

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Nombre de cycles limites de quelques classes des
équations différentielles ordinaires.**

Option : COSD

Par :

Ahmed Ghenanoua

Encadré par : N. Debz

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : A. Boulfoul

M.C.A U. SKIKDA

Examineur: N. Mellahi

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Résumé

Ce travail de mémoire est consacré à l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement, on étudie deux classes de systèmes différentiels, en utilisant la théorie de moyennisation.

La première classe concerne l'étude des systèmes différentiels polynomiaux généralisés de Liénerd de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\ell_1(x)y) - \varepsilon^2(\ell_2(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + p(x)y^3), \\ \quad + \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + p(x)y^3), \end{cases}$$

où $g_i(x), f_i(x), h_i(x), p_i(x)$ et $\ell_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) sont des polynômes de degrés donnés.

La deuxième classe concerne l'étude des systèmes différentiels de Kukles de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_{11}(x, y) + f_{21}(x, y)y + g_{11}(x, y)y^2 + g_{21}(x, y)y^3), \end{cases}$$

où $g_{11}(x), f_{11}(x), g_{21}(x)$ et $f_{21}(x)$ sont des polynômes de degrés donnés.

L'étude des deux classes est illustrée par des exemples.

Mots clés :

Système dynamique - cycle limite - théorie de la moyennisation - système polynômial - Système de Liénerd - Système de Kukles.

abstract

This work is devoted to study the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending of small parameter. Using the averaging theory of first and second order, we study two classes of generalized differential systems.

The first class deals with generalized differential system of Liénard of the form:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\ell_1(x)y) - \varepsilon^2(\ell_2(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + p(x)y^3), \\ \quad + \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + p(x)y^3), \end{cases}$$

where $g_i(x), f_i(x), h_i(x), p_i(x)$ and $\ell_i(x)$ ($1 \leq i \leq 2$) are polynomials of given degree.

The second class section is a set of differential equations for (Kukles) generalized of the form :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_{11}(x, y) + f_{21}(x, y)y + g_{11}(x, y)y^2 + g_{21}(x, y)y^3), \end{cases}$$

Where $g_{11}(x), f_{11}(x), g_{21}(x)$ and $f_{21}(x)$ are polynomials of given degree.

Keywords :

Dynamical system - Limit cycle - Polynomial differential system - Averaging theory - Lienard system - Kukles system.

ملخص

ملخص موضوع هذه المذكرة يركز على دراسة عدد الحلول الدورية الخاصة بالجمل التفاضلية المتعلقة بوسيط صغير. باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الاولى و الثانية نقوم بدراسة نوعين من الجمل التفاضلية المعممة :

القسم الاول هو عبارة عن جمل من المعادلات التفاضلية ل (لينارد) المعممة من الشكل :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\ell_1(x)y) - \varepsilon^2(\ell_2(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + p(x)y^3), \\ \quad + \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + p(x)y^3), \end{cases}$$

حيث $\ell_i(x)$ ، $p_i(x)$ ، $h_i(x)$ ، $f_i(x)$ ، $g_i(x)$ $(1 \leq i \leq 2)$ كثيرات حدود بدرجة معطاة.

القسم الثاني هو عبارة عن جمل المعادلات التفاضلية ل (ككن) المعممة من الشكل :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_{11}(x, y) + f_{21}(x, y)y + g_{11}(x, y)y^2 + g_{21}(x, y)y^3), \end{cases}$$

حيث $f_{21}(x)$ و $g_{21}(x)$ ، $f_{11}(x)$ ، $g_{11}(x)$ كثيرات حدود بدرجة معطاة.

كلمات مفتاحية:

جملة ديناميكية - حل دوري معزول - جملة معادلات تفاضلية كثيرات حدود - نظرية المتوسط - معادلات تفاضل لينارد و كيكلز.

Table des matières

Introduction	6
1 Notions préliminaires	9
1.1 Systèmes dynamiques	9
1.1.1 Flot d'une équation différentielle	10
1.1.2 Points d'équilibre et linéarisation	10
1.1.3 Portrait de phase	11
1.1.4 Nature des points d'équilibre	11
1.1.5 Stabilité des points d'équilibre	12
1.1.6 Orbite périodique et cycle limite	13
2 Théorie de moyennisation	16
2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre	16
2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre	19
3 Cycles limites d'un système différentiel de Liénard perturbé	21
3.1 Preuves des résultats	22
3.1.1 Preuve du théorème (3.1)	22
3.2 Preuve du théorème (3.2)	23
4 Le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiel de Kukles perturbé	35
4.1 Présentation du problème et résultats principaux	35
4.2 Preuve du théorème (4.1)	36

TABLE DES MATIÈRES

Conclusion et Perspective	38
Bibliographie	41

Introduction

Les équations différentielles sont apparues en mathématiques pour la première fois dans les travaux de Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727), à la fin du 17^{ème} siècle.

Au début, les équations différentielles furent étroitement associées à la résolution de problèmes géométriques à la physique newtonienne (dynamiques du point, mouvement des planètes) et à la formalisation du calcul différentiel et intégrales. Elles deviennent rapidement un outil efficace dans l'analyse des phénomènes de la nature et une source de réflexion aux sujets des concepts mathématiques comme celui de la fonction.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes afin d'étudier les propriétés de leurs solutions. Avec ses travaux sur les courbes définies par une équation différentielle ([7], [8], [9], [10]). Publiés à la fin du 19^{ème} siècle, Henri Poincaré (1854-1912) a ouvert la voie pour une approche originale des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier leur propriétés. Cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions de façon explicite. Ce sont des méthodes dites qualitatives, Poincaré [8] au chapitre, présente la "Théorie des cycles limites", en faisant appel à la notion de "Section de Poincaré", il démontre l'existence d'un nouveau genre de courbes fermées qu'il nomme "cycle limite".

En 1900, David Hilberts [5] a posé les fameux vingt trois problèmes. Dans le sixième problème, il soulève la question du nombre et de la disposition des trajectoires périodiques isolées (cycles limites) pour des systèmes différentiels polynomiaux.

Ce problème est jusqu'à maintenant non complètement résolu.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude qualitative des systèmes différentielles planaires de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de variables réelles x et y .

Notre travail est structuré comme suit :

Le premier chapitre, est consacré aux rappels de quelques notions de base sur les systèmes différentiels planaire, utilisées par la suite.

Dans **le deuxième chapitre**, On expose la théorie de la moyennisation du premier et deuxième, adre.

Dans **le troisième chapitre**, nous appliquons la méthode de moyennisation du premier et second ordre pour déterminer le nombre maximum de cycles limites qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, perturbé par une classe des systèmes de Liénard généralisé suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\ell_1(x)y) + \varepsilon^2(\ell_2(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3) \\ \quad - \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases} \quad (1)$$

où $f_i(x), g_i(x), h_i(x), p_i(x)$ et $(1 \leq i \leq 2)$ sont des polynômes de degrés n, m, ε est un paramètre réel supposé petit.

Dans **Le chapitre 4** nous avons étudié les cycles limites d'une classe de systèmes différentiels plus généralisée de Kukles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_{11}(x, y) + f_{21}(x, y) + g_{11}(x, y)y^2) + g_{21}(x, y)y^3 \end{cases} \quad (2)$$

où $f_i, g_i, h_i, l_i (1 \leq i \leq 2)$ sont des polynômes de degrés donnés. On y trouvera un exemple pour chaque méthode.

Nous utilisons le logiciel Maple 13 pour effectuer les calculs.

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notions de base sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie et continue sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que

- i) $U(0, x) = x$
- ii) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est linéaire si

$$\varphi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(t, x) + \beta \varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1. Soit le système

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.1) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

le système (1.1) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ U(t, x) = e^{tA}x.$$

1.1.1 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.2. Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = F(x), \tag{1.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $F(x) \in \mathbb{R}^n$. On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

où $\phi(t, x_0)$ est la solution de (1.2) telle que $\phi(0, x_0) = x_0$

Remarque 1.1. *Le flot est dit autonome si F ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.*

1.1.2 Points d'équilibre et linéarisation

Points d'équilibre

Définition 1.3. On appelle point d'équilibre ou point critique du système (1.2) tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que, $F(x_0) = 0$.

Linéarisation

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point d'équilibre, consiste à se ramener au système linéaire associé, puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes.

Définition 1.4. On appelle système linéarisé du système (1.2) au voisinage du point d'équilibre x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

où $A = DF(x_0)$ est la matrice jacobienne de F au point x_0 :

$$DF(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \tag{1.4}$$

Exemple 1.2. *Soit le système non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y + x^3. \end{cases} \tag{1.5}$$

1.1 Systèmes dynamiques

L'origine est le seul point d'équilibre de ce système. La matrice jacobienne associée à (1.5) calculée en $(0, 0)$ est

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad (1.6)$$

Définition 1.5. Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

Remarque 1.2. *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

1.1.3 Portrait de phase

Soit le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système ci dessus représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.

Définition 1.6. Les points critiques du système (1.7) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites du système, ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase. Le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.1.4 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibres.

Définition 1.7. Soit le système différentiel linéaire (1.3), où A est une matrice d'ordre 2. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

- (i) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable.
- (ii) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :
 - (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable.
 - (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable
 - (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.
- (iii) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$.
- (iv) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures avec $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$ et $Re(\lambda_{1,2}) = 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un centre et il est stable mais pas asymptotiquement stable.

1.1.5 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 1.8. Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.8). On dit qu'un point d'équilibre p est stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que

$$\|\phi(t) - p\| \leq \delta \implies \|\phi(t) - p\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Définition 1.9. On dit qu'un point d'équilibre p est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = p$.

Théorème 1.1. Soit le système linéaire (1.3). Le point $x = x_0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives.

Si A a au moins une valeur propre avec la partie réelle strictement positive, alors le point $x = x_0$ est instable.

1.1 Systèmes dynamiques

1.1.6 Orbite périodique et cycle limite

Définition 1.10. On appelle solution périodique toute solution $x = \phi(t)$ du système (1.2) telle qu'il existe un nombre $T > 0$ vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t) \quad (1.9)$$

- Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.9) est appelé période.
- A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phase.

Exemple 1.3. *L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ qui équivaut au système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$ ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C$$

Autrement dit , ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan de phase par des ellipses.

Définition 1.11. Un cycle limite C du système (1.2) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace des phases. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'ya pas d'autre courbes fermées.

Remarque 1.3. *Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite C lorsque $t \rightarrow +\infty$, il est dit stable ou attractif. Si en revanche toutes les trajectoires voisines s'éloignent du cycle limite C lorsque $t \rightarrow +\infty$, il est dit instable ou non attractif.*

Définition 1.12. L'amplitude d'un cycle limite C est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite

Exemple 1.4. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

$r = 1$ correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombre des orbites périodiques et il n'ya pas des cycles limites. (**Voir figures (1.1), (1.2) et (1.3)**).

Remarque 1.4. Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

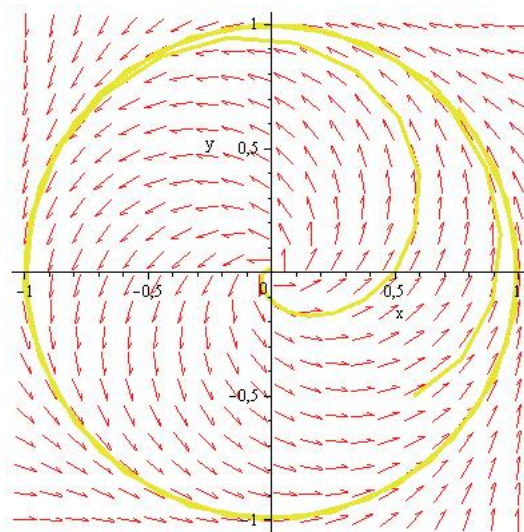


FIGURE 1.1 – Cycle limite stable pour $\alpha = 1$.

1.1 Systèmes dynamiques

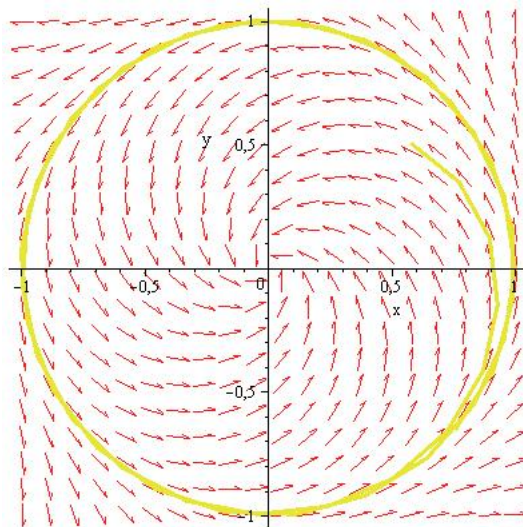


FIGURE 1.2 – Cycle limite instable pour $\alpha = -1$.

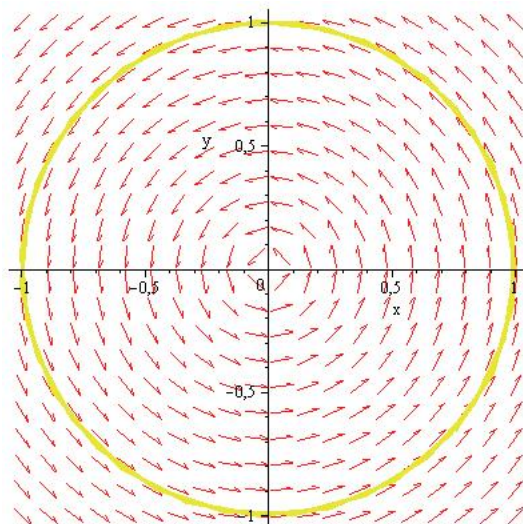


FIGURE 1.3 – Centre pour $\alpha = 0$.

Théorie de moyennisation

La théorie de la moyennisation est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires, et en particulier, de leurs orbites périodiques. Dans ce chapitre nous allons introduire les résultats principaux sur la théorie de la moyennisation utilisés pour accomplir les travaux de ce mémoire.

Notation

$D_x F$: La matrice jacobienne de la fonction F par rapport à x ;
où $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

$D_x^2 F$: Matrice dont les composantes sont les dérivées de deuxième ordre ou la matrice Hessienne.

$J_F(a)$: Le jacobien de F calculé en (a) .

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

Ce théorème donne une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques des systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.1. *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable et D est un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous définissons $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds. \quad (2.2)$$

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

Supposons que :

-(i) F_1 et R sont localement lipschitziennes par rapport à x .

-(ii) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}}(a) \neq 0$

Où $D_x F_{10}$ désigne la matrice jacobienne de F_{10} par rapport à x .

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.1) T -périodique isolée telle que $\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les hypothèses de ce théorème sont plus faibles que celui dans le théorème (11.5) de **Verhulst** [12], où à la place de (i) il suppose que :

-(j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

À la place de (ii) il suppose que :

-(jj) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}}(a) \neq 0$, où $D_x F$ désigne la matrice jacobienne de F par rapport à x , $D_x^2 F$ la matrice hessienne de F et $J_f(a)$ et désigne le déterminant de la jacobienne de f calculée en a .

Preuve du théorème 2.1 Voir [11], [12]

Exemple 2.1. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^3 - y). \end{cases} \quad (2.3)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, Le système perturbé (2.3) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (-1 + r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon (\cos \theta \sin \theta - r^2 (\cos \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \sin \theta)) \end{cases} \quad (2.4)$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \quad \text{si } |x| < 1 \quad (2.5)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{2.6}$$

De (2.2) on obtient

$$\begin{aligned}F_{10}(r) &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) d\theta \\ &= \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4)\end{aligned}$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.3) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4) = 0.\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\text{On a} \quad & F_{10}(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 0 \\ \text{et} \quad & F'_{10}(r) = \frac{-9}{8}r^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow F'_{10}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -1 \neq 0\end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1) le système (2.3) possède un seul cycle limite, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit.

Exemple 2.2. On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon (-2 + x - xy + x^2 + y^2) y.\end{aligned}\tag{2.8}$$

En coordonnées polaires, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r \sin^2(\theta) (2r^2 - 2 + r \cos(\theta) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon (r^2 (2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) \\ \quad + r \sin(\theta) \cos^2(\theta)) - 2 \sin(\theta) \cos(\theta)). \end{cases}$$

Ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2(\theta) (2r^2 - 2 + r \cos(\theta) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^2)$$

On trouve

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \left(-2r\pi + \frac{7}{4}r^3\pi \right) = 0,$$

cette équation admet un seul racine positive $r = \frac{2}{7}\sqrt{14}$, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit le système (2.8) admet un seul cycle limite.

2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions d'un certain systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.2. *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.9)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t . D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On définit $F_{10}, F_{20} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2.10)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, s) dt + F_2(s, z)] dz. \quad (2.11)$$

Supposons que :

-(i) Pour tout $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_1 \in C^1$, F_1, F_2, R et $D_x F_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à x . R est différentiable par rapport à ε .

-(ii) Pour $V \subset D$, un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n , et $\forall \varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que : $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$, et $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon, V, 0)) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $\varphi(0, \varepsilon)$ de l'équation (2.9) telle que $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$. Les conditions (i) et (ii) de théorème 2.2 peuvent être remplacées par (j) et (jj) respectivement.

-(j) $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

-(jj) $F_{10}(z) = 0$, $\forall z \in D$ et pour $a \in D$ avec $F_{20}(a) = 0$, on a $J_{F_{20}}(a) \neq 0$.

Preuve du théorème (2.2) Voir ([11], [12])

Exemple 2.3. *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax, \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \quad (2.12)$$

En coordonnées polaires, le système (2.12) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + 8\varepsilon r \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta},$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \varepsilon + r (-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta \\ & + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta \\ & + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.9) avec

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \\ F_2(\theta, r) &= r (-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ &\quad + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \\ F_3(\theta, r, \varepsilon) &= O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Donc nous allons appliquer le théorème précédent

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5), \\ \int_0^\theta F_1(s, r) ds &= \frac{r^2}{3} (8 - 8 \cos^3 \theta - 7 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) \int_0^\theta F_1(s, r) ds + F_2(\theta, r) \right] d\theta \\ &= r(a - r^2). \end{aligned}$$

L'équation $f^{10}(r) = 0$ a une seule racine positive $r = +\sqrt{a}$ et on a $\frac{d}{dr} f^{10}(r) = a - 3r^2$.

1. Si $a > 0$, alors le système différentiel (2.12) a un cycle limite stable d'amplitude $r = \sqrt{a}$ car $\frac{d}{dr} f^{10}(\sqrt{a}) = -2a < 0$.

2. Si $a \leq 0$, alors l'équation $f^{10}(r) = 0$ n'a pas de racines, alors le système différentiel (2.12) n'a pas de cycle limite.

Cycles limites d'un système différentiel de Liénard perturbé

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de moyennisation du premier et du deuxième ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ d'une classe de systèmes différentiels de Liénard plus généralisée [3] de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\ell_1(x)y) + \varepsilon^2(\ell_2(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + p_1(x)y^3) \\ \quad - \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + p_2(x)y^3), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f_i(x), g_i(x), h_i(x), p_i(x)$ et $\ell_i(x)$ sont des polynômes de degrés n et m , respectivement pour chaque $(1 \leq i \leq 2)$ et ε est un paramètre réel supposé petit.

Nos principaux résultats sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.1. *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ du système (3.1), en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre est*

$$\lambda_1 = \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

Théorème 3.2. *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ du système (3.1) en utilisant la méthode de moyennisation du deuxième ordre est*

$$\lambda_2 = \max \left\{ \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + 2, \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right] + 2 \right\}.$$

3.1 Preuves des résultats

3.1.1 Preuve du théorème (3.1)

Pour appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, on écrit le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ) , $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $r > 0$.

Posons

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, & g_1(x) &= \sum_{i=0}^n b_i x^i, & h_1(x) &= \sum_{i=0}^n c_i x^i & \text{et} & & p_1(x) &= \sum_{i=0}^n d_i x^i, \\ \ell_1(x) &= \sum_{i=0}^m k_i x^i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le système (3.1) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^n r^i (a_i r \cos^i \theta \sin \theta + b_i r \cos^i \theta \sin^2 \theta + c_i r^2 \cos^i \theta \sin^3 \theta \right. \\ &\quad \left. + d_i r^3 \cos^i \theta \sin^4 \theta) + \sum_{i=0}^m k_i \cos^{i+1} \theta \sin \theta r^{i+1} \right) + o(\varepsilon) \\ \dot{\theta} &= 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^n r^i \left(a_i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + b_i r_1 \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_i r^2 \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + d_i r^3 \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta \right) - \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \right. \tag{3.3}$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante le système (3.3) s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + o(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n r^i \left(a_i \cos^i \theta \sin \theta + b_i r^1 \cos^i \theta \sin^2 \theta - +c_i r^2 \cos^i \theta \sin^3 \theta \right. \\ &\quad \left. + d_i r^3 \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) + \left(\sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right). \end{aligned}$$

3.2 Preuve du théorème (3.2)

Alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n r^i \left(a_i \cos^i \theta \sin \theta + b_i r \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. + c_i r^2 \cos^i \theta \sin^3 \theta + d_i r^3 \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) d\theta.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dans la proposition suivante, nous obtenons l'expression exacte de $F_{10}(r)$.

Proposition 3.1. $F_{10}(r)$ est un polynôme de la variable r donné par :

$$F_{10}(r) = r \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \left(b_{2i} + d_{2i} r^2 \frac{3}{2(i+2)} \right). \tag{3.5}$$

Preuve.

A partir de (3.4) et en utilisant les intégrales de l'annexe A, on obtient (3.5), ceci complète la preuve de la proposition (3.1).

Donc la fonction (3.5) a au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ cycles limites par conséquent le Théorème (3.1) est prouvé.

Exemple 3.1. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (1 + x^2 + x^3) y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon \left(8x^2 y^3 - \frac{8}{3} y^3 + x^2 + xy^2 - 4x^2 y \right). \end{cases} \tag{3.6}$$

En utilisant les coordonnées polaire (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, $r > 0$ et par un calcul adéquat on obtient la fonction moyennée

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2}(2 - 3r^2 + r^4),$$

qui a exactement deux racines positive $r_1 = 1$, et $r_2 = 2$.

D'après le Théorème (3.1) le système (3.6) admet deux cycles limites.

3.2 Preuve du théorème (3.2)

Nous utilisons la méthode de moyennisation du second ordre on écrit le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$.

Chapitre 3. Cycles limites d'un système différentiel de Liénard perturbé

Tenant compte de (3.2) et en posant

$$\begin{aligned} \ell_2(x) &= \sum_{i=0}^m h_i x^i, & f_2(x) &= \sum_{i=0}^n p_i x^i, & g_2(x) &= \sum_{i=0}^n q_i x^i, \\ h_2(x) &= \sum_{i=0}^n s_i x^i, & P_2(x) &= \sum_{i=0}^n w_i x^i. \end{aligned}$$

Le système (3.1) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \left(\sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^n d_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta \right) - \varepsilon^2 \left(\sum_{i=0}^m h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^n r_i a^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n d_i r^3 \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta - \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right) - \frac{\varepsilon^2}{r} \left(\sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^{i+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n w_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m r^{i+1} h_i \cos^i \theta \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.7) s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + o(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\ &\quad + \sum_{i=0}^n d_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta + \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) &= \sum_{i=0}^m h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\
&+ \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^n w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta - \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\
&+ \sum_{i=0}^n r^i a_i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n r^{i+1} b_i \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n r^{i+2} c_i \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
&+ \left. \sum_{i=0}^n r^{i+3} d_i \cos^i \theta \sin^4 \theta \right) \times \left(\sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\
&+ \left. \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^n d_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta \right). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Déterminant la fonction $F_{20}(r)$ correspondante. Pour cela, posons $F_{10} \equiv 0$ qui est équivalente à

$$\begin{cases} b_0 = 0, & i = 0, \\ b_{2i} = \frac{-3}{2i-1} d_{2i-2}, & 1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2} \right], \\ b_{2i} = d_{2i-2} = 0, & i = \left[\frac{n}{2} \right] + 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

En remplaçant l'expression (3.10) dans (3.8), nous avons

$$\begin{aligned}
F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \\
&+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} d_{2i+1} r^{2i+4} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]+1} d_{2i-2} r^{2i+1} \left(\cos^{2i+2} \theta - \frac{4i+1}{2i-1} \cos^{2i} \theta \right. \\
&+ \left. \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right) + \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^m (i+1) k_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n i a_i r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \\
&+ \sum_{i=0}^n (i+2) r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (2i+2) b_{2i+1} r^{2i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \\
&+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (2i+4) d_{2i+1} r^{2i+1} \cos^i \theta \sin^4 \theta + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]+1} (2i+1) d_{2i-2} r^{2i} \\
&\left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{4i+1}{2i-1} \cos^i \theta + \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 y_1(r, \theta) &= \int_0^\theta F_1(\psi, r) d\psi \\
 &= \int_0^\theta \left(\sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \psi \sin \psi + \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \psi \sin \psi + \sum_{i=0}^n b_i r^{i+1} \cos^i \psi \sin^2 \psi \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \psi \sin^3 \psi + \sum_{i=0}^n d_i r^{i+3} \cos^i \psi \sin^4 \psi \right) d\psi.
 \end{aligned}$$

En utilisant les intégrales de l'annexe A, on trouve

$$\begin{aligned}
 y_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) + \sum_{i=0}^n a_i r^i \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \left(\frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{\cos^{i+1} \theta}{i+1} + \frac{\cos^{i+3} \theta}{i+3} \right) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} d_{2i-2} r^{2i+1} \sum_{\ell}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,\ell} \sin(2\ell\theta) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \sum_{\ell=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} \sin(2\ell+1)\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+4} \sum_{\ell=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} \sin(2\ell+1)\theta,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,i+1}, & l = i+1. \end{cases}, \quad \tilde{\beta}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - 2\gamma_{i+1,l} + \gamma_{i+2,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -2\gamma_{i+1,i+1} + \gamma_{i+2,i+1}, & l = i+1, \\ \gamma_{i+2,i+2}, & l = i+2. \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_{i,l} = \begin{cases} \beta_{i-1,l} - \frac{4i+1}{2i-1} \beta_{i,l} + \frac{2i+2}{2i-1} \beta_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i-1, \\ -\frac{4i+1}{2i-1} \beta_{i,l} + \frac{2i+2}{2i-1} \beta_{i+1,l}, & l = i, \\ \frac{2i+2}{2i-1} \beta_{i+1,i+1} & l = i+1. \end{cases}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r),$$

avec

$$\begin{aligned}
 F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta) d\theta \\
 F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

Dans les lemmes qui suivent, nous calculons les intégrales $F_{20}^1(r)$ et $F_{20}^2(r)$.

3.2 Preuve du théorème (3.2)

Lemme 3.1. *L'intégrale $F_{20}^1(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \widetilde{M}^1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \widetilde{M}^2 \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \widetilde{M}^3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \widetilde{M}^4
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}^1 &= a_{2i} b_{2j+1} \left(i \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} C_{i,\ell} + \frac{(j+1)}{2i+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) + r^2 a_i d_{2j+1} \\
&\times \left(i \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\tilde{\gamma}}_{j,l} C_{i,\ell} - \frac{3(j+2)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
&+ C_{2i} b_{2j+1} r^2 \left((j+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} k_{i,\ell} - \frac{(i+1)(4i+10j+15)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+1)(2j+3)(i+j+3)!} \right) \\
&+ C_{2i} d_{2j+1} r^4 \left((i+1) \sum_{i=0}^{j+2} \tilde{\tilde{\gamma}}_{i,\ell} k_{i,\ell} - \frac{3(j+2)(4j+14i+21)\alpha_{i+j+1}}{i+j+2(2i+1)(2i+3)(i+j+4)!} \right), \\
\widetilde{M}^2 &= a_{2i+1} d_{2j-2} \left(\frac{2i+1}{2} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,l} \tilde{C}_{i,\ell} + \frac{3(2j+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j-1)(i+j+2)!} \right) \\
&+ C_{2i+1} d_{2i-2} r^2 \left(\frac{(2i+3)}{2} \sum_{i=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{i,\ell} \tilde{K}_{i,\ell} + \frac{15(2j+1)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+2}(2j-1)(i+j+3)!} \right), \\
\widetilde{M}^3 &= K_{2i+1} b_{2j+1} \left((i+j) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} C_{i+1,\ell} + \frac{-(j+1)\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+1}(2i+3)(i+j+3)!} \right) \\
&+ K_{2i+1} d_{2j+1} r^2 \left(-\frac{3(j+2)\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+2}(2i+3)(i+j+4)!} + (i+1) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\tilde{\gamma}}_{i,\ell} C_{i+1,\ell} \right), \\
\widetilde{M}^4 &= K_{2i} d_{2j-2} \left((2i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{i,\ell} \tilde{C}_{i,\ell} + \frac{3(2j+1)}{2^{i+j+1}(2i-1)} \right) \left(\frac{\alpha_{j-i}}{(i+j+2)!} \right).
\end{aligned}$$

Preuve. *Des expressions (3.11) et (3.12) nous avons*

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(\theta, r) y_1(\theta, r) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (i+1) k_i b_{2j+1} r^{i+2j+2} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \sin(2\ell+1)\theta d\theta \right. \\
&+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (i+1) k_i d_{2j-2} r^{i+2j+1} \sum_{\ell=1}^{j+2} \tilde{\beta}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \sin(2\ell+1)\theta d\theta \\
&+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (i+1) k_i d_{2j+1} r^{i+2j+4} \sum_{\ell=1}^{j+2} \tilde{\beta}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \sin(2\ell+1)\theta d\theta \\
&+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} i a_i b_{2j+1} r^{i+2j+1} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin(2\ell+1)\theta d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} i a_i d_{2j+1} r^{i+2j+3} \sum_{\ell=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \sin(2\ell) \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i a_i d_{2j-2} r^{i+2j} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta \sin(2\ell) \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} (i+2) r^{i+2j+3} \sum_{\ell=1}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \sin(2\ell+1) \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} (i+2) r^{i+2j+5} \sum_{\ell=1}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \sin(2\ell+1) \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_i d_{2j-2} (i+2) r^{i+2j+2} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{i,\ell} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \sin(2\ell) \theta d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^m b_{2i+1} k_{2j+1} r^{2i+j+2} \frac{2i+2}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta (1 - \cos^{j+2} \theta) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} a_j r^{2i+j+1} \frac{2i+2}{j+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta (1 - \cos^{j+1} \theta) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} c_j r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} - \frac{\cos^{j+1} \theta}{j+1} + \frac{\cos^{j+3} \theta}{j+3} \right) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^m d_{i+1} k_i r^{2i+j+4} \frac{2i+4}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta (1 - \cos^{(j+2)} \theta) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n d_{2i+1} a_j r^{2i+j+3} \frac{2i+4}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta (1 - \cos^{(j+1)} \theta) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n c_i d_{2j+1} r^{2i+j+3} \frac{2i+4}{j+2} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^4 \theta \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} - \frac{\cos^{j+1} \theta}{j+1} + \frac{\cos^{j+3} \theta}{j+3} \right) \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^m d_{2i-2} k_j r^{2i+j+1} \frac{2i+1}{j+2} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta (\cos^{2j-2} \theta) - \frac{(4i+1) \cos^{2i} \theta}{2i-1} + \frac{(2i+2)}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right) \\
& \quad \times (1 - \cos^{j+2} \theta) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n d_{2i-2} a_j r^{2i+j} \frac{2i+1}{j+1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{(4i+1)}{2i-1} \cos^{2i} \theta + \frac{(2i+2)}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right) \\
& \quad \times (1 - \cos^{j+1} \theta) d\theta \\
& + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n d_{2i-2} c_j r^{2i+j+2} \int_0^{2\pi} \left(\left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{(4i+1)}{2i-1} \cos^{2i} \theta + \frac{(2i+2)}{2i-1} \cos^{2i+2} \theta \right) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} - \frac{\cos^{j+1} \theta}{j+1} - \frac{\cos^{j+3} \theta}{j+3} d\theta \right) \right)
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales de l'annexe A on a

3.2 Preuve du théorème (3.2)

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} k_{2i+1} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} (i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} C_{i+1,\ell} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} k_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+5} \\
&\quad (i+1) \sum_{\ell=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,\ell} C_{i+1,\ell} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k_{2i} d_{2j-2} r^{2i+2j+1} (i+1) \sum_{\ell=0}^{j+2} \tilde{\beta}_{j,\ell} \tilde{C}_{i+1,\ell} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} i \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} C_{i,\ell} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i} d_{2j+1} i r^{2i+2j+3} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} C_{i,\ell} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i+1} d_{2j-2} r^{2i+2j+1} \frac{(2i+1)}{2} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,\ell} \tilde{C}_{i,\ell} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+3} \\
&\quad \frac{(i+1)}{2j+3} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \frac{i+1}{2j+1} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} C_{2j} r^{2i+2j+3} \left(\frac{-(i+1)\alpha_{i+j+1}}{(2j+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} - \frac{(i+1)\alpha_{i+j+2}}{(2j+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} (i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} k_{i,\ell} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} d_{2j+1} r^{2i+2j+5} (i+1) \\
&\quad \sum_{\ell=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,\ell} k_{i,\ell} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} K_{2j+1} r^{2i+2j+5} \frac{i+2}{2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} d_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+3} \frac{i+2}{2j+1} \frac{-3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+5} (i+2) \\
&\quad \left(\frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \frac{3\alpha_{i+j+2}}{(2j+3)2^{i+j+3}(i+j+4)!} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i-2} k_{2j} r^{2i+2j+1} \frac{(2i+1)}{4j+4} \left[\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2^{i-2}(i-1)!} - \frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j)!} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4i+1}{2i-1} \left(\frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i)!} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j}(i+j+1)!} \right) + \frac{2i+2}{2+1} \left(\frac{\alpha_{i+j}}{2^i(i+1)!} - \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i-2} a_{2j+1} r^{2i+2j+3} - \frac{3(j+2)(4j+14i+21)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(2i+1)(2i+3)(i+j+4)!} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i-2} a_{2j+1} r^{2i+2j+3} - \frac{3(j+2)(4j+14i+21)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+4)!}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Chapitre 3. Cycles limites d'un système différentiel de Liénard perturbé

Pour une expression simplifiée de (3.14), on obtient le polynôme (3.13).

Lemme 3.2. *L'intégrale $F_{20}^2(r)$ est un polynôme de la variable r donné par :*

$$\begin{aligned}
 F_{20}^2(r) = & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i+1} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + w_{2i} r^2 \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{N}_1 \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{N}_2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+3} \tilde{N}_3 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{N}_4
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_1 = & -a_{2i} b_{2j+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j-1}(i+j+2)!} - a_{2i} d_{2j+1} r^2 \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \\
 & - c_{2i} b_{2j-1} r^2 \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} - c_{2i} d_{2j+1} r^4 \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} \\
 \tilde{N}_2 = & a_{2i+1} d_{2j-2} \frac{3(i+1)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(2j-1)(i+j+2)!} + c_{2i+1} d_{2j-2} r^2 \frac{3(3i-2j+4)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+3)!(2j-1)} \\
 \tilde{N}_3 = & -k_{2i+1} b_{2j+1} \frac{(i+j)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+3)!} - k_{2i+1} d_{2j+1} r^{3(i+j)} \frac{3(2i+2j-12)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+4)!} \\
 \tilde{N}_4 = & k_{2i} d_{2j-2} \frac{3(i^2-i+2j-ij-1)\alpha_{i+j-1}}{2^{i+j+1}(2j-1)(i+j+2)!}
 \end{aligned}$$

Preuve. *En remplaçant l'expression (3.10) dans (3.9), nous avons*

$$\begin{aligned}
 F_2(r, \theta) = & \sum_{i=0}^m h_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^n p_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \\
 & + \sum_{i=0}^n s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^n w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta - \frac{1}{r} \left[\sum_{i=0}^m k_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta \right. \\
 & + \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \sin^i \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+4} \cos^{2i+1} \theta \sin^4 \theta \\
 & + \left. \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_{2i-2} r^{2i+1} \left(\cos^{2i-2} \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \right] \times \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} k_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta \right. \\
 & + \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2} \cos^{2i+2} \theta \sin \theta \\
 & + \left. \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+4} \cos^{2i+2} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_{2i-2} r^{2i+1} \left(\cos^{2i-1} \theta \sin \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i+1} \theta \sin \theta \right) \right],
 \end{aligned}$$

3.2 Preuve du théorème (3.2)

alors

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{i=0}^n q_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^n w_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \right. \\
&\quad k_i b_{2j+1} r^{i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} k_i d_{2j+1} r^{i+2j+5} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+3} \theta \\
&\quad \left. \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k_i d_{2j-2} r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2j-1} \theta \sin \theta - \frac{2j+2}{2j-1} \cos^{2j+1} \theta \sin \theta \right) d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_i b_{2j+1} r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_i d_{2j+1} r^{i+2j+4} \\
&\quad \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_i d_{2j-2} r^{i+2j+1} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta - \left(\cos^{2j-1} \theta \sin \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{2j+2}{2j-1} \cos^{2j+1} \theta \sin \theta \right) d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i b_{2j+1} r^{i+2j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_i d_{2j+1} r^{i+2j+6} \int_0^{2\pi} \cos^{i+2j+2} \theta \sin^6 \theta d\theta + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_i d_{2j-2} r^{i+2j+3} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta \\
&\quad \left(\cos^{2j-1} \theta \sin \theta - \frac{2j+2}{2j-1} \cos^{2j+1} \theta \sin \theta \right) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^m b_{2i+1} k_j r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+1} \theta \\
&\quad \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} b_{2i=1} a_j r^{i+2j+2} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n b_{2i+1} c_j r^{2i+j+4} \\
&\quad \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+3} \theta \sin^3 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^m d_{2i+1} d_j r^{2i+j+5} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^6 \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n \\
&\quad d_{2i+1} a_j r^{2i+j+4} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^4 \theta d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n d_{2i+1} c_j r^{2i+j+6} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+j+2} \theta \sin^6 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^m d_{2i-2} k_j r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-1} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \cos^j \theta \sin^2 \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n d_{2i-2} a_j r^{2i+j+1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \cos^{j+1} \theta d\theta \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^n d_{2i-2} c_j r^{2i+j+3} \int_0^{2\pi} \left(\cos^{2i-2} \theta \sin^2 \theta - \frac{2i+2}{2i-1} \cos^{2i} \theta \sin^2 \theta \right) \cos^{j+1} \theta \sin^2 \theta d\theta
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales de l'annexe A, nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i+1} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} w_{2i} r^{2i+3} \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} k_{2i+1} b_{2j+1} \\
&\quad r^{2i+2j+3} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} k_{2i+1} d_{2j+1} r^{2i+2j+5} \frac{3\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k_{2i} d_{2j-2} r^{2i+2j+1} \left(\frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j}(i+j+1)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1} \frac{\alpha_{i+j+2}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_i d_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i+1} d_{2j-2} r^{2i+2j+1} \left(\frac{\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+1)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i} d_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+4)!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+3} \left(\frac{3\alpha_{i+j}}{2^{i+j}(i+j+2)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&\quad b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+1} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} k_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} k_{2j+1} r^{2i+2j+5} \\
&\quad \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+4)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+3} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+5} \\
&\quad \frac{15\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+4)!} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_{2i-2} k_{2j} r^{2i+2j+3} \left(\frac{3\alpha_{j+1}\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} - \frac{i+1}{2i-1} \frac{3\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i-2} a_{2j+1} r^{2i+2j+1} \frac{-3(j+1)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(2i-1)(i+j+2)!} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_{2i-2} c_{2j+1} r^{2i+2j+3} \frac{-3(3-2i+4)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+2}(2i-1)(i+j+3)!}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.2 Preuve du théorème (3.2)

Pour une expression simplifiée de (3.16), on obtient le polynôme (3.15) .

D'après les Lemme 1 et 2, nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) &= F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+1} \tilde{S}_1 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{S}_2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{S}_3 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{S}_4 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} r^{2i+2j+1} \tilde{S}_5
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_1 &= q_{2i} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} + w_{2i} r^2 \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!}, \\
\tilde{S}_2 &= a_{2i} b_{2j+2} \left(i \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,\ell} C_{i,\ell} - \frac{(2i+j+2)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) + r^2 a_{2i} d_{2j+1} \\
&\quad \times \left(i \sum_{\ell=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,\ell} C_{i,\ell} - \frac{3(2i+j+3)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
&\quad + b_{2i+1} c_{2j} \left((j+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} k_{i,\ell} - \frac{(12j^2 + 4i^2 + 34j + 10ij + 19i + 24)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+1)(2j+3)(i+j+3)!} \right) \\
&\quad + c_{2i+1} d_{2j+1} \left((i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} \tilde{C}_{i,\ell} - \frac{3(20i^2 + 4j^2 + 29j + 68i + 14ij + 57)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+4)!} \right) \\
\tilde{S}_3 &= a_{2i} d_{2j+1} \left(\frac{2i+1}{2} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,\ell} \tilde{C}_{j,\ell} - \frac{3(4i+2j+3)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} \right) \\
&\quad + c_{2i+1} d_{2j-2} \left(\frac{2i+3}{2} \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,\ell} \tilde{k}_{j,\ell} + \frac{3(12i+2j+21)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} \right) \\
\tilde{S}_4 &= k_{2i+1} b_{2j+1} \left((i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} C_{j,\ell} + \frac{3(4j^2 + 4j - 4i^2 + 6 - 2i)\alpha_{i+j+1}}{(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+3)!} \right) \\
&\quad + r^2 k_{2i+1} d_{2j+1} \left(-\frac{3(j+2)\alpha_{j+i+2}}{2^{j+i+2}(2i+3)(i+j+4)!} + (i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{i,\ell} C_{j,\ell} + \frac{3(2i+2j-12)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+4)!} \right) \\
\tilde{S}_5 &= k_{2i} d_{2j-2} \left((2i+1) \sum_{\ell=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,\ell} \tilde{C}_{j,\ell} + \frac{(24i^2 - 12j^2 + 12ij - 18j - 18i - 72)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+4}(i+j+3)!} \right).
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(y + x^2 + x^3)y, \\ \dot{y} = -\varepsilon^2 \left(x + \left(2 - \frac{8}{5}x^2 \right) y + xy^2 + \left(-4 + \frac{88}{3}x^2 \right) y^3 \right), \end{cases} \quad (3.17)$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $r > 0$ et par un calcul adéquat on obtient la fonction moyennée.

$$F_{20}(r) = \frac{1}{6} (6 - 11r^2 + 6r^4 - r^6)$$

qui a exactement trois racines positives $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$.

D'après le Théorème (3.2) le système (3.17) admet trois cycles limites.

Chapitre 4

Le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiel de Kukles perturbé

4.1 Présentation du problème et résultats principaux

Dans l'article [2] les auteurs ont étudié le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \ell_1(x) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_2(x) + f_2(x, y)y), \end{cases} \quad (4.1)$$

où $f_1(x)$, $g_2(x)$ et $f_2(x, y)$ sont des polynômes de degrés ℓ , m et n respectivement, et ε est un petit paramètre. Ils ont prouvé que le système (4.1) peut avoir $\max \left\{ \left[\frac{\ell-1}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] \right\}$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre.

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème (2.1) du chapitre 2 afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases} \quad (4.2)$$

où $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y)$, $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y)$, $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre.

Chapitre 4. Le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiel de Kukles perturbé

De plus nous faisons quelques applications.

Notre resultat est le suivant :

Théorème 4.1. *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.2) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est :*

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_3 + 1}{2} \right], \left[\frac{n_4 + 2}{2} \right] \right\}$$

4.2 Preuve du théorème (4.1)

Pour utiliser la méthode de moyennisation d'ordre un nous écrivons le système en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $r > 0$. On écrit les polynômes $f_{11}(x, y)$, $f_{21}(x, y)$, $g_{11}(x, y)$, $g_{21}(x, y)$ apparaissant dans (4.2) comme :

$$\begin{aligned} f_{11}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} x^i y^j, & f_{21}(x, y) &= \sum_{i-j=0}^{n_2} b_{ij,1} x^i y^j \\ g_{11}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} x^i y^j, & g_{21}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} x^i y^j \end{aligned}$$

Par conséquent, le système (4.2) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{i+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{i+2} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^n b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \right) \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+3} \theta \right) \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, alors

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

4.2 Preuve du théorème (4.1)

Soit F_{10} l'équation moyennée du premier ordre associée au système (4.2). En utilisant la notation introduite dans le chapitre 2 , on calcule F_{10} ,

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta,$$

alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \right) d\theta.$$

Avec

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \beta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta d\theta = \begin{cases} \pi s_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \gamma_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_1} a_{ij,1} \alpha_{ij} r^{i+j} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_2} b_{ij,1} \beta_{ij} r^{i+j+1} + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_3} a_{ij,2} s_{ij} r^{i+j+2} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_4} b_{ij,2} \gamma_{ij} r^{i+j+3} \right).$$

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ possède au plus

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_3 + 1}{2} \right], \left[\frac{n_4 + 2}{2} \right] \right\}$$

réelles positives.

Alors le système (4.1) a au plus :

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_3 + 1}{2} \right], \left[\frac{n_4 + 2}{2} \right] \right\}$$

Chapitre 4. Le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiel de Kukles perturbé

Exemple 4.1. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \epsilon \left(\frac{37}{9}x^4y + y + (1 - 9x^2)y + (11y^3 - 4y)y^2 + \left(-\frac{128}{5}x^2y^2 - \frac{77}{27}y^3 \right) \right), \end{cases} \quad (4.3)$$

L'équation moyennée du premier ordre est

$$F_{10}(r) = -r^7 + \frac{133}{36}r^5 - \frac{133}{36}r^3 + r,$$

qui a exactement trois racines positives $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 1$, et $r_3 = \frac{3}{2}$ nous concluons donc que le système (4.3) a deux cycles limites.

Conclusion et Perspective

Dans ce mémoire nous avons utilisé la méthode de moyennisation d'ordre 1 et d'ordre deux pour étudier le nombre maximum des cycles limites de certains systèmes différentiels polynômiaux de dimension deux.

L'importance de déterminer le nombre de cycles limites fait l'objet de la deuxième partie du 16^{ème} problème de Hilbert.

Notre futur travail consistera à l'application de la méthode de moyennisation du deuxième ordre au système différentiel perturbé de Kukles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(f_{11}(x, y) + f_{21}(x, y)y + g_{11}(x, y)y^2 + g_{21}(x, y)y^3) \\ \quad - \varepsilon^2(f_{12}(x, y) + f_{22}(x, y)y + g_{12}(x, y)y^2 + g_{22}(x, y)y^3), \end{cases}$$

où $g_{1i}(x)$, $f_{1i}(x)$, $f_{2i}(x)$ et $g_{2i}(x)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 , respectivement, pour chaque $i = 1, 2$.

Annexe A. Formules

Dans cette annexe, nous rappelons certaines formules qui seront utilisées au cours de ce travail. Pour plus de détail voir [1] pour $i, j \geq 0$, nous avons.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ pair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair,} \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=0, \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=2, \\ \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=4, \\ \frac{15\pi \alpha_k}{2^{k+2} (k+3)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=6, \end{cases}$$

où $\alpha_k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$, $\alpha_{k+1} = (2k+1)\alpha_k$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ pair et } j \text{ impair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair;} \\ \pi C_{i,l}, & \text{i pair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{C}_{i,l}, & \text{i pair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ impair et } j \text{ pair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ impair;} \\ \pi K_{i,l}, & \text{i impair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{K}_{i,l}, & \text{i impair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

où

$C_{i,l}, \tilde{C}_{i,l}, K_{i,l}, \tilde{K}_{i,l}$ sont des constantes non nulles .

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta).$$

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta.$$

4.2 Preuve du théorème (4.1)

$$\int_0^\theta \cos^{2i+1} t dt = \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta,$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i} t dt = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta + \sum_{l=0}^i \beta_{i,l} \sin(2l\theta),$$

où

$$\gamma_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1}.$$

Bibliographie

- [1] Abramowitz. M, Stegun I. *Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC :US Government, Printing Office ; 1964.
- [2] Badi. S, Makhlouf. A, *Maximum number of limit cycles for generalized Lié-nard differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013(2013), No. 168, pp. 1-11.
- [3] Boulfoul A, Makhlouf A, Mellahi N. *On the maximum number of limit cycles of generalized polynomial Liénard differential systems via Averaging theory*, Applied Mathematics E-Notes, 20(2020).167-187©.
- [4] Debz N, Boulfoul A and Berkane A. *Limit cycles of a class of planar polynomial differential systems*. Mathematical Methods in The Applied Sciences 2021 ; pp 1-26.
- [5] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Lecture in : Second Internat. Congr. Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. (1900), 253-297 ; English transl. Bull. Amer. Soc. 8 (1902), 437-479.
- [6] Llibre. J, Valls. C ; *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems*, Proc A : R Soc., 2012 ; 468 : 2347-60.
- [7] Poincaré. H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. J. Math. Pures, Appl(3) 7 (1881), 375-422.
- [8] Poincaré. H. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 8 :251-296, 1882.

BIBLIOGRAPHIE

- [9] Poincaré. H. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1 :167-244, 1885.
- [10] Poincaré. H. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 2 :151-217, 1886.
- [11] Sanders J-A, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New York ; 1985.
- [12] Verhulst. F ; *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [13] Viano M, Llibre J, Giacomini H. *Arbitrary order bifurcation for perturbed Hamiltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor*. Bull. Non-linear. Anal. 2002 ; 48 : 117-136.