وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/2022/2023.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Fonction Presque Périodique Et Application Aux Equations Différentielles

Option : COSD

Par :

Djareddir Romayssa

Encadré par : Ameur Lounes — MCB, U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Bendib EL Ouahma — MCB, U. SKIKDA

Examinateur: Ouaoua Amar — MCA, U. SKIKDA

Année : 2022/2023

REMERCIEMENT

Tout d'abord nous tenons à remercies « DIEU » de nous avoir donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce travail

La première personne que nous tenons à remercier est mon encadreur Dr « Iounes Ameur », pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être même au bon port.

On remercie les membres du jury pour avoir accepté examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité.

DEDICACE

Avec tout respect et amour je dédie ce travail :

A mon cher père « **AZIZE** *» : c'est le premier et le dernier homme de ma vie, qui a toujours été mon soutien et sans qui je n'aurais pas atteint ce que je suis aujourd'hui.*

A ma chère mère « **Dabila** *» : Tu es la lumière de ma vie, la flamme de mon cœur, je t'adore maman.*

Je demande à dieu de les protéger pour moi.

Sans oublier

Mes frères : CHAMSSE EDINE, AYMEN, IMED, MEHDI, RAMZI, FIRAS

Ma sœur : FIRYAL

Mon mari : HOUSSEM

A toute ma famille et mes amies.

Je vous dis merci beaucoup, je vous souhaite la santé, le bonheur et surtout la réussite, je vous aime.

ملخص

في هذه الدراسة، نقدم التعريف والخصائص الأساسية لمجموعة الدوال الشبه الدورية، وبتعبير أدق، نقدم بعض النتائج حول شبه دورية المشتق والتكامل لدالة شبه دورية. بعد ذلك، نطبق هذه النتائج لفحص وجود وتفرد الحلول شبه الدورية للنظام التفاضلي الخطي العادي التالي:

$$y' = Ay + f$$

حيث $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ هي مصفوفة لمربع $(f = f_i = (f_1, ..., f_n)^t)$ هي دالة شبه دورية أعداد مركبة و $y = (y_1, ..., y_n)^t$ وهي دالة غير معروفة كلمات مفتاحية: الدوال الدورية، الدوال الدورية تقريبا، دوال بوهر، المعادلات التفاضلية.

RÉSUMÉ

Dans ce étude, nous abordons la définition et les propriétés essentielles de l'espace des fonctions presque périodiques. Plus précisément, nous présentons certains résultats sur la presque périodicité de la dérivée et de la primitive d'une fonction presque périodique. Ensuite, nous appliquons ces résultats pour examiner l'existence et l'unicité de solutions presque périodiques au système différentiel linéaire ordinaire suivant :

$$\boldsymbol{y' = Ay + f}$$

où $\boldsymbol{f = f_i = (f_1, ..., f_n)^t}$ est une fonction presque périodique donnée, $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}}$ est une matrice carrée a des nombres complexes comme entrées et $\boldsymbol{y = (y_1, ..., y_n)^t}$ est la fonction inconnue. **Mots clés :** Fonctions périodiques, Fonctions presque périodiques, Fonctions de Bohr, Equations différentielles.

ABSTRACT

In this study, we give the definition and the essential properties of the space of almost periodic functions. More precisely, we present some results on the almost periodicity of the derivative and the primitive of an almost periodic function. Then we apply these results to examine the existence and uniqueness of nearly periodic solutions to the following ordinary linear differential system :

$$\boldsymbol{y' = Ay + f}$$

where $\boldsymbol{f = f_i = (f_1, ..., f_n)^t}$ is a given almost periodic function, $\boldsymbol{A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}}$ is a matrix Square has complex numbers as coefficients, and $\boldsymbol{y = (y_1, ..., y_n)^t}$ is the unknown function. **Key words :** Periodic functions, Almost periodic functions, Bohr functions, Differential equations.

TABLE DES MATIÈRES

Notations **8**

Introduction **9**

1 Rappels sur Les fonctions périodiques **14**

1.1 Les fonctions périodiques 14

1.2 Propriétés des fonctions périodique 16

2 Les fonctions presque périodiques **17**

2.1 Les différentes définitions des fonctions presque périodiques 17

2.1.1 Critère de Bohr 18

2.1.2 Critère d'approximation 27

2.1.3 Critère de Bochner 30

2.2 Propriétés des fonctions presque périodiques 37

2.2.1 Espace vectoriel de fonctions presque-périodiques 37

2.2.2 Dérivation des fonctions presque périodiques 40

2.3 Séries de Fourier des fonctions presque périodiques 41

2.3.1 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique 42

2.3.2 Propriétés de la Valeur moyenne d'une fonction presque périodique . 44

2.3.3 Séries de Fourier associée à une fonction presque périodique 46

3 La presque périodicité des solutions des équations différentielles ordinaires 52

3.1 Primitives des fonctions presque périodiques 52

3.2 Equations dfférentielles linéaires ordinaires 57

3.3 Solutions presque périodiques d'une équation différentielle scalaire 57

3.4 Solutions presque périodiques d'un système d'équations différentielles 62

3.5 Applications 65

Bibliographie 74

NOTATIONS

Ensembles et nombres

$\boldsymbol{C}(\mathbb{C})$ Espace des fonctions continues de dans $\mathbb{C}$.

$\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}$ Variable temporelle.

$\boldsymbol{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Espace des fonctions continues et borneés de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Espace des fonctions presque périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Espace des fonctions presque périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les fonctions périodiques sont des fonctions mathématiques qui se répètent à intervalles réguliers. Elles jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de l'ingénierie. Une fonction périodique est définie comme une fonction $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\boldsymbol{f(x+T) = f(x)}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ réel, où $\boldsymbol{T}$ est la période de la fonction. Les fonctions presque périodiques jouent un rôle important dans l'étude des équations différentielles et offrent une perspective intéressante pour comprendre et analyser les phénomènes périodiques. Une fonction presque périodique est une fonction qui présente une certaine régularité périodique, mais qui permet également des variations légères ou des déviations par rapport à cette périodicité.

Une caractéristique importante des fonctions presque périodiques est leur invariance par translation. Cela signifie que si f est une fonction presque périodique, alors pour tout réel a, la fonction $\boldsymbol{f(x+a)}$ est également presque périodique. Cette propriété permet d'étudier les propriétés des fonctions presque périodiques sur des intervalles de longueur finie, ce qui facilite l'analyse et la résolution des équations différentielles.

Les fonctions presque périodiques sont particulièrement utiles pour étudier les équations différentielles linéaires avec des coefficients presque périodiques. Ces équations différentielles se présentent sous la forme d'une dérivée d'une fonction inconnue égale à une combinaison linéaire de cette fonction inconnue et de ses dérivées, où les coefficients de la combinaison linéaire sont des fonctions presque périodiques.

Les fonctions presque périodiques offrent un cadre mathématique puissant pour l'étude des équations différentielles, en particulier celles avec des coefficients presque périodiques. Leur propriété d'invariance par translation et leur capacité à représenter des variations légères par rapport à la périodicité permettent d'analyser et de résoudre ces équations de manière rigoureuse, offrant ainsi une compréhension approfondie des phénomènes périodiques dans les systèmes dynamiques.

La théorie des fonctions presque périodiques est une branche relativement récente de mathématiques. Il a été lancé entre 1923 et 1925 par le danois mathématicien Harald Bohr (1887 - 1951).

Les fonctions presque périodiques généralisent les fonctions périodiques. Elles admettent une infinité de presque-périodes et aussi un développement en séries de Fourier généralisé (Fourier-Bohr)

$$\boldsymbol{f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda_n} \exp^{i\lambda_n t}} .$$

Rappelons qu'une fonction $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue est dite satisfaire :

1 Le critère de ***Bohr*** si : $\forall \boldsymbol{\varepsilon > 0, \exists l > 0}$, tel que :$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{l}]$ contient un nombre $\boldsymbol{\tau}$ vérifiant :$\boldsymbol{sup}_{t\in\mathbb{R}} |\boldsymbol{f(t+\tau)}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$.

2 Le critère de ***Bochner*** si : de toute suite $(\boldsymbol{\alpha_n}) \subset \mathbb{R}$, on peut ex raire une sous suite $(\boldsymbol{\alpha'_n})$ telle que $(\boldsymbol{f(.+\alpha'_n)})'_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

3 Le critère d'***approximation*** si : il existe une suite de polynôme trigonométriques gé-

néralisés $(P_n)_n, P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \exp^{i\lambda_k t}, c_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}$,convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Ces trois critères définissent la même classe de fonctions dites uniformément presque périodiques. En outre, pour toute fonction uniformément presque périodique, la quantité

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} f(t) \exp^{-i\lambda t} dt$$

Existe et est nulle sauf sur un ensemble au plus dénombrable de λ. Les λ pour lesquels

$$a(\lambda) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} f(t) \exp^{-i\lambda t} dt \neq 0$$

Sont appelés exposants de Fourier et les $a(\lambda)$ coefficients de Fourier associés à f. La série de Fourier associée à f est donc, donnée par :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(\lambda_k) \exp^{i\lambda_k t}$$

.

Plan du mémoire

Dans le chapitre I On rappelle dans ce chapitre quelques définitions et propriétés des fonctions périodiques.

Dans le chapitre II On a pour objectif de donner une collection de résultats classiques sur les différentes définitions des fonctions presque périodiques qui sont équivalentes, on a débuté ce chapitre par la donnée des différentes définitions des fonctions presque périodiques. Il s'agit des propriétés et la dérivation de fonctions presque périodiques. Les éléments fondamentaux concernant les séries de Fourier associées aux fonctions presque périodiques sont donnés à la fin de ce chapitre.

Dans le chapitre III Nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions presque périodiques des systèmes différentiels ordinaires linéaires non homogènes

$$\boldsymbol{y' = Ay + f}$$

Où $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$ à coefficients constants et $\boldsymbol{f = (fi)_{i=\overline{1...n}}}$ est une fonction presque périodique au sens de $\boldsymbol{Bohr}$. Enfin, nous avons achevé ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Dans cette section, on va donner une collections de définitions et propriétés des fonctions périodiques.

1.1 Les fonctions périodiques

Définition 1.1.1 *: Une fonction* $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *est dite périodique si :*

$$\exists \boldsymbol{T} > \mathbf{0} \quad \boldsymbol{tq} : \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{P}$$

On dit que $\boldsymbol{T}$ *est une période de* $\boldsymbol{f}$*, autrement dit* $\boldsymbol{f}$ *est périodique si son graphe est invariant par une translation de vecteur* $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{T}, \mathbf{0})$ *avec* $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

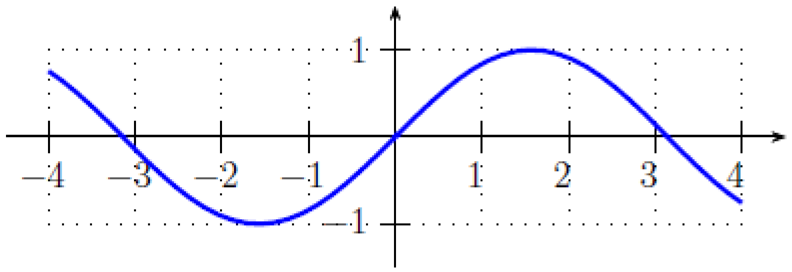
Exemple 1.1.1 *:*

Les fonction :

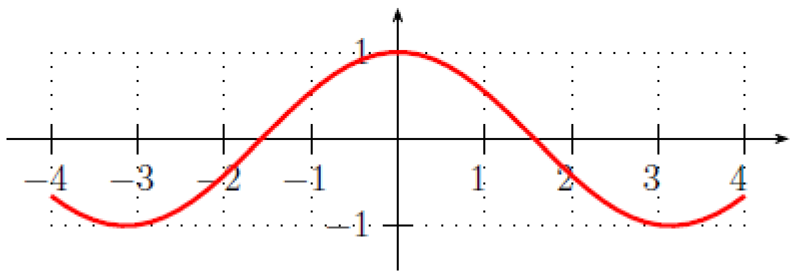
$\boldsymbol{x} \longmapsto \sin \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \longmapsto \cos \boldsymbol{x}$

❒ *Soit la fonction* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sin(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) =$

$\cos(x)$, f *est une fonction paire et* 2π*-périodique, d'amplitude* 1*. La courbe représentative de* f *est :*



❒ *Soit la fonction* $f(x) = \cos(x)$, f *est définie sur* $\mathbb{R}$*, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = -\sin(x)$, f *est une fonction paire et* 2π*-périodique, d'amplitude* 1*. La courbe représentative de* f *est :*



Propriétés 1.1.1 *:*

❒ *Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.*

❒ *Toute fonction périodique continue est uniformément continue.*

Définition 1.1.2 *On dit qu'un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *est relativement dense s'il existe un réel* $l > 0$ *tel que*

$$[a, a+l] \cap E \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Autrement dit, s'il existe un réel $\boldsymbol{l}$ tel que tout intervalle de longueur $\boldsymbol{l}$ rencontre $\boldsymbol{E}$.

1.2 Propriétés des fonctions périodique

Propriétés 1.2.1 *:*

- *Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$ une fonctions $\boldsymbol{T}$-périodique et intégrable alors son intégrale sur un intervalle de longueur $\boldsymbol{T}$ ne dépend de l'intervalle choisi c'est-à-dire* $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx$
- *La valeur moyenne d'une fonction périodique $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ est une fonction $\boldsymbol{T}$-périodique. on définit sa valeur moyenne par :*

$$M(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx, a \in \mathbb{R} \quad \textbf{\textit{donnée}} \tag{1.2}$$

- *Toute fonctions périodique continue est bornée et uniformément continue*

CHAPITRE 2

LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

Dans ce chapitre nous exposons la définition et les propriétés les plus importants de l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr, à savoir la valeur moyenne, l'inégalité de Parseval, les exposants de Fourier, les coefficients de Fourier et les séries de Fourier de ces fonctions presque périodiques, pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de références [1], [3], [5], [13], [16], [18].

2.1 Les différentes définitions des fonctions presque périodiques

Il existe trois différentes définitions des fonctions ***presque périodiques*** *:*

1. *Critère de* ***Bohr*** *en utilisant les ensembles relativement denses.*
2. *Critère d'****approximation*** *en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la convergence de la norme uniforme.*
3. *Critère de* ***Bochner*** *en utilisant la compacité de l'ensemble des translatés.*

2.1.1 Critère de Bohr

Définition 2.1.1 ***(ε-presque période)*** *On dit qu'un nombre réel τ est une **ε-presque période** d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}(f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ si :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Définition 2.1.2 *On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{X}$ est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$\left\{\tau \in \mathbb{R}, \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \varepsilon\right\} \tag{2.1}$$

Est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, f est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) > 0$ telle que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient au moins une ε-presque période, c'est-à-dire un nombre ε pour lequel

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \varepsilon \tag{2.2}$$

On note par $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions presque périodiques. Nous introduisons la notion de fonction normale.

Définition 2.1.3 *Un polynôme trigonométrique est une application $T : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{X}$ de la forme :*

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp^{i\lambda_k x} \quad avec \quad n \in \mathbb{N}^*, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad et \quad \alpha_k \in \mathbb{X}. \tag{2.3}$$

Voici une notion fondamentale dans la compréhension des fonctions presque périodiques.

Définition 2.1.4 *Une fonction* $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{X}$ *possède la propriété de l'approximation polynômiale si pour tout* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *il existe un polynôme trigonométrique* $\boldsymbol{P_\varepsilon}$ *tel que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

Le lien entre les définitions précédentes est consigné dans la proposition suivante :

Proposition 2.1.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- ❒ $\boldsymbol{f}$ *est presque périodique au sens de Bohr.*
- ❒ $\boldsymbol{f}$ *est presque périodique au sens de Bochner*
- ❒ $\boldsymbol{f}$ *satisfait le critère double suites de Bochner, c'est-à-dire, pour tout suites* $(\alpha'_n), (\beta'_n)$ *dans* $\mathbb{R}$*, on peut extraire des sous-suites* $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ *et* $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ *avec même indices tels que pour tout* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$*, les limites :*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(x+\alpha_n+\beta_m) \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} f(x+\alpha_n+\beta_n) \tag{2.5}$$

  existes et sont égales.
- ❒ $\boldsymbol{f}$ *possède la propriété d'approximation polynômiale.*

Propriétés 2.1.1 *:*

- ❒ *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *et* $\boldsymbol{F}$ *une primitive de* $\boldsymbol{f}$*. La fonction* $\boldsymbol{F}$ *est presque périodique si et seulement si elle est bornée.*
- ❒ *Une fonction presque périodique au sens de Bohr est bornée.*
- ❒ *Toute fonction presque périodique est bornée et uniformément continue.*
- ❒ *Une fonction presque périodique est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*.*

❒ *Si* $\boldsymbol{f}$ *est presque périodique alors pour tout* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ *toute applications* $\boldsymbol{x \longmapsto af(x), x \longmapsto f(ax)}$ *et* $\boldsymbol{x \longmapsto f(a+x)}$ *sont presque périodiques.*

❒ *Si* $\boldsymbol{f}$ *est presque périodique alors* $\|\boldsymbol{f}\|$ *l'est aussi.*

❒ *Une limite uniforme des fonctions presque périodiques est presque périodique.*

❒ *Si* $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ *sont deux fonctions presque périodiques alors* $\boldsymbol{f+g}$ *et* $\boldsymbol{f.g}$ *sont presque périodiques.*

❒ *La valeur moyenne d'une fonction* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R})$ *existe et elle est définie par :*

$$\boldsymbol{M\{f\} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx} \tag{2.6}$$

De plus, elle vérifie :

$$\boldsymbol{M\{\|f\|\} = 0 \Rightarrow f \equiv 0} \tag{2.7}$$

❒ *Soit :*

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

Si :

$$\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L^1}(\mathbb{R})$$

Alors :

$$\boldsymbol{f * g} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})^{\boldsymbol{1}}$$

Proposition 2.1.2 *Le sous-espace* $\boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *est fermé dans* $\boldsymbol{C}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Exemple 2.1.1 *:*

1.*Toute somme de fonctions périodiques à périodes aléatoires dont les rapports sont des* *nombres irrationnels, n'est pas périodique.*

Considérons la fonction $\boldsymbol{f}$ *définie par*

$$\boldsymbol{f(x) = \exp(ix) + \exp(i\sqrt{2}x)}$$

Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques, l'une de période $\boldsymbol{2\pi}$*, l'autre est de période* $\boldsymbol{\sqrt{2}\pi}$*. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe* $\boldsymbol{\tau \neq 0}$ *tel que pour tout réel* $\boldsymbol{x}$*, on dit*

$$\boldsymbol{f(x+\tau) = f(x)}$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\exp(ix)\exp(i\tau) + \exp(ip2x)\exp(i\sqrt{2}\tau) = \exp(ix) + \exp(i\sqrt{2}x)}$$

Ce qui implique que

$$\boldsymbol{\exp(ix)(exp(i\tau) - 1) + \exp(i\sqrt{2}x)(\exp(i\sqrt{2}\tau) - 1) = 0.}$$

En dérivant par rapport à $\boldsymbol{x}$ *on obtient*

$$\boldsymbol{i\exp(ix)(\exp(i\tau) - 1) + \sqrt{2}i\exp(i\sqrt{2}x)(\exp(i\sqrt{2}\tau) - 1) = 0.}$$

Pour $\boldsymbol{x = 0}$ *on a*

$$\boldsymbol{\exp(i\tau) - 1 + \sqrt{2}(\exp(i\sqrt{2}\tau) - 1) = 0.}$$

C'est-à-dire que

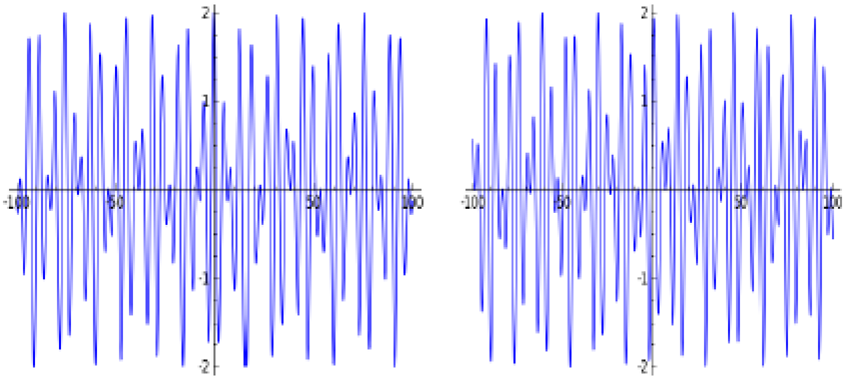
$$\boldsymbol{\exp(i\tau) = \exp(i\sqrt{2}\tau) = 1.}$$

Donc, il existe $\boldsymbol{k_1, k_2} \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\boldsymbol{\tau = 2k_1}$ *et* $\boldsymbol{\tau = \sqrt{2}k_2}$*, comme* $\boldsymbol{\tau \neq 0}$*, on obtient*

$$\boldsymbol{\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}}$$

Ce qui est absurde.

Donc $\boldsymbol{f}$ *n'est pas une fonction périodique.*



Représentation graphique de $\mathrm{Re}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$.

2.*La fonction* $\boldsymbol{f}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\boldsymbol{f(x) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}x)} \ .$$

On a vu précédemment que $\boldsymbol{f}$ *n'est pas périodique toutefois, elle est presque périodique comme polynôme trigonométrique.*

3.*Il est clair que toute fonction périodique continue est une fonction presque-périodique au sens de Bohr.*

En effet si $\boldsymbol{f}$ *est une fonction* $\boldsymbol{T}$*-périodique, alors tous les nombres de la forme* $\boldsymbol{nT, n = (\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)}$ *sont aussi des périodes de* $\boldsymbol{f}$ *, et donc sont des presque-périodes de* $\boldsymbol{f}$*, pour tout* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$*. Or l'ensemble* $\boldsymbol{\{nT, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}}$ *est relativement dense, ce qui implique que* $\boldsymbol{f}$ *est presque-périodique au sens de Bohr. Par contre la réciproque est fausse. On cite comme contre exemple la fonction numérique* $\boldsymbol{f(t) = cos(t) + cos(\sqrt{2}t), (t} \in \mathbb{R}\boldsymbol{)}$.

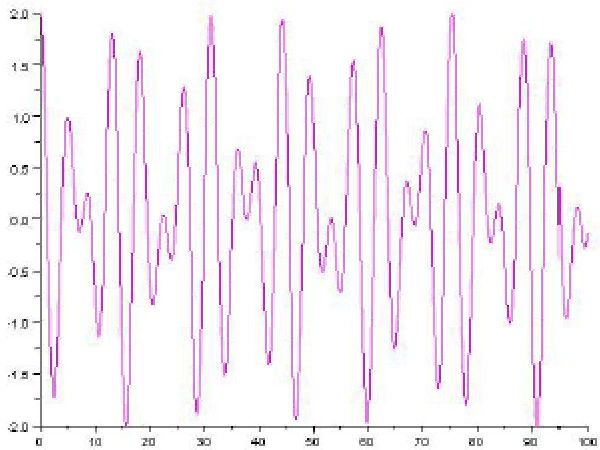


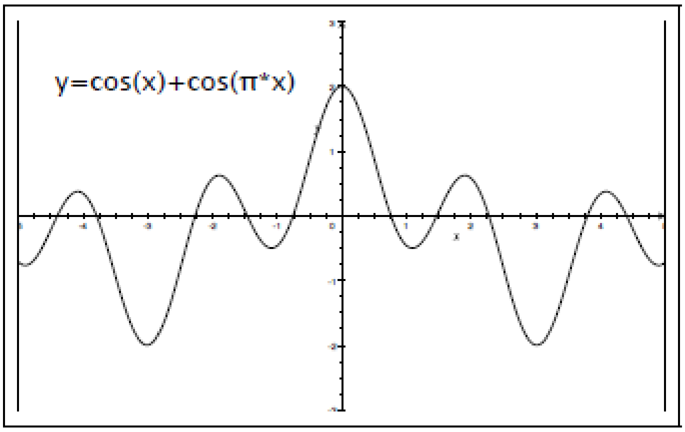
FIGURE 1.1 – *Un exemple de fonction presque-périodique.*

Exemple 2.1.2 *:*

Les fonctions presque périodique sont une généralisation des fonctions périodiques. Cette classe de fonctions intervient notamment en mécanique céleste. On sait que la fonction

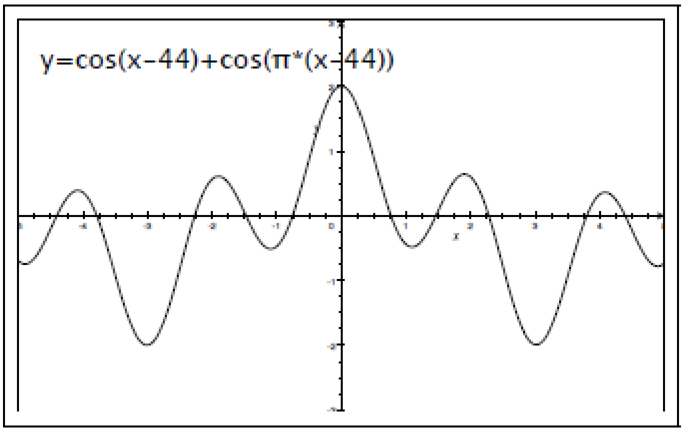
$$\boldsymbol{f(x) = cos(x) + cos(\pi x)}$$

N'est pas périodique. Cependant voici le graphe de la fonction $\boldsymbol{f}$



Et celui de la fonction

$$\boldsymbol{x \longmapsto f(x - 44)}$$



La différence des deux fonctions est très petite. Ceci est bien sur relié au fait que $\boldsymbol{\pi = \frac{22}{7}}$ *et donc que* $\mathbf{44}$ *est une presque période pour* $\boldsymbol{f}$

$$|f(x) - f(x-44)| = |\cos(x) - cos(x-44)|$$

$$= |\cos(x - 7 * 2 * \pi) - cos(x-44)|$$

$$\leq 7 * 2 * \pi - 44 \leq 0,018$$

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *est presque périodique si l'ensemble de ces translatées*

$$\{x \longmapsto f(x-\tau) = f_\tau(x), \tau \in \mathbb{R}\} \tag{2.8}$$

Est un ensemble pré compact de l'espace des fonctions continues bornées équipé de la norme uniforme.voir [1], [6], [15], [17]

Théorème 2.1.1 *Toute fonction presque périodique est bornée sur* $\mathbb{R}$.

2.1.1.1 propriétés de l'ensembles des nombres de translation

❒ *Soit* $\boldsymbol{f \in AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *alors* $\boldsymbol{E(\varepsilon, f) \subset E(\varepsilon', f), \forall \varepsilon' > \varepsilon}$

En effet, soit :

$$\tau \in E(\varepsilon, f) \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon < \varepsilon'$$

❒ $\forall \varepsilon > 0, E(\varepsilon, f)$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$

En effet, soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E(\varepsilon, f)$ *une suite qui converge vers* τ *dans* $\mathbb{R}$

Montrais que $\tau \in E(\varepsilon, f)$.

on a :$(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E(\varepsilon, f) \Rightarrow \forall_n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau_n) - f(x)| \leq \varepsilon \ .$$

Par passage à la limite et grâce à la continuité de f *on obtient :*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x + \lim_{n\to\infty} \tau_n) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \in E(\varepsilon, f)$$

Proposition 2.1.3 *Si* $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *alors* $Imf = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ *est relativement compact ds* $\mathbb{C}$ *c'est-à-dire :*

$$\overline{Imf} = \overline{\{f(x), x \in \mathbb{R}\}} \text{ est compact}$$

Preuve 2.1.1 *On suppose que* $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *montrons que* Imf *est relativement compact c'est-à-dire de toute suite de* Imf *on peut extraire une sous suite* wf.

Comme $\mathbb{C}$ *est compact alors la compacité relative coricide avec la pré compacité donc il suffit de montrer que* $\forall \varepsilon > 0$, *il existe un* x *bar fini de boule de rayon* ε *dans* $\mathbb{C}$ *tq leurs réunion coure* Imf

$$Imf \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$ *et* l *la longer d'inclusion de* f *associe à* ε.

comme f *est uniformément continue sur* $[0, l_\varepsilon]$ *alors* $\{f(x), x \in [0, l]\}$ *est un compact de* $\mathbb{C}$.

C'est-à-dire $\{f(x), x \in [0, l]\} \subset \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon)$

prenons $x_1, x_2, ..., x_n$ *les centres des boule que courent* $\{f(x), x \in [0, l_\varepsilon][$

Soit $x \in \mathbb{R}$ *et* τ *une* ε*-pp dans* $[-x, -x + l_\varepsilon]$ *alors :* $x + \tau \in [0, l_\varepsilon] \Rightarrow \exists_p \in \{1, .., n\}$

tq :$f(x + \tau) \in B(x_p, \varepsilon) \Rightarrow |f(x + \tau) - x_p| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - x_p| &= |f(x) - f(x + \tau) + f(x + \tau) - x_p| \\ &\leq |f(x) - f(x + \tau)| + |f(x + \tau) - x_p| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \in \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon) \Rightarrow Imf \subset \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon)$$

2.1.1.2 Stabilité par passage à la limite inférieure

Soit :

$$\{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f_n \to f\}, f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

Preuve 2.1.2 $f_n \to f \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

En particulier $\|f_n - f\| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

On a $f_{x_0} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *soit* $\tau \in E(\frac{\varepsilon}{3}, f_{x_0})$.

Alors :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{x_0}(x + \tau) - f_{x_0}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}|f(x+\tau)-f(x)| &= |f(x+\tau)-f(x)-f_{x_0}(x+\tau)+f_{x_0}(x+\tau)-f_{x_0}(x)-f(x)| \\ &\leq |f(x+\tau)-f_{x_0}(x+\tau)|+|f_{x_0}(x+\tau)-f_{x_0}(x)|+|f_{x_0}(x)-f(x)| \\ &\leq 3.\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc :

$$f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

.

2.1.2 Critère d'approximation

Définition 2.1.5 *On appelle* ***polynôme trigonométrique généralisé****, toute combinaison de la forme*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(i\lambda_k x) \text{ avec } ,\alpha_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

On note par A L'ensemble de ces polynômes.

Proposition 2.1.4 *L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisé* $A \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$

Preuve 2.1.3 *Il est clair que les fonctions* $x \longmapsto \exp(i\lambda_k x), \forall k = \widehat{(1:n)}$ *sont continues et périodiques, alors elles sont presque périodiques.*

Comme la somme des fonctions presque périodiques est toujours presque périodiques, alors $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(i\lambda_k x)$ *est presque périodique. Donc* $A \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *.*

Définition 2.1.6 *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{X}$ ***continue****, possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* ***polynôme trigonométrique*** $P\varepsilon \in A$ *tel que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\|_x \leq \varepsilon$$

Théorème 2.1.2 $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Leftrightarrow f$ *possède la propriété d'approximation.*

Propriétés 2.1.2 *:*

1 L'espace $(AP, \mathbb{R}, \mathbb{C}, +, .)$ *a une structure d'espace vectoriel c'est à dire :*

a : $\forall f, g \subset AP(\mathbb{R},\mathbb{C}), f + g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$

b : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$*, on a* $\alpha f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2 Si $f \subset AP(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$

3 Si $f, g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *alors* $f \cdot g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$

4 Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *est dérivable et* f' *est uniformément continue.*

Preuve 2.1.4 *:*

1 a : Montrons que $f + g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *. Soit* $\varepsilon > 0$*, alors :*

$$\begin{aligned} |f(x+\tau) + g(x+\tau) - f(x) - g(x)| &\leq |f(x+\tau) - f(x)| + |g(x+\tau) - g(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $f + g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$*.*

b :Montrons que $\alpha f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *. On a*

$$|\alpha f(x+\tau) - \alpha f(x)| = |\alpha|\,|f(x+\tau) - f(x)| \leq |\alpha|\,\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Car

$$|f(x+\tau)_f(x) \leq \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}|$$

Donc

$$\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

2 *Pour démontrer que la fonction* $|f|$ *est un élément de* $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *il suffit d'utiliser la relation suivante :*

$$||f(x+\tau)| - |f(x)|| \leq |f(x+\tau) - f(x)|\,.$$

3 *On supposai que* $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et montrons que* $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *soit* $\varepsilon > 0, \varepsilon \in]0,1[$ *alors :* $\exists l_\varepsilon \in P$ *tq :* $\|f - P_\varepsilon\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3M}$ *et* $\exists l_\varepsilon$ *tq :*$\|g - Q_\varepsilon\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$

Où :

$$M = \max(\sup|f(x)|, \sup|g(x)|) + 1$$

On a $P_\varepsilon, Q_\varepsilon \in P < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|fg - P_\varepsilon Q_\varepsilon\|_\infty = & \|fg - fQ_\varepsilon + fQ_\varepsilon - P_\varepsilon Q_\varepsilon\|\infty \\
& \leq \|f.g - f_\varepsilon\| + \|fQ_\varepsilon - P_\varepsilon Q_\varepsilon\|_\infty \\
& \leq \|f\|_\infty \|g - f_\varepsilon\|\infty + \|Q_\varepsilon\|\infty \|g - P_\varepsilon\|_\infty \\
& \leq M.\frac{\varepsilon}{3M} + \|Q_{\varepsilon - g + g}\|.\frac{\varepsilon}{3M} \\
& \leq \frac{\varepsilon}{3} + (\|Q_\varepsilon - g\|_\infty + \|g\|_\infty)\frac{\varepsilon}{3M} \\
& \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{gM^2} + M.\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

4 On a $\boldsymbol{f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})}$ *est dérivable,* $\boldsymbol{f'}$ *est uniformément continu, montrons que* $\boldsymbol{f' \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})}$

On cherche a écrire $\boldsymbol{f'}$ *comme limite uniformément d'une suite de fonction presque périodique*

On a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} x(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))}$

On pose $\boldsymbol{f_1(x) = xf(x+1) - f(x)}$ *on a* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^+, \boldsymbol{f_1 \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})}$

$$
\begin{aligned}
|f'(x) - f_n(x)| &= \left| f'(x) - x\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(x) - f'(t)dt \right| \\
&\leq x\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(x) - f'(t)|\, dt \\
&\leq x \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x) - f'(t)|\,, \forall t \in [x, x+\frac{1}{n}]
\end{aligned}
$$

Prénoms $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$*, l'uniforme continuité de* $\boldsymbol{f'}$ *assure l'existence d'une* $\boldsymbol{\delta > 0}$ *tq si :* $\boldsymbol{|u - v| < \delta}$ *alors* $\boldsymbol{\|f'(u) - f'(v)| \leq \varepsilon}$

$\exists \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{N}$ *tq pour* $\boldsymbol{x \geq x_0, \frac{1}{n} \leq \delta}$ *donc pour* $\boldsymbol{n \geq x_0}$ *et* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{|f'(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon}$

d'oi la convergence uniforme de $\boldsymbol{(f_n)_n}$ *vers* $\boldsymbol{f'}$ *ce qui do une* $\boldsymbol{f'_\alpha \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})}$

Exemple 2.1.3 *Tout polynôme trigonométrique est une fonction presque périodique.*

2.1.3 Critère de Bochner

Définition 2.1.7 *Une fonction* $\boldsymbol{f}$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{X}$*, continue est dite normale ou presque périodique au sens de Bochner si l'ensemble de ses translatés*

$$\{\boldsymbol{f_\alpha, \alpha} \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans $\boldsymbol{C_b}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*.*

Où

$$\boldsymbol{f_\alpha(x+\alpha)}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, pour toute suite bornée de nombres réels $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, on peut extraire une sous suite* $\{hn_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite de fonctions* $(f(x+hn_k))_{k\in\mathbb{N}}$ *soit uniformément convergente.*

Le théorème suivant arme que la presque périodicité de ***Bohr*** *et celle de* ***Bochner*** *sont équivalentes.*

Théorème 2.1.3 *Soit* $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{X}$ *une fonction continue. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

❒ f *est normale.*

❒ f *est presque périodique au sens de* ***Bohr****.*

Preuve 2.1.5 *:*

La nécessité *: Raisonnons par contra position, on suppose que* $f \notin AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et montrons que* f *n'est pas normale.*

Soit $f \notin AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$*, c'est à dire il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que* $\forall \ell > 0$*, il existe un intervalle de longueur* ℓ *qui ne contient aucun* ε_0*-nombre de translation.*

Pour montrer que f *n'est pas normale, il suffit de construire une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\forall i \neq j, |u_i - v_j| \notin E(\varepsilon_0, f) \tag{2.9}$$

Où $E(\varepsilon_0, f)$ *l'ensemble des* ε_0*-nombre de translation associé à la fonction* f*.*

En effet pour une telle suite, on aura :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+u_i-u_j) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon_0$$

Soit encore,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\|f(x+u_i)-f(x+u_j)\|_{\mathbb{X}}>\varepsilon_0$$

Ce qui montre que l'on ne peut pas extraire une sous-suite convergente de la suite $(fu_n)_n$.

Donc f *ne serait pas normale.*

Pour construire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on procède comme suit :*

Soit $u_1\neq 0$*, il existe un intervalle* $[a_1,b_1]$ *, tel que*

$$(b_1-a_1)>2\,|u_1|$$

qui ne contient aucun $\tau(\varepsilon_0$*-translation), car* f *n'est pas presque périodique. On pose,*

$$u_1=\frac{1}{2}(a_1-b_2)$$

Alors,

$$u_2-u_1\in[a_1,b_2]$$

Car,

$$u_2-u_1-a_1=\frac{b_1-a_1-2u_1}{2}>0$$

Et

$$b_1-(u_2-u_1)=\frac{b_1-a_1+2u_1}{2}>0.$$

Donc : (u_2-u_1) *ne peut pas être un* ε*-nombre de translation, c'est-à-dire*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\|f(x+u_2-u_1)-f(x)\|_{\mathbb{X}}>\varepsilon$$

Il existe un autre intervalle $[a_2,b_2]$*, tel que*

$$b_2-a_2>2(|u_1|+|u_2|)$$

qui ne contient aucun ε-nombre de translation.

On pose,

$$u_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$$

Comme $(u_3 - u_1)$ *et* $(u_3 - u_2) \in [a_2, b_2]$, *et ne peuvent pas être des* ε*-nombres de translation, donc nous avons*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x + u_3 - u_1) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x + u_3 - u_2) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon$$

En répétant la même procédure, à l'ordre n, *il va exister un autre intervalle* $[a_n, b_n]$, *tel que*

$$b_n - a_n > 2(|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|)$$

Qui ne contient aucun ε*-nombre de translation. On pose,*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

On aura

$$\forall i < n + 1, u_{n+1} - u_i \in [a_n, b_n]$$

Donc les $(u_{n+1} - u_i)$, *pour* $i < n + 1$, *ne peuvent pas être des* ε*-nombres de translation.*

Finalement, on a construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui vérifie* (2.9).

La suffisance

Supposons que $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *et montrons que* f *est normale.*

Soient $S = (Sn)_n$ *une suite d'ensembles dense dans* $\mathbb{R}$ *et* $(fu_n)_n$ *une suite de translation de* f.

$$fu_n(t) = f(u_n + t).$$

On procède au choix d'une sous suite de $(fu_n)_n$ *convergente.*

$(fu_{1,n})_n$ *une sous suite de* $(fu_n)_n$ *convergente dans* S_1, $(fu_{2,n})_n$ *une sous suite de* $(fu_{1,n})_n$

convergente dans $\boldsymbol{S_2}$*, ainsi de suite pour les autres termes,* $(\boldsymbol{fu_{i,n}})_n$ *une sous suite de* $(\boldsymbol{fu_{(i-1)n}})_n$ *convergente dans* $\boldsymbol{S_i}$*.*

On forme la suite diagonale $(\boldsymbol{fu_{n,n}})_n$ *qui converge dans* $\boldsymbol{S}$*.*

Maintenant, on s'intéresse à la convergence uniforme de la suite $(\boldsymbol{fu_{n,n}})_n$*, qui sera notée* $\boldsymbol{f(v_n)_n}$. *Soit* $\boldsymbol{\varepsilon > 0, \ell = \ell_\varepsilon > 0}$ *longueur d'intervalles qui contiennent des* $\boldsymbol{\varepsilon}$*-nombres translation correspondant à la presque périodicité de* $\boldsymbol{f}$*, et* $\boldsymbol{\sigma}$ *correspond à la continuité uniforme de la fonction* $\boldsymbol{f}$*, on décompose l'intervalle* $[\boldsymbol{0, \ell}]$ *en des sous-intervalles de longueur inférieure à* $\boldsymbol{\sigma}$ *et dans chacun, on choisit un point de* $\boldsymbol{S}$*.*

Soit $\boldsymbol{S_0}$ *l'ensembles des points choisis*

$$\boldsymbol{S_0 = \{r_1, r_2, ..., r_p\}} .$$

La suite $(\boldsymbol{fv_n})_n$ *est uniformément convergente, donc il existe* $\boldsymbol{N_\varepsilon}, \forall \boldsymbol{m, n > N_\varepsilon}$ *on a*

$$\|\boldsymbol{f_{vn}(r_i) - f_{vm}(r_i)}\|_{\mathbb{X}} < \boldsymbol{\varepsilon, i = 1, 2, ..., p}$$

$\forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$*, il existe un* $\boldsymbol{\tau}$*(*$\boldsymbol{\varepsilon}$*-nombre translation) dans l'intervalle* $[\boldsymbol{-t; -t+\ell}]$*. Où* $\boldsymbol{\tau + t} \in [\boldsymbol{0, \ell}]$ *, et soit* $\boldsymbol{r_i \in S_0}$ *tel que* $|\boldsymbol{\tau + t - r_i}| < \boldsymbol{\sigma}$*. Pour* $\boldsymbol{m, n > N_\varepsilon}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{fv_n(t) - fv_m(t)}\|_{\mathbb{X}} &= \|\boldsymbol{f(v_n + t) - f(v_m + t)}\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \|\boldsymbol{f(v_n + t) - f(v_m + t)}\|_{\mathbb{X}} + \|\boldsymbol{f(v_n + \tau + t) - f(r_i + v_n)}\|_{\mathbb{X}} \\
&+ \|\boldsymbol{f(r_i + v_n) - f(r_i + v_m)}\|_{\mathbb{X}} + \|\boldsymbol{f(r_i + v_m) - f(v_m + \tau + t)}\|_{\mathbb{X}} \\
&+ \|\boldsymbol{f(v_m + \tau + t) - f(v_m + t)}\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \boldsymbol{5\varepsilon = \bar{\varepsilon}.}
\end{aligned}$$

Donc la sous-suite $(\boldsymbol{fv_n})_n$ *de* $(\boldsymbol{fu_n})_n$ *est uniformément convergente, ce qui nous confirme la normalité de la fonction* $\boldsymbol{f}$*.*

Définition 2.1.8 *Une fonction* $\boldsymbol{f}$ *est dite normale où presque périodique ou sens de* ***Bochner*** *si l'ensemble de ses translatés* $\boldsymbol{H(f) = f_a, f_a(t) = f(t+a), t} \in \mathbb{R}$ *relativement compact dans* $\boldsymbol{C_B}(\mathbb{R},\mathbb{C}), (\boldsymbol{C_R}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ *l'espace des fonctions continue et borné de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$
Autrement dit pour suite $(\boldsymbol{hn})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *on peut entrera une sous-suite* $(\boldsymbol{hn_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tq :*
la suite $(\boldsymbol{f(x+h_{nk})})_{\boldsymbol{k}}$ *uniformément converge.*

Théorème 2.1.4 *si* $\boldsymbol{f}$ *est normal (AP aux sens de* ***Bochner****) alors* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Preuve 2.1.6 *par cestraposé :*
On supposé que $\boldsymbol{f} \notin \boldsymbol{AP}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow \exists\boldsymbol{\varepsilon_0 > 0}, \forall\boldsymbol{\ell > 0}\exists\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{\ell}] \bigcap \boldsymbol{E(\varepsilon_0, f)} = \varnothing$
C'est-à-dire $\forall\boldsymbol{f} \;>\; \boldsymbol{0}$ $\;\exists$ *un intervalle de longueur* $\boldsymbol{\ell}$ *qui ne contient aucune* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$*-presque périodique alors il possible de construire une suite* $(\boldsymbol{hn})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*. tq :* $\forall\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \quad (\boldsymbol{h_i - h_j}) \notin \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon_0}, \boldsymbol{f})$
On a :

$$(\boldsymbol{h_i - h_j}) \notin \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon_0}, \boldsymbol{f})$$

,

$$\Rightarrow \sup |\boldsymbol{f(x + (h_i - h_j)) - f(x)}| > \boldsymbol{0}$$

On pose

$$\boldsymbol{y = x - h_j \Rightarrow x = y + h_j}$$

$$\Rightarrow \sup |\boldsymbol{f(y - h_i) - f(y + h_j)}| > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \|\boldsymbol{fh_i - fh_j}\|_\infty > \boldsymbol{\varepsilon_0}$*, ce qui montre que l'on ne peut pas extraire de* $(\boldsymbol{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *une sous suite* $(\boldsymbol{h_{nk}})_{\boldsymbol{k}}, (\boldsymbol{f(x + h_{nk})_k}$ *soit uniformément converge*

La construction de la suite $(\boldsymbol{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $\boldsymbol{h_1 \neq 0}$.$\exists$ *un intervalle* $[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}]$ *tq* :$\boldsymbol{b_1 - a_1 > 2\,|h_1|}$ *qui ne contient aucune* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$*-presque périodique*

On pose :

$$\boldsymbol{h_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}}$$

Alors :

$$\boldsymbol{h_2 - h_1 \in [a_1, b_2]}$$

Car :

$$\boldsymbol{h_2 - h_1 - a_1 = \frac{a_1 + b_1 - 2h_1 - a_1 2}{2} = \frac{b_1 - 2h_1 - a_1}{2} > 0}$$

Et

$$\boldsymbol{b - (h_2 - h_1) = b_1 - \frac{a_1 + b_1}{2} - h_1 = \frac{ab_1 - a_1 - b_1 + 2h_1}{2} = \frac{b_1 - a_1 + 2h_1}{2} > 0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{h_2 - h_1 \in [a_1, b_1]}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{h_2 - h_1}$ *n'est pas une* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$*-presque périodique*

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \boldsymbol{|f(x + (h_2 - h_1)) - f(x)| > \varepsilon_0}$$

Il existe un intervalle $[\boldsymbol{a_2.b_2}]$ *tq :* $\boldsymbol{(b_2 - a_2) > 2(|h_1| = |h_2|)}$ *qui ne contient aucune* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$*-presque périodique*

On pose

$$\boldsymbol{h_3 = \frac{b_2 - a_2}{2}}$$

Alors et $\begin{cases} \boldsymbol{h_3 - h_1 \in [a_2, b_2]} \\ \\ \boldsymbol{h_3 - h_2 \in [a_2, b_2]} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{h_3 - h_1}$ *n'est pas une* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$*-presque périodique*

On supposé que $\boldsymbol{h_1 - h_n}$ *existent avec* $\boldsymbol{h_i - h_j \notin E(\varepsilon_0, f)}$ *si* $\boldsymbol{i.j \in 1, n}$ *avec* $\boldsymbol{i \neq j}$.

Il existe un intervalle $[\boldsymbol{a_n, b_n}]$ *tq :*

$$\boldsymbol{b_n - a_n \geq 2 \sum_{j=1}^{n} |h_j|}$$

ne contient aucune $\boldsymbol{\varepsilon_0}$*-presque périodique*

On pose

$$\boldsymbol{h_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow h_{n+1} - h_i \in [a_n, b_n], \forall i \in 1, n}$$

Car :

$$\boldsymbol{h_{n+1} - h_i - a_n = \frac{b_n - a_n + 2h_i}{2} > 2 \sum_{j=1}^{n} |h_j| - h \geq 0}$$

Et :

$$\boldsymbol{b_n - (h_{n+1} - h_i) = \frac{b_n - a_n + 2h_i}{2} > \sum_{j=1}^{n} |h_j| - h \geq 0}$$

ce qui achevé la démonstration

2.2 Propriétés des fonctions presque périodiques

2.2.1 Espace vectoriel de fonctions presque-périodiques

Définition 2.2.1 *On dit qu'une fonction* $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ *est presque-périodique (au sens de* ***Bohr****) si elle est continue et elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1 $\forall > \boldsymbol{0}, \exists \boldsymbol{\ell} > \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \exists \boldsymbol{\tau} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\ell}], \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, |\boldsymbol{f(x + \tau) - f(x)}|_{\mathbb{E}} < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Ici, $\boldsymbol{\tau}$ *est dit* ***presque-période*** *attachée à* $\boldsymbol{\varepsilon}$*, et* $\boldsymbol{\ell}$ *est dite longueur d'inclusion attachée* *à* ε*.*

2 f *vérifie* ***la propriété de normalité*** *: de toute suite de translatées* $(\tau_{hn}f)_n$*, on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur* $\mathbb{R}$*.*

3 f *vérifie la* ***propriété d'approximation*** *:* f *est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques, c'est-à-dire qu'il existe une suite double* $(a_n, p)_{(n,p)} \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *où pour tout* n*,* $(a_n, p)_{p\in\mathbb{Z}}$ *est presque-nulle, telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_n, p \exp_p\|_\infty = 0.$$

(où $\exp_p(t) := \exp^{ipt}$ *.)*

Exemple 2.2.1 *:*

1 *Toute fonction périodique est presque-périodique.*

2 *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) := \sin(2\pi x) + \sin(\sqrt{2}\pi x).$$

La fonction f *ainsi introduite est presque-périodique au sens de Bohr. En effet, on choisit* τ *un entier et* $\tau\sqrt{2}$ *différent d'un autre entier par moins de* $\varepsilon/2\pi$*. Alors, il est clair que*

$$f(x+\tau) = \sin(2\pi x) + \sin(2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon).$$

En vertu du théorème des Accroissements Finis appliqué à la fonction sinus entre

$A = 2\pi x\sqrt{2}$ *et* $B = 2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon$*, il existe un certain* $\alpha \in]0,1[$ *tel que*

$$f(B)f(A) = f'(A + \alpha(BA)).(BA),$$

ou encore, $\sin(2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon)sin(2\pi x\sqrt{2}) = cos(2\pi x\sqrt{2} + \alpha\theta\varepsilon).\theta\varepsilon =, \theta'\varepsilon$ *où* $\theta' = \cos(2\pi x\sqrt{2} + \alpha\theta\varepsilon).\theta$ *et donc* $|\theta'| \leq 1$.

Ceci entraîne que $\sin(2\pi x\sqrt{2} + \theta\varepsilon) = sin(2\pi x\sqrt{2}) + \theta'\varepsilon$ *et donc en revenant à la formule avec* f *on obtient que* $f(x + t) = f(x) + \theta'\varepsilon$*. Il en résulte que la première assertion de la définition* $(2.2.1)$ *est satisfaite. Du point de vue géométrique, on observe l'existence de presque périodes à partir de l'allure de sa courbe représentative donné par la figure* (1.1)

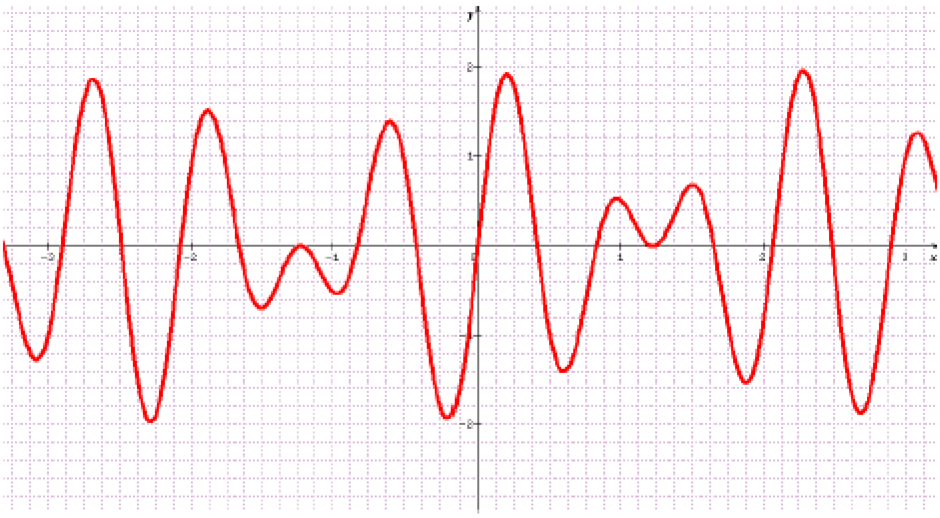


FIGURE 1.1 – **Représentation graphique de la fonction** f.

.

Le point 3. de la définition précédente peut être exprimée de la façon suivante :"$AP^0(\mathbb{E})$ *est aussi la fermeture pour la norme de la convergence uniforme de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions continues périodiques." Par conséquent, muni de la norme* $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|_{\mathbb{E}}$

La proposition suivante expose certaines propriétés des fonctions presque-périodiques. Pour les démonstrations (et plus de détails), on renvoie aux livres (Besicovitch, 1954) *et (Corduneanu, 1989) .*

voir [5] et [9].

2.2.2 Dérivation des fonctions presque périodiques

Lorsque une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. Pour les fonctions presque périodiques, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour la presque périodicité. En fait le résultat suivant assure que cette condition est suffisante.

Théorème 2.2.1 *Si la dérivée f' d'une fonction f presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est presque périodique.*

Preuve 2.2.1 *:*

Soit$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ *; où $f_1(x), f_2(x)$ sont des fonctions réelles. Du fait que*

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$$

il en résulte que $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$ sont uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Considérons les fonction

$$\varphi_n = n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)], n = 1, 2, 3...$$

On a

$$\varphi_n = f'(x + \frac{\theta_n}{n}) = f_1'(x) + if_2'(x + \frac{\tau_n}{n}), 0 < \tau_n, \theta_n < 1,$$

ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une $N(\varepsilon)$ de telle sorte que

$$|\varphi_n - f'(x)| < \varepsilon$$

les fonctions φn *sont presque périodique et, par conséquent,* f' *est presque périodique.*

Proposition 2.2.1 *Si la dérivée* f' *d'une fonction presque périodique* f *est presque périodique alors sa série de Fourier est obtenue par dérivation formelle de la série associée à la fonction* f.

Preuve 2.2.2 *Supposons que* f' *est presque périodique, alors sa valeur moyenne* $M(f' \exp^{-i\lambda x})$ *existe et comme*

$$\frac{1}{X}\int_{\alpha}^{\alpha+X} dx = \frac{1}{X} f \exp_{\alpha}^{-i\lambda x\ \alpha+X} + \frac{i\lambda}{X}\int_{\alpha}^{\alpha+X} f \exp^{-\lambda x} \tag{2.10}$$

et pour $X \to +\infty$

$$M(f' \exp^{-i\lambda x}) = i\lambda M(f) \tag{2.11}$$

il vient que f' *est de mémé exposants de Fourier de* f, *on exempt pour* $\lambda = 0$, *si est visible entre l'exposants de Fourier de* f. *Si on note* A'_n *le coefficient de Fourier de* f', *en utilisant la formule (2.11) on obtient*

$$A'_k = i\lambda_k A_k$$

par suite

$$f'(x)\tilde{}\sum_{k=1}^{+\infty} i\lambda_k A_k \exp^{i\lambda_k x} \tag{2.12}$$

voir [1] et [8].

2.3 Séries de Fourier des fonctions presque périodiques

but *:associer à une fonction presque périodique une série de forme* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp^{i\lambda_k x}$ *avec*$C_k \in \mathbb{C}.\lambda_k \in \mathbb{R}$

on cherche à obtenir les coefficients $\boldsymbol{C_k}$ *et* $\boldsymbol{\lambda_k}$ *valeur moyenne d'une fonction presque périodique*

2.3.1 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Définition 2.3.1 *:*

soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *on définit la valeurs moyenne de* $\boldsymbol{f}$ *par :* $\boldsymbol{M(f)} = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

Il faut vérifier qui un tel nombre existent

Proposition 2.3.1 *: pour tout fonction* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *le nombre* $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$ *existe indépendamment de* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *et vaut* $\boldsymbol{M(f)}$.

Preuve 2.3.1 *:*

i : *Montres l'existence de cette limite .*

$\mathbf{1}^{er}$ ***cas*** *: on montres que la limite existe par un polynôme généraliser,*

Soit $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{p(x)} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \exp^{i\lambda_k x}$ *avec* $\boldsymbol{\lambda_k \neq 0}$

alors

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} p(x)dx &= \int_a^{a+T} \sum_{k=1}^{n} C_k \exp^{i\lambda_k x} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_a^{a+T} C_k \exp^{i\lambda_k x} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{C_k}{i\lambda_k} \exp^{i\lambda_k x} \right|_a^{a+T} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{(\exp^{i\lambda_k(a+T)} - \exp^{i\lambda_k a})}{i\lambda_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} p(x)dx\right| &\leq \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{C_k}{i\lambda_k}\right|\left(\left|\exp^{i\lambda_k(a+T}\right| + \left|\exp^{i\lambda_k a}\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n} 2\left|\frac{C_k}{i\lambda_k}\right| \overrightarrow{T \to +\infty} 0 \quad indpend \quad de \quad a\end{aligned}$$

si $\exists k_0$ *tp :* $\lambda_{k_0} = 0,$*alors :* $p(x) = C_{k_0} + \sum_{k=0, k\neq k_0}^{n} C_k \exp^{i\lambda_k x}$

$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} p(x)dx = C_{k_0} < \infty.$

2^{er} ***cas*** *:*

Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

. Soit $\varepsilon > 0$*, alors* $\exists p_\varepsilon \subset P$ *tq :* $\|f - \exists p_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$

Soit $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} f(x)dx\right| &\leq \left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} P_\varepsilon(x)dx\right|\\ &+ \left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} P_\varepsilon(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} P_\varepsilon(x)dx\right|\\ &+ \left|\frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} P_\varepsilon(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} f(x)dx\right|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} P_\varepsilon(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_a^{a+T_2} P_\varepsilon(x)dx\right| + \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned} \tag{I}$$

d'après le 1^{er} *cas on peut trouver* $T_0 > 0$ *tq :* $\forall T_1, T_2 > T_0$ *on a :*

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_a^{a+T_1} P_\varepsilon(x)dx - \frac{1}{2T_2}\int_a^{a+T_2} P_\varepsilon(x)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui donne

$$(I) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ii **:** *montres que la limite ne dépend pas de a .*

on a : $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow f$ *est bornée sur* $\mathbb{R} \Rightarrow \exists M > 0$ *tq :*$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq M$ *sans perdre de généralité on peut supposer que* $a > 0$ *et* $T > a$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx &= \frac{1}{T}\left|\int_a^T f(x)dx + \int_0^{a+T} f(x)dx - \right| \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_T^{T+a} f(x)dx \qquad - \qquad \int_0^a f(x)dx \\
&\leq \frac{1}{T}\int_T^{T+a} |f(x)|\, dx + \frac{1}{T}\int_0^a |f(x)|\, dx \\
&\leq \frac{1}{T}.a.M + \frac{1}{T}.M.a \\
&\leq \frac{2aM}{T}\xrightarrow{T\to\infty} 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = M(f)$$

2.3.2 Propriétés de la Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

nous renvoyons le lecteur 'a [1], [11] et [12].

Propriétés 2.3.1 *soient* f *et* g *deux fonctions ,*$f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *et* $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *alors on a les propriétés suivent :*

1 $M\{\alpha f\} = \alpha M\{f\}, \forall\alpha \in \mathbb{K}$

2 si $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *alors* $M\{f\} \geq 0$

3 $M\{f+g\} = M\{f\} + M\{g\}$

4 soit $(\boldsymbol{f_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{AP}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. *Qui converge uniformément vers une fonction* $\boldsymbol{f}$. *Alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{f_n}\right\} = \boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{f}\right\} \tag{2.14}$$

Preuve 2.3.2 *1 on a :* $\boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{\alpha f}\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{\alpha f(t)dt}$ *De la linéarité de l'intégrale, on déduit que*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{\alpha f}\right\} &= \boldsymbol{\alpha}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{f(t)dt}\right)\\ &= \boldsymbol{\alpha M}\left\{\boldsymbol{\alpha f}\right\}.\end{aligned}$$

2 Supposons que $\boldsymbol{f(t)} \geq \mathbf{0}$. *Alors, on a :* $\int_0^T \boldsymbol{f(t)dt} \geq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{T} \geq > \mathbf{0}$, *d'où*

$$\boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{f}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{f(t)dt}$$

3 on a : $\boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{f+g}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T (\boldsymbol{f+g})\,\boldsymbol{(t)dt}.$ *Comme l'intégrale est linéaire, alors*

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T (\boldsymbol{f+g})\,\boldsymbol{(t)dt} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{f(t)dt} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{g(t)dt},$$

d'où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{\alpha f+g}\right\} &= \lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{f(t)dt} + \lim_{T\to\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \boldsymbol{g(t)dt},\\ &= \boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{f}\right\} + \boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{g}\right\}.\end{aligned}$$

4 on a :

$$\begin{aligned}
\|M\{f_n\} - M\{f\}\|_E &= \|\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (f_n(t) - f(t)dt\|_E \\
&\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|(f_n(t) - f(t)\|_E dt \\
&\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|(f_n(t) - f(t)\|_\infty \\
&= \|(f_n(t) - f(t)\|_\infty
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtiendrons

$$\lim_{T\to\infty} \|M\{f_n\} - M\{f\}\|_E \leq \lim_{T\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Finalement, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} M\{f_n\} = M\{f\}$$

2.3.3 Séries de Fourier associée à une fonction presque périodique

comme les fonction périodique , les presque périodique peuvent être représenter parleurs série de Fourier

Définition 2.3.2 *: soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a définit le coefficient*

$$a(\lambda) = M(f(x)\exp^{-i\lambda x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} f(x)\exp^{-i\lambda x} dx, a(\lambda)$$

existe .

Théorème 2.3.1 *: soit* $\boldsymbol{f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$ *et* $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n}$ *des réels deux à deux distincts .*

Soit $\boldsymbol{b_1, b_2, ..., b_N, N}$ *nombre complexe .*

Alors :

$$M\left(\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{-i\lambda x}\right|^2\right) = M\left(|f(x)|^2 - \sum_{n=1}^{N}|a(\lambda_n)|^2 + \sum_{n=1}^{N}|b_n - a(\lambda_n)|^2\right).$$

Preuve 2.3.3 *:*

$$\begin{aligned}
M\left(\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x}\right|^2\right) &= M\left(f(x)-\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x}\right)\left(\overline{f(x)}-\sum_{n=1}^{N} \overline{b_n} \exp^{-i\lambda_k x}\right) \\
&= M\left(f(x)\overline{f(x)} - f(x)\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{-i\lambda_k x}\right. \\
&- \left.\overline{f(x)}\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x} + \left(\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \overline{b_n} \exp^{-i\lambda_k x}\right)\right. \\
&= M\left(|f(x)|^2\right) - M\left(f(x)\sum_{n=1}^{N} \overline{b_n} \exp^{i\lambda_k x}\right) \\
&- M\left(\overline{f(x)}\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x}\right) \\
&+ M\left(\left(\sum_{n=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \overline{b_n} \exp^{-i\lambda_k x}\right)\right) \\
&= M\left(|f(x)|^2\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} \overline{b_n} M\left(f(x)\exp^{-i\lambda_k x}\right)\right) \\
&- \sum_{n=1}^{N} b_n M\left(\overline{f(x)}\exp^{i\lambda_k x}\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_k \overline{b_j} M\left(\exp^{i\left(\lambda_k-\lambda_j\right)x}\right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

comme :

$$M\left(\exp^{i\lambda_k-\lambda_j x}\right) = \begin{cases} 1 \quad si \quad \lambda_k = \lambda_j \\ \\ 0 \quad si \quad nom \end{cases}$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_k\overline{b_j}\left(M\left(\exp^{i\left(\lambda_k-\lambda_j\right)x}\right)\right)=\sum_{n=1}^{N}|b_n|^2$$

par conséquent :

$$M\left(\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N} b_n \exp^{i\lambda_k x}\right|^2\right)=M\left(|f(x)|^2\right)-\sum_{n=1}^{N} b_n a(\lambda_n)-\sum_{k=1}^{N} b_n\overline{a}(\lambda_n)+\sum_{k=1}^{N}|b_n|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N}|a\left(\lambda_n\right)|^2\leq M\left(|f(x)|^2\right)$$

(Inégalité de Passeval)

Lemme 2.3.1 *: Soit* $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$*, l'ensemble* $E=\{\lambda\in\mathbb{R}, a(\lambda)\neq 0\}$ *est dénombrable.*

Preuve 2.3.4 *:*

$E=\{\lambda\in\mathbb{R}, a(\lambda)\neq 0\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\{\lambda\in\mathbb{R}, |a(\lambda)|\geq\frac{1}{n}\right\}.$

pour montrer que E *est dénombrable , il suffit de montrer que :* $F_n=\left\{\lambda\in\mathbb{R}, |a(\lambda)|\geq\frac{1}{n}\right\}$ *est finie.*

par l'absurde *:*

supposons que corde $F_n\geq n^2\left(\left[M(|f(x)|^2)\right]+1\right)=P$.

Alors $\exists\lambda_1,...,\lambda_p\in\mathbb{R}$ *tq :*

$$|a(\lambda_k)|\geq,\forall k=\widehat{1,p}$$

d'après la remarque précédente on a :

$$\begin{aligned} M\left(|f(x)|^2\right) &\geq \sum_{k=1}^{p} |a(\lambda_k)|^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n^2} \\ &= \left[M(|f(x)|)^2\right] + 1, ce \quad qui \quad est \quad absurde \end{aligned}$$

donc F_n *est finie.*

Inégalité de Passeval

si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n) \exp^{i\lambda_n x}$.

alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(\lambda_n)|^2 = M(|f(x)|^2)$$

Lemme 2.3.2 *: Soit* $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *, alors peur tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\ell > 0$ *et* $\delta > 0, (0 < 2\delta < \ell)$ *tq : tout intervalle de longueur* ℓ *contient un sous intervalle de longueur* 2δ *dont tous les élt sont des* ε*-presque périodique de* f

Preuve 2.3.5 *:*

$f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow f$ *est uniformément continue* $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tq :*$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1 - f(x_2))| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0$*, tq :* $\forall a \in \mathbb{R}$ *il existe* $\tau_a \in [a, a+h] \bigcap E(\frac{\varepsilon}{2}, f)$.

Soit $\ell = h + 2\delta$ *on a :considéré l'intervalle* $[a - \delta, a + h + \delta](a \in \mathbb{R})$ *de logeur* $a + h + \delta - a + h = 2\delta + h = \ell$*, l'intervalle* $[\tau_a - \delta, \tau_a + \delta] \subset [a - \delta, a + h + \delta]$

Soit $\tau \in [\tau_a - \delta, \tau_a + \delta]$ *Alors :*

$$\begin{aligned}|f(t+\tau) - f(t)| &\leq |f(t+\tau) - f(t+\tau_a)| + |f(t+\tau) - f(t)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(L'uc) + \frac{\varepsilon}{2}, (La \quad presque \quad périodique) \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 *: unicité de la série de Fourier deux fonction presque périodique distincts ont des série de fourrier distincts.*

Preuve 2.3.6 *:*

on veut montrer que si $f \neq g \Rightarrow S(f) \neq S(g)$ *ceci revient à montrer que si* $S(f) = S(f) \Rightarrow f = g$

si $S(f) = S(g)$ *alors par l'égalité de par seval on obtient :*$M(|f-g|^2) = 0$.

Donc pour montrer que $M(|f-g|^2) = 0 \Rightarrow f = g$.

$i:$ *suffit de montrer que tt fonction positive ayant un valeur moyenne nulle est nulle c'est-à-dire :*

ce qui revient à montrer que :

si $f \geq 0$ *alors* $f > 0 \Rightarrow M(f) > 0$ *on suppose que* $f > 0 \Rightarrow \exists_{n_0} \in \mathbb{R}$ *tq :* $f(x_0) = \alpha > 0$.

soit $\ell > 0$ *et* $\delta > 0, (0 < 2\delta < \ell)$ *tq tout intervalle de logeur* ℓ *contient un sous intervalle de logeur* 2δ *constitué du* $\frac{\alpha}{3}$ *presque périodique de* f *et tq :*$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\alpha}{3}$

ii *: Montrons que tout intervalle de longer* ℓ *contient un sous intervalle de longer* 2δ *que ne contient des* x *tq :*$f(x) > \frac{\alpha}{3}$.

soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, *on considéré l'intervalle* $[\boldsymbol{a-\delta-x_0, a-\delta-x_0+\ell}]$

Soit :

$$\boldsymbol{T \in [a-\delta-x_0, a-\delta-x_0+\ell] \bigcap E(\frac{\alpha}{3}, f)}$$

soit $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}, |x-x_0| < \delta}$, *alors :*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f(x+T)} &= \boldsymbol{f(x+T)+f(x)-f(x)+f(x_0)-f(x_0)} \\
&= \boldsymbol{f(x_0)+(f(x)-f(x_0))+(f(x+T)-f(x))} \\
&> \boldsymbol{\alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\alpha}{3}}
\end{aligned}$$

iii *:Montrons que la valeur moyenne de* $\boldsymbol{f : M(f) > 0}$ *on a :* $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$

$$\boldsymbol{\frac{1}{n\ell}\int_0^{\ell} f(t)dt = \frac{1}{n\ell}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\ell}^{k\ell} f(t)dt > \frac{1}{n\ell}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha}{3}2\delta}$$

Proposition 2.3.2 *: si la série de Fourier d'une fonction presque périodique* $\boldsymbol{f}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *alors la somme de la série est* $\boldsymbol{f}$

CHAPITRE 3

LA PRESQUE PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

L'étude des équations différentielles ordinaires revêt une grande importance dans de nombreux domaines scientifiques, allant de la physique à la biologie en passant par l'ingénierie. Une des propriétés intrigantes et puissantes que l'on observe fréquemment dans ces équations est la présence de solutions dites "presque périodiques". Ces solutions présentent des motifs récurrents, mais avec une certaine flexibilité qui leur permet de s'adapter aux variations internes ou externes du système.
Les ouvrages classique de [1],[12] et [19]], etc donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet.

3.1 Primitives des fonctions presque périodiques

Puisque les primitives des fonctions interviennent naturellement dans la théorie des équations différentielles, il est naturel de regarder le comportement des primitives vis-a-vis de la presque périodicité.

Définition 3.1.1 *La primitive* $\boldsymbol{F}$ *d'une fonction* $\boldsymbol{f}$ *continue sur* $\mathbb{R}$ *est définie par*

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt}, \text{ où } \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$$

Théorème 3.1.1 (Bohl-Bohr) *Une primitive* $\boldsymbol{F}$ *d'une fonction presque périodique* $\boldsymbol{f}$ *est presque périodique, si et seulement, si elle est bornée.*

Preuve 3.1.1 *:*

$(\Rightarrow)$ *Si* $\boldsymbol{F}$ *est presque périodique, d'après le théorème (2.1.1) il vient que* $\boldsymbol{F}$ *est bornée.*

$(\Leftarrow)$ *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on a*

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dt},$$

où : $\boldsymbol{\alpha}$ *est une constante réel, Puisque*

$\boldsymbol{F(x)}$ *est bornée, de sorte que l'autre des deux nombres*

$$\boldsymbol{k_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} F(x), k_2 = \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x)} \tag{3.1}$$

Sont finis $\boldsymbol{F(x)} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *l'ensemble* $\boldsymbol{E(\varepsilon; F)}$ *est relativement dense. Pour tout* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *les nombres* $\boldsymbol{\tau}$ *de cet ensemble sont définis par la condition qu'ils remplissent les intégralités*

$$\boldsymbol{|F(x+\tau) - F(x)| = \left| \int_{x}^{x+\tau} f(x)dt \right| \leqslant \varepsilon} \tag{3.2}$$

Maintenant étant donné un $\boldsymbol{\eta > 0}$, *on peut toujours définir les nombres* $\boldsymbol{x_1; x_2}$ *pour satisfaire les inégalités*

$$\boldsymbol{F(x_1) < k_1 + \eta, F(x_2) > k_1 - \eta} \tag{3.3}$$

En prenant maintenant un arbitraire $\boldsymbol{\varepsilon' > 0}$ *soit* $\boldsymbol{\tau'}$ *un nombre quelconque de* $\boldsymbol{E(\varepsilon, f)}$. *On pose* $\boldsymbol{|x_1 - x_2| = d}$, *nous aurons*

$$\left|\int_{x_1+\tau'}^{x_2+\tau'} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{x}^{x+\tau} f(x+\tau') - f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon' d$$

$$|F(x_2+\tau') - F(x_1+\tau') - F(x_2) + F(x1)| \leqslant \varepsilon' d$$

d'où

$$F(x_2+\tau') \leqslant F(x_1+\tau') - (F(x_2) - F(x_1)) + \varepsilon' d$$

Mais en (**3.1**) *et* (**3.3**)

$$F(x_2+\tau') \leqslant k_2, F(x_2) - F(x_1) > k_2 - k_1 - 2\eta \tag{3.4}$$

donc

$$F(x2+\tau') \leq k_1 + 2\eta + \varepsilon' d$$

Prenons maintenant un $\varepsilon'' > 0$, *soit* $\tau'' > 0$ *n'importe quel nombres de* $E(\varepsilon'', f)$, *nous avons observer que* $\tau' + \tau'' \subset E(\varepsilon' + \varepsilon'', f(x))$

$$F(x_1+\tau'+\tau'') \leq k_1 + 2\eta + (\varepsilon' + \varepsilon'')d \tag{3.5}$$

Nous allons maintenant examiner l'intégrale $\int_x^{x+\tau''} f(x)dx$

$$x < x_1 + \tau < x + l'_\varepsilon$$

Nous écrivons

$$\int_x^{x+\tau''} f(x)dx = \int_{x_1+\tau'}^{x_1+\tau'+\tau''} f(x)dx + \int_{x'}^{x_1+\tau'} (f(x) - f(x+\tau''))\, dx$$

D'après (3.1), (3.3) *et* (3.4).

On a :

$$\left|\int_{x_1+\tau'}^{x_1+\tau'+\tau''} f(x)dx\right| = |F(x_1+\tau'+\tau'') - F(x+\tau'')| < 2\eta + (\varepsilon'+\varepsilon'')d$$

et d'après (3.2)

$$\left|\int_{x'}^{x_1+\tau'} (f(x) - f(x+\tau''))\right| < \varepsilon'' l_{\varepsilon'} \tag{3.6}$$

D'ou

$$\left|\int_{x'}^{x_1+\tau'} f(x)dx\right| < 2\eta + (\varepsilon'+\varepsilon'')d + l_{\varepsilon'}$$

Étant donné un $\varepsilon > 0$ *nous avons posé*

$$\eta = \frac{\varepsilon}{6}, \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{6}d, \varepsilon'' = \min(\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}l_{\varepsilon'})$$

On obtient à partir de (3.6)

$$|\int_{x}^{x+\tau''} f(x)dx| < \varepsilon \tag{3.7}$$

Pour tout x *et pour tout* $\varepsilon'' \subset E(\varepsilon'', f)$

*D'***ù** *d'après* (3.2)

$$E(\varepsilon'', f) \subset E(\varepsilon, F)$$

Ce qui montre que $E(\varepsilon, F)$ *est relativement dense .*

donc

$$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Proposition 3.1.1 *Si la primitive* F *d'une fonction presque périodique* f *est presque périodique alors sa série de Fourier est obtenue par intégration formelle de la série associée à la fonction* f.

Preuve 3.1.2 *De (2.12), si la primitive* $\boldsymbol{F}$ *de* $\boldsymbol{f}$ *est presque périodique et si*

$$\boldsymbol{f(x) \sim \sum_{k=1}^{=\infty} A_k \exp^{i\lambda_k x}}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F(x)} &= \int_0^x \boldsymbol{f(x)dt} \\
&\sim \int_0^x \Big(\sum_{k=1}^{+\inf} \boldsymbol{A_k.\exp^{i\lambda_k t}}\Big)\boldsymbol{dt} \\
&\sim \sum_{k=1}^{+\inf} \boldsymbol{A_k.} \int_0^x \boldsymbol{\exp^{i\lambda_k t})dt} \\
&\sim \sum_{k=1}^{+\inf} \boldsymbol{A_k} \left[\frac{1}{i\lambda_k} \exp_{i\lambda_k x}\right]_0^x \\
&\sim \sum_{k=1}^{+\inf} \boldsymbol{A_k} \left(\frac{1}{i\lambda_k} \exp_{i\lambda_k x} - \frac{1}{i\lambda_k}\right) \\
&\sim \sum_{k=1}^{+\inf} \left(-\frac{A_k}{i\lambda_k}\right) + \sim \sum_{k=1}^{+\inf} \frac{A_k}{i\lambda_k} \exp^{i\lambda_k x} \\
&\boldsymbol{c} + \sim \sum_{k=1}^{+\inf} \frac{A_k}{i\lambda_k} \exp^{i\lambda_k x} \boldsymbol{.etc} = \sum_{k=1}^{+\inf} \left(-\frac{A_k}{i\lambda_k}\right).
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.2 *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $\boldsymbol{F}$ *une primitive de* $\boldsymbol{f}$*.*

$\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *si et seulement si elle est bornée sur* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 3.1.2 *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $\boldsymbol{F}$ *une primitive de* $\boldsymbol{f}$*, L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque périodiques.*

- ❒ *L'image de* $\boldsymbol{F}$ *est* ***relativement compact****.*
- ❒ $\boldsymbol{F}$ *est bornée et* $\mathbb{X}$ *est* ***uniformément convexe*** *.*

(Preuve. Voir [1]).

3.2 Equations dfférentielles linéaires ordinaires

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions presque périodiques d'un système différentiel linéaire ordinaire

$$\dot{y} = Ay + f$$

où

$$f = (fi) = (f1, ..., f_n)^t$$

telles que les composantes $f_i \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C}), A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est une matrice carré à coefficients complexes et* $y = (y_1, ..., y_n)^t$ *une fonction inconnue.*

Le système précédent peut s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x), i \in \{1, ..., n\} \tag{3.8}$$

Définition 3.2.1 *Une solution du système (**3.8**) est dite presque périodiques (resp.bornée) si toutes ses composantes sont presque périodiques (resp. bornées).*

3.3 Solutions presque périodiques d'une équation différentielle scalaire

Dans cette section on s'intéresse à l'existence de solutions presque périodiques des équations différentielles linéaires ordinaires, voir [11] et [15].

Théorème 3.3.1 *Si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ alors toute solution bornée de l'équation différentielle*

$$\boldsymbol{y' = \lambda y + f} \tag{3.9}$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un nombre complexe quelconque, est presque périodique.

Preuve 3.3.1 *Montrons que toute solution bornée de (**3.9**) est presque périodique. En effet, en résolvant l'équation homogène*

$$\boldsymbol{y' - \lambda y = 0}$$

On trouve que les solutions sont sous la forme

$$\boldsymbol{y(x) = c\exp^{\lambda x}, c \in \mathbb{C}}$$

Pour chercher une solution particulière de l'équation non homogène, nous supposons que $\mathbf{c}$ est une fonction de classe $\boldsymbol{C^1}(\mathbb{R})$, et appliquons la méthode de la variation de la constante. Posons

$$\boldsymbol{y(x) = c(x)\exp^{\lambda x}}$$

*On dérive $\boldsymbol{y}$ et on le remplace dans l'équation (**3.9**), on obtient*

$$\boldsymbol{c'(x)\exp^{\lambda x} + \lambda c(x)\exp^{\lambda x} = \lambda c(x)\exp^{\lambda x} + f(x),}$$

C'est-à-dire que,

$$\boldsymbol{c'(x) = f(x)\exp^{-\lambda x}}$$

On intègre par rapport à $\boldsymbol{x}$, on trouve

$$c(x) = \int_0^x f(s) \exp^{-\lambda x} ds + k, k \in \mathbb{C}.$$

On en déduit que la solution générale de (3.9) est donnée par

$$y(x) = \exp^{-\lambda x} \left[k + \int_0^x f(s) \exp^{-\lambda x} ds \right].$$

En posant $\lambda = Re\lambda + iIm\lambda$, où $Re\lambda, Im\lambda \in \mathbb{R}$, on va distinguer les trois trois cas :

$$Re\lambda > 0, Re\lambda < 0 et Re\lambda = 0.$$

Cas $Re\lambda > 0$: Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp^{\lambda x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp^{Re\lambda x} = +\infty$,alors pour que la solution$y$ soit bornée au voisinage de $+\infty$, il faut que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(k + \int_0^x f(s) \exp^{-\lambda x} ds \right) = 0$$

$$k = -\int_0^{+\infty} f(s) \exp^{-\lambda x} ds.$$

Par hypothèse $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors d'après les propriétés des fonctions presque périodiques, f est bornée.

Notons$m = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, alors

$$0 \leq \left| \exp^{-\lambda x} f(s) \right| \leq m e^{-Re\lambda s} \left| \exp^{-iIm\lambda s} \right| \leq m e^{-Re\lambda s}$$

Ce qui montre que, l'intégral $-\int_0^x f(s)\exp^{-\lambda x} ds$ *existe et finie. La solution* y *s'écrit alors*

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp^{\lambda x}\left[-\int_0^{+\infty} f(s)\exp^{-\lambda x} ds + \int_0^x f(s)\exp^{-\lambda x} ds\right]. \\ &= \exp^{\lambda x}\left[-\int_x^{+\infty} f(s)\exp^{-\lambda x} ds - \int_0^x f(s)\exp^{-\lambda x} ds + \int_0^x f(s)\exp^{-\lambda x}\right] \\ &= -\exp^{\lambda x}\int_x^{+\infty} f(s)\exp^{-\lambda x} ds. \end{aligned}$$

D'où

$$y(x) = -\int_x^{+\infty} f(s)\exp^{-\lambda(s-x)} ds.$$

On vérifie que cette solution est bien presque périodique. Comme la fonction f *est presque périodique, alors* $\forall \varepsilon > 0$, *il existe* $lRe\lambda_\varepsilon > 0$ *tel que tout intervalle de longueur* $lRe\lambda_\varepsilon > 0$ *contient au moins un nombre positif* τ *satisfaisant*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq Re\lambda_\varepsilon, \forall Re\lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Par $\forall x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|y(x+\tau) - y(x)| = \left|-\int_{x+\tau}^{+\infty} \exp^{\lambda(x-t+\tau)} dt + \int_x^{+\infty} \exp^{\lambda(x-t)} f(t)dt\right|.$$

En effectuant le changement de variable $t = t + \tau$, *dans la première intégrale, on obtient*

$$|y(x+\tau) - y(x)| = \left|-\int_{x+\tau}^{+\infty} \exp^{\lambda(x-\tau)} f(t+\tau)dt + \int_x^{+\infty} \exp^{\lambda(x-\tau)} f(t)dt\right|$$

Donc

$$\begin{aligned}
|y(x+\tau)-y(x)| &\leq \int_x^{+\infty} \left|\exp^{\lambda(x-t)}\right| |f(t-\tau)-f(t)|\, dt. \\
&\leq \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau)-f(x)| \int_X^{+\infty} \exp^{Re\lambda(x-t)}\, dt \\
&\leq \left[-\frac{1}{Re\lambda}\exp^{Re\lambda t}\right]_x^{\infty} \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau)-f(x)| \exp^{Re\lambda x}. \\
&\leq \frac{1}{Re\lambda} \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau)-f(x)| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la solution y *est une fonction presque périodique. Cas :* $Re\lambda < 0$ *: On procède de la même manière, cette fois-ci en considérant le fait que*

$$\int_x^{-\infty} \left|\exp^{\lambda x}\right| = \int_x^{-\infty} \exp^{Re\lambda x} = +\infty$$

on obtient

$$y(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp^{\lambda(x-t)} f(t)dt.$$

Cas : $Re\lambda = 0$ *: Dans ce cas on a* $\lambda = Im\lambda_i \in \mathbb{R}$*, avec* $Im\lambda \in \mathbb{R}$*, alors la solution* y *est de la forme*

$$y(x) = \exp^{iIm\lambda x}\left(k + \int_0^x f(s)\exp^{-iIm\lambda s}\right).$$

Si on suppose que y *est bornée alors on aura nécessairement*

$$x \to \int_0^x f(s)\exp^{iIm\lambda s}\, ds,$$

est aussi bornée. Puisque

$$s \to f(s)\exp^{ibs}$$

est presque périodique en tant que produit de deux fonctions presque périodiques, on en déduit que

$$x \to \int_0^x f(s)\exp^{ibs}\,ds,$$

est une primitive d'une fonction presque périodique, ceci entraîne que

$$x \to \int_0^x f(s)\exp^{-iIm\lambda s}\,ds$$

est presque périodique, donc y *l'est aussi.*

Théorème 3.3.2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $A = (a_{ij})_{1\leq i;j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$*, il existe une matrice* $P \in M_n(\mathbb{C})$ *inversible,* $T \in M_n(C)$ *triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de* A *sur sa diagonale telles que*

$$A = P^{-1}TP.$$

Preuve 3.3.2 *Toute matrice carrée est triangularisable dans* $M_n(\mathbb{C})$*. Voir [8] .*

3.4 Solutions presque périodiques d'un système d'équations différentielles

Dans cette section on s'intéresse à l'existence de solutions presque périodiques du système différentiel linéaire ordinaire suivant

$$\frac{dy}{dt}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(x) + f_i(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.10}$$

où $a_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, *sont des nombres complexes et* $f_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, *sont des fonctions presque périodiques données.*

La forme matricielle du système (3.10) est donnée par

$$Y' = AY(x) + f(x) \tag{3.11}$$

où

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & & \\ . & . & . & . & & \\ a_{n1} & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Définition 3.4.1 *Une solution du système (3.10) est dite presque périodiques (resp.bornée) si toutes ses composantes sont presque périodiques (resp. bornées).*

Théorème 3.4.1 *Si les fonctions* $f_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ *sont presque périodiques alors tout solution bornée sur* $\mathbb{R}$ *de (3.10) est presque périodique.*

Preuve 3.4.1 *D'abord, montrons que le résultat est vrai pour les matrices triangulaires supérieures, pour cela on se donne une solution bornée y du système*

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j + f_i(x), i \in 1, ...n$$

Où $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n}$ *est une matrice telle que* $t_{ij} \in C$ *avec* $tij = 0$ *si* $i > j$ *et les fonctions* f_i *sont à valeurs complexes :*

On peut faire une récurrence sur l'ordre de la matrice T*, le théorème précédent assure le résultat pour une matrice d'ordre* 1*, alors supposons le vrai pour les matrices de taille* n*, et* *montrons le pour les matrices de taille (n + 1), c'est-à-dire montrons que le résultat est vrai pour le système*

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij} y_j + f_i(x), i \in 1, ..., n+1 \tag{3.12}$$

On considère $y = (y_1, ..., y_{n+1})^t$ *une solution bornée de (the) : La dernière équation est*

$$\frac{dy_n + 1}{dx} = t_{n+1}, n + 1y_{n+1}(x) + f_{n+1}(x).$$

Et le théorème précédent assure que y_{n+1} *est presque périodique. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence pour* $i, j \in \{1, ..., n\}$, *donc le résultat est vrai pour les matrices de taille* $n + 1$, *et par conséquent il est vrai pour les matrices de taille* n. *Ce qui achève la démonstration du théorème pour les matrices triangulaires supérieures. Revenons maintenant au cas général, d'après le Théorème* $(3.4.2)$ *il existe une matrice* $P \in M(\mathbb{C})$ *inversible,* $T \in M_n(\mathbb{C})$ *triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de* A *sur sa diagonale telles que*

$$A = P^{-1}TP.$$

Soit y *une solution bornée de (*3.10*) , alors on a en multipliant à gauche par* P *que*

$$\frac{dPy}{dx} = TPy + Pf$$

Où $y = (y_1, ..., y_n)^t$ *et* $f = (f_1, ..., f_n)^t$, *on pose* $z = Py$ *et* $g = Pf$, *on aura*

$$\frac{dz}{dx} = Tz + g.$$

Les composantes de g *sont toutes presque périodiques en tant que combinaisons linéaires à* *coefficients constants de fonctions presque périodiques. Puisque* $\boldsymbol{y}$ *est bornée alors* $\boldsymbol{z = Py}$ *est bornée, et d'après le théorème précédent* $\boldsymbol{z}$ *est presque périodique. Les composantes du vecteur* $\boldsymbol{y}$ *étant des combinaisons linéaires à coefficients constants de composantes de* $\boldsymbol{z}$*, on en déduit alors que les composantes de y sont presque périodiques, et par conséquent la solution y est presque périodique.*

Théorème 3.4.2 *Soit* $\boldsymbol{A = (a_{ij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n \in M_n}$*, alors il existe une matrice* $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{C})$ *inversible et une matrice* $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{C})$ *triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de* $\boldsymbol{A}$ *sur sa diagonale tq :* $\boldsymbol{A = P^{-1}TP}$.

Remarque 3.4.1 *Le théorème* $\mathbf{(3.4.2)}$ *ne garantit l'existence d'une solution bornée*

Théorème 3.4.3 *Si les* $\boldsymbol{f_i(1 \leqslant i \leqslant n)}$ *soit tout presque périodique et si* $\boldsymbol{A}$ *ne possède aucune valeurs de partie réelle nulle, alors le système (**3.10**) admet une unique solution bornée presque périodique.*

3.5 Applications

Exemple 3.5.1 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + 8\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) + \mathbf{exp}^{\boldsymbol{it}} \\ \dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = 2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) + \mathbf{exp}^{\sqrt{2}\boldsymbol{it}} \end{cases} \tag{3.13}$$

Il est clair que les deux fonctions $\boldsymbol{t} \mapsto \mathbf{exp}^{\boldsymbol{it}}$ *et* $\boldsymbol{t} \mapsto \mathbf{exp}^{\sqrt{2}\boldsymbol{it}}$ *sont presque périodiques. on écrit Le système (**3.13**) sous la forme matricielle*

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{AX}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$$

où : $X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B(t) \begin{pmatrix} \exp^{it} \\ \exp^{\sqrt{2}it} \end{pmatrix}$ *On résout d'abord le système homogène associé :*

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

on va calculer le polynôme caractéristique de la matrice A *est :*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \text{ , } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 16 = (1-\lambda)^2 - 16$$

l'équation caractéristique associée est donnée par :

$$(1-\lambda)^2 - 16 = 0$$

donc :

$$[(1-\lambda) - 4][(1-\lambda) + 4] = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda - 4)(1 - \lambda + 4) = (-\lambda - 3)(5 - \lambda) = 0$$

Alors les valeurs propres de A *sont :* $\lambda_1 = -3$ *et* $\lambda_2 = 5$

En conséquence, les vecteurs propres :

pour $\lambda_1 = -3$ *où* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$Av_1 = \lambda v_1, \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x + 8y = -3x \\ 2x + y = -3y \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{4x + 8y = 0...(1)} \\ \\ \boldsymbol{2x + 4y = 0...(2)} \end{cases}$$

de (2) on a :

$\boldsymbol{2x = -4y \Rightarrow x = \frac{-4y}{2} = -2y}$

donc :$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$

pour $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$ *où* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{Av_2 = \lambda_2 v_2,} \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{8} \\ \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{5} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 8y = 5x} \\ \\ \boldsymbol{2x + y = 5y} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-4x + 8y = 0...(1)} \\ \\ \boldsymbol{2x - 4y = 0...(2)} \end{cases}$$

de (1) on a :

$\boldsymbol{-4x + 8y = 0 \Rightarrow 4x = 8y \Rightarrow x = 2y}$

donc :$\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$

la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ *vers la base formée des vecteurs propres* $\boldsymbol{\lambda_1}$ *et* $\boldsymbol{\lambda_2}$ *est :*

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } p^{-1} = \frac{1}{\det p}\left(\widetilde{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right)^{t}$$

$$\det p = -2(1) - 2(1) = -4$$

$$p^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^{t} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Posons

$$Y(t) = P^{-1}X(t).$$

C'est-à-dire que :

$$X(t) = PY(t)$$

Une fonction $X(t)$ *est solution du système homogène si et seulement si*

$$\dot{Y}(t) = DY(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} Y(t)$$

. *En effet, on a*

$$\dot{X}(t) = AX(t) = (PDP^{-1})PY(t) = PDY(t)$$

Comme

$$X(t) = PY(t).$$

alors

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})$$

Par conséquent,

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}).$$

Ou encore

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} c_1 \exp^{-3t} \\ \\ c_2 \exp^{5t} \end{pmatrix}$$

, avec $\boldsymbol{c_1, c_2} \in \mathbb{R}$ *Donc*

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \exp^{-3t} \\ \\ c_2 \exp^{5t} \end{pmatrix} = c_1 \exp^{-3t} v_1 + c_2 \exp^{5t} v_2.$$

*En appliquant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution du système non homogène (***3.13***) sous la forme*

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = c_1(t) \exp^{-3t} v_1 + c_2 \exp^{5t} v_2.$$

avec $\boldsymbol{c_1, c_2} \in \boldsymbol{C1}(\mathbb{R})$*, on a alors :*

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = c_1'(t) \exp^{-3t} v_1 - 3c_1(t) \exp^{-3t} v_1 + c_2'(t) \exp^{5t} v_2 + 5c_2(t) \exp^{5t} v_2$$

Puisque

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = -3c1(t) \exp^{-3t} v_1 + 5c_2(t) \exp^{5t} v_2$$

Il vient

$$\dot{X}(t) = c_1'(t)\exp^{-3t} v_1 + c_2'(t)\exp^{5t} v_2 + AX(t).$$

Donc Y *est solution de (3.13), si et seulement si*

$$c_1'(t)\exp^{-3t} v_1 + c_2'(t)\exp^{5t} v_2 = f(t).$$

Ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -2c_1'(t)\exp(-3t) + 2c_2'(t)\exp(5t) = \exp(it) \\ , c_1'(t)\exp(-3t) + c_2'(t)\exp(5t) = \exp(-\sqrt{2}t). \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve $c_1'(t)$ *et* $c_2'(t)$*, puis en intégrant, on trouve*

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{\exp{(\sqrt{2i}+3)t}}{2(\sqrt{2i}+3)} - \dfrac{\exp{(i+3)t}}{4(i+3)} + a_1 \\ c_2(t) = \dfrac{\exp{(i-5)t}}{4(i-5)} + \dfrac{\exp{(\sqrt{2i}-5)t}}{2(\sqrt{2i}+5)} + a_2 \end{cases}$$

Où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$*. Finalement la solution du système est :*

$$\begin{aligned} X(t) = &\left(\frac{\exp{(\sqrt{2i}+3)t}}{2(\sqrt{2i}+3)} - \frac{\exp{(i+3)t}}{4(i+3)} + a_1\right)\exp{(-3t)}v_1 \\ &+ \left(\frac{\exp{(i-5)t}}{4(i-5)} + \frac{\exp{(\sqrt{2i}-5)t}}{2(\sqrt{2i}+5)} + a_2\right)\exp{(5t)}v_2 \end{aligned}$$

où encore

$$\boldsymbol{X(t)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}i-5} - \frac{1}{\sqrt{2}i+3}\right)\exp(\sqrt{2}it) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}i-5} - \frac{1}{i+3}\right)\exp(it) \\ \left(\frac{1}{2(\sqrt{2}i+3)} + \frac{1}{2(\sqrt{2}i-5)}\right)\exp(\sqrt{2}it) + \left(\frac{1}{4(i-5)} - \frac{1}{4(i-3)}\right)\exp(it) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-8}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{-4}{16+2i}\exp(it) \\ \frac{1-\sqrt{2}i}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{1}{28-16i}\exp(it) \end{pmatrix}$$

La solution $\boldsymbol{X(t)}$ *du système* (**3.13**) *est bornée car ses composantes* $\boldsymbol{x_1(t)}$ *et* $\boldsymbol{x_2(t)}$ *sont bornées.*

En effet,

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &= \left|\frac{-8}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{-4}{16+2i}\exp(it)\right| \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{297}}\left|\exp(\sqrt{2}it) + \frac{2}{\sqrt{65}}\exp(it)\right| \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{297}} + \frac{2}{\sqrt{65}} = M_1. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &= \left|\frac{1-\sqrt{2}i}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{1}{28-16i}\exp(it)\right| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{297}}\left|\exp(\sqrt{2}it) + \frac{1}{4\sqrt{65}}\exp(it)\right| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{297}} + \frac{1}{4\sqrt{65}} = M_2. \end{aligned}$$

Alors la solution du système (**3.13**) *est presque périodique. D'autre part, comme la matrice*

A ne possède aucune valeur propre à partie réelle nulle, alors d'après le théorème $(3,4,2)$ *cette solution est l'unique solution bornée qui est presque périodique.*

Exemple 3.5.2 *Considérons l'équation de la chaleur unidimensionnelle avec une source de chaleur et une solution presque périodique :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Où $u(x,t)$ *est la fonction de température dépendant de l'espace x et du temps* t*,* α *est le coefficient de diffusion de la chaleur, et* $f(x,t)$ *est la source de chaleur. Pour résoudre cette équation, nous devons spécifier les conditions initiales et les conditions aux limites appropriées. Supposons que nous ayons une corde de longueur* L *avec les conditions suivantes : Condition initiale :* $u(x,0) = g(x)$ *Condition aux limites :* $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Étape 1 *:*

Discrétisation de l'espace et du temps Divisons l'intervalle spatial $[0,L]$ *en* N *sous-intervalles et l'intervalle de temps* $[0,T]$ *en* M *sous-intervalles. Cela donne une grille discrète de points* (x_i, t_j) *où* $x_i = i\Delta x$ *et* $t_j = j\Delta t$*, avec* $\Delta x = \dfrac{L}{N}$ *et* $\Delta t = \dfrac{T}{M}$*.*

Étape 2 *:*

Approximation de la dérivée seconde Approximons la dérivée seconde de $u(x,t)$ *par une différence finie centrée :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (u(x_i - 1, t_j) - 2u(x_i, t_j) + \frac{u(x_i + 1, t_j))}{\Delta x 2}$$

.

Étape 3 *:*

Discrétisation de l'équation de la chaleur En substituant les approximations dans l'équation *de la chaleur, nous obtenons une équation discrète pour chaque point de la grille :*

$$\frac{(u(x_i, t_j + 1) - u(x_i, t_j))}{\Delta t} = \alpha . \frac{(u(x_i - 1, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + 1, t_j))}{\Delta x^2 + f(x_i, t_j)}$$

.

***Étape* 4** *:*

Résolution itérative En utilisant les conditions initiales et les conditions aux limites, nous pouvons résoudre itérativement les équations discrètes pour trouver les valeurs de température $u(x_i, t_j)$ *à chaque point de la grille. La méthode de résolution dépendra du schéma numérique choisi (par exemple, euler explicite, méthode de Cranck-Nicolson, etc.)*

***Étape* 5** *:*

Représentation graphique Une fois que les valeurs de température ont été calculées pour tous les points de la grille, vous pouvez représenter graphiquement la solution presque périodique en utilisant des graphiques en deux dimensions $(x - t)$ *ou en utilisant des animations pour visualiser l'évolution de la température dans le temps.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié les fonctions presque périodiques. Nous nous somme intéressés uniquement à étudier leurs propriétés essentielles, notre objectif principal étant de faire apparaître l'équivalence des trois classes de fonctions presque périodiques continues : La classe de fonctions presque périodiques donnée par le critère de Bohr, la classe de fonctions donnée par le critère de Bochner et celle donnée par le critère d'approximation polynômiale. Une attention particulière a été accordée à la presque périodicité des solutions du système différentiel

$$\boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{f}$$

Où $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{C})$. *Finalement, nous estimons que la théorie des fonctions presque périodiques est un domaine très vaste et intéressant, en particulier en ce qui concerne les applications. Il se trouve beaucoup de problèmes ouverts et différentes questions sont encore posées.*

En perspectives, nous sommes intéressés par l'étude de certaines questions liées à l'existence et l'unicité de solutions des systèmes différentiels non linéaires dans l'espace $\boldsymbol{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *des fonctions presque périodiques.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ***L. Amerio and G. Prouse**,* Almost-periodic functions and functional equations. (The University Series in Higher Mathematics). Published : New York etc. : Van Nostrand Reinhold Company VIII, 184 p. (1971).

[2] ***L. Amerio, G. Prouse*** , Almost Periodic Functions and Functional Equations, van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[3] ***J.Andres, A.M.Bersani R.F.Grande**,* Hierarchy of almost-periodic function spaces. Rendiconti di Mathematica, 26 :121-188, 2006.

[4] ***A.S.Besicovitch*** *,* Almost Periodic Functions. Through Epecisl Permission Of Cambridge University Press, 1954.

[5] ***A.S. Besicovitch**,* Almost Periodic Functions, Cambridge University Press, Cambridge 1932 (Dover, 1954).

[6] ***H.Bohr**,* Almost periodic functions. Chelsea Publishing Company, (1947)

[7] ***R. Boles Basit**,* Connection between the almost periodic functions of Levitan and almost automorphic functions, Vestnik Moskovskogo Uni, Russian, 1971.

[8] ***H. Brezis**,* Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris, 1993.

[9] ***C. Corduneanu,*** Almost Periodic Functions, Chelsea, New York 1989.

[10] ***C. Corduneanu ,*** Almost periodic functions, Interscience Publishers, (1968)

[11] ***C. Corduneanu,*** Almost Periodic Functions, Wiley, New York, 1968

[12] ***C. Corduneanu,*** Almost Periodic Oscillations and Waves, Springer 2009.

[13] ***Davide Giraudo,*** Fonctions presque périodiques. Memoire de master, Universite de Rouen,mai 2011.

[14] ***A. M. Fink*** , Almost periodic differential equations, Lecture Notes in Math.,377, Springer, (1974)

[15] ***E. Ghys*** ,Résonances et petits diviseurs (http ://www.umpa.ens-lyon.fr/ghys/articles/kolmogorov.pdf)

[16] ***B. M. Levitan and V. V. Zhikov,*** Almost periodic functions and differential equations. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1982.

[17] ***S. Sternberg,*** Celestial mechanics. Part I, Benjamin New York (1969).

[18] ***Toka Diagana (auth.),*** Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces. Springer International Publishing, 1 edition, 2013.

[19] ***T. Yoshizawa,*** Stability Theorie and the Existence of Periodic Solution and Almost Periodic Solution, Applied Math. Science 14, Springer-verlag, New york, 1925*,*

[20] ***A. Zada,*** characterization of dichotomy in terms of boundedness of solutions for some Cauchy problems. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], 2008, Paper-No.