), \quad (3.23)$$

et en utilisant (3.19), on obtient l'équation intégrale de Volterra du second type pour la fonction $\varphi(x)$

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dx = g(x), \quad (3.24)$$

où

$$k(x,t) = p_n(x) \frac{(x-t)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(x) \frac{(x-t)^{\sigma_n-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_n-\sigma_k)}$$

$$g(x) = f(x) - p_n(x) \sum_{i=1}^n b_i \frac{x^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(x) \sum_{i=k+1}^n b_i \frac{x^{\sigma_i-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_i-\sigma_k)}.$$

Puisque la fonction $p_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) est continue sur $[0, T]$, alors le noyau peut être écrit à la forme d'un noyau faiblement singulière

$$k(x,t) = \frac{k^*(x,t)}{(x-t)^{1-\mu}}, \quad (3.25)$$

où $K^*(x,t)$ est continue pour $0 \leq x \leq T$, $0 \leq t \leq T$, et

$$\mu = \min\{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_n - \sigma_1\} = \min\{\sigma_n, \alpha_n\}.$$

De même, $g(t)$ peut être écrit à la forme

$$g(x) = \frac{g^*(x)}{x^{1-\nu}}, \quad (3.26)$$

où $g^*(x)$ est continue sur $[0, T]$ et

$$\nu = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_n - \sigma_1, \sigma_3 - \sigma_2, \sigma_n - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_{n-1}\}$$

$$= \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

Évidemment $0 < \mu \leq 1$, $0 < \nu \leq 1$. On sait que l'équation (3.24) avec le noyau faiblement singulier (3.25) et le coté droit $g(x) \in L^1(0, T)$ admet une solution unique $\varphi \in L^1(0, T)$.

alors, d'après le théorème (??), la solution unique $y(x) \in L^1(0, T)$ du problème (3.21),(??) qui est en même temps la solution du problème (??)-(??), peut être déterminée à l'aide de la formule (3.22). Ceci termine la preuve du théorème (3.4).



Théorème 3.5. [2] Si f et p_j ($j = 1, \dots, n$) sont des fonction continues dans le système fermé sur l'intervalle $[0, T]$, alors le problème de la valeur initiale(3.12)-(3.13), où $m - 1 \leq \sigma_n < m$, $\sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \dots > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$, admet une unique solution y , qui est continue en $[0, T]$.

3.4 Équation différentielle fractionnaire non linéaire

Dans cette section, nous discuterons l'existence et l'unicité d'une solution du problème à valeur initiale de l'équation différentielle fractionnaire non linéaire ;
Considérons le problème à valeur initiale suivant

$$D_0^{\sigma_n} y(x) = f(x, y), \quad (3.27)$$

$$[D_0^{\sigma_{k-1}} y(x)]_{x=0} = b_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.28)$$

Où, comme dans la section précédente

$$\begin{cases} D_0^{\sigma_k} \equiv D_0^{\alpha_k} D_0^{\alpha_{k-1}} \dots D_0^{\alpha_1} \\ D_0^{\sigma_{k-1}} \equiv D_0^{\alpha_{k-1}} \dots D_0^{\alpha_1} \\ \sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ 0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Nous supposons que f est définie dans un domaine $G \in \mathbb{R}^{\neq}$, et nous définissons la région $R(h, K) \subset G$, l'ensemble des points $(x, y) \in G$, qui vérifient les inégalités suivantes

$$0 < x < h, \quad \left| x^{1-\sigma_1} y(x) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{x^{\sigma_i - \sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K, \quad (3.29)$$

où h et K sont des constantes.

Théorème 3.6. *Soit $f(x, y)$ une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine G , vérifie dans G la condition de Lipschitz par rapport à y*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|,$$

De plus

$$|f(x, y)| \leq M < \infty \quad \text{pour tout } (x, y) \in G$$

Et

$$K \geq \frac{M h^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}$$

Alors il existe dans la région $R(h, K)$ une unique solution continue y du problème (3.27)-(3.28)

Preuve. *La méthode de la preuve de ce théorème est basée sur l'idée de M. A. Al-Bassam. voir [11] et [10].*

Tout d'abord, nous réduisons le problème (3.27) à une équation intégrale fractionnaire équivalente. En utilisant la formule (3.18), nous obtenons

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} x^{\sigma_i - 1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - 1} f(t, y(t)) dt \quad (3.30)$$

On voit que si $y(t)$ vérifie (3.27), alors elle vérifie aussi l'équation (3.30). D'autre part, si $y(t)$ est une solution de (3.30), alors en appliquant à (3.19) l'opérateur dérivée fractionnaire séquentiel $D_{a+}^{\sigma_n}$ et en obtient pour $y(t)$ l'équation différentielle fractionnaire (3.27). L'utilisation de (3.20) montre que si $y(t)$ vérifie donc la condition (3.28) par conséquent l'équation (3.30) est équivalente au problème de la valeur

initiale(3.27)

Définissons maintenant la suite des fonctions $y_0(t), y_1(t), \dots$, par les relations suivantes

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} x^{\sigma_i-1} \quad (3.31)$$

$$y_m(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} x^{\sigma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1} f(t, y_{m-1}(t)) dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.32)$$

Nous allons montrer que la $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x)$ existe et donner la solution souhaitée $y(x)$ de l'équation(3.30).

Premièrement, on peut montrer par induction que pour $0 < x \leq h$, on a $y_m(x) \in R(h, K)$ pour tout m . En effet

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\sigma_1} y_m(x) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{x^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| &= \left| \frac{x^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_1)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1} f(t, y_{m-1}(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{Mx^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \\ &\leq \frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \\ &\leq K, \end{aligned} \quad (3.33)$$

et pour la même raison on a la même inégalité pour $y_1(t)$

$$\left| x^{1-\sigma_1} y_1(x) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{x^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq \frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K, \quad (3.34)$$

De plus, on peut aussi montrer par récurrence que, pour tout m

$$|y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leq \frac{MA^{m-1}x^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)}, \quad (3.35)$$

En effet, en utilisant (3.33), on a pour $m = 1$

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \frac{Mx^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \quad (0 < x \leq h), \quad (3.36)$$

Supposons que

$$|y_{m-1}(x) - y_{m-2}(x)| \leq \frac{MA^{m-2}x^{(m-1)\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \quad (0 < x \leq h), \quad (3.37)$$

Alors, en utilisant (3.32) et (3.37), et on utilise la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction de puissance, on aura

$$\begin{aligned} |y_m(x) - y_{m-1}(x)| &\leq \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n} |y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| dt \\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1} t^{(m-1)\sigma_n} dt \\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} D_0^{-\sigma_n} x^{(m-1)\sigma_n} \\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)x^{(m-1)\sigma_n+\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n+\sigma_n)} \\ &= \frac{MA^{m-1}x^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.4 Équation différentielle fractionnaire non linéaire

Et donc (3.35) a lieu pour tout m
 Considérons maintenant la série

$$y(x)* = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m(x) - y_0(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j(x) - y_{j-1}(x)). \quad (3.39)$$

Selon l'estimation (3.35), pour $0 < t < h$, la valeur absolue de ses termes est inférieure aux termes correspondants de la série numérique convergente.

$$M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{MA^{j-1}h^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+j\sigma_n)} = \frac{M}{A} (E_{\sigma_n,1}(Ah_n^\sigma) - 1), \quad (3.40)$$

où $E_{\lambda,\mu}(z)$ est la fonction de Mittag-Leffler, cela signifie que la série (3.39) converge uniformément. Évidemment, chaque terme $(y_j(x) - y_{j-1}(x))$ de la série (3.39) est une fonction continue de x pour $0 \leq x \leq h$. Par conséquent, la somme de la série (3.39), $y^*(x)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq h$ et

$$y(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x) = y_0(x) + y^*(x)$$

est continue pour $0 < t \leq h$.

La convergence uniforme de la suite $y_m(x)$ nous permet de faire tendre $m \rightarrow \infty$, dans la relation (3.32). Ce qui donne l'équation (3.30), montrant que $y(x)$, la limite de Théorème de l'existence et de l'unicité Comme méthode de solution fonction du processus défini par (3.31) et (3.32) est solution de (3.30). Finalement, prouvons l'unicité de la solution. Supposons donc que $\tilde{y}(x)$ est une autre solution de l'équation (3.30), qui est continue sur l'intervalle $0 < x \leq h$. Alors, il suit de (3.30) que la fonction $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ vérifie l'équation.

$$z(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1} f(t, z(t)) dt, \quad (3.41)$$

De plus, cette fonction est continue pour $0 \leq x \leq h$. Par conséquent, $|z(x)| < B$ pour $0 \leq x \leq h$, où B est une constante. Nous l'obtenons


$$|z(x)| \leq \frac{ABx^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)}, \quad (0 \leq x \leq h). \quad (3.42)$$

En répétant ces estimations j fois, on aura

$$|z(x)| \leq \frac{A^j B x^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Dans le membre de droite, on récupère (à une constante près) le terme général de la série associée à la fonction de Mittag-Leffler $E_{\sigma_n,1}(Ax_n^\sigma)$, et donc pour tout x

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^j x^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)} = 0$$

Prenant la limite de $j \rightarrow \infty$, dans (3.43), on conclut que $z(x) \equiv 0$ et $\tilde{y}(x) \equiv y(x)$ pour $0 < x \leq h$. Ce qui achève la preuve du théorème (3.6). 

Bibliographie

- [1] Haïm.Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod,PARIS-France,1999.
- [2] Igor.Padlubny.*Fractional Differential Equations*.Mathematique in Science and Engineering volume 198.Academic Press , 1999.
- [3] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.*, 2e edition, Editions Mir-Moscou. 1974.
- [4] B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak, *Fixed Point Theory and Applications*, 2004 .
- [5] Brahim Tellab. *Résolution des équations différentielles fractionnaires*. Thèse de Doctorat. Université des Frères Mentouri Constantine 1 (2018).
- [6] A. A. Kilbas,H.M.Srivastava, J. J. Trujillo.*Theory And Applications OF Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,2006.
- [7] A.Benaïssa , *Quelques propriétés et application de l'opérateur fractionnaire de Caputo*, Mémoire de master Université Dr Tahar Moulay-Saida ,2017.
- [8] A.Ouhab, *calcul fractionnaire*. Laboratoire de Mathématiques, Université de Sidi-Bel-Abbès B.P. 89, 22000 Sidi-Bel-Abbès, Algérie.
- [9] François Dubois, Ana Cristina Galucio et Nelly Point *Introduction a la dérivation fractionnaire Théorie et applications Conservatoire National des Arts et Metiers, Mathématiques, Paris, France 29 mars 2010*.
- [10] E. Pitcher arid,Mr.E.Sewell. *Existence theorems for solutions of differential equations of non-integral order. Bull. Amer. Math. Soc.. vol. 44, no. 2, 1938, pp. 100-107; and a correction in : vol. 44, no. 9. 1938, p. 888*.
- [11] M. A. Al-Bassam, *Some existence theorems on differential equations of generalized order, Journal fur Reithe und Angewandte Mathematik, vol. 218, 1965, pp. 70 78*.