وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N^{0} : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Méthode itérative monotone pour des problème parabolique non linéaire

Option : AFA

Par :

Fekrache Meriem

Encadré par : Maouni Messaoud — **Pr.** U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : SLIMANI Kamel — **MCB** U. SKIKDA
Examinateur : LECHEHEB Samira — **MCB** U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciements

Nous remercions Dieu, qui nous a donné la force et la patience afin de parvenir à terminer ce travail.

Nous témoignons toute nos gratitude à tous ceux qui ont contribué à nos formations et nous tenons à remercier tous nos enseignants durant toute vie scolaire.

Nos vifs remerciements vont à:

Mr. Messaoud Maouni pour son encadrement, sa disponibilité, sa confiance et ses précieuses remarques.

Mr. Slimani Kamel bour l'honneur qu'il a bien voulu nous faire en acceptant de présider de jury.

Ms. Lecheheb Samira pour avoir accepté d'examiner ce mémoire , ce qui nous inspire un grand honneur .

Enfin, nous tenons á remercier nos familles pour l'écoute, la présence, le soutien ,les encouragement et l'amour qu'elle nous portent de jour en jour, que ce soit dans les moments d'euphorie et de joie ou dans ceux de doute et remise en question.

Dédicace

A mon soutien dans la vie, à mon refuge confiant, à mon supporteur ..., lors, ils m'appellent par son nom, je me sens que je suis la plus heureuse et chanceuse fille dans le monde ... à mon chère père.

À ma accompagnante Dans la vie, à ma source de confiance, à ma héroïne, à mon institutrice, qu'elle m'a appris la tendresse, la confiance, l'amour et le courage ... à ma chère maman grâce à elle je suis là aujourd'hui devant vous.

À ma petite, à mon ange, à mon soutien dans la vie, à ma moitié, je souhaite qu'elle réalisera un jour ses rêves, qu'elle sera mieux que moi de... à ma plus belle fille Loudjaine.

À mes accompagnants dans cette vie, à ceux que je vois dans leur yeux la joie et l'optimisme, grâce à eux je suis là et je continue à exister. A mes supporteurs, mes frères :

Hamza, Mohamed, Azou, Ikrame Chahinaze.

a ceux avec lesquelles j'ai partagé

les bons moments de ma vie.

À mes amies.

À celui qui m'a appris, m'a clarifié

mon chemin de savoir.

Avec toute mes gratitudes,

je tien à vous remercier :

Mon docteur Maouni Messaoud

Avec toute mes gratitudes: Meriem Fekrach.

Notations

$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	: Espace euclidien de dimension N.
$\mathbb{N}$	: Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: Ensemble des entiers naturels non nulle.
Ω	: Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\overline{\Omega}$	: L'adhérence de Ω.
$\partial\Omega$	: Le bord de Ω.
$\rightarrow$	: La Convergence forte.
$\rightharpoonup$	: La Convergence faible.
p'	: Exposant conjugué de p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
$p.p$	: Presque partout.
$t.q$	: Telle que.
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	: Gradient de u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i} = \operatorname{div}(\nabla u)$:	Le Laplacien de u.
$\operatorname{div}(u)$	: Divergence de u.
$D(\Omega)$	: Espace des fonctions différentiables a support compact dans Ω.
$D'(\Omega)$	: Le dual de $D(\Omega)$.
$C^k(\Omega)$	: Espace des fonctions k-fois continument différentiables dans Ω.
$L^p(\Omega)$	: Espace des fonctions de puissance p-éme intégrable sur Ω pour la mesure.
$\\|.\\|$	: La norme.
B_R	: La boule de $\mathbb{R}^N$ de rayan R Centré à l'origine.

Résumé

Dans ce mémoire on va étudie quelques problème elliptique et parabolique linéaire et non linéaire avec la méthode de monotonie.

Mots-clés : Lax-Milgrame, L'opérateur de Leray-Lions, problème élliptique, problème paraboliques, Faedo Galerkin, Monotonie.

ملخـــــص

في هذه المذكرة درسنا نوعين من المسائل الرياضية، مسائل ناقصية و زائدية خطية و غير خطية.
و نقوم بحلها بإستعمال طريقة الرتابة لإثبات وجود و وحدانية الحل.

الكلمات المفتاحية: لاكس ميلقرام، مؤثر لاري ليونس، مسائل ناقصة، مسائل زائدية، فيدو غالاركين.

Abstract

In this memory we will study some elliptic and parabolic linear and non linear problems with the monotony method.

Keywords : Lax-Milgrame, Leray Lions operator, elliptic problem, parabolic problem, Faedo Galerkin.

Table des matières

Introduction

D'un point de vue mathématique, les équations aux dérivés partielle permettent d'aborder les domaines observés à titre d'exemple dans le domaine physique et chimique.

En fait, pour résoudre les équations aux dérivées partielles non linéaire, il existe quatre méthodes :

— Méthode de compacité [9].

— Méthode des opérateurs monotone [9].

— Méthode de semi groupes [9].

— Méthode de degré topologique [9].

Notre but est de savoir utiliser la méthode "monotonie" pour prouver l'existence et l'unicité des solutions du problemes non linéaires. Dans celle-ci nous ramenons un problème d'un cas plus simple.

Ce manuscrit se compose principalement de trois chapitres :

Le premier chapitre : est consacré à des rappelles de quelques notions d'analyse fonctionnelle.

Ces rappelles concernent les notions des convergences faible et faible* ainsi que les définitions et propriétés des certains espaces fonctionnels qui nous seront d'une grande utilité, comme les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev.

Et on rappelle la définition et les propriétés des opérateurs monotones.

Le deuxième chapitre :

Est constitué de deux parties pour étudier l'existence et l'unicité des problèmes linaires :

1ère partie : Étudie le problème elliptique linéaire par la méthode de Lax-Milgram en considérant le problème modèle suiant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f est une fonction donnée ($f \in C(\bar{\Omega})$).

2éme partie : Étudie le problème parabolique linéaire abstrait en utilisant l'approximation de Faedo-Galerkin et les propriétés des espaces intervenants.

Ce résultat abstrait est ensuite illustré par un exemple concret :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(.,0) = u_0. \end{cases}$$

Où f une fonction de $\Omega \times]0, T[$ dans $\mathbb{R}$ et u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, et Ω ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$.

Le dernier chapitre :

Est consacré à démontrer l'existence et l'unicité du problème non linéaire, est basés sur la méthode monotone.

Problème elliptique : En utilise l'opérateur de Leray-Lions pour résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -div(\theta(x) a(\nabla u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une applications continue et $\theta \in L^\infty(\Omega)$.

Problème parabolique : En utilisant la méthode de Faedo Galerkin et la monotone pour Résoudre cette exemple :

$$\begin{cases} \partial_t u - div(A(u)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(.,0) = u_0. \end{cases}$$

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega\times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et A matrice symétrique.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons certains notions et concepts, essentiels au développement des autres chapitres. Nous rappellerons certaines définitions ainsi que certains théorèmes d'analyse fonctionnelle qui sera utilise que la suite de notre travail.

1.1 Quelques outils de base

1.1.1 Formes linéaires et Formes bilinéaires

Définition 1.1 *(**Forme linéaire**)[3] On appelle forme linéaire $\varphi(.)$ est une application linéaire sur un espace vectoriel réel H dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout α,$\beta \in \mathbb{R}$ et tout x_1,$x_2 \in H$:*

$$\left\{ -\varphi\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) = \alpha\varphi\left(x_1\right) + \beta\varphi\left(x_2\right) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \right.$$

Définition 1.2 *(**Forme bilinéaire**) [3] Une forme bilinéaire $\varphi(.,.)$ sur un espace vectoriel réel H est une application de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$:*

$$\begin{cases} 1 - \varphi\left(\alpha x_1 + \beta x_2, y\right) = \alpha\varphi\left(x_1, y\right) + \beta\varphi\left(x_2, y\right), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ 2 - \varphi\left(x, \alpha y_1 + \beta y_2\right) = \alpha\varphi\left(x, y_1\right) + \beta\varphi\left(x, y_2\right), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

linéairité par rapport à chaque variable.

Remarque 1.1 *(**symétrique**) [3] Elle est dite symétrique, si pour tout* $x, y \in H$ *:*

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Définition 1.3 *(**Produit Scalaire**)[9] Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel* H *est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, on la notera* $\langle ., . \rangle_H$.

Définition 1.4 *(**Norme**)[3] Une norme sur* H *est une application* $p : H \to \mathbb{R}^+$ *telle que :*

$$\begin{aligned}
&1)\ p(x) \geqslant 0, \forall x \in H \quad et \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\
&2)\ p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x), \qquad\qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in H, \\
&3)\ p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad\qquad \forall x, y \in H,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité est l'inégalité triangulaire.

Remarque 1.2 *[3] On associe à* $\langle ., . \rangle_H$ *la norme définie sur* H *par :*

$$\|.\|_H = \sqrt{\langle ., . \rangle_H}.$$

Définition 1.5 *(**Espace complet**)[1] Soit* E *un espace vectoriel muni d'une norme* $\|.\|_E$. *On dit que* $(x_n)_n$ *de* E *est une suite de cauchy ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N, \|x_n - x_m\|_E \leq \varepsilon,$$

cela s'écrit en termes de limite comme :

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\|_E = 0.$$

Définition 1.6 *[1] Un espace normé* $(E, \|.\|_E)$ *est complet si toute suite de Cauchy de* E *est convergente dans* E.

Définition 1.7 *(**Espace de Banach**)[1]*

L'espace de Banach est un espace vectoriel normé complet c'est á dire qui est telle que tout suite de Cauchy dans E *converge dans* E.

Définition 1.8 *(**Espace de dual**)[3] L'espace dual d'un espace vectoriel* E *est l'espace des formes linéaires sur E.*

Définition 1.9 *(**Espace Préhilbertien**)[3] Un espace vectoriel réel ou complexe H est un espace préhilbertien s' il est muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle_H$.*

Définition 1.10 *(**Espace de Hilbert**)[3] Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.11 *[3] Un espace vectoriel préhilbertien $(H, \langle .,. \rangle)$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$$

1.1.2 Espace de Lebesgue L^p

Pour tout la suite, Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^n$, $p \in]1, +\infty[$ et p' son conjugué : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Définition 1.12 *[3] L'espace $D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de class $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω C-à-d :*

$$D(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \in C^\infty(\Omega) \text{ et supp } u \subset k \subset \Omega,\ k \text{ compact } \}.$$

Définition 1.13 *[3]*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega |f(\Omega)|^p dx < +\infty\}.$$

Il est muni de la norme :

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.3 *[3]*

1. *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*
2. *En particulier pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Remarque 1.4 *[3] Si $u \in L^p(\Omega)$ alors $|u|^{p-2}u \in L^p(\Omega)$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ car :*

$$\int_\Omega \left||u|^{p-2}u\right|^{p'} dx = \int_\Omega |u|^{(p-1)p'} dx = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Définition 1.14 *[3] Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|_X$ et $I \subset \mathbb{R}$, on note :*

$$L^p(I,X) = \{u : t \in I \mapsto u(t) \in X \ et \ \int_\Omega \|u(t,.)\|_x^p dt < \infty\}.$$

Définition 1.15 *[3] L'application : $u \mapsto \left(\int_I \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(I,X)$. De plus, cet espace est un espace de Banach.*

1.1.3 Les espace de Sobolev $W^{m.p}(\Omega)$

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les puissances et les dérivées sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach

Définition 1.16 *[3] (**Espaces** $H^1(\Omega)$) on note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D_i u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Définition 1.17 *[3] (**Espaces** $H_0^1(\Omega)$) On définit l'espaces $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ ainsi pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $\varphi_n \in D(\Omega)$ tell que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - v\|_{H^1(\Omega)} \to 0,$$

les fonction de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on peut écrire :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma\right\},$$

où Γ la frontiere de H^1.

Définition 1.18 *[3] $\left(\textbf{\textit{Espaces}}\ H^2(\Omega)\right)$ On note $H^2(\Omega)$ l'espace défini par :*

$$H^2(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i\ ,\ j \leq 3\right\}.$$

Proposition 1.1 *[3] soit Ω est un domaine ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Ensuite, la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $L^p(\Omega)$ s'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ tel que*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \text{ pour tous } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.1}$$

où $1 \leq p \leq \infty$, et il est bien connu que f est unique.

Notations 1.1 *[3] Pour $(\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n)$ on pose :*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \text{ et } D^\alpha = \partial^{|\alpha|} |\partial x_1^{\alpha_1}, \cdots, \partial^{\alpha_n} x_n .$$

Définition 1.19 *[3] On note par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Proposition 1.2 *[3]*

1. *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*
2. *En particulier pour $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ note $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert,c-à-d :*

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

Pour le produit scalaire :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} .$$

Définition 1.20 *[3] Soit $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$ d'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. D'après la définition de $W_0^{m,p}(\Omega)$, l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$.*
En d'autres termes :

$$\forall u \in W_0^{m,p}(\Omega); \exists (\varphi_k) \subset D(\Omega) : \|\varphi_k - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \longrightarrow 0, qaund\ k \quad \longrightarrow +\infty$$

Proposition 1.3 *[9]*

1. $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
2. $W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable, pour* $1 \leq p < +\infty$.
3. $W^{m,p}(\Omega)$ *et réflexif, pour* $1 < p < +\infty$.

Proposition 1.4 *[9] Si* Ω *est régulier, on a :*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \{u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ et } \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Définition 1.21 *[9] Le dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est note* $W^{-1,p'}(\Omega)$ *ou* p' *est le conjugué de* p.

Proposition 1.5 *[9] Soit* $\Gamma : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme linéaire. Alors :*

$$\Gamma \in W^{-1,p'}(\Omega) \Leftrightarrow \exists c > 0, (\Gamma(\varphi)) \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Les injection de Sobolev

Théorème 1.1 *[9] Soit* $1 \leq p < N$, *alors :*
$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *où* p^* *est donné par* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, *il existe une constante* $C = C(p, N)$ *t.q :*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

On note alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Corollaire 1.1 *[9] Le cas limite* $p = N$

On a $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [N, +\infty[$ *avec injection continue.*

Théorème 1.2 *[9] Soit* $p > N$, *alors :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ avec injection continue.}$$

Définition 1.22 *(**Espace réflexif**)[3] Soit* E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* E''.
On dit que E *est réflexif si* $J(E) = E''$.

Proposition 1.6 *[3] $1 < p < +\infty$ $W^{1,p}$ est un espace réflexif.*

Lemme 1.1 *[3] Soit V un espace de Banach réflexif, alors de toute suite bornée $(u_n)_n$ de V, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge c'est à dire*

$$\langle T, x_{n_k} \rangle \to \langle T, x \rangle, \forall T \in V'.$$

Définition 1.23 *(**Espace séparable**)[3] On dit que l'espace de Banach E est séparable si et seulement si E possède une partie dénombrable dense.*

1.2 Type de convergence

Définition 1.24 *(**La convergence faible**)[1] On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de E convergence faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$ si :*

$$\text{pour tout } f \in E^{'}, \langle f, x_n \rangle_{E',E} \to \langle f, x \rangle_{E',E}, \text{ quand } n \mapsto +\infty.$$

Remarque 1.5 *[1]*

— *Il ya unicité de la limite faible quand elle existe, car si $\langle f, x - y \rangle_{E',E} = 0$ pour tout $f \in E'$, par passage au sup en f pour $\|f\|_E \leq 1$, il vient que*

$$\|x - y\| = 0, \text{ soit } x = y.$$

— *Par opposition la convergence au sens de la norme, $x_n \mapsto x$ quand $\|x_n - x\| \to 0$, est appellé " la convergence forte " on s'écrit assez souvent $x_n \mapsto x$ faiblement dans E on $x_n \to x$ fortement dans E.*

Définition 1.25 *(**La convergence faible***)[1] On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de E' convergence faible* ou faiblement* vers f dans E', et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si :*

$$\text{pour tout } x \in E, \langle f_n, x \rangle_{E',E} \to \langle f, x \rangle_{E',E} \text{ quand } n \mapsto +\infty.$$

Remarque 1.6 *[1] Si $p = \infty$ et $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble mesurable la convergence faible * dans $L^\infty(A), f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ s'écrit :*

$$\int_A f_n \; g \; dx \to \int_A f \; g \; dx, \text{ pour tout } g \in L^1(A).$$

1.3 Quelques résultats sur l'intégration et la dualité

Théorème 1.3 *:(**Théorème convergence dominée de Lebesgue**)[9] Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. Ou suppose que :*

- $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
- *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ t.q pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.*

  Alors :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\| \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.4 *(**Inverse du théorème de convergence dominée**)[1]*
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^P(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telle que :

$$\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$
$$n \longrightarrow +\infty.$$

Alors il existe une sous-suite extraite de $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $h \in L^p(\Omega)$ telle que :

- $f_{n_k}(x) \longmapsto f(x)$ *p.p sur* Ω.
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *p.p sur* $\Omega, \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.5 *(**Convergence monotone de Beppo-levi**)[9] Soit (f_n) une suite croissante de fonction de $L^1(\Omega)$ telle que $\sup \int f_n < \infty$.*
Alors $f_n(x)$ converge p.p sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$, de plus $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Théorème 1.6 *(**Théorème de densité**)[9] L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$ c-à-d :*

$$\forall f \in L^1(\Omega) \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\Omega) \;\; t.q \;\; : \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Théorème 1.7 ***(Théorém de Riez)****[9] Si $(H, \langle .|. \rangle)$ est un espace de Hilbert. La convergence faible $x_n \rightharpoonup x$ dans H s'exprime avec le produit scalaire sous la forme :*

$$\textit{pour tout } y \in H, \langle x_1/y \rangle \rightharpoonup \langle x/y \rangle.$$

Théorème 1.8 ***(De représentation de Riez)****[9] Soit $1 < p < \infty$ et $\phi \in (L^p(\Omega))'$ alors il existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ unique t.q :*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Théorème 1.9 ***(De Lax-Milgrame)****[9] Soit L une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H et a une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction $u \in H$ telle que :*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \textit{ pour tout } v \in H,$$

c.a.d

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \textit{ et } J(u) < J(v) \textit{ si } u \neq v.$$

Théorème 1.10 ***(Formule de Green)****[9] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe C^1 dont la frontière est bornée, alors pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \Delta u \ v dx = -\int_\Omega \nabla u \ \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \ v \ d\sigma,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u. \quad n = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i$ est la dérivée normale et $n = {}^t(n_1, \dots, n_N)$ est la normale unitaire.

Théorème 1.11 ***(Théorème de Fubini)*** *[9] On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Lemme 1.2 ***(Lemme de Gronwall)[9]*** *Soient* $f \in L^\infty(0,T)$, $g \in L^1(0,T)$ *sont des fonctions non négatives, si :*

$$f(t) \leq C + \int_0^T f(s)g(s)ds.$$

Alors :

$$f(t) \leq C\,exp(\int_0^T g(s)ds).$$

Théorème 1.12 ***(Théorème d' Ascoli)****[9]* *On se donne un compact* K *de* $\mathbb{R}^n$*, et ou se place dans l'espace de Banach* $C^0(K)$ *des fonctions continues sur* K *à valeurs scalaires, espace muni de sa norme uniforme : pour* $f \in C^0(K)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{\vec{x}\in K} |f(\vec{x})|.$$

On cosidère un sous-ensemble $F \subset C^0(K)$ *qui est borné,c-à-d, telle que :*

$$\exists c > 0, \quad f \subset \left\{F \in C^0(K) : \|f\|_\infty < c\right\}.$$

Définition 1.26 *(**Fonction Carathéodory**)[9]* *On dit que* $a : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *est fonction de caradéodory si :*

— $a(.,s)$ *est borélienne pour tout* $s \in \mathbb{R}$.

— $a(x,.)$ *est continue pour presque tout* $x \in \Omega$.

Définition 1.27 ***(Dérivée faible)*** *[1] Soit $1 \leq i \leq n$ on dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens faible s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que :*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \ \int_\Omega f(x) \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \ dx = -\int_\Omega D_i f(x) \ \varphi(x) \ dx.$$

Lemme 1.3 *[1] Soit E un espace de Banach et F un espace de Hilbert telle que $E \subset F$, avec injections continue, et E dense dans F. On identifié F avec F' (de sort que $E \subset F = F' \subset E'$). Soit $u \in L^2_E(]0,T[)$ on suppose que $u_t \in L^2_E(]0,T[)$.*
Alors $u \in C(]0,T[, F)$ et pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ on a :
$\| u(t_1) \|^2_F - \| u(t_2) \|^2_F = 2 \int_{t_1}^{t_2} < u_t, u >_{E',E} dt.$

Lemme 1.4 ***(Lemme de Fatou)*** *[9] Soit (f_n) une suite des fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int_\Omega \left(\lim_{n \mapsto +\infty} f_n \right) \ dx \leq \lim_{n \mapsto +\infty} \int_\Omega f_n \ dx.$$

1.4 Quelques inégalités utiles

Théorème 1.13 ***(Inégalité de Hölder)*** *[9] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \ \text{et} \ \|f \ g\|_1 \leq \|f\|_p \ \|g\|_{p'}.$$

Remarque 1.7 *[9] Si $p = p' = 2$. On obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\int_\Omega |f \ g| \ dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.14 ***(Inégalité de Minkowski)*** *[9] Soient $f, g \in L^p(\Omega)$, avec $p \geq 1$ alors*

$$f + g \in L^p(\Omega) \ \text{et} \ \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_{p'}.$$

Théorème 1.15 ***(Inégalité de Poincaré)*** *[9] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in H^1_0(\Omega)$, alors il existe une constante C_Ω telle que :*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.16 ***(Inégalité de Young)*** *[9] $\forall p, q \geq 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ \forall a, b \geq 0$:*

$$ab \ \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p}\ b^q.$$

Les Opérateurs Monotones

V désigne un espace de Banach réel, V' son dual topologique de V.

Définition 1.28 *[9] Un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est dit :*

- *Monotone si $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \ \ \forall u, v \in V$.*
- *Strictement monotone si :*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0, \qquad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

1.4.1 Opérateur de Leray-Lions

[9] On considère ici un cas un peu simplifié des opérateurs de Leray-Lions. On considère les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
&1)\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N, N \geq 1, 1 < p < +\infty.\\
&2)\ a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \text{ continue.}\\
&3)\ \text{(Coercivité) } \exists\ \alpha > 0 \text{ t.q } \ a(\xi)\ \xi \geq \ \alpha\ |\xi|^p,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\\
&4)\ \text{(Croissance) } \exists\ C \in \mathbb{R};\ |a(\xi)| \leq C\ (1 + |\xi|^{p-1}),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\\
&5)\ \text{(Monotonie) } (a(\xi) - a(\eta))\ (\xi - \eta)\ \geq 0\ ,\ \forall\ (\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^N)^2,\\
&6)\ \sigma \in L^\infty(\Omega);\ \exists\ \sigma_0 > 0;\ \sigma \geq \sigma_0 \quad \text{p.p.}\\
&7)\ f \in L^{\frac{p}{p-1}}\ (\Omega).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Lemme 1.5 ***(opérateur coercif en dimension finie)*** *[9] Soit V un espace de dimension finie, et $A : V \longrightarrow V'$ contine (noter que (dim V' = dim $V < +\infty$.)). On suppose que A est* *coercif, c'est-à-dire :*

$$\frac{\langle A(v), v\rangle_{V',V}}{\|v\|_V} \longrightarrow +\infty \ \textit{quand} \ \|v\|_E \longrightarrow +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in V'$ *il existe* $v \in V$ *t.q* $A(v) = b$.

Chapitre 2

Étude des problèmes linéaires

2.1 Problème élliptique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega = \bar{\Omega}/\Omega$, on considère le problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_1}$$

oú f est une fonction donnée ($f \in C(\bar{\Omega})$).

Une solution classique-solution forte-du problème (P_1) est une fonction de classe $C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (P_1).

2.1.1 Formulation variationnelle de problème (P_1) :

Soit u une solution classique $\left(u \in C^2(\bar{\Omega})\right)$ et soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, multipliant par φ et intégrant sur Ω, on trouve :

$$-\int_\Omega \Delta u \ \varphi \ dx + \int_\Omega u \ \varphi \ dx = \int_\Omega f \ \varphi \ dx, \ \forall \ \varphi \in C^1(\bar{\Omega}),$$

d'après la formule de Green, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla \varphi \ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \ \varphi \ d\Gamma + \int_\Omega u \ \varphi \ dx = \int_\Omega f \ \varphi \ dx, \ \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

mais sur le bord $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, donc

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \text{x} + \int_\Omega u\ \varphi\ dx = \int_\Omega f\ \varphi\ dx, \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$$

comme $u \in C^2(\bar{\Omega})$, on a $\nabla u \in C^1(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, de plus $u \in C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, donc $u \in H^1(\Omega)$.

comme $C^1(\bar{\Omega})$ dense $H^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ dx + \int_\Omega u\ v\ dx = \int_\Omega fv\ dx, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Alors la formulation variationnelle du problème (P_1) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \qquad\qquad tq \\ \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx + \int_\Omega uv\ dx = \int_\Omega fv\ dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

Elle est de la forme $a(u, v) = L(v)$ telle que :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx + \int_\Omega uv\ dx.$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fv\ dx.$$

2.1.2 Interprétation du problème

Soit $u \in H^1(\Omega)$, solution de (2.1).
Comme $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\ dx + \int_\Omega u\varphi\ dx = \int_\Omega f\varphi\ dx,\ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

par suite

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi\ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\ \varphi\ d\Gamma + \int_\Omega u\varphi\ dx = \int_\Omega f\varphi\ dx,\ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Mais comme φ est à support compact, intégrale sur le bord est nulle, donc

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi \; dx = 0.$$

Alors

$$-\Delta u + u - f = 0 \quad p.p.$$

Donc

$$-\Delta u + u = f \quad p.p.$$

2.1.3 Cherchons les condition aux limites

Intégrant par partier, on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u v \; dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\Gamma.$$

Alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = -\int_\Omega \Delta u v \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\Gamma. \tag{1}$$

Comme $a(u,v) = L(v)$, alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega f v \; dx - \int_\Omega u v \; dx. \tag{2}$$

D'après (1) et (2), on obtient :

$$-\int_\Omega \Delta u v \; dx + \int_\Omega u v \; dx - \int_\Omega f v \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\Gamma = 0.$$

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f) v \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\Gamma = 0.$$

Mais

$$-\Delta u + u - f = 0.$$

Alors

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f) v \; dx = 0.$$

Donc

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\Gamma = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

2.1.4 L'existence et l'unicité du problème (2.1)

Pour montrer que ce problème admet une solution unique, on applique le théorème de Lax-Milgram.

On va montrer que $a(.,.)$ **est continue :**

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dx + \int_\Omega uv \; dx \right|, \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \; dx + \int_\Omega |u||v| \; dx, \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \; \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \; \|v\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \; \|v\|_{H^1(\Omega)} + \; \|u\|_{H^1(\Omega)} \; \|v\|_{H^1(\Omega)}, \\
&\leq 2 \; \|u\|_{H^1(\Omega)} \; \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

alors $a(.,.)$ est continue.

On va montrer que $a(.,.)$ **est coercive :**

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega (\nabla v)^2 dx + \int_\Omega v^2 dx \\
&= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc $\exists \; \alpha = 1$ tq $a(v,v) \geq \; \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$, alors $a(.,.)$ est coercive.

On va montrer que $L(.)$ **est continue :**

$$\begin{aligned}|L(v)| = \left|\int_\Omega fv\ dx\right| &\leq \int_\Omega |f||v|\ dx.\\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.\\ &\leq k\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \left(k = \|f\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Alors $L(v)$ est continue.

Donc d'après le théorème de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique.

La solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du de problème variationnelle (2.1) est appelé solution faible de problème (P_1).

2.1.5 Régularité

Comme $u \in H^1(\Omega)$, alors $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$ et on a donc $f \in L^2(\Omega)$ (car $C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ alors $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$ (car $u \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$), donc $u \in H^2(\Omega)$.

Comme $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^1(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega) \subset C(\Omega)$ et Δu est continue (car $u \in C(\bar{\Omega})$ et $f \in C(\bar{\Omega})$), donc $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Ainsi

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.2 Problème parabolique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ $et f$ une fonction de $\Omega\times]0,T[$ dans $\mathbb{R}$ et u_0 une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

On cherche u tel que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ u(.,0) = u_0 & p.p \text{ sur } \Omega. \end{cases} \tag{P_2}$$

On va donner pour ce problème linéaire un résultat d'existence et d'unicité de solution faible.

2.2.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (3.2) par un élément $v \in V = L^2\left(]0,T[, H_0^1(\Omega)\right)$, en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)), \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t(s), v(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^T \left(\int_\Omega \nabla u(s)\ \nabla v(s)\ dx\right)\ ds = \int_0^T \langle f(s), v(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ ds \\ \forall v \in L^2\left(]0,T[, H_0^1(\Omega)\right), \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.} \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2.2 Équivalence entre deux formulations faibles

Maintenant on va donné une autre formulation faible pour le problème (2.2)

$$\begin{cases} u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)) \\ \displaystyle -\int_0^T\int_\Omega u\varphi_t\ dx\ dt - \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\ dx + \int_0^T\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\ dx\ dt \\ \displaystyle = \int_0^T \langle f(s), \varphi(.,s)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ ds \ \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty([0,T[,\Omega). \end{cases} \tag{2.3}$$

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors u est solution de* (2.2) *si est seulement si u vérifie* (2.3).

Démonstration

On montre que u solution du probléme (2.2) implique que u est solution du probléme (2.3) . On suppose donc que u est solution (2.2). Soit $\varphi \in C_c^\infty\left([0,T[,\Omega\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{|t_i,t_i+1|}(t)\varphi\left(x,t_i\right), \tag{2.4}$$

où $t_i = (i/n)T$. Comme φ est une fonction régulière, il est claire que $\varphi_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^2(]0,T[H_0^1(\Omega))$ quand $n \to +\infty$. Comme $\varphi_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que u est solution de (2.2), on a

$$\int_0^T \langle u_t, \varphi_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_n dxdt = \int_0^T \langle f, \varphi_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

On pose $T_n = \displaystyle\int_0^T \langle u_t, \varphi_n \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt$. Comme $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ quand $n \to +\infty$, l'égalité précédente donne

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^T \langle u_t, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxdt + \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt. \tag{2.5}$$

On va maintenant calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ on utilisant (2.4). On a

$$\begin{aligned} T_n = \int_0^T \left\langle u_t(t), \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(t)\varphi\left(.,t_i\right) \right\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle u_t(t), \varphi\left(.,t_i\right) \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_t(t)dt, \varphi\left(.,t_i\right) \right\rangle_{H^{-1},H_0^1.} \end{aligned}$$

Comme $u, u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ (on rappelle que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ par l'identification de $L^2(\Omega)$ avec son dual), on a (d'après le lemme 1.2) $u \in C([0,T]), H^{-1}(\Omega))$ et

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_t(t)dt = u(t_{i+1}) - u(t_i) \in H^{-1}(\Omega).$$

On a donc

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \langle u\left(t_{i+1}\right) - u\left(t_i\right), \varphi\left(.,t_i\right) \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_\Omega \left(u\left(x,t_{i+1}\right) - u\left(x_1,t_i\right)\right) \varphi\left(x,t_i\right) dx.$$

La dernière égalité venant de la manière avec laquelle un élément de $H_0^1(\Omega)$ est considéré comme un élément, de $H^{-1}(\Omega)$. Une intégration par partie discrèt donne alors (en remarquant que $\varphi\left(.,t_n\right)=0$)

$$T_n = -\int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\varphi\left(x_i t_{i-1}\right)-\varphi\left(x,t_i\right)\right) u\left(x,t_i\right) dx.$$

Puis, comme φ est une fonction régulière,

$$\begin{aligned} T_n &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\ dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_t(x,t)\ dt\right) u\left(x,t_i\right)\ dx \\ &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\ dx - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t) \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i[} u\left(x,t_i\right)\right)\ dx\ dt \\ &= -\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\ dx - \int_0^T \int_\Omega \varphi_t(x,t)\left(u(x,t)+R_n(x,t)\right)\ dx\ dt, \end{aligned}$$

avec $R_n(x,t)=\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i[}\ u\left(x,t_i\right)-u(x,t)$. Pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$\|R_n(.,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \max\left\{\|u\left(s_1\right)-u\left(s_2\right)\|_{L^2(\Omega)}, s_1,s_2\in[0,T], |s_1-s_2|\leq \frac{T}{n}\right\}.$$

Comme $u\in C\left([0,T],L^2(\Omega)\right)$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\|R_n(.,t)\|_{L^2(\Omega)}=0$ uniformément par rapport à $t\in[0,T]$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)\ R_n(x,t)\ dx\ dt = 0.$$

En résumé, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\int_\Omega u_0(x)\ \varphi(x,0)\ dx - \int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)\ u(x,t)\ dx\ dt.$$

Avec (2.5) on a donc, pour tout $\varphi\in C_c^\infty([0,T[\times\Omega,\mathbb{R})$,

$$-\int_0^T\int_\Omega \varphi_t(x,t)\ u(x,t)\ dx\ dt - \int_\Omega u_0(x)\ \varphi(x,0)\ dx + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\ dx\ dt = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ dt.$$

Ceci montre que u est bien solution de (2.3).

On montre maintenant que u solution du probléme (2.3) implique que u est solution du probléme (2.2). On suppose donc que u est solution de (2.3). On veut montrer que u est solution de (2.2). On va raisonner en deux étapes. On va d'abord montrer que $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$ (remarquer que $\Delta u, f \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ puis que $u(0) = u_0$.

Étape 1 :

On montre ici que $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$. On utilise la définition de u_t. On a $u_t \in \mathcal{D}^*_E$, avec $E = H^1_0(\Omega)$, et pour tout $\phi \in C^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$

$$\langle u_t, \phi\rangle_{D^*_E,D} = -\int_0^T u(t)\ \phi'(t)\ dt \in H^1_0(\Omega).$$

Pour montrer que $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$, il s'agit donc de montrer que, pour tout $\phi \in C^\infty_c(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$-\int_0^T u(t)\ \phi'(t)\ dt = \int_0^T (\Delta u(t) + f(t))\ \phi(t)\ dt.$$

Noter que le membre de gauche de cette égalité est dans $H^1_0(\Omega)$ et donc dans $H^{-1}(\Omega)$ et que le membre de droite est dons $H^{-1}(\Omega)$ ces deux termes, il suffit de montrer que

$$\left\langle -\int_0^T u(t)\ \phi'\ dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H^1_0} = \left\langle \int_0^T (\Delta u(t) + f(t))\ \phi(t)\ dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H^1_0} \quad \text{pour tout } \psi \in H^1_0(\Omega),$$

c'est-à-dire que

$$-\int_0^T \langle u(t)\phi'(t), \psi\rangle_{H^{-1},H^1_0}\ dt = \int_0^T \langle(\Delta u(t) + f(t))\ \phi(t), \psi\rangle_{H^{-1},H^1_0}\ dt, \text{ pour tout } \psi \in H^1_0.$$

Par densité de $C^\infty_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $H^1_0(\Omega)$, il suffit de considérer $\psi \in C^\infty_c(\Omega,\mathbb{R})$. En utilisant la manière donc $H^1_0(\Omega)$ est inclus dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$-\int_0^T \langle u(t)\phi'(t), \psi\rangle_{H^{-1},H^1_0} dt = -\int_0^T \int_\Omega u(x,t)\phi'(t)\psi(x) dx dt.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle(\Delta u(t) + f(t))\ \phi(t), \psi\rangle_{H^{-1},H^1_0}\ dt &= \int_0^T \phi(t)\langle\Delta u(t) + f(t), \psi\rangle_{H^{-1},H^1_0}\ dt \\ &= -\int_0^T \phi(t) \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla\psi(x) \d{x}\ dt + \int_0^T \phi(t)\langle f, \psi\rangle_{H^{-1},H^1_0}\ dt.\end{aligned}$$

En résumé, pour terminer l'étape 1, il suffit donc de montrer que

$$-\int_0^T \int_\Omega u(x,t)\ \phi'(t)\ \psi(x)\ dx\ dt = \int_0^T \phi(t) \left(-\int_\Omega \nabla u(x,t), \nabla\psi(x)\ dx\ dt + \langle f, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \right)\ dt \tag{2.6}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,T[,\Omega)$ et tout $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Comme cela a été déjà dit, ce ci donnera $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$.
Pour montrer (2.6), on utilise (2.3). Soit $\phi \in C_c^\infty(]0,T[,\Omega)$ et $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.
On choisit dans (2.3), $\varphi(x,t) = \phi(t)\psi(x)$ (ce qui est possible car on a bien $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\Omega)$).
On obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega u(x,t) phi'(t)\ \psi(x) \underset{\cdot}{\mathrm{x}}\ dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(x,t) \nabla\psi(x))\ \phi(t)\ dx\ dt = \int_0^T \langle f(t), \phi(t)\psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ dt.$$

Ceci donne (2.6) et termine donc l'étape 1, c'ést-à-dire $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ et $u_t = \Delta u + f$ (ce qui l'équation demandée dans (2.2)).

Étape 2 :

Comme $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $\left(u_t \in L^2(|\ 0,T],H^{-1}(\Omega)\right)$, on a (d'après le lemme 1.2), $u \in C\left([0,T],L^2(\Omega)\right)$. On montre dans cette deuxième étape que u(0) = u_0.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une fonction r_n de $C_0^\infty([0,T[,\Omega)$ décroissante et telle que $|r'(t)| \leq 2n$ pour tout $t, r_n(0) = 1$ et $r_n(t) = 0$ si $t \geq 1/n$.
Soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $1/n < T$. On prend $\varphi(x,t) = r_n(t)\psi(x)$ dans (2.3). On obtient

$$-\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x,t)\ r_n'(t)\ \psi(x)\ dx\ dt - \int_\Omega u_0(x)\psi(x)\ dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla\psi(x)\ r_n(t)\ dx\ dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \langle f(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ r_n(t)\ dt,$$

c'est-à-dire

$$T_n = \int_\Omega u_0(x)\ \psi(x)\ dx - R_n + S_n, \tag{2.7}$$

avec

$$T_n = -\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x,t)\ r_n'(t)\ \psi(x)\ dx\ dt$$
$$R_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla\psi(x)\ r_n(t)\ dx\ dt$$

et

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \langle f(t), \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\ r_n(t)\ dt.$$

On montre tout d'abord que R_n et S_n tendent vers 0. En effet, on a

$$\begin{aligned}
|R_n| &\le \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|\nabla\psi(x)\mid \underset{\cdot}{\mathrm{x}}\ dt \\
&\le \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\ dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2\ dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|u\|_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$ car

$$|S_n| \le \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On remarque maintenant que

$$\begin{aligned}
T_n &= -\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega u(x,0)\ r_n'(t)\psi(x)\ dx\ dt - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x,t)-u(x,0))\ r_n'(t)\psi(x)\ dx\ dt \\
&= \int_\Omega u(x,0)\psi(x)\ dx - \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x,t)-u(x,0))\ r_n'(t)\psi(x)\ dx\ dt.
\end{aligned}$$

(*On* a utilisé ici $r_n(0) = 1$ et $r_n(1/n) = 0$). On majore de dernier terme de cette égalité :

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega (u(x,t)-u(x,0))\ r_n'(t)\psi(x)\ dx\ dt\right| \le \frac{1}{n} 2n \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} \|u(.,t)-u(.,0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $u \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ ce dernier terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et on a donc, finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_\Omega u(x,0)\psi(x)\ dx.$$

Avec (2.7), comme $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$, on déduit

$$\int_\Omega u(x,0)\psi(x)dx = \int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx \text{ pour tout } \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ceci permet de conclure que $u(0) = u_0$ et termine la démonstration de le théorème (3.2).

2.2.3 Existence par la méthode de Faedo-Galerkin

Théorème 2.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, T > 0$, sous les hypothèses $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in (L^2]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors le problème admet un et un seul solution u vérifiant :*

$$\begin{aligned} u &\in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega)), \\ u_t &\in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

On rappelle que l'on a identifié $L^2(\Omega)$ avec $\left(L^2(\Omega)\right)'$, de sorte que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = L^2(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)$. Comme on cherche u telle que $u \in L^2\left(]0,T[H_0^1(\Omega)\right)$ et $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a nécessairement $u \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$, (d'après le lemme(1.2)). La fonction u est donc définie en tout $t \in [0,T]$, ce qui permet de donner un sens à la condition $u(0) = u_0$ p.p.
L'idée, pour ce démontrer ce théorème, est de résoudre d'abord le problème dans des espaces de dimension finie, on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'élément finis, mais c'est plus simple en utilisant une base hilbertienne formée de fonction propres du Laplacien ; C'est-à-dire une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ telle que
e_n est (pour tout n) une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.1 *Soit la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et vérifie*

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla e_n \nabla v \, dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v \, dx, \; \textit{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec $\lambda_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda_n \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$.

Comme $(e_n)_{n\in N^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, pour tout $w \in L^2(\Omega)$, $w = \sum_{n\in N^*} (w|e_n)_2\, e_n$ au sens de la convergence $L^2(\Omega)$ (c-à-d que $\sum_{i=1}^{n} (w|e_i)_2\, e_i \to w$ dans $L^2(\Omega)$) , quand $n \to +\infty$).
On va montrer maintenant que la famille $\left(\lambda_n^{-1/2} e_n\right)_{n\in N^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.
On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, la norme de u dans $H_0^1(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \| \mid \nabla u \mid \|_{L^2(\Omega)}$ est donc le produit scalaire de u et v dans $H_0^1(\Omega)$ est donné par $(u \mid v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$
On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \nabla e_n \nabla e_m dx = \lambda_n \int_\Omega e_n e_m dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $(e_n \mid e_m)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ si $n \neq m$ et

$$\left\| \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\nabla e_n \nabla e_m}{\lambda_n} dx = 1.$$

Puis en remarque que l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, noté ev $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet soit $v \in H_0^1(\Omega)$ tq $(v \mid e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 = (v \mid e_n)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e_n \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega e_n v dx.$$

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et ($\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que $v = 0$ p.p. Montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $ev\,\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est réduit à $\{0\}$ et donc que $ev\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\lambda_n^{-1/2} e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.
La démonstration du théorème (2.1) est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- Recherche de solutions approchées.
- On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.
- On passe à la limite.

2.2.4 Solution approchée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = ev\{e_p, p = 1, \ldots, n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i$ avec $\alpha_i \in C([0,T], \mathbb{R})$. En supposant que les α_i sont dérivables pour tout t (ce qui n'est pas vrai, en général), on a donc

$$u_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t) e_i,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et tout $t \in]0,T[$, on a (compte tenu de l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$)

$$\langle u_n'(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t) \int_\Omega e_i \varphi dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$-\Delta u_n(t) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \Delta e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i(t) e_i \ \text{ dans } D^*(\Omega) \text{ et dans } H^{-1}(\Omega),$$

c'est-à-dire, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -\Delta u_n(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_n(t) \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i(t) \int_\Omega e_i \varphi dx.$$

Enfin, comme $f \in L^2\Big(]0,T[, H^{-1}(\Omega)\Big)$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\langle f(.), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \in L^1_{\mathrm{R}}(]0,T])$. La quantité $\langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ est donc définie pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u_n'(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i'(t) + \lambda_i \alpha_i(t)) \int_\Omega e_i \varphi dx - \langle f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Pour obtenir u_n, une idée naturelle est de choisir les fonctions α_i pour que

$$\langle u_n'(t) - \Delta u_n(t) - f(t), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0,$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\alpha_i'(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = f_i(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $\alpha_i^{(0)} = (u_0 \mid e_i)_2$, ceci suggère donc de prendre

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s) ds. \tag{2.9}$$

Les fonction α_i ainsi définies appartiennent à. $C([0,T], \mathbb{R})$ et on a donc

$u_n \in C\left([0,T], E_n\right) \subset C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right)$ avec $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i$.

2.2.5 Précision sur la dérivée en temps

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u_n la solution approchée qui donnée par $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i$. Les fonction α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut fonction α_i ne sont pas nécessairement dérivables. On va préciser ici ce que vaut la dérivée par transposition de u_n. On va noter cette dérivée $(u_n)_t$. Par définition de la dérivation par transposition, $(u_n)_t$ est un élément de D_E^* avec $E = H_0^1(\Omega)$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[, \mathbb{R})$ on a

$$\left\langle (u_n)_{t,\varphi} \right\rangle_{D_E^*, D} = -\int_0^T u_n(t) \varphi'(t) dt \in E_n \subset H_0^1(\Omega).$$

Comme $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) e_i$, on a donc

$$\langle (u_n)_t \,, \varphi \rangle_{D_E^*, D} = -\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \alpha_i(t) e_i \varphi'(t) dt = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt \right) e_i.$$

On utilise maintenant (2.9)

$$\int_0^T \alpha_i(t) \varphi'(t) dt = T_i + S_i,$$

avec

$$T_i = \int_0^T \alpha_i^{(0)} e^{-\lambda_i t} \varphi'(t) dt = \int_0^T \alpha_i^{(0)} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \varphi(t) dt.$$

$$S_i = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_i (t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi'(t) dt.$$

Pour transformer S_i on utilise le théorème de Fubini :

$$
\begin{aligned}
S_i &= \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[0,t]}(s) e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi'(t) dt = \int_0^T \left(\int_0^T 1_{[s,T]}(t) e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi'(t) dt \right) f_i(s) ds \\
&= \int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi'(t) dt \right) f_i(s) ds = \int_0^T \left(\int_s^T \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} \varphi(t) dt \right) f_i(s) ds - \int_0^T \varphi(s) f_i(s) ds \\
&= \int_0^T \left(\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i(t-s)} f_i(s) ds \right) \varphi(t) dt - \int_0^T \varphi(t) f_i(t) dt.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $T_i + S_i = \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) \varphi(t) dt - \int_0^T f_i(t) \varphi(t) dt$, et donc

$$
\langle (u_n)_t \, , \varphi \rangle_{D^*,D} = - \sum_{i=1}^n \int_0^T \lambda_i \alpha_i(t) e_i \varphi(t) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T f_i(t) e_i \varphi(t) dt.
$$

Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0, T[, \mathbb{R})$, on a

$$
(u_n)_t = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n f_i e_i \in L^2(]0, T\,[, E_n)\,.
$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $f^{(n)} = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

$$
(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0, T[, E_n) \subset L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)).
$$

Soit maintenant $v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$. Comme $(u_n)_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, on a $\langle (u_n)_t \, , v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \in L^1(]0, T[)$ et

$$
\int_0^T \langle (u_n)_t \,(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega f_i e_i v dx dt.
$$

Ceci donne, en revenant à la définition de f_i,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle (u_n)_t \,(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx dt &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \langle f(t), e_i \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \left(\int_\Omega e_i v dx \right) dt \\
&= \int_0^T \left\langle f(t), \sum_{i=1}^n (v|e_i)_2 \, e_i \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt.
\end{aligned}
$$

On note P_n l'opérateur de projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ sur le sous espace vectoriel E_n.

L'opérateur P_n peut donc être vu comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ (car $E_n \subset H_0^1(\Omega)$). On note alors P_n^t l'opérateur transposé qui est donc un opérateur de $H^{-1}(\Omega)$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)'$ qui est lui même identifié à $L^2(\Omega)$ et est aussi un sous espace vectoriel de $H^{-1}(\Omega)$. On obtient alors (pour tout $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$

$$\int_0^T \langle (u_n)_t\,, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx dt = \int_0^T \langle f, p_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt = \int_0^T \left\langle p_n^t f, v\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt. \tag{2.10}$$

On a aussi $u_n \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right)$ et $u_n(0) = p_n u_0$.

2.2.6 Estimations a priori

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \subset L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t = \Delta u_n + f^{(n)} \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. D'après le lemme (1.2), on a donc

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \langle (u_n)_t\,, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

En prenant $v = u_n$ dans (2.10), on en déduit

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \; dx \; dt = \int_0^T \langle f, p_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt,$$

et donc

$$\|u_n\|^2_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)} = \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx dt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \langle f, p_n u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} \; dt.$$

On en déduit, en remarquant que $p_n u_n = u_n$,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)} &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \langle f, u_n\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \|u_n\|_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\|u_n\|^2_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Ce qui donne aussi

$$\|u_n\|_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Comme $(u_n)_t = \Delta u_n + p_n^t f$ (égalité (2.10)) et que $\|p_n w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on obtient aussi une borne sur $(u_n)_t$:

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_n\|_{L^2\left(]0,T[H_0^1(\Omega)\right)} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))},$$

et donc

$$\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée dans $L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)$ et la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.

2.2.7 Passage à la limite

Grâce aux estimations obtenues à subsection 2.2.2, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que quand $n \to +\infty$,

$$u_n \to u \text{ faiblement dans } L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right),$$
$$(u_n)_t \to w \text{ faiblement dans } L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)),$$

et les estimations sur u_n et $(u_n)_t$ donnent aussi les estimations suivantes sur u et u_t :

$$\|u\|_{L^2\left(]0,T[,H_0^1(\Omega)\right)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}$$
$$\|(u)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + 2\|f\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}.$$

Nous allons montrer tout d'abord que $w = u_t$ (puis nous montrerons que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (P_1)).
Par définition de u_t, on a pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T u_t(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt.$$

Pour démontrer que $u_t = w$, il suffit donc de montrer que l'on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$,

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt. \tag{2.11}$$

On rappelle que le terme de gauche de l'égalité (2.3) est dans $H^{-1}(\Omega)$ alors que le terme de droite est dans $H_0^1(\Omega)$. Cette égalité utilise donc le fait que $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, cette inclusion étant due au fait que nous avons identifié $L^2(\Omega)'$ avec $L^2(\Omega)$.

Soit donc $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$. Nous allons montrer (2.3). Pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on considère l'application S de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S(v) = \int_\Omega \left(-\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt\right)\psi(x)dx \text{ pour } v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega)).$$

L'application S est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $u_n \to u$ faiblement $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a donc $S(u_n) \to S(u)$ quand $n \to +\infty$. Pour $v = u_n$ et pour $v = u$, on a

$$S(v) = -\left(\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt,\ \psi\right)_2 = -\left\langle \int_0^T v(t)\varphi'(t)dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc, quand $n \to +\infty$,

$$-\left\langle \int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \longrightarrow -\left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On utilise maintenant le fait que $-\int_0^T u_n(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)dt$ (par définition de $(u_n)_t$. On a donc

$$\left\langle \int_0^T (u_n)_t(t)\varphi(t)\ dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \longrightarrow -\left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On considère maintenant l'application $\bar{S}$ de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\bar{S}(v) = \left\langle \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \quad \text{pour } v \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega)).$$

L'application $\bar{S}$ est linéaire continue de $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}$. Comme $(u_n)_t \longrightarrow w$ faiblement $L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a donc $\bar{S}\left((u_n)_t\right) \longrightarrow \bar{S}(w)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, c'est-à-dire

$$\left\langle \int_0^T (u_n)_t\,(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \longrightarrow \left\langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On en déduit que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$-\left\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1},H_0} = \left\langle \int_0^T w(t)\varphi(t)dt, \psi \right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

On a donc bien montré que $-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T w(t)\varphi(t)dt$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,T[,\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $u_t = w$.

Nous savons donc que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et que $(u_n)_t \to u_t$ faiblement dans $L^2(]0,T[H^{-1}(\Omega))$. Pour montrer que u est solution de $u_t = \Delta u + f$ au sens demandé par (2.2), il suffit maintenant de passer à la limite dans (2.10). Soit $v \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, selon (2.10),

$$\int_0^T \langle (u_n)_t\,, v\rangle^1_{H^{-1},H_0^1}\,dt + \int_0^T (u_n|v)\,dt = \int_0^T \langle f, p_n v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,dt.$$

Les deux termes de gauche de cette égalité passent a limite quand $n \to +\infty$ grâce aux convergences de u_n et $(u_n)_t$. Pour le terme de droite. On remarque que $P_n v(t) \to v(t)$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour presque tout t et $\|P_n v(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout t. Cela permet de passer à la limite dans le terme de droite, par le théorème de convergence dominée. On obtient ainsi

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,dt + \int_0^T (u|v) = \int_0^T \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Ce qui est bien le sens souhaité dans la formulation (2.2).

Il reste donc seulement à montrer que $u(0) = u_0$ p.p.

Corollaire 2.1 *Soit $u \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, alors $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration

Comme $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on sait que $u \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ (voir le lemme (1.2)).

On a $u(t) \to u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to 0$. On a aussi que $u_n(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(0)} e_i \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Pour en déduire que $u(0) = u_0$, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est relativement compacte dans $C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$.

En effet, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$, il existe $w \in C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$ et une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in N*}$, telle que $u_n(t) \to w(t)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ (et donc aussi dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$). En particulier, on a donc $w(0) = u_0$. Mais, on sait déjà que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et donc aussi faiblement dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Par unicité de la limite, on a donc $u = w$ p.p sur $]0,T[$ et donc $u(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ car u et w sont continues sur $[0,T]$. On obtient ainsi, finalement, $u(0) = w(0) = u_0$. Il reste montrer que la suite $(u_n)\, n \in N^*$ et relativement compacte dans $C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$. Par le théréme d'Ascoli, il suffit de montrer que

1. Pour tout $t \in [0,T], (u_n(t))_{n\in N^*}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$.
2. $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Par démontrer le deuxième item, on utilise la fait que $(u_n)\, t \in L^1\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$. Le lemme (1.2) nous donne que pour tout $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 > t_2$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, dans $H^{-1}(\Omega)$

$$u_n(t_1) - u_n(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} (u_n)_t(s)ds,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \int_{t_2}^{t_1} \|(u_n)_t(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} ds &\leq \left(\int_0^t \|(u_n)_t(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t_1 - t_2} \\ &\leq \|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))} \sqrt{t_1 - t_2}.\end{aligned}$$

Comme la suite $((u_n)_t)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on en déduit bien que $\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$, quand $s \to t$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $t \in [0,T]$).

Pour démontrer de premier item, on utilise encore le lemme (1.2). Comme $u_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)\,t \in L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, pour tout $t,s \in [0,T]$,

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_s^t \langle (u_n)_t\,(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H_0^1} d\xi,$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u_n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_s^t \left|\langle (u_n)_t\,(\xi), u_n(\xi)\rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| d\xi \\ &\leq \|u_n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\,\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))}\,\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}\Big).\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité par rapport à s sur $[0,T]$, on en déduit

$$T\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_n\|_{L^2(]0,T[,L^2(\Omega))}^2 + 2T\|(u_n)_t\|_{L^2(]0,T[,H^{-1}((\Omega)))}\|u_n\|_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))}.$$

Ceci montre que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$ (et même uniformément par rapport à t). On en déduit que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$.
On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et conclure, que $u(0) = u_0$ p.p. Ceci termine la démonstration du fait que u est solution (2.2) et donc la démonstration de la partie "existence" du théorème(2.1) .

2.2.8 Unicité de la solution

On montre maintenant la partie " unicité " du théorème (2.1).

Lemme 2.2 *Le problème* (2.2) *admet une solution unique.*

Démonstration

Soit u_1, u_2 deux solution de (2.2), on pose $u = u_1 - u_2$. En faisant la différence des équations satisfaites par u_1 et u_2 et on prenant, pour $t \in [0,T], v = u\mathbb{1}_{]0,t[}$ comme fonction test, on obtient.

$$\int_0^t \langle u_t(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\nabla u(s) dx ds = 0.$$

Comme $u \in L^2(]0,T[, H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$, on a d'après le lemme (1.2),

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2\right) = \int_0^t \langle u_t(s), u(s)\rangle_{H^{-1},H_0^1} ds.$$

On en déduit, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\left(\|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2\right) + 2\int_0^t \int_\Omega \nabla u(s)\nabla u(s) dx ds = 0. \tag{2.12}$$

Enfin, comme $u(0) = 0$, on obtient bien, finalement, $u(t) = 0$ $p.p.$ dans Ω, pour tout $t \in [0,T]$. Ce qui montre la partie "unicité" du théorème (2.1).

Chapitre 3

Étude des problèmes non linéaires

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des opérateur monotone que a été initiée par G. Minty en 1962. Nous donnons aussi quelques applications de cette méthode dans la résolution de certains problèmes élliptique et parabolique non linéaire.

3.1 Problème élliptique (Opérateur de Leray-Lions)

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N . f \in L^2(\Omega)$ et $a : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ une application continue c-à-d :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall \xi \in \mathbb{R}^N : \alpha \leq a(\xi) \leq B.$$

On étude le problème suivants :

$$\begin{cases} -div(\theta(x)a(\nabla u(x))) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_3}$$

3.1.1 La formulation variationnelle

On multipliant l'équation (P_3) par une fonction de test $v \in V = W_0^{1,p}(\Omega)$ en intégrant sur Ω et on utilise la formule de Green on obtient formulation variationnelle suivant.

$$(pp) : \begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \int_\Omega \theta(x)a(\nabla u)\nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \forall v \in V, \end{cases}$$

avec les hypothèse de Leray-Lions $a(.,.)$ vérifié :

1. $a : \Omega \times \mathbb{R}^N$ est de carathéodory.
2. $a(.,.)$ est coercive.
3. $a(.,.)$ est croissance.
4. $a(.,.)$ est monotone.

Soit $w_m \in D(\Omega)$ une famille dénombrable tell que les compinaisson linéaire des w_m sont dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. On note $V_n = vect\{w_1, \cdots, w_n\}$ l'espace vectoriel engendré par n premiers vecteurs.
On va montrer que le problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_n \in V_n \text{ t q :} \\ \forall v \in V_n; \int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla v dx = \langle f, v\rangle_{W^{-1,p}, W_0^{1,p}} \quad , \end{cases} \tag{P}$$

admet au moins une solutions :

Théorème 3.1 ***(Existence et unicité)****[9] Sous les hypothèses de Leray-Lions, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de problème(P). Si de plus a est strictement monotone, alors il existe une unique solution u.*

$V = W_0^{1,p}$, muni de la norme du gradient, et considérions l'opérateur $A : V \longmapsto V'$ défini $u, v \in V$ par

$$\langle Au, v\rangle_{V_n', V_n} = \langle -div(\theta(x)a(\nabla u(x)), v\rangle_{V_n', V_n} = \int_\Omega \theta(x)a(\nabla u)\nabla v dx.$$

on a :$v \longrightarrow \langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}}$ est une application linéaire et continue V_n dans $\mathbb{R}$.
On note b_n cette l'application. On'a donc $b_n \in V'$

$$\langle b_n, v\rangle_{V_n', V_n} = \langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}}.$$

Et on a ainsi définie une application A de V_n dans V_n'. On va montrer que A est continue et coercive. On déduire que A est surjectif, et donc qu'il existe $u_n \in V_n$ vérifiant $A(u_n) = b_n$.
C-á-d u_n solution du probléme (p).

3.1.2 La continuité de A_n

n est fixé et v munit de la norme $\|.\|_V = \|.\|_{W_0^{1,p}}$. Soit $u, \bar{u} \in V$ on a :

$$\begin{aligned}\|A(u) - A(\bar{u})\|_{V'} &= \max_{v \in V, \|v\|_V = 1} \langle A(u) - A(\bar{u}), v\rangle_{V',V} \\ &= \max_{v \in V, \|v\|_{W_0^{1,p}} = 1} \int_\Omega \theta(a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u}))\nabla v dx \\ &\leq \max_{v \in W_0^{1,p}, \|v\|_{W_0^{1,p}} = 1} \int_\Omega \theta(a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u}))\nabla v dx.\end{aligned}$$

On pose $\lambda = \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\|A(u) - A(\bar{u})\|_{V'} &\leq \max_{v \in W_0^{1,p}, \|v\|_{W_0^{1,p}} = 1} \lambda \|(a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u}))\|_{L^{p'}(\Omega)} \|(\nabla v)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \lambda \|(a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u}))\|_{L^{p'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans V, telle que $u_n \to \bar{u}$ dans V.
On a :

$$\||A(u_n) - A(\bar{u})|\|_{V'} \leq \lambda \|(a(\nabla u_n) - a(\nabla \bar{u}))\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

et comme a est de carathéodory on a : $a(\nabla u_n) \to a(\nabla \bar{u})$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. On a aussi montrer que $A(u_n) \longrightarrow A(\bar{u})$,dans V',et donc que A est continue (de V dans V').

3.1.3 Coercivité de A_n

On va montrer que :

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{V',V}}{\|u\|_V} \longrightarrow +\infty, \text{ lorsque } \|u\|_V \longrightarrow +\infty.$$

Grâce aux l'apériteur de Leray-Lions et par la définition :

$$\langle A(u), u\rangle_{V',V} = \int_\Omega \theta a(\nabla u)\nabla u dx \geq \theta_0 \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p dx,$$

on pose $c = \theta_0 \alpha$ alors :

$$\langle A(u), u\rangle_{V',V} \geq c\|u\|^p_{W_0^{1,p}} = c\|u\|^p_V.$$

Donc :

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{V',V}}{\|u\|_V} \geq C\|u\|_V^{p-1} \longrightarrow +\infty, \text{ lorsque } \|u\|_V \longrightarrow +\infty.$$

Donc A est coercive.

D'après le théorème de l'existence et l'unicité. Il donne l'existence d'une solution ou problème (P) en dimension finie.

3.2 Existence de la solution du problème en dimension infinie

Pour cela nous allons :

1. Obtenir une estimation sur u_n.
2. Un passage a la limite sur le problème.
3. Astuce pour montrer que la limite du terme non linéaire est bien terme on a deux astuce : l'astuce de Minty et par la méthode de Leray-Lions.
   Dans ce travail applique l'astuce de Minty.

3.2.1 Estimation sur u_n

On prend $v = u_n$ dans (P) on obtient

$$\theta_0\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}.$$

Par coercivite de a. On a :

$$\theta_0 \ \alpha\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p \leq \|f\|_{W^{-1,p'}}^p \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p.$$

d'où

$$\|u_n\|_{w_0^{1,p}}^{p-1} \leq \frac{1}{\theta_0\alpha}\|f\|_{W^{-1,p'}}.$$

3.2.2 Passage à la limite

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, qui est réflexif.
En déduit qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Par hypothèse des croissance $|a(\nabla u_n)| \leq C(1+|\nabla u_n|^{p-1})$, donc la suite $(a(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ qui est réflexif. Donc il existe $\psi \in (L^{p'}(N))^N$ telle que à une sous-suite prés.

$$a(\nabla u_n) \rightharpoonup \psi \text{ faiblement dans } (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on sait que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = W_0^{1,p}$ donc il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_1 \in V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$v_n \longrightarrow v \text{ dans } W^{1,p}(\Omega).$$
$$\nabla v_n \longrightarrow \nabla v \text{ dans } (L^p(\Omega))^N.$$

On utilise $v = v_n$ et (P) obtient

$$\int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla v_n dx = \langle f, v_n\rangle.$$

On a $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $w_0^{1,p}(\Omega)$ alors $\langle f, v_n\rangle \rightharpoonup \langle f, v\rangle$
et

$$a(\nabla u_n) \rightharpoonup \psi(\text{faiblement}) \text{ dans } (L^{p'}(\Omega))^N,$$
$$\nabla v_n \longrightarrow \nabla v(\text{fortement}) \text{ dans } (L^p(\Omega))^N.$$

Par le lemme de convergence forte contre convergence faible

$$\int_\Omega \theta\psi\nabla v dx = \langle f, v\rangle_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}} \forall v \in w_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.1}$$

On a ainsi prouvé l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, telle que u est limite faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ et telle que la limite faible dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ de la suite $(a(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ notée ψ vérifie (3.1). Si ψ égal à $a(\nabla u)$.

Pour terminer, il reste à démontrer que :

$$\int_\Omega \theta\psi\nabla v dx = \int_\Omega \theta a(\nabla u)\nabla v dx.$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ par l'astuce de Minty, qui utilise uniquement la monotonie de A.

3.2.3 Limite du terme non linéaire (Astuce de Minty)

On a $u_n \longmapsto u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$telle que $v_n \in V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_n \longrightarrow v$ dans $W_0^{1,p}$, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, par passage à la limite dans le terme $\int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla v_n dx$ et grâce à l'hypothèse de monotonie.
En effet

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \theta(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n))(\nabla u_n - \nabla v_n)dx \\
&= \int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla u_n dx - \int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla v_n dx \\
&- \int_\Omega \theta a(\nabla v_n)\nabla u_n dx + \int_\Omega \theta a(\nabla v_n)\nabla v_n dx.
\end{aligned}$$

On pose

$$\Gamma_{1,n} = \int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla u_n dx$$

$$\Gamma_{2,n} = \int_\Omega \theta a(\nabla u_n)\nabla v_n dx$$

$$\Gamma_{3,n} = \int_\Omega \theta a(\nabla v_n)\nabla u_n dx$$

$$\Gamma_{4,n} = \int_\Omega \theta a(\nabla v_n)\nabla v_n dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \theta(a(\nabla u_n) - a(\nabla v_n))(\nabla v_n - \nabla v_n)dx \\
&= \Gamma_{1,n} - \Gamma_{2,n} - \Gamma_{3,n} - \Gamma_{4,n},
\end{aligned}$$

on a

$$\text{que } \Gamma_{1,n} \longrightarrow \int_\Omega \theta\psi\nabla u\ dx,$$
$$n \longrightarrow \infty$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \Gamma_{2,n} = \int_\Omega \theta\psi\nabla v dx.$$

Par produit convergence forte dans $(L^p(\Omega)^N$ et convergence faible dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\Gamma_{3,n} = \int_\Omega \theta a(\nabla v)\nabla u dx.$$

Et par produit d'une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et d'une convergence faible dans $(L^p(\Omega))^N$. En fin on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\Gamma_{4,n} = \int_\Omega \theta a(\nabla v)\nabla v dx.$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et ce dernier terme est le plus simple (car on a le produit d'une convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et convergence forte dans $(L^{p'}(\Omega))^N$).
Le passage à la limite dans l'inégalité donne :

$$\int_\Omega \theta(\psi - a(\nabla v))(\nabla u - \nabla v)dx \geq 0.$$

Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ maintenant on choisit astucieusement la fonction test v. On prend $v = u + \frac{1}{n}e$, avec $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$-\frac{1}{n}\int_\Omega \theta(\psi - a(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla e))\nabla e dx \geq 0.$$

Alors :

$$\int_\Omega \theta(\psi - a(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla e))\nabla e dx \leq 0.$$

Mais $u + \frac{1}{n}e \mapsto u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, par le lemme de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$a\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla e\right) \longrightarrow a(\nabla u) \text{ dans } (L^{p'}(\Omega))^N.$$

Quand $n \longmapsto +\infty$ en passant à la limite alors :

$$\int_\Omega \theta(\psi - a(\nabla u))\nabla e dx \leq 0 \quad \forall e \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On changer e en $-e$ par linéarité on a :

$$\int_\Omega \theta(\psi - a(\nabla u))\nabla e dx = 0, \quad \forall e \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On déduit que :

$$\int_\Omega \theta\psi\nabla e = \int_\Omega \theta a(\nabla u)\nabla e dx \quad \forall e \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Donc u est solution de (3.1.1).

3.3 Unicité

Montrons que u est unique, supposons l'existence de u_1 et u_2 tels que :

$$\int_\Omega \theta(a(\nabla u_i)\nabla v dx = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

Donc par soustraction :

$$\int_\Omega \theta(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2))\nabla v dx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

d'où, en prenant $v = u_1 - u_2$:

$$\int_\Omega \theta[a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)]\nabla(u_1 - u_2) dx = 0.$$

Cela implique, grâce à monotone que

$$\theta[a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)][\nabla u_1 - \nabla u_2] = 0 \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

De sorte que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p dans Ω, donc $u_1 = u_2$ sur chaque composante connexe de Ω et comme $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$.

On a $u_1 = u_2$ p.p dans Ω.

3.4 Problème parabolique :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N(N \geqslant 1), T \in \mathbb{R}_+^*$, et $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_N(\mathbb{R})$ (oú $M_N(\mathbb{R})$ désigne les matrices $N \times N$ á coefficient réels) tq :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R}, \qquad A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1...N} \text{ oú } a_{i,j} \in L^\infty(\Omega) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ \exists \alpha > 0 \quad tq : A(s)\xi\xi \geqslant \alpha|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}. \\ \exists \beta > 0 \quad tq : \parallel \alpha_{i,j}(s) \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq \beta \qquad \forall i, j = 1, ..., N. \end{cases}$$

$$f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)) \text{ et } u_0 \in L^2(\Omega).$$

On cherche u tel que :

$$\begin{cases} u_t - div(A(x, u)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega\times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0, T[\\ u(., 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

On va donner pour ce probléme parabolique non linéaire un résultat d'éxistence et d'unicité de la solution faible.

3.4.1 Formulation variationnelle :

En multipliant l'équation (3.2) par un élément $v \in V = L^2\left(]0, T[, H_0^1(\Omega)\right)$, en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega)). \\ \displaystyle\int_0^T <u_t(s), v(s)>_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T \int_\Omega (A(u)\nabla u(s)\nabla v(s) dx ds = \int_0^T <f(s), v(s)>_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} ds, \\ \forall v \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)). \\ u(., 0) = u_0, \quad p.p. \end{cases} \tag{3.3}$$

Théorème 3.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ *et* $f \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, *sous les hypothéses $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[, H^{-1}(\Omega))$. Alors le probléme (2.2) admet un seul solution de u vérifie.*

L'idée, pour démontrer ce théoréme est résoudre d'abord le probléme dans des espaces de dimension finie on pourrait le faire par exemple avec des espaces d'élément finis, mais c'est plus simple en utilisant une base hilbertienne formé de fonction propre du la placien c-á-d : une base hilbertienne dans $L^2(\Omega)$ notée : $\{w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, telle que w_n est une solution faible de :

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda_n w_n \qquad dans\Omega \\ w_n = 0 \qquad\qquad\qquad sur\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.1 *Soit la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ vérifie :*

$$\begin{cases} w_n \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla w_n \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega w_n v dx, \ \textit{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

Comme (w_n) est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a pour tout $g \in L^2(\Omega)$, $g = \sum_{n\in N^*} <g|w_n>_2 w_n$ au sens de la convergence de $L^2(\Omega)$ c-à-d : $\sum_{k=1}^{n} <g|w_k> w_k \to g$ dans $L^2(\Omega))$ quand $n \to +\infty$. On va montrer maintenant que la famille $\left(\frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On remarque tout d'abord que pour tout $n, m \geq 1$, on a

$$\int_{Omega} \nabla w_n \nabla w_m dx = \lambda_n \int_\Omega w_n w_m dx = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

On en déduit que $<w_n, w_m> = 0$ si $n = m$ et

$$\left\| \frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega \frac{\nabla w_n \nabla w_m}{\lambda_n} dx = 1.$$

Comme $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et ($\lambda_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$), ou en déduit que $v = 0$ p.p. montre que l'orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ de $wv \{w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$

(avec wv = espace vectoriel) est réduit à $\{0\}$ et donc que $wv\{w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Finalement, on obtient ainsi que la famille $(\frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

La démonstration du théorème est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- Recherche de solutions approchées.
- On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.
- On passe à la limite, grace á les propriétés de monotonie.

3.4.2 Solution approchée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = wv\{e_p, p = 1, \dots, n\}$. On cherche une solution approchée u_n sous la forme $u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) w_k$ avec $x_k \in C([0,T], \mathbb{R})$. En supposant que les x_k sont dérivables pour tout t, on a donc

$$u_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t) w_k,$$

de sorte que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, et pour $t \in]0,T[$.

$$\langle u_n'(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t) \int_\Omega w_k \varphi dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$-div(A(u_n)\nabla u_n(t)) = -\sum_{k=1}^{n} x_k(t) A(u_n) \Delta w_k.$$

C'est-à-dire, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle -div(A(u_n)\nabla u_n(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \int_\Omega A(u_n) \Delta w_k \nabla \varphi dx.$$

Enfin, comme $f \in L^2\left(]0,T[, H^{-1}(\Omega)\right)$, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle f(.), \varphi\rangle \ \in L^1(]0,T[).$$

Et cette quantite définir pour presque tout t et on obtient finalement, pour presque tout t et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u_n'(t) - div(A(u_n))\nabla u_n(t) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k'(t) \int_\Omega w_k \varphi dx + x_k(t) \int_\Omega A(u_n)\nabla w_k \nabla \varphi dx \right) - \langle f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

On souhaite alors choisir les fonctions x_i pour que :

$$\langle u_n'(t) - div(A(u_n)\nabla u_n(t)) - f(t), \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0,$$

pour tout $\varphi \in E_n$. En posant $f_k(t) = \langle f(.), w_k\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$, ceci est équivalent à demander pour tout $k = \{1, \ldots, n\}$, on définit aussi la matrice $n \times n$ (á coefficients réels) G en posant

$$G_{i,j} = \int_\Omega A(u_n)\nabla w_j \nabla w_i dx$$

($G_{i,j}$ est de coefficient de G en ligne i et colone j),on avoir donc

$$x_k'(t) + Gx_k(t) = f_k(t).$$

En tenant compte de la condition initiale et en posant $x_k^0 = <u_0, w_k>_2$, ceci suggére donc de prendre

$$x_k(t) = x_k^{(0)} exp^{-Gt} + \int_0^t exp^{-G(t-1)} f_k(s)ds. \tag{3.6}$$

les fonctions x_k ainsi définies appartement á $C([0,T], \mathbb{R})$ et on a donc

$$u_n \in C([0,T], E_n) \subset C([0,T], H_0^1(\Omega)).$$

Avec $u_n = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) w_k$.

3.4.3 Estimation à priori

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \in L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))$ et $(u_n)_t \in L^2(]0,T[,E_n) \subset L^2(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$.

on a :

$$\sum_{k=1}^{n}((u_n(t))_t, w_k)\ x_{kn}(t) + \sum_{k=1}^{n} A(u_n(t), w_k)\ x_{kn}(t) = \sum_{k=1}^{n}(f(t), w_k)\ x_{kn}(t),$$

alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega (u_n)_t w_k\ x_{kn}(t)\ dx + \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega A(x,t)\nabla u_n \nabla u_n\ x_{kn}(t)\ dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega f(t) w_k\ x_{kn}(t)\ dx.$$

Alors :

$$\mid (u_n(t))_t\ u_n(t) + A(x,t)\nabla u_n \nabla u_n\ x_{kn}(t) dx \mid = \mid f\ u_n(t) \mid,$$

donc :

$$\mid (u_n(t))_t\ u_n(t) \mid + \mid A(x,t)\nabla u_n \nabla u_n\ x_{kn}(t) \mid\ \ dx = \mid f\ u_n(t) \mid,$$

ceci donne :

$$\geq \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \parallel u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} + a_0 \parallel \nabla u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} .$$

Donc :

$$\geq \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \parallel u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} + a_0 \parallel \nabla u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq (f, u_n),$$

on l'intégre de 0 à t et en applique l'inégalité de Young, on obtient :

$$\frac{1}{2} \parallel u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} + a_0 \int_0^t \parallel \nabla u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} d\tau$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^T \parallel f(\tau) \parallel^2_{L^2(\Omega)} d\tau - \frac{1}{2}\int_0^T \parallel u_n(\tau) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \parallel u_0 \parallel^2_{L^2(\Omega)},$$

telle que :

$$\parallel u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} + 2a_0 \int_0^t \parallel \nabla u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} d\tau$$

$$\leq C + \int_0^{T.} \parallel u_n(\tau) \parallel^2_{L^2(\Omega)} d\tau.$$

On déduit donc :

$$\parallel u_n \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq C + \int_0^T \parallel u_n(\tau) \parallel^2_{L^2(\Omega)} d\tau,$$

d'après le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\| u_n \|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ce^T \qquad \text{constante independante de } n,$$

on obtient, donc :

$$\| u_n \|^2_{L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))} + \| u_n \|^2_{L^2(]0,T[,H_0^1(\Omega))} \leq C_1. \tag{3.7}$$

Où C_1 constante indépendante de n.

Ensuite, on multiplie l'équation encore une fois par $x'_{kn}(t)$ et on somme sur k, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}((u_n(t))_t, w_k)\ x'_{kn}(t) + \sum_{k=1}^{n} A(u_n(t), w_k)_t\ x'_{kn}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(f(t), w_k)\ x'_{kn}(t),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega (u_n)_t w_k.x'_{kn}(t)\ dx + \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega A(x,t)\nabla u_n \nabla (u_n)_t x'_{kn}(t)\ dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega f(t) w_k x'_{kn}(t)\ dx.$$

Donc, il vient :

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega (u_n)_t^2\ dx + \int_\Omega A(x,t)\nabla u_n \nabla (u_n)_t \\
&= \int_\Omega f(u_n)_t\ dx \\
&= \| (u_n)_t \|^2_{L^2(\Omega)} + A(u_n, (u_n)_t) \\
&= (f(t), (u_n)_t).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En plus, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[A(u_n(t), u_n(t))] &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega A(x,t)\left(\nabla (u_n)_t\right)^2\ dx \\
&= \int_\Omega A'(x,t)\left(\nabla u_n\right)^2\ dx + 2\int_\Omega A(x,t)\left(\nabla u_n\right)\left(\nabla u_n\right)_t\ dx.
\end{aligned}$$

En intégrant sur $(0,t)$, et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}\int_0^t \| (u_n)_t(\tau) \|_{L^2(\Omega)} \, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[A(u_n(\tau), u_n(\tau))] d\tau \\ = \int_0^t \int_\Omega f(\tau)(u_n)_t(\tau) \, dx \, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega A^{'}(x,t) \left(\nabla u_n\right)^2 \, dx \, d\tau,\end{aligned}$$

ceci donne :

$$\begin{aligned} 2 \| (u_n)_t \|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \alpha \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq \int_0^T \| f(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} \, d\tau + \int_0^T \| (u_n)_t(\tau) \|_{L^2(\Omega)} \, d\tau + \int_0^T \int_\Omega A^{'}(x,t) \left(\nabla u_n\right)^2 dx d\tau \\ + A(u_n(0), u_n(0)).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Comme $A(x,t) \in C^1(\bar{\Omega} \times (0,T))$, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega A^{'}(x,t) \left(\nabla u_n\right)^2 dx d\tau \leq & A_2 \int_0^T \int_\Omega \left(\nabla u_n\right)^2 dx d\tau \\ \leq & A_2 \int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \, d\tau,\end{aligned} \tag{3.10}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \| (u_n)_t \|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \alpha \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq \int_0^T \| f(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} \, d\tau + (u_n(0), u_n(0)) \\ + a_2 \int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \, d\tau,\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \| (u_n)_t \|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \alpha \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq C^{'} + a_2 \int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \, d\tau,\end{aligned}$$

alors, en particulier :

$$\alpha \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C^{'} + a_2 \int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \, d\tau.$$

On obtient :

$$\| u_n(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C^{'} e^{\frac{a_2}{\alpha}T} \qquad \text{constante indépendante de } n.$$

Ainssi on obtient :

$$\| (u_n)_t \|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \| u_n(t) \|^2_{L^\infty(0,T,H^1_0(\Omega))} \leq C_2. \tag{3.11}$$

On en déduit que $t_n = T$. D'où, lorsque $n \longrightarrow +\infty$ dans, on constate :

$$\begin{cases} u_n & \text{uniformément borné dans } L^\infty(0,T,H^1_0(\Omega)), \\ u_n & \text{uniformément borné dans } L^2(0,T,H^1_0(\Omega)), \\ (u_n)_t & \text{uniformément borné dans } L^2(0,T,L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.12}$$

3.4.4 Passage à la limite

On pose $B(u) = -div(A(u)\nabla u)$. D'apres le lemme (1.1), on déduit, qu'on peut extraire une sous-suite (u_i) de (u_n) tell que

$$\begin{cases} u_i \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \text{ faible*} \\ u_i \rightharpoonup u \text{ dans } L^P(0,T,V) \text{ faible} \\ u_i(T) \rightharpoonup \xi \text{ dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \text{ faible} \\ B(u_i) \rightharpoonup x \text{ dans } L^q(0,T,V') \text{ faible} \end{cases} \tag{3.13}$$

passant a la limite dans

$$\int_\Omega u_t u_n w_k dx + \int_\Omega A(u_n)\nabla u_n \nabla w_k dx = \int_\Omega f w_k dx, \quad (pour \quad i = n,\ k\ fixe), \tag{3.14}$$

on voit que :

$$(x, w_k) = (f, w_k), \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

donc

$$x = f. \tag{3.15}$$

Par ailleur d'aprés (3.14)

$$(B(u_i), u_i) = (f, u_i) \longrightarrow (f, u)$$

et d'aprés (3.15)

$$(B(u_i), u_i) = (x, u), \tag{3.16}$$

on voir que (3.14) (3.15) (3.16) et les hypothese. B est bornée hémicontinue (convergence faible propriété aximatiques de B). B est monotonie, etraint que

$$x = B(u). \tag{3.17}$$

Ce qui, joint á (3.15) donc

$$f = B(u).$$

On part de (la monotonie de B)

$$(B(u_i) - B(u)) \geqslant\ 0, \qquad \forall v \in V. \tag{3.18}$$

On prend

$$v = u - \lambda w, \qquad \lambda > 0, \qquad w \in V, \tag{3.19}$$

donne : $\lambda(x - B(u - \lambda w), w) \geqslant 0$, donne $(x - B(u - \lambda w), w) \geqslant 0$ et faisant $\lambda \longrightarrow 0$, $(x - B(u), w) \geqslant 0, \quad \forall w \in V$, dóu $x = B(u)$

3.4.5 Unicité

Soit u_1 et u_2 deux solution du problème 1.4

$$\partial_t u_1 - div\,(A(u_1)\nabla u_1) = f, \tag{3.20}$$

et

$$\partial_t u_2 - div\,(A(u_2)\nabla u_2) = f, \tag{3.21}$$

(3.20)-(3.21) on obtient

$$\partial_t u_1 - \partial_t u_2 - div\,(A(u_1)\nabla u_1) + div\,(A(u_2)\nabla u_2) = 0.$$

Alors

$$\partial_t (u_1 - u_2) - div (A(u_1)\nabla u_1) + div (A(u_2)\nabla u_2) = 0,$$

on pose : $v = u_1 - u_2$, $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\partial_t v - div (A(u_1)\nabla u_1) + div (A(u_2)\nabla u_2) = 0, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

d'où

$$\langle \partial_t v, v \rangle - \langle div (A(u_1)\nabla u_1) - div (A(u_2)\nabla u_2) , u_1 - u_2 \rangle = 0.$$

Grace á la monotonie

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \parallel v(t) \parallel_{L^2}^2 \leq 0.$$

Donc

$$\parallel v(0) \parallel_{L^2}^2 = 0.$$

Alors $v = 0$, donc $u_1 - u_2 = 0$, alors $u_1 = u_2$.

Ce qui prouve l'unicité de la solution du probléme.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail s'intéresse à l'étude l'existence et l'unicité des solutions des certains classes des problèmes aux limites elliptiques et paraboliques linéaires et non linéaires , qui basé sur le thèoréme de Lax-Milgrame dans le cas linéaire et la méthode de Faedo-Galerkin pour le cas paraboliques. Dans le cas non linéare on utilise la méthode monotonie, cette derniére est plus efficase et simple à l'utilisation, car elle nécessite moins d'estimation que, les autres méthodes.

Bibliographie

[1] N. BELLAL , *Cours Analyse Fonctionnelle 1,* Université du 20 août 1955 skikda, Faculté des sciences, Département de Mathématiques, $1^{\text{ére}}$ année Master (1.F.A, A.N. EDP, C.O.S.D), Année : 2016/2017.

[2] P. BÉNILAN, H. BRÉZIS ; Solutions faibles d'équations d'évolution dans lesespaces de Hilbert, Annales de l'institut Fourier, tome 22, no 2 (1972), p. 311-329

[3] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle théorie et Application* 2^{e} *tirage,* Masson 1983.

[4] F. E. BROWDER : *Approximation-Selvability of non linear functional equation in normed linear spaces.* Arch-Rat-Mech. Anal. 26(1967), 33-43.

[5] F. E. BROWDER : *Problème non-linéaire,* les presses de l'université de Mentréal, 1966.

[6] F. E.BROWDER, w.v. Petryshyor : *Censtructions of fixed points of non linear mappings in Hilbert space.* J. Math. Appl. 20(1967), 197-228.

[7] D.G. de FICUEIREDO : *Fixed-points theorems for non linear operators and Galerkin Approximation.* J. Diff. Eq. 3(1967), 271-281.

[8] J. DRONIOU ; Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles, 2001.

[9] T. GALLOUET, R. Herbin, *Master 2 de mathématique, Equation aux dérivée partielle,* Université Aux de marseille, (11 septembre 2015).

[10] DANIEL LI, *Cours d'analyse fonctionnelle, Ellipses marketing,* paris 2013.

[11] J. L. LIONS and E. Magenes, *problèmes aux limite et application,* vol 1, Dunod Paris (1968).

[12] J. L. LIONS , *quelque méthodes de résolution desprob aux limites non linéaire, pois,* Dunod, 1969.

[13] A. PRIGNET, problème élliptiques et paraboliques et paraboliques dans un cadre non variationnel, UMPA-ENS Lyon 46 Allée d'Italie 69364 Lyou cedex 07 France, (9 janvier 1997).

[14] R. E. SHWARTZ, *Monotone operators in Banach spaces and non linear partial Differential Equations,* vol 49, (1991).

[15] Q. YANG, D. CHEN, Tiebiao Zhao, Yang Quan Chen : Fractional Calculus In Image Processing, Areview. ArXiv :108.03240v1 [cs.CV] 10 Aug 2016 .