وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N0 : U.S/F.S/D.M/…../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

انفجار الحلول لنظام المعادلات الفردية اللزجة المرنة غير المحلية

Option: AFA

Par :

Mr . LAKKAICHI Yasser

Encadré par : **DRAIFIA Ala Eddine** **M.C.B U. Laghouat**

Devant le jury :

Président	BOUZETTOUTA Lamin	M.C.B	U. Skikda
Encadreur	DRAIFIA Ala Eddine	M.C.B	U. Laghouat
Examinateur	LATRECHE Abed Alkarim	M.C.B	U. Skikda

Année : 2022/2023

الشكر والتقدير

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن إتبع هداه إلى يوم الدين.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم: ﴿ مَنْ لَا يَشْكُرِ النَّاس لَا يَشْكُرِ اللهَ ﴾

رواه " أبو هريرة "

سبحانك اللهم لا علم لنا إلا ما علمتنا، نشكر الله ونحمده فضل نعمه علينا، نعمة العقل التي أنار بها دربنا وفكرنا ونعمة الذاكرة التي حفظنا بها سرنا وجهرنا.

والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لي مشعل الحياة وحملني على سفينة النجاة.

إلى كل من علمني علما ينتفع به وأدب يرتفع به.

بدءا من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذة التعليم العالي والبحث العلمي في قسم الرياضيات و الإعلام الآلي بجامعة 20 أوت .

تحية عطرة وشكر خاص للأستاذ المشرف " ظرايفية علاء الدين " الذي أفادني بنصائحه وتوجيهاته طيلة إنجاز هذه المذكرة.

كما أشكر أعضاء لجنة المناقشة التي شرفتني بقبولها مناقشة مذكرتي، كل من الأستاذ " بوزطوطة لمين " رئيسا و الأستاذ "لطرش عبد الكريم " ممتحنا اللذين لاشك أنهما سيفيضون عليّ بتوجيهاتهما القيمة وملاحظاتهما السديدة.

دون أن أغض الطرف بالشكر والثناء على إخواننا الطلبة. وخاصة طلبة ماستر 2 دفعة 2023 راجين من المولى العليّ القدير كل التوفيق والفلاح.

وفي الأخير أشكر كل من قدم لي يد العون والمساعدة سواء من قريب أو من بعيد ولو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو حتى بدعوة في ظهر الغيب لهم جزيل الشكر والعرفان.

ولكم مني فائق التقدير والاحترام.

إهــداء

الحمد لله الذي وهبني عقلا مفكرا، ولسانا ناطقا وأنار دربي، ويسر أمري لانهاء هذا العمل، والصلاة والسلام على رسول الله صلى الله عليه وسلم.

إذا كان الإهداء يعبر ولو بجزء من الوفاء، فأهدي ثمرة جهدي:

إلى التي على بساط الأوجاع ولدتني وبأيدي الآلام ربتني وبعيون التعب رعتني وبصدر المشقات حمتني، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي: أمي أمي أمي.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار وعلمني العطاء دون الإنتظار، إلى الذي أحمل إسمه بكل إفتخار، إلى قدوتي في الحياة، والدي حفظه الله.

إلى من قال فيهم الشاعر:

أخاك أخاك فمن لا أخا له * * * كساع إلى الهيجاء بغير سلاح.

والذي تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود، إخوتي.

إلى كل الأهل والأقارب.

إلى كل الأصدقاء الأوفياء والزملاء الأعزاء التي جمعتني بهم الحياة.

إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد.

إلى كل من تصفح هذه المذكرة وانتفع بها وتذكرني بدعائه.

** العكايشي ياسر **

الملخص

يتعلق هدف عملنا بشكل أساسي بتحديد الظروف الملائمة التي يمكن أن تقود الحل إلى الميل نحو الصفر في الوقت المحدد لبعض مشاكل اللزوجة المرنة المفردة في وجود مصطلح المصدر من النوع متعدد الحدود.

Abstract

The objective of our work is mainly to identfiy the favorable conditions that can lead the solution to tilt towards zero in time for some single viscoelastic problems in the presence of the source term of the polynomial type.

Résumé

L'objectfi de notre travail est principalement d'identfiier les conditions favorables qui peuvent amener la solution à basculer vers zéro en temps pour certains problèmes viscoélastiques simples en présence du terme source de type polynomial.

ترميزات

الرمز	مدلوله
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية.
Ω	مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$.
$(E, \|\|.\|\|)$	فضاء نظيمي.
$L^2(\Omega)$	$L^2(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : /u : mesurablesur\Omega \text{ et } \left(\int_\Omega \|u(x)\|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$
$H^m(\Omega)$	$H^m(\Omega) := \left\{ u : mesurabletelqueD^a u \in L^2(\Omega), \ \forall a \in \mathbb{N}^n, \ \|a\| \leq m \right\}$
$L^P(\Omega)$	$L^p(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to R, u : mesurable, \int_\Omega \|u(x)\|^p \, dx < \infty \right\}$
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R}, u \ mesurables, \ni c > 0 \ tel \ que \ \|u(x)\| \leq cp.p \ sur\Omega \}$
$W^{m,p}(\Omega)$	$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); telle \ que \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \|\alpha\| \leq m \}$
$(.,.)_{L^2(\Omega)}$	الجداء السلمي في الفضاء $L^2(\Omega)$.
$(.,.)_{H^m(\Omega)}$	الجداء السلمي في الفضاء $H^m(\Omega)$.
$\\|\cdot\\|_{L^2(\Omega)}$	النظيم في $L^2(\Omega)$.
$\|\|.\|\|_{H^m(\Omega)}$	النظيم في $H^m(\Omega)$.
$\|\|.\|\|_{L^p(\Omega)}$	النظيم في $L^p(\Omega)$.
$\|\|.\|\|_{L^\infty(\Omega)}$	النظيم في $L^\infty(\Omega)$.
$\|\|.\|\|_{W^{m,p}(\Omega)}$	النظيم في $W^{m,p}(\Omega)$.
$E(t)$	دالة الطاقة.
$D^a u := \frac{\partial^{\|a\|} u}{\partial_{x1}^{a_1} \partial_{x2}^{a_2} \ldots \partial_{x_n}^{a_n}}$	الإشتقاق بمفهوم التوزيعات.

الفهــــــرس

المقدمـــة

حظيت المشاكل المختلطة غير المحلية لمجموعة متنوعة من المعادلات التفاضلية الجزئية والقطع المكافئ بإهتمام كبير في العقود الأخيرة. هذه المشاكل مستوحاة بشكل خاص من الفيزياء الحديثة والعلوم التكنولوجية وهي تصف العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية. يتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية من خلال مشاكل حدود القيمة الأولية مع قيود غير محلية مثل شروط الحدود المتكاملة، حيث لا يمكن قياس البيانات مباشرة على الحدود، ولكن القيمة المتوسطة للحل على المجال معروفة.

يمكن مواجهة المشاكل التطورية من الدرجة الثانية في العديد من المجالات العلمية والعديد من النماذج الهندسية ويتم تطبيقها على نطاق واسع في نظرية إنتقال الحرارة، وتدفق المياه الجوفية، والعلوم الطبية، والعمليات البيولوجية، والمرونة الحرارية، ونشر التفاعل الكيميائي، وفيزياء البلازما، والهندسة الكيميائية، والحرارة لعمليات التوصيل وديناميات السكان ونظرية التحكم. حول هذا الموضوع، أنظر أعمال كانون [3]، شي [47]، كاباسو كونش [8]، كحلون وشي [9]، يونكين وموزيف [17]، شي وشيلور [48]، تشوي وتشان [10]، وإيوينج ولين [12]. تم تكريس معظم الأبحاث حول المشكلات غير المحلية المختلطة للحلول الكلاسيكية. تمت دراسة المشكلات اللاحقة المتعلقة بالشروط المتكاملة للمعادلات القطعية من قبل يونكين [16]، بولكينا [45، 46]، يورشوك [50]، كارتينيك [21]، مسلوب وبوزياني [35، 36]، مسلوب ومسعودي [37، 38]، مسلوب ولقرين [39]، مسلوب [40، 41]، وكامينين [22]. في هذا العمل، ندرس نظام اللزوجة المطاطية الفريد التالي:

$$\begin{cases} u_{tt}-\dfrac{1}{x}(xu_x)_x+\displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\,\dfrac{1}{x}(xu_x(x,s))_x ds+au_t=|v|^{q+1}|u|^{p-1}u,\ \ dans\ Q, & (1)\\ v_{tt}-\dfrac{1}{x}(xv_x)_x+\displaystyle\int_0^t g_2(t-s)\,\dfrac{1}{x}(xv_x(x,s))_x ds+av_t=|u|^{p+1}|v|^{q-1}v,\ \ dans\ Q, & (2)\\ \begin{cases} u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x),\ \ x\in(0,\alpha), \\ v(x,0)=v_0(x),\ \ v_t(x,0)=v_1(x),\ \ x\in(0,\alpha), \\ u(\alpha,t)=v(\alpha,t)=0,\ \ \displaystyle\int_0^\alpha xu(x,t)\,dx=\int_0^\alpha xv(x,t)\,dx=0, \end{cases} & (3) \end{cases}$$

ينشأ هذا النوع من المشاكل في اللزوجة المرنة وفي الأنظمة التي تحكم الحركة الطولية لتكوين لزج مطاطي يخضع لنموذج بولتزمان الفريد غير الخطي. الدافع وراء عملنا يرجع إلى بعض النتائج المتعلقة بالأوراق البحثية التالية: في [42]، أظهر مسعودي، في ظل ظروف تتكيف مع وظيفة الإسترخاء، أن الحلول ذات الإنفجار الأولي للطاقة السلبية في زمن محدود إذا كانت $p>m$ وإستمرت في الوجود إذا $p\geq m$ للمشكلة التالية:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g\left(t-s\right)\Delta \mathbf{u}\mathbf{ds}+u_t\left|u_t\right|^{m-2}=\left|u\right|^{p-2}u, \quad dans\ \Omega\times\left(0,\infty\right), \\ u=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\in\left(0,\infty\right), \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

حيث $Q=(0,1)\times(0,T)$ و f هي دالة ليبشيتز.

في وقت لاحق [37] مسلوب. س ومسعودي. بالنسبة لفئة كبيرة من البيانات الأولية التي أظهرت إنفجار الحل وللبيانات الأولية الصغيرة بما فيه الكفاية أظهرت الوجود العالمي وأيضًا حصلوا على نتيجة سلوك مقارب للمشكلة الفردية غير المحلية التالية:

$$\begin{cases} u_{tt}-\frac{1}{x}(xu_x)_x+\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{1}{x}(xu_x\left(x,s\right))_x ds=f\left(x,t,u,u_x\right), \quad dans\ Q, \\ u(1,t)=0, \quad \int_0^\alpha xu\left(x,t\right)dx=0, \quad t\in\left(0,T\right), \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\Psi(x), \quad x\in\left(0,1\right), \end{cases}$$

في الواقع، حصلوا على خصائص إنفجار المحلول المحلي بطريقة جورجيف-تودوروفا بطاقة أولية سالبة لـ $\alpha=0$. بعد ذلك، أثبت وو شاوتانق في [49] عن إنفجار الحلول بشروط مناسبة على البيانات الأولية بإستخدام الطريقة المباشرة [11، 24] و [40].

بالنسبة لحالة الأنظمة، حصل كافيني ومسعودي [27] على نتائج إنفجار لمشكلة كوشي لنظام المرونة اللزجة

$$\begin{cases} u_{tt}-\frac{1}{x}(xu_x)_x+\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{1}{x}(xu_x\left(x,s\right))_x ds=\left|u\right|^{p-2}u, \\ u(\alpha,t)=0, \quad \int_0^\alpha xu\left(x,t\right)dx=0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\Psi(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g\left(t-s\right)\Delta \mathbf{u}ds=f_1\left(u,v\right), \quad \mathrm{in}\mathbb{R}^n\times\left(0,\infty\right), \\ v_{tt}-\Delta v+\int_0^t g\left(t-s\right)\Delta v ds=f_2\left(u,v\right), \quad \mathrm{in}\mathbb{R}^n\times\left(0,\infty\right), \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), \\ v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right), \quad v_t\left(x,0\right)=v_1\left(x\right). \end{cases}$$

في نموذجنا، تم إستبدال المصطلحات المصدر $f_1(u,v)$ و $f_2(u,v)$ في [27]، على التوالي، بـ $|v|^{q+1}|u|^{p-1}$ و $|u|^{p+1}|v|^{q-1}$ ، تم إستبدال عامل تشغيل لابلاس $\triangle$ بعامل Bessel $\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial}{\partial x}\right)$ ويكتمل النظام بحالة كلاسيكية وغير محلية.

لإظهار إنفجار الحلول في وقت محدد، إستخدمنا الطريقة المباشرة بسبب لي تم تطوير هذه الطريقة لمعادلة الموجة مع تبديد غير خطي ومصدر متعدد الحدود. أنها تتكون في بناء عدم المساواة التفاضلية. ثم يأتي الإنفجار الزمني

المحدود من حل هذه المتباينة التفاضلية. تتكون المذكرة من فصلين ومراجع. نبدأ بمقدمة حيث نقدم تاريخ المشكلة ونتذكر بعض المفاهيم الأولية التي سيتم إستخدامها بعد ذلك في الفصل الأول. في الفصل الثاني، نوضح أن المصدر غير الخطي لنوع متعدد الحدود قادر على إجبار الحلول على الإنفجار في وقت محدود حتى في وجود مخمد أقوى $\alpha > 0$، حيث يتم النظر في ثلاث حالات مختلفة على علاقة الطاقة الأولية. بالإضافة إلى ذلك، تم إثبات تقديرات وقت الإنفجار. نعطي في النهاية المراجع المختلفة المستخدمة في هذه المذكرة.

1 مقدمات

محتويات الفصل

مقدمة

في هذا الفصل، نتذكر جميع المفاهيم الأساسية، وهي النتائج الأساسية التي تتعلق بفضاءات L^p، فضاءات سوبولاف، وبعض المتباينات والنظريات المهمة.

1 فضاء هيلبرت

1 -1 فضاء النظيم وفضاء بناخ

نسمي النظيم على فضاء شعاعي E التطبيق من E في $\mathbb{R}^+$

1. $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.
2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (المتراجحة المثلثية).
3. $\forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$, $||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v||$.

نكتب المسافة المتعلقة بالنظيم $||.||$ بالمقدار $(d(v,w) = ||v - w||)$.

ملاحظة 1.1.1

($(E, ||.||)$ فضاء نظيمي)

تكافؤ الأنظمة

تعريف 1.1.1 ليكن $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ نظيمين على V، نقول أن النظيمين متكافئين إذا وجد c_1 و c_2 موجبين تماماً:

$$\forall v \in V,\ c_1 \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2 \|v\|_1 .$$

تعريف 2.1.1 (متتالية كوشي) ليكن $(E,\ ||.||)$ فضاء نظيمي و u_n متتالية عناصر E:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow ||u_n - u_m|| < \varepsilon.$$

تسمى المتتالية u_n بمتتالية كوشي.

تعريف 3.1.1 (الفضاء التام) ليكن E فضاء شعاعي، نقول أن E هو فضاء تام إذا كانت كل متتالية u_n كوشية من الفضاء E تتقارب نحو عناصر u من E.

تعريف 4.1.1 (فضاء بناخ) ليكن $(E, ||.||)$ فضاء نظيمي، نقول أن E هو فضاء بناخ إذا كان فضاء تام، إذن كل متتالية كوشية من الفضاء E تتقارب مع عناصر u من E.

1 -2 فضاء هيلبرت

تعريف 5.1.1 (الجداء السلمي) ليكن E فضاء شعاعي، نسمي التطبيق من $E \times E$ في الحقل $\mathbb{C}$ المعرف ب $(.,.) :\ E \times E \to \mathbb{C}$ بالجداء السلمي بحيث:

1. $\forall u, v \in E : (u, v) = \overline{(v, u)}.$
2. $\forall u_1, u_2, v \in E$ و $\forall \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda(u_1, v) + (u_2, v).$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{C} :\ (u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v).$
4. $(u, u) \geq 0$ و $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

تعريف 6.1.1 (فضاء هيلبرت) فضاء هيلبرت هو فضاء بناخ ($(E, ||.||_E)$ فضاء نظيمي تام)، المرفق بالجداء السلمي للنظيم المتعلق به

$$||u||_E = (u, u)^{\frac{1}{2}}\ \ (i, e)\, ||u||_E^2 = (u, u)\,.$$

نتيجة 1.1. ليكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ والفضاء $L^2(\Omega)$ معرف بالشكل الأتي:

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : /\Omega \text{ و قيوسة على } u \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

هو فضاء هيلبرت المرفق بالنظيم التالي:

$$||u||_{L^2(\Omega)} := ||u||_2 = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

وبالجداء السلمي

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega u\overline{v} dx \right), \forall \ u, v \in L^2(\Omega).$$

1 -1-2 العناصر المتعامدة، المتعامد الإضافي

تعريف 7.1.1 ليكن E الفضاء المرفق بالجداء السلمي، إذا كان $(x, y) = 0$ نقول عندئذٍ أن x و y متعامدان، ونرمز لهما ب $x \perp y$. من الواضح أن العنصر المعدوم من E يتعامد مع كل عنصر من E.

تعريف 8.1.1 المجموعة L في الفضاء الشعاعي E تسمى مزج خطي (مجموعة خطية)، إذا كان العنصرين $x, y \in L$ والسلميين μ و λ فإن المزج الخطي $\lambda x + \mu y \in L$.

تعريف 9.1.1 ليكن L مزج خطي في فضاء هيلبرت H، نسمي مجموعة العناصر المتعامدة من H نحو L بالمتعامد الإضافي من L ويرمز له ب $L^\perp$.

نظريــة 1.1.1 ليكن L مزج خطي في فضاء هيلبرت H، إذن من أجل L كثيف في H، فالشرط اللازم والكافي هو $L^\perp = \{0\}$.

1 -2-2 الجملة المتعامدة

تعريف 10.1.1 لتكن $(E_n)_{n\in N}$ المتتاليات من فضاء مغلق من E، نقول أن E هو مجموعة هيلبرت من $(E_n)_{n\in N}$ يعبر عنه ب $E = \oplus_n E_n$ إذن:

1) المتتاليات $(E_n)_{n\in N}$ متعامدة مثنى مثنى : $(u, v) = 0$ من أجل كل $u \in (E_m)$ ، $v \in (E_n)$ بحيث $m \neq n$.

2) $Vect\overline{(E_n, n \in \mathbb{N})} = E$.

تعريف 11.1.1 (أساس هيلبرت) الأساس الهيلبرتي هو المتتاليات $(e_n)_{n\in N}$ لعناصر E بحيث:

1. $||e_n|| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \langle e_m, \ e_n \rangle = 0, \ m \neq n$ لما $(e_m \perp e_n, \ m \neq n)$.
2. $Vect(e_n, \ n \in \mathbb{N}) = E$.

تعريف 12.1.1 (الفضاء القابل للفصل) الفضاء الشعاعي النظيمي يحتوي على جزء كثيف يسمى بالفضاء المنفصل.

نظريـة 2.1.1 كل فضاء هيلبرت يعرف أساس هيلبرتي.

2 فضاء سوبولاف

2 -1 فضاء سوبولاف من أجل H^m

تعريف 1.2.1 ليكن Ω مفتوح من$\mathbb{R}^n$ و m عدد طبيعي، فنسمي هذه المجموعة بفضاء سوبولاف من الدرجة m ويرمز لها ب:

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \text{ قيوسة بحيث: } \forall a \in \mathbb{N}^n,\ |a| \leq m, D^a u \in L^2(\Omega) \right\},$$

بحيث: $a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in N^n$ دليل متعدد،

ويعبر على الإشتقاق بمفهوم التوزيعات ب:

$$D^a u := \frac{\partial^{|a|} u}{\partial_{x1}^{a_1} \partial_{x2}^{a_2} ... \partial_{x_n}^{a_n}}.$$

حيث:

$$|a| := a_1 + a_2 + ... + a_n := \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

.بعض خصائص فضاءات $H^m(\Omega)$

ليكن Ω مفتوح من$\mathbb{R}^n$

1) نزود الفضاء $H^m(\Omega)$ بالجداء السلمي

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^m(\Omega)} &:= \sum_{|a|\leq m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)} \ , \forall u,v \in H^m(\Omega) \\ &:= (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\leq |a| \leq m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)} .\end{aligned}$$

2) والنظيم المرفق

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|a|\leq m} ||D^a u||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},\ \forall u \in H^m(\Omega).$$

علاوة على ذلك، من المعروف أن هذا الفضاء هو فضاء هيلبرت.

3) من أجل $m = 0$ نجد $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ومن أجل كل $m_1 > m_2$، $H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$ و $H^m \subset H^{m-1} \subset ... \subset H^2 \subset H^0 = L^2(\Omega)$ (الحقن المستمر).

4) من أجل كل $m \geq 0$، $H^m(\Omega)$ هو فضاء قابل للفصل.

2-2 فضاء سوبولاف $W^{m,p}$

تعريف 2.2.1 (فضاء $L^p(\Omega)$) ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و $1 \leq p < \infty$، نعرف فضاء الدوال $L^p(\Omega)$ ب:

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to R, \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty, \text{قيوسة } \mathbf{u} \right\}.$$

الذي يرفق بالنظيم

$$||u||_{L^p(\Omega)} := ||u||_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعريف 3.2.1 (فضاء $L^\infty(\Omega)$) ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$، ونعرف الفضاء $L^\infty(\Omega)$ ب:

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{قيوسة } \mathbf{u}, \exists c > 0, |u(x)| < c \text{ من أجل}, \Omega \text{ على } p.p \right\}.$$

نرفقه بالنظيم الأساسي

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(\Omega)} &:= ||u||_\infty := ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \\ &:= \inf \left\{ c : |u(x)| \leq c, \ \Omega \text{ على } p.p \right\}. \end{aligned}$$

قضية 1.2.1 من أجل كل $1 \leq p \leq \infty$ ، $L^p(\Omega)$ هو فضاء بناخ.

ملاحظة 2.2.1

الفضاء $L^p(\Omega)$ فضاء هيلبرت إذا كان $(p = 2)$ ، ($(L^2(\Omega))$ فضاء هيلبرت).

تعريف 4.2.1 (فضاء سوبولاف $W^{m,p}$) ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، $m \geq 1$ و p عدد حقيقي من أجل $1 \leq p \leq \infty$، نعرف الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ كالتالي:

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega), D^a u \in L^p(\Omega), \ \forall a \in \mathbb{N}^n, \ |a| \leq m \},$$

بحيث: $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$ هو دليل متعدد و

$$|a| = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n: \text{ مع } \ D^a := \frac{\partial^{|a|}}{\partial_{x_1}^{a_1} \partial_{x_2}^{a_2} ... \partial_{x_n}^{a_n}}.$$

تعريف 5.2.1 (فضاء H_0^1) ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$

1) نسمي H_0^1 بملاصقة $C_c^\infty(\Omega)$ في H^1، ونلاحظ أيضا أن $H_0^1 = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.
2) إذا كان $m > 0$، $1 \leq p < +\infty$، نعرف الفضاء الجزئي $W_0^{m,p}(\Omega)$ من $W^{m,p}(\Omega)$ كملاصقة من $C_c^\infty(\Omega)$

$$W^{m,p}(\Omega) : W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

وهو الجداء السلمي ل $W_0^{1,2}(\Omega)$ المعرف ب:

$$\begin{aligned} (u,v)_{W^{2,1}(\Omega)} &:= \int_\Omega (uv + u_x v_x)\, dx \\ &:= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u_x, v_x)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

.بعض خصائص فضاءات $W^{m,p}(\Omega)$

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$
1) الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ مزود بالنظيم

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &:= \|u\|_{p,\Omega}^m \\ &:= \left(\int_\Omega \sum_{a=0}^{m} \sum_{(a)} \left| \frac{\partial^a u}{\partial_x^{a_1} \partial_{x_2}^{a_2} \dots \partial_{x_n}^{a_n}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &:= \|u\|_{L^p} + \sum_{1 \leq |a| \leq m} \|D^a u\|_{L^p}. \end{aligned}$$

2) فضاء سوبولاف $W^{m,p}(\Omega)$ هو فضاء بناخ.
3) إذا كان $p = 2$: $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ هو فضاء هلبيرت.
4) إذا كان $m = 0$: $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

3 بعض المتباينات المهمة

.متراجحة كوشي - شوارتز

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$، $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$

$$\forall u, v \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$
$$(i.e) : \|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

• متراجحة كوشي مع ε

من أجل كل $\varepsilon > 0$ و $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ لدينا:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2 .$$

• متراجحة يونغ

ليكن p و q عددين حقيقيين موجبين يحققان العلاقة التالية:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

إذن $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$، فنجد:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

• متراجحة يونغ مع ε

ليكن $\varepsilon > 0$ إذن $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$ فنجد:

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon)|b|^q .$$

بحيث p و q موجبين تمامًا، مرتبط بالعلاقة: $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ و $c(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

• كتابة أخرى لمتراجحة يونغ مع ε

من أجل كل $\varepsilon > 0$ و $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p}\left|\frac{b}{\varepsilon}\right|^{\frac{p}{p-1}} \quad \forall p > 1.$$

• متراجحة هولدر

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$، من أجل كل $f \in L^p(\Omega)$، $g \in L^{p'}(\Omega)$، $|fg| \in L^1(\Omega)$، ومن أجل $1 \leq p \leq \infty$

نلاحظ أن p' مرافق ل p، أي أنه حقيقي من أجل $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$، ولدينا المتراجحة

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}} .$$

إذا كان $p = p' = 2$ نجد متراجحة كوشي - شوارتز.

• متراجحة بوانكاري

من أجل كل $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ و $u\backslash_{\partial\Omega} = 0$ نجد:

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx,$$

حيث: C_Ω هو ثابت بوانكاري المتعلق ب Ω.

متراجحة غرونول.
ليكن $T > 0$، $\lambda \in L^1(0,T)$، $\lambda \geq 0$ $p.p$، $C_1, C_2 \geq 0$، وليكن $\Phi \in L^1(0,T)$، $\Phi \geq 0$ تقريبًا محقق دائمًا من أجل $\lambda\Phi \in L^1(0,T)$ و

$$\Phi(t) \leq C_1 + C_2 \left(\int_0^t \lambda(s)\, \Phi(s)\, ds \right), \ \text{p.p } t \in (0,T).$$

إذن

$$\Phi(t) \leq C_1 exp \left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\, ds \right), \ \text{p.p } t \in (0,T).$$

4 بعض النظريات المهمة

نتيجة 1.4. ليكن $\delta > 0$ و $\beta(t) \in C^2(0,\infty)$ دوال أساسية غير سالبة

$$\beta''(t) - 4(\delta+1)\beta'(t) + 4(\delta+1)\beta(t) \geq 0. \tag{1.1}$$

إذن

$$\beta'(0) > r_2\beta(0) + k_0, \tag{1.2}$$

أي أن

$$\beta'(t) > k_0,$$

إذا كان $t > 0$، k_0 هو ثابث، $r_2 := 2(\delta+1) - 2\sqrt{(\delta+1)\delta}$ هو أصغر حل للمعادلة:

$$r^2 - 4(\delta+1)r + 4(\delta+1) = 0.$$

برهان. ليكن r_1 الحل الأعظمي للمعادلة $r^2 - 4(\delta+1)r + 4(\delta+1) = 0$ إذن (1.1) متكافئة مع

$$\left(\frac{d}{dt} - r_1 \right) \left(\frac{d}{dt} - r_2 \right) \beta(t) \geq 0, \tag{1.3}$$

نكامل (1.3) على المجال $[0,t]$، فنتحصل على:

$$\beta'(t) \geq r_2\beta(t) + (\beta'(0) - r_2\beta(0))e^{r_1 t}.$$

من (1.2) نجد $\beta'(t) > k_0$، إذا كان $t > 0$.

□

نتيجة 2.4. إذا كانت $J(t)$ دالة غير متزايدة على المجال $[t_0,\infty[$، والمتباينة تقبل الإشتقاق فإن:

$$J'(t)^2 \geq \alpha + bJ(t)^{2+\frac{1}{\delta}}\,. \quad \text{،}\quad \text{لما}\quad t \geq t_0 \tag{1.4}$$

$\alpha > 0$، $b \in \mathbb{R}$ ، إذن يوجد زمن محدد T^* حيث:

$$\lim_{t\to T^{*-}} J(t) = 0,$$

والنهاية الأعظمية ل T^* تعطى على التوالي من خلال الحالات التالية:

i) إذا كان $b < 0$ و $J(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\alpha/(-b)}\right\}$، نجد أن:

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{-b}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{-b}} - J(t_0)}. \tag{1.5}$$

ii) إذا كان $b = 0$، نجدأن:

$$T^* \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{\alpha}}. \tag{1.6}$$

iii) إذا كان $b > 0$، نجد أن:

$$T^* \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{\alpha}},$$

أو

$$T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{\alpha}} \left(1 - [1 + cJ(t_0)]^{\frac{1}{2\delta}}\right), \tag{1.7}$$

بحيث: $c = \left(\frac{b}{\alpha}\right)^{\delta/(2+\delta)}$

برهان. i) إذا كان $\sqrt{c^2-d^2} \geq c - d$ من أجل $c \geq d > 0$، و

$$J'(t) \leq -\sqrt{\alpha} + \sqrt{-b}J(t)\,,\ t \geq t_0 \quad \text{إذا كان} \tag{1.8}$$

ولذلك نتحصل على:

$$J(t) \leq \left(J(t_0) - \sqrt{-\frac{\alpha}{b}}\right) e^{(t-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{\frac{-\alpha}{b}}. \tag{1.9}$$

ومنه يوجد $T^* < \infty$ موجب من أجل $\lim_{t\to T^{*-}} J(t) = 0$ ، و T^* أعظمي يعطى بالعلاقة (1.5).

ii) إذا كان $b = 0$، نستخرج من (1.4) أن:

$$J(t) \leq J(t_0) - \sqrt{\alpha}(t - t_0)\,, \quad t \geq t_0 \quad \text{إذا كان}$$

ولذلك يوجد $T^* < \infty$ من أجل $\lim_{t\to T^{*-}} J(t) = 0$ ، و T^* أعظمي يعطى بالعلاقة (1.6).

iii) إذا كان $b > 0$، نستخرج من (1.4) أن:

$$J'(t) \leq -\sqrt{\alpha(1+(cJ\,(t))^{2+\frac{1}{\delta}}}, \tag{1.10}$$

بحيث: $c = \left(\dfrac{\alpha}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}}$
بإستخدام المتراجحة التالية:

$$m^q + n^q \geq 2^{1-q}(m+n)^q, \quad q \geq 1 \text{ و } m,n > 0 \text{ من أجل} \tag{1.11}$$

وأخد $q = 2 + \dfrac{1}{\delta}$، نتحصل على:

$$J'\,(t) \leq -\sqrt{\alpha}2^{\dfrac{(-\delta-1)}{2\delta}}(1+cJ\,(t))^{\dfrac{1+1}{\delta}}. \tag{1.12}$$

بمكاملة (1.12) نجد:

$$J\,(t) \leq \frac{1}{c}\left\{-1+\left[(1+cJ\,(t_0))^{\frac{-1}{2\delta}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta c}2^{\frac{-(3\delta+1)}{2\delta}}\,(t-t_0)\right]^{-2\delta}\right\}. \tag{1.13}$$

إذن يوجد $T^* < \infty$ بحيث $\lim\limits_{t\to T^{*-}} J\,(t) = 0$ ، و T^* أعظمي يعطى بالعلاقة (1.7) .

□

2 إنفجار الحلول لنظام المعادلات الفردية اللزجة المرنة غير المحلية

محتويات الفصل

1 مقدمة

في هذا الفصل نحصل على نتيجة إنفجار الحلول بالنسبة للطاقة الأولية الموجبة، وأيضا تقديرات لزمن الإنفجار.

2 الإنفجار في زمن محدد

في هذا القسم، نناقش ظاهرة إنفجار النظام

$$
\begin{cases}
u_{tt}-\dfrac{1}{x}(xu_x)_x+\displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\,\dfrac{1}{x}(xu_x(x,s))_x ds+au_t=|v|^{q+1}|u|^{p-1}u, & (2.1)\\
v_{tt}-\dfrac{1}{x}(xv_x)_x+\displaystyle\int_0^t g_2(t-s)\,\dfrac{1}{x}(xv_x(x,s))_x ds+av_t=|u|^{p+1}|v|^{q-1}v, & (2.2)\\
\begin{cases}
u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in(0,\alpha),\\
v(x,0)=v_0(x),\ v_t(x,0)=v_1(x),\ x\in(0,\alpha),\\
u(\alpha,t)=v(\alpha,t)=0,\ \displaystyle\int_0^\alpha xu(x,t)\,dx=\int_0^\alpha xv(x,t)\,dx=0,
\end{cases} & (2.3)
\end{cases}
$$

و من أجل ذكر نتائجنا نقوم بعمل المزيد من الإفتراضات حول g_1 و g_2

(A) (من أجل: $i=1,2$) $g_i(s)\geq 0,\ g_i'(s)\leq 0$ و $\displaystyle\int_0^\infty g_i(s)\,ds<\frac{(p+q)(p+q+2)}{(p+q+1)^2},$

تعريف 1.2.2 الحل (u,v) للجملة (2.1)-(2.3) ينفجر إذا كان هناك زمن محدد T^* بحيث:

$$\lim_{t\to T^{*-}}\left(\int_0^\alpha xu_x^2dx+\int_0^\alpha xv_x^2dx\right)^{-1}=0. \tag{2.4}$$

نعرف دالة الطاقة كمايلي:

$$\begin{aligned}E(t):=&\left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx+\left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx\\&+\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(1-\int_0^t g_1(s)\,ds\right)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\\&+\left(\frac{q+1}{2}\right)\left(1-\int_0^t g_2(s)\,ds\right)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx\\&-\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx+\left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1\circ u_x)(t)\\&+\left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2\circ v_x)(t).\end{aligned} \tag{2.5}$$

بحيث:

$$(g\circ u_x)(t):=\int_0^\alpha\int_0^t xg(t-s)|u_x(x,t)-u_x(x,s)|^2\,dsdx. \tag{2.6}$$

نتيجة 1.2. ليكن (u,v) حل الجملة (2.1)-(2.3)، إذن $E(t)$ دالة غير متزايدة على المجال $[0,t]$ و

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[E(t)]=&\left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1'\circ u_x)(t)-\left(\frac{p+1}{2}\right)g_1(t)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\\&-(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx+\left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2'\circ v_x)(t)\\&-\left(\frac{q+1}{2}\right)g_2(t)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx-(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx\\\le&\ 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

برهان. بضرب المعادلة (2.1) في $(p+1)xu_t(x,t)$، و (2.2) في $(q+1)xv_t(x,t)$، والمكاملة على المجال $(0,\alpha)$ نتحصل على:

$$\begin{aligned}&(p+1)\int_0^\alpha xu_{tt}u_tdx-(p+1)\int_0^\alpha(xu_x(x,t))_xu_t(x,t)\,dx\\&+(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x\,dsu_t(x,t)\,dx\\&+(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx+(q+1)\int_0^\alpha xv_{tt}v_tdx\\&-(q+1)\int_0^\alpha(xv_x(x,t))_xv_t(x,t)\,dx\\&+(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x\,dsv_t(x,t)\,dx\\&+(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx\\=&\ (p+1)\int_0^\alpha x|v|^{q+1}|u|^{p-1}uu_tdx+(q+1)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q-1}vv_tdx.\end{aligned} \tag{2.8}$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة في (2.3) والتعويض في (2.8) نجد:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx\right]+\left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx\right]\\
&+\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\right]+\left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx\right]\\
&+\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[(g_1\circ u_x)(t)-\int_0^t g_1(s)\,ds\left(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\right)\right]\\
&-\left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1'\circ u_x)(t)+\left(\frac{p+1}{2}\right)g_1(t)\left(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\right)\\
&+\left(\frac{q+1}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[(g_2\circ v_x)(t)-\int_0^t g_2(s)\,ds\left(\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx\right)\right]\\
&-\left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2'\circ v_x)(t)+\left(\frac{q+1}{2}\right)g_2(t)\left(\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx\right)\\
&+(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx+(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx\\
=&\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^\alpha x\,|u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx\right],
\end{aligned}\tag{2.9}$$

إذن المعادلة (2.9) تكافئ:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx+\left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx\right.\\
&+\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(1-\int_0^t g_1(s)\,ds\right)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\\
&+\left(\frac{q+1}{2}\right)\left(1-\int_0^t g_2(s)\,ds\right)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx\\
&\left.+\left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1\circ u_x)(t)+\left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2\circ v_x)(t)-\int_0^\alpha x\,|u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx\right\}\\
=&\ \left(\frac{p+1}{2}\right)(g_1'\circ u_x)(t)-\left(\frac{p+1}{2}\right)g_1(t)\left(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\right)\\
&+\left(\frac{q+1}{2}\right)(g_2'\circ v_x)(t)-\left(\frac{q+1}{2}\right)g_2(t)\left(\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx\right)\\
&-(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx-(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx,
\end{aligned}$$

من (2.5) إستخرجنا (2.7)، إذن النتيجة محققة. □

ملاحظة 1.2.2

بمكاملة العبارة (2.7) على المجال $[0,t]$ نجد:

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0)+\left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\,ds+\left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\,ds \\ &-\left(\frac{p+1}{2}\right)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha xu_x^2(x,s)\,dxds-\left(\frac{q+1}{2}\right)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha xv_x^2(x,s)\,dxds \\ &-(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2(x,s)\,dxds-(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2(x,s)\,dxds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

نأخذ (u,v) حلاً ل (2.1)-(2.3) المعرف ب:

$$\begin{aligned} H(t) &:= (p+1)\int_0^\alpha xu^2(x,t)\,dx+(q+1)\int_0^\alpha xv^2(x,t)\,dx \\ &+(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu^2(x,s)\,dxds+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv^2(x,s)\,dxds. \end{aligned} \tag{2.11}$$

نتيجة 2.2. نفرض أن (**A**) محققة، إذن لدينا:

$$\begin{aligned} & H''(t)-(p+q+4)\left[(p+1)\|u_t(x,t)\|_H^2+(q+1)\|v_t(x,t)\|_H^2\right] \\ \geq\ & -2(p+q+2)E(0) \\ & +2(p+q+2)\left[(p+1)\int_0^t\|u_s(x,s)\|_H^2\,ds+(q+1)\int_0^t\|v_s(x,s)\|_H^2\,ds\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

برهان. من العبارة (2.11) لدينا:

$$\begin{aligned} H'(t) &= 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t dx+2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t dx \\ &+(p+1)\int_0^\alpha xu^2(x,t)\,dx+(q+1)\int_0^\alpha xv^2(x,t)\,dx \end{aligned} \tag{2.13}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} H''(t) &= 2(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx+2(p+1)\int_0^\alpha xuu_{tt}dx \\ &+2(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx+2(q+1)\int_0^\alpha xvv_{tt}dx \\ &+2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t dx+2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

بإستخدام (2.1) نجد:

$$\begin{aligned} & 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_{tt}dx \\ =\ & 2(p+1)\int_0^\alpha (xu_x(x,t))_x u(x,t)\,dx \\ & -2(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x\,dsu(x,t)\,dx \\ & -2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t dx+2(p+1)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx \end{aligned} \tag{2.15}$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} & 2(p+1)\int_0^\alpha (xu_x(x,t))_x u(x,t)\,dx \\ = \;& 2(p+1)\left[xu_x(x,t)\,u(x,t)\right]_{x=0}^{x=\alpha} - 2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx \\ = \;& 2(p+1)\left[\alpha u_x(\alpha,t)\,u(\alpha,t)\right] - 2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx, \end{aligned}$$

ومن أجل $u(\alpha,t)=0$، لدينا:

$$2(p+1)\int_0^\alpha (xu_x(x,t))_x u(x,t)\,dx = -2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx. \tag{2.16}$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} & -2(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x\,dsu(x,t)\,dx \\ = \;& -2(p+1)\int_0^t g_1(t-s)\left[\int_0^\alpha (xu_x(x,s))_x u(x,t)\,dx\right]ds \\ = \;& -2(p+1)\int_0^t g_1(t-s)\left[xu_x(x,s)\,u(x,t)\right]_{x=0}^{x=\alpha}ds \\ & +2(p+1)\int_0^t g_1(t-s)\left[\int_0^\alpha xu_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dx\right]ds \\ = \;& -2(p+1)\int_0^t g_1(t-s)\left[\alpha u_x(\alpha,s)\,u(\alpha,t)\right]ds \\ & +2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds, \end{aligned}$$

ومن أجل $u(\alpha,t)=0$، لدينا:

$$\begin{aligned} & -2(p+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_1(t-s)(xu_x(x,s))_x\,dsu(x,t)\,dx \\ & = 2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

بتعويض (2.16) و (2.17) في (2.15) نجد:

$$\begin{aligned} & 2(p+1)\int_0^\alpha xuu_{tt}dx \\ = \;& -2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx + 2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds \\ & -2(p+1)\int_0^\alpha xuu_t dx + 2(p+1)\int_0^\alpha x\,|u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

بإستخدام (2.2) نجد كتابة أخرى كالتالي:

$$\begin{aligned} & 2(q+1)\int_0^\alpha xvv_{tt}dx \\ & = 2(q+1)\int_0^\alpha (xv_x(x,t))_x v(x,t)\,dx \\ & \quad -2(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x\,dsv(x,t)\,dx \\ & \quad -2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t dx + 2(q+1)\int_0^\alpha x\,|u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx, \end{aligned} \tag{2.19}$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
&2(q+1)\int_0^\alpha (xv_x(x,t))_x v(x,t)\,dx \\
=\;& 2(q+1)\left[xv_x(x,t)v(x,t)\right]_{x=0}^{x=\alpha} - 2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx \\
=\;& 2(q+1)\left[\alpha v_x(\alpha,t)v(\alpha,t)\right] - 2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx,
\end{aligned}$$

ومن أجل $u(\alpha,t)=0$، لدينا:

$$2(q+1)\int_0^\alpha (xv_x(x,t))_x v(x,t)\,dx = -2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx. \tag{2.20}$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
&-2(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x\,ds\,v(x,t)\,dx \\
=\;& -2(q+1)\int_0^t g_2(t-s)\left[\int_0^\alpha (xv_x(x,s))_x v(x,t)\,dx\right]ds \\
=\;& -2(q+1)\int_0^t g_2(t-s)\left[xv_x(x,s)v(x,t)\right]_{x=0}^{x=\alpha}ds \\
& +2(q+1)\int_0^t g_2(t-s)\left[\int_0^\alpha xv_x(x,s)v_x(x,t)\,dx\right]ds \\
=\;& -2(q+1)\int_0^t g_2(t-s)\left[\alpha v_x(\alpha,s)v(\alpha,t)\right]ds \\
& +2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\,dx\,ds,
\end{aligned}$$

ومن أجل $u(\alpha,t)=0$، لدينا:

$$\begin{aligned}
&-2(q+1)\int_0^\alpha\int_0^t g_2(t-s)(xv_x(x,s))_x\,ds\,v(x,t)\,dx \\
&= 2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\,dx\,ds
\end{aligned} \tag{2.21}$$

بتعويض (2.20) و (2.21) في (2.19) نجد:

$$\begin{aligned}
&2(q+1)\int_0^\alpha xvv_{tt}\,dx \\
=\;& -2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx + 2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\,dx\,ds \\
& -2(q+1)\int_0^\alpha xvv_t\,dx + 2(q+1)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

بتعويض (2.18) و (2.22) في (2.14) نجد:

$$\begin{aligned}
H''(t) =\;& 2(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx + 2(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx \\
& -2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx - 2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx \\
& +2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)u_x(x,s)u_x(x,t)\,dx\,ds \\
& +2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)v_x(x,s)v_x(x,t)\,dx\,ds \\
& +2(p+q+2)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

بضرب المعادلة (2.10) في 2θ والجمع مع (2.23) وإستعمال (2.5) نتحصل على:

$$\begin{aligned}
H''(t) &= 2(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx + 2(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx - 2(p+1)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx \\
&- 2(q+1)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx + 2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds \\
&+ 2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)\,v_x(x,s)\,v_x(x,t)\,dxds + 2(p+q+2)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx \\
&+ \theta(p+1)\int_0^\alpha xu_t^2(x,t)\,dx + \theta(q+1)\int_0^\alpha xv_t^2(x,t)\,dx \\
&+ \theta(p+1)\left(1-\int_0^t g_1(s)\,ds\right)\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx + \theta(q+1)\left(1-\int_0^t g_2(s)\,ds\right)\int_0^\alpha xv_x^2(x,t)\,dx \\
&- 2\theta\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx + \theta(p+1)(g_1\circ u_x)(t) + \theta(q+1)(g_2\circ v_x)(t) \\
&- 2\theta E(0) - \theta(p+1)\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\,ds - \theta(q+1)\int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\,ds \\
&+ \theta(p+1)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha xu_x^2(x,s)\,dxds + \theta(q+1)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha xv_x^2(x,s)\,dxds \\
&+ 2\theta(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xu_s^2(x,s)\,dxds + 2\theta(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xv_s^2(x,s)\,dxds. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

إذن المعادلة (2.24) تكافئ:

$$\begin{aligned}
H''(t) &= (2+\theta)\left[(p+1)\|u_t(x,t)\|_H^2 + (q+1)\|v_t(x,t)\|_H^2\right] \\
&+ \theta(p+1)\left[\left(1-\int_0^t g_1(s)\,ds\right) - \frac{2}{\theta}\right]\|u_x(x,t)\|_H^2 \\
&+ \theta(q+1)\left[\left(1-\int_0^t g_2(s)\,ds\right) - \frac{2}{\theta}\right]\|v_x(x,t)\|_H^2 \\
&+ 2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds \\
&+ 2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)\,v_x(x,s)\,v_x(x,t)\,dxds \\
&+ 2((p+q+2)-\theta)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx \\
&+ \theta(p+1)(g_1\circ u_x)(t) + \theta(q+1)(g_2\circ v_x)(t) \\
&- 2\theta E(0) - \theta(p+1)\int_0^t (g_1'\circ u_x)(s)\,ds - \theta(q+1)\int_0^t (g_2'\circ v_x)(s)\,ds \\
&+ \theta(p+1)\int_0^t g_1(s)\int_0^\alpha xu_x^2(x,s)\,dxds + \theta(q+1)\int_0^t g_2(s)\int_0^\alpha xv_x^2(x,s)\,dxds \\
&+ 2\theta\left[(p+1)\int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2\,ds + (q+1)\int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2\,ds\right]. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

بإستعمال $(\mathbf{A})$ نستخرج

$$\begin{cases}
-\theta(p+1)_0^t(g_1'\circ u_x)(s)\,ds \geq 0, \\
-\theta(q+1)_0^t(g_2'\circ v_x)(s)\,ds \geq 0, \\
\theta(p+1)_0^t g_1(s)_0^\alpha xu_x^2(x,s)\,dxds \geq 0, \\
\theta(q+1)_0^t g_2(s)_0^\alpha xv_x^2(x,s)\,dxds \geq 0,
\end{cases}$$

ومنه العبارة (2.25) تكتب من الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&H''(t)-(2+\theta)\left[(p+1)\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2+(q+1)\left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right]\\
\geq\;&-2\theta E(0)+2\theta\left[(p+1)\int_0^t\left\|u_s(x,s)\right\|_H^2ds+(q+1)\int_0^t\left\|v_s(x,s)\right\|_H^2ds\right]\\
&+2\left((p+q+2)-\theta\right)\int_0^\alpha x\left|u\right|^{p+1}\left|v\right|^{q+1}dx\\
&+\theta(p+1)\left\{\left(1-\int_0^t g_1(s)\,ds\right)-\frac{2}{\theta}\right\}\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2\\
&+\theta(q+1)\left\{\left(1-\int_0^t g_2(s)\,ds\right)-\frac{2}{\theta}\right\}\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2\\
&+\theta(p+1)(g_1\circ u_x)(t)+\theta(q+1)(g_2\circ v_x)(t)\\
&+2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds\\
&+2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)\,v_x(x,s)\,v_x(x,t)\,dxds. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

بإستخدام متراجحة يونغ من أجل $(\varepsilon=\theta)$ نجد:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds\\
=\;&\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,t)\left[u_x(x,s)-u_x(x,t)+u_x(x,t)\right]dxds\\
=\;&\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,t)\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)dxds\\
&+\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x^2(x,t)\,dxds\\
=\;&\int_0^t\int_0^\alpha \sqrt{xg_1(t-s)}\,u_x(x,t)\sqrt{xg_1(t-s)}\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)dxds\\
&+\int_0^t g_1(t-s)\,ds\left(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\right)\\
\geq\;&-\frac{1}{2\theta}\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x^2(x,t)\,dxds-\frac{\theta}{2}\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\left(u_x(x,s)-u_x(x,t)\right)^2dxds\\
&+\int_0^t g_1(s)\,ds\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2\\
=\;&-\frac{1}{2\theta}\int_0^t g_1(t-s)\,ds\left(\int_0^\alpha xu_x^2(x,t)\,dx\right)-\frac{\theta}{2}(g_1\circ u_x)(t)+\int_0^t g_1(s)\,ds\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2\\
=\;&\left(1-\frac{1}{2\theta}\right)\int_0^t g_1(s)\,ds\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2-\frac{\theta}{2}(g_1\circ u_x)(t),
\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned}
&2(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_1(t-s)\,u_x(x,s)\,u_x(x,t)\,dxds\\
\geq\;&\left(2-\frac{1}{\theta}\right)(p+1)\int_0^t g_1(s)\,ds\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2-\theta(p+1)(g_1\circ u_x)(t). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\begin{aligned}
&2(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha xg_2(t-s)\,v_x(x,s)\,v_x(x,t)\,dxds\\
\geq\;&\left(2-\frac{1}{\theta}\right)(q+1)\int_0^t g_2(s)\,ds\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2-\theta(q+1)(g_2\circ v_x)(t). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

بتعويض (2.27) و (2.28) في (2.26) نجد:

$$\begin{aligned} & H''(t)-(2+\theta)\left[(p+1)\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2+(q+1)\left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right] \\ \geq & -2\theta E(0)+2\theta\left[(p+1)\int_0^t\left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 ds\right] \\ & +2((p+q+2)-\theta)\int_0^\alpha x|u|^{p+1}|v|^{q+1}dx \\ & +\theta(p+1)\left\{1-\frac{2}{\theta}+\left(\frac{2}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}-1\right)\int_0^t g_1(s)\,ds\right\}\left\|u_x(x,t)\right\|_H^2 \\ & +\theta(q+1)\left\{1-\frac{2}{\theta}+\left(\frac{2}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}-1\right)\int_0^t g_2(s)\,ds\right\}\left\|v_x(x,t)\right\|_H^2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

بأخد $\theta=p+q+2$ في (2.29) نجد:

$$\begin{aligned} & H''(t)-(p+q+4)\left[(p+1)\left\|u_t(x,t)\right\|_H^2+(q+1)\left\|v_t(x,t)\right\|_H^2\right] \\ \geq & -2(p+q+2)E(0) \\ & +2(p+q+2)\left[(p+1)\int_0^t\left\|u_s(x,s)\right\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\left\|v_s(x,s)\right\|_H^2 ds\right] \\ & +(p+q+2)(p+1)\left\{\frac{p+q}{p+q+2}-\left(\frac{(p+q+1)^2}{(p+q+2)^2}\right)\int_0^t g_1(s)\,ds\right\}\left\|u_x\right\|_H^2 \\ & +(p+q+2)(q+1)\left\{\frac{p+q}{p+q+2}-\left(\frac{(p+q+1)^2}{(p+q+2)^2}\right)\int_0^t g_2(s)\,ds\right\}\left\|v_x\right\|_H^2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

بإستخدام $(\mathbf{A})$ نستخرج:

$$\begin{cases} (p+q+2)(p+1)\left\{\frac{p+q}{p+q+2}-\left(\frac{(p+q+1)^2}{(p+q+2)^2}\right)\int_0^t g_1(s)\,ds\right\}\left\|u_x\right\|_H^2\geq 0, \\ (p+q+2)(q+1)\left\{\frac{p+q}{p+q+2}-\left(\frac{(p+q+1)^2}{(p+q+2)^2}\right)\int_0^t g_2(s)\,ds\right\}\left\|v_x\right\|_H^2\geq 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

بتعويض (2.31) في (2.30) نتحصل على (2.12)، إذن النتيجة محققة.

□

نتيجة 3.2. لنفترض أن (A) محققة والشروط التالية محققة:

i) $E(0) < 0$

ii) $E(0) = 0$، و

$$H'(0) > (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2. \tag{2.32}$$

iii) $E(0) > 0$، و

$$H'(0) > r_2\left[H(0) + \frac{k_0}{p+q+4}\right] + k_0 \tag{2.33}$$

حيث:

$$r_2 := \frac{p+q+4-\sqrt{(p+q+4)(p+q)}}{2}$$

و

$$k_0 := (p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2\right\} + 2(p+q+2)E(0). \tag{2.34}$$

إذن

$$H'(t) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2 \tag{2.35}$$

من أجل $t > t_0$ لدينا:

$$t^* := \max\left\{0, \frac{H'(0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2}{2(p+q+2)E(0)}\right\}. \tag{2.36}$$

حيث $t_0 = t^*$ في الحالة i، و $t_0 = 0$ في الحالتين ii و iii.

برهان. i) إذا كان $E(0) < 0$

$$-2(p+q+2)E(0) > 0,$$

من العبارة (2.12) نجد أن:

$$H''(t) \geq -2(p+q+2)E(0), \tag{2.37}$$

بمكاملة العبارة (2.37) على المجال $[0,t]$ نجد:

$$\int_0^t H''(s)\,ds \geq \int_0^t -2(p+q+2)E(0)\,ds,$$

ومنه

$$H'(t) - H'(0) \geq -2(p+q+2)E(0)t, \tag{2.38}$$

إذن العبارة (2.38) تكتب على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} H'(t) \geq\ & (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2 \\ & + \left\{-2(p+q+2)E(0)t + H'(0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right\}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

أيضًا

$$t \geq \frac{H'(0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2}{2(p+q+2)E(0)}. \tag{2.40}$$

بتعويض (2.40) في (2.39) نجد:

$$H'(t) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2.$$

إذا كان $t \geq 0$، من أجل $t \geq t^*$ بحيث t^* معرف في (2.36)، نتحصل على العبارة (2.35).

ii) إذا كان $E(0) = 0$، نجد من العبارة (2.12) أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا:

$$H''(t) \geq 0, \tag{2.41}$$

وبمكاملة العبارة (2.41) على $[0, t]$ نجد:

$$\int_0^t H''(s)\,ds \geq 0,$$

ومنه

$$H'(t) - H'(0) \geq 0, \tag{2.42}$$

إذن العبارة (2.42) تكتب من الشكل التالي:

$$\begin{aligned} H'(t) \;\geq\;& (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2 \\ &+ \left\{ H'(0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \right\}. \end{aligned}$$

وبما أن العبارة (2.32) محققة إذن:

$$H'(t) \geq (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2,$$

إذا كان $t \geq 0$ نستخرج العبارة (2.35).

iii) إذا كان $E(0) > 0$، نلاحظ أن:

$$\begin{aligned} 2\int_0^\alpha \int_0^t x u(x,s)\, u_s(x,s)\, ds dx &= 2\int_0^\alpha \int_0^t x \left(\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[u^2(x,s)\right] \right) ds dx \\ &= \int_0^\alpha x \int_0^t \frac{d}{ds}\left[u^2(x,s)\right] ds dx \\ &= \int_0^\alpha x \left[u^2(x,s)\right]_{s=0}^{s=t} dx \\ &= \int_0^\alpha x \left[u^2(x,t) - u^2(x,0)\right] dx \\ &= \int_0^\alpha x u^2(x,t)\, dx - \int_0^\alpha x u^2(x,0)\, dx \\ &= \|u\|_H^2 - \|u_0\|_H^2, \end{aligned}$$

ومنه

$$\|u\|_H^2 = \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^\alpha \int_0^t xu(x,s)\, u_s(x,s)\, dsdx. \tag{2.43}$$

بإستعمال متراجحة يونغ في (2.43) نتحصل على:

$$\begin{aligned}
\|u\|_H^2 &= \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^\alpha \int_0^t xu(x,s)\, u_s(x,s)\, dsdx \\
&= \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^\alpha \int_0^t \sqrt{x}u(x,s) \,.\sqrt{x}u_s(x,s)\, dsdx \\
&\leq \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^\alpha \int_0^t \left[\frac{xu^2(x,s)}{2} + \frac{xu_s^2(x,s)}{2}\right] dsdx \\
&= \|u_0\|_H^2 + \int_0^t \int_0^\alpha xu^2(x,s)\, dxds + \int_0^t \int_0^\alpha xu_s^2(x,s)\, dxds \\
&= \|u_0\|_H^2 + \int_0^t \|u(x,s)\|_H^2\, ds + \int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2\, ds.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

ولدينا أيضًا

$$\|v\|_H^2 \leq \|v_0\|_H^2 + \int_0^t \|v(x,s)\|_H^2\, ds + \int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2\, ds. \tag{2.45}$$

ومن خلال متراجحة يونغ نجد:

$$2(p+1)\int_0^\alpha x\mathbf{u}\mathbf{u}_t dx \leq (p+1)\left[\|u\|_H^2 + \|u_t\|_H^2\right], \tag{2.46}$$

و

$$2(q+1)\int_0^\alpha x\mathbf{v}\mathbf{v}_t dx \leq (q+1)\left[\|v\|_H^2 + \|v_t\|_H^2\right], \tag{2.47}$$

بإستخدام (2.44) - (2.47) في العبارة (2.13) نجد:

$$\begin{aligned}
H'(t) \leq\ & (p+1)\left[\|u\|_H^2 + \|u_t\|_H^2\right] + (q+1)\left[\|v\|_H^2 + \|v_t\|_H^2\right] \\
& + (p+1)\|u_0\|_H^2 + (p+1)\int_0^t \|u\|_H^2\, ds + (p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2\, ds \\
& + (q+1)\|v_0\|_H^2 + (q+1)\int_0^t \|v\|_H^2\, ds + (q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2\, ds \\
=\ & (p+1)\|u\|_H^2 + (q+1)\|v\|_H^2 \\
& + (p+1)\int_0^t \|u\|_H^2\, ds + (q+1)\int_0^t \|v\|_H^2\, ds \\
& + (p+1)\|u_t\|_H^2 + (q+1)\|v_t\|_H^2 \\
& + (p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2\, ds + (q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2\, ds \\
& + (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

بتعويض (2.11) في (2.48) نجد:

$$\begin{aligned}
H'(t) \leq\ & H(t) + (p+1)\|u_t\|_H^2 + (q+1)\|v_t\|_H^2 \\
& + (p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2\, ds + (q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2\, ds \\
& + (p+1)\|u_0\|_H^2 + (q+1)\|v_0\|_H^2.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

بضرب العبارة (2.49) في $p+q+4$ نجد:

$$\begin{aligned}
&(p+q+4)\left\{H'(t)-H(t)\right\}\\
\leq\ &(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2\right\}\\
&+(p+q+4)\left\{(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\,ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\,ds\right\}\\
&+(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}. \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

من العبارة (2.12) لدينا:

$$\begin{aligned}
&(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2\right\}\\
&+(p+q+4)\left\{(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\,ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\,ds\right\}\\
=\ &(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2\right\}\\
&+2(p+q+2)\left\{(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\,ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\,ds\right\}\\
&-(p+q)\left\{(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\,ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\,ds\right\}\\
\leq\ &H''(t)+2(p+q+2)E(0)\\
&-(p+q)\left\{(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2\,ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2\,ds\right\}\\
\leq\ &H''(t)+2(p+q+2)E(0), \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

بتعويض (2.51) في (2.50) نجد:

$$\begin{aligned}
&(p+q+4)\left\{H'(t)-H(t)\right\}\\
\leq\ &H''(t)+2(p+q+2)E(0)+(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}\\
=\ &H''(t)+k_0,
\end{aligned}$$

إي أن:

$$H''(t)-(p+q+4)H'(t)+(p+q+4)H(t)+k_0\geq 0,$$

بحيث k_0 معرف في العبارة (2.34)، ولدينا:

$$B(t):=H(t)+\frac{k_0}{p+q+4},$$

إذن

$$(p+q+4)B(t)=(p+q+4)H(t)+k_0,$$

و

$$B'(t)=H'(t),$$

و

$$B''(t)=H''(t),$$

و $B(t)$ تعطينا

$$B''(t)-(p+q+4)B'(t)+(p+q+4)B(t)\geq 0. \qquad (2.52)$$

بإستخدام النتيجة1.4 في العبارة (2.52) والشرط (2.33) نجد:

$$H'(t)\geq k_0=(p+q+4)\left\{(p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}+2(p+q+2)E(0),\quad t\geq 0.$$

ومن أجل $E(0)>0$ و $(p+q+4)>1$ نحصل على:

$$H'(t)\geq (p+1)\|u_0\|_H^2+(q+1)\|v_0\|_H^2,\quad t\geq 0.$$

وبالتالي برهان النتيجة 3.2 مكتمل. □

نظريـة 1.2.2
نفترض أن $(\mathbf{A})$ محققة والشروط التالية محققة:
$i)$ $E(0)<0$.
$ii)$ $E(0)=0$، و (2.32) محققة.
$iii)$ $0<E(0)<\dfrac{\left(\dfrac{p+q}{4}-\dfrac{1}{2}\right)^2\left[H'(t_0)-(p+1)\|u_0\|_H^2-(q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2\times J(t_0)^{\frac{1}{\gamma}}}{((p+q)^2-4)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p+q}\right)}$، والعبارة (2.33)
محققة، وبالتالي الحل (u,v) ينفجر في وقت محدد T^* حسب التعريف (1.2)

في الحالة (i)

$$T^*\leq t_0-\frac{J(t_0)}{J'(t_0)}.$$

بالإضافة لذلك إذا كان $J(t_0)<\min\left\{1,\sqrt{\frac{\alpha}{-\beta}}\right\}$ نجد:

$$T^*\leq t_0+\frac{1}{\sqrt{-\beta}}\ln\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{-\beta}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{-\beta}}-J(t_0)},$$

في الحالة (ii)

$$T^*\leq t_0-\frac{J(t_0)}{J'(t_0)},$$

أو

$$T^*\leq t_0+\frac{J(t_0)}{J'(t_0)}.$$

في الحالة (iii)

$$T^*\leq\frac{J(t_0)}{\sqrt{\alpha}},$$

أو

$$T^*\leq t_0+3^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}}\frac{\gamma c}{\sqrt{\alpha}}\left\{1-[1+cJ(t_0)]^{\frac{1}{2\gamma}}\right\},$$

بحيث: $c=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\dfrac{\gamma}{2+\gamma}}$، $\gamma=\dfrac{p+q}{4}-\dfrac{1}{2}$، و $J(t)$، α، β تعطى في العبارات (2.53) ، (2.77) ، (2.78) على التوالي.
نلاحظ في الحالة (i) أن $t_0=t^*$ في العبارة (2.36)، و $t_0=0$ في الحالة (iii) و (ii)

$$J(t) := \left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma}. \tag{2.53}$$

بإشتقاق $J(t)$ مرتين نجد:

$$\begin{aligned} J'(t) = & -\gamma\left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right] \\ & \times\left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma-1} \end{aligned} \tag{2.54}$$

لدينا من العبارة (2.53) نحصل على:

$$H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 = J(t)^{\frac{-1}{\gamma}},$$

إذن

$$\begin{aligned} & \left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma-1} \\ &= J(t)^{\frac{(-\gamma-1)(-1)}{\gamma}} \\ &= J(t)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \\ &= J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

بتعويض (2.55) في (2.54) نجد:

$$J'(t) = -\gamma J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}\left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right].$$

لدينا من العبارة (2.54)، وبإشتقاق $J'(t)$ نتحصل على:

$$\begin{aligned} J''(t) = & -\gamma H''(t) \\ & \times\left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma-1} \\ & -\gamma\left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right] \\ & \times(-1-\gamma)\left[H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right] \\ & \times\left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma-2} \\ = & -\gamma\left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma-2} \\ & \times\left[H''(t) \times \left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}\right. \\ & \left.-(1+\gamma)\left\{H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\ \right\}^2\right] \end{aligned} \tag{2.56}$$

من العبارة (2.53) نستخرج:

$$\begin{aligned} & \left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^{-\gamma-2} \\ &= J(t)^{\frac{(-\gamma-2)(-1)}{\gamma}} \\ &= J(t)^{\frac{\gamma+2}{\gamma}} \\ &= J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

نعوض (2.57) في (2.56) فنحصل على:

$$J''(t) = -\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}} Q(t), \tag{2.58}$$

حيث:

$$\begin{aligned} Q(t) \ : \ &= H''(t)\left\{H(t) + (T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2 + (T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\} \\ &- (1+\gamma)\left\{H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right\}^2. \end{aligned} \tag{2.59}$$

من العبارة (2.13) لدينا:

$$\begin{aligned} H''(t) \ \geq \ & -2(p+q+2)E(0) \\ & +(p+q+4)\left[(p+1)\|u_t(x,t)\|_H^2 + (q+1)\|v_t(x,t)\|_H^2\right] \\ & +2(p+q+2)\left[(p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2 ds + (q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2 ds\right]. \end{aligned} \tag{2.60}$$

بوضع $(p+q+4) > (p+q+2)$ و $2(p+q+2) > (p+q+2)$ في العبارة (2.60) نتحصل على:

$$\begin{aligned} H''(t) \ \geq \ & -2(p+q+2)E(0) \\ & +(p+q+2)\left[(p+1)\|u_t(x,t)\|_H^2 + (q+1)\|v_t(x,t)\|_H^2\right] \\ & +(p+q+2)\left[(p+1)\int_0^t \|u_s(x,s)\|_H^2 ds + (q+1)\int_0^t \|v_s(x,s)\|_H^2 ds\right] \\ = \ & -2(p+q+2)E(0) + (p+q+2) \\ & \times\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2 + (q+1)\|v_t\|_H^2 + (p+1)\int_0^t \|u_s\|_H^2 ds + (q+1)\int_0^t \|v_s\|_H^2 ds\right\}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

من العبارة (2.13) نستخرج:

$$\begin{aligned} & H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \\ = \ & 2(p+1)(u,u_t)_H + 2(q+1)(v,v_t)_H \\ & +(p+1)\|u\|_H^2 - (p+1)\|u_0\|_H^2 \\ & +(q+1)\|v\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2. \end{aligned} \tag{2.62}$$

بإستعمال

$$\|u\|_H^2 - \|u_0\|_H^2 = 2\int_0^t (u,u_s)_H ds, \tag{2.63}$$

و

$$\|v\|_H^2 - \|v_0\|_H^2 = 2\int_0^t (v,v_s)_H ds, \tag{2.64}$$

بتعويض (2.63) و (2.64) في (2.62) نتحصل على:

$$\begin{aligned} & H'(t) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2 \\ = \ & 2(p+1)(u,u_t)_H + 2(q+1)(v,v_t)_H \\ & +2(p+1)\int_0^t (u,u_s)_H ds + 2(q+1)\int_0^t (v,v_s)_H ds. \end{aligned} \tag{2.65}$$

بتعويض(2.61) و (2.65) في (2.59) نجد:

$$\begin{aligned}
Q(t) \geq & -2(p+q+2)E(0)\left\{H(t)+(T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2+(T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\} \\
& +(p+q+2)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2 ds\right\} \\
& \times\left\{H(t)+(T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2+(T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2\right\} \\
& -(1+\gamma)\{2(p+1)(u,u_t)_H+2(q+1)(v,v_t)_H \\
& +2(p+1)\int_0^t(u,u_s)_H ds+2(q+1)\int_0^t(v,v_s)_H ds\Big\}^2, \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
& H(t)+(T-t)(p+1)\|u_0\|_H^2+(T-t)(q+1)\|v_0\|_H^2 \\
\geq & H(t). \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

بتعويض (2.11)، (2.53) و (2.67) في (2.66) نجد:

$$\begin{aligned}
Q(t) & \geq 2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
& +(p+q+2)\left\{(p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2 ds\right\} \\
& \times\left\{(p+1)\|u\|_H^2+(q+1)\|v\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\|v\|_H^2 ds\right\} \\
& -4(1+\gamma)\left\{(p+1)(u,u_t)_H+(q+1)(v,v_t)_H+(p+1)\int_0^t(u,u_s)_H ds+(q+1)\int_0^t(v,v_s)_H ds\right\}^2.
\end{aligned}$$

نرمز ب:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &:= (p+1)\|u\|_H^2+(q+1)\|v\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\|v\|_H^2 ds, \\
\mathbf{B} &:= (p+1)(u,u_t)_H+(q+1)(v,v_t)_H+(p+1)\int_0^t(u,u_s)_H ds+(q+1)\int_0^t(v,v_s)_H ds, \\
\mathbf{C} &:= (p+1)\|u_t\|_H^2+(q+1)\|v_t\|_H^2+(p+1)\int_0^t\|u_s\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\|v_s\|_H^2 ds;
\end{aligned}$$

ولدينا $4(1+\gamma)=(p+q+2)$ فنتحصل على:

$$Q(t) \geq -2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}+(p+q+2)\left\{\mathbf{AC}-\mathbf{B}^2\right\}. \qquad (2.68)$$

نلاحظ أنه من أجل كل $(\rho,\eta)\in\mathbb{R}^2$ و $t>0$ لدينا:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}\rho^2+2\mathbf{B}\rho\eta+\mathbf{C}\eta^2 \\
= & (p+1)\rho^2\|u\|_H^2+(q+1)\rho^2\|v\|_H^2+(p+1)\int_0^t\rho^2\|u\|_H^2 ds \\
& +(q+1)\int_0^t\rho^2\|v\|_H^2 ds+2(p+1)\rho\eta(u,u_t)_H+2(q+1)\rho\eta(v,v_t)_H \\
& +2(p+1)\rho\eta\int_0^t(u,u_s)_H ds+2(q+1)\rho\eta\int_0^t(v,v_s)_H ds+(p+1)\eta^2\|u_t\|_H^2 \\
& +(q+1)\eta^2\|v_t\|_H^2+(p+1)\int_0^t\eta^2\|u_s\|_H^2 ds+(q+1)\int_0^t\eta^2\|v_s\|_H^2 ds.
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\rho^2+2\mathbf{B}\rho\eta+\mathbf{C}\eta^2\\
=\;&(p+1)\int_0^\alpha x\left(\rho^2u^2+2\rho u\eta u_t+\eta^2u_t^2\right)dx\\
&+(q+1)\int_0^\alpha x\left(\rho^2v^2+2\rho v\eta v_t+\eta^2v_t^2\right)dx\\
&+(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x\left(\rho^2u^2+2\rho u\eta u_s+\eta^2u_s^2\right)dxds\\
&+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x\left(\rho^2v^2+2\rho v\eta v_s+\eta^2v_s^2\right)dxds.
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\rho^2+2\mathbf{B}\rho\eta+\mathbf{C}\eta^2\\
=\;&(p+1)\int_0^\alpha x\left(\rho u+\eta u_t\right)^2dx+(q+1)\int_0^\alpha x\left(\rho v+\eta v_t\right)^2dx\\
&+(p+1)\int_0^t\int_0^\alpha x\left(\rho u+\eta u_s\right)^2dxds+(q+1)\int_0^t\int_0^\alpha x\left(\rho v+\eta v_s\right)^2dxds\\
=\;&(p+1)\left\|\rho u+\eta u_t\right\|_H^2+(q+1)\left\|\rho v+\eta v_t\right\|_H^2\\
&+(p+1)\int_0^t\left\|\rho u+\eta u_s\right\|_H^2ds+(q+1)\int_0^t\left\|\rho v+\eta v_s\right\|_H^2ds
\end{aligned}$$

من السهل رؤية أن

$$\mathbf{A}\rho^2+2\mathbf{B}\rho\eta+\mathbf{C}\eta^2\geq 0,$$

و

$$\mathbf{A}\geq 0,$$

إذن

$$\mathbf{B}^2-\mathbf{AC}\leq 0.$$

لذلك نتحصل من (2.68) على:

$$Q(t)\geq -2(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}},\quad t\geq t_0. \tag{2.69}$$

بتعويض (2.53) و (2.69) في (2.58) نجد:

$$\begin{aligned}
J''(t)&\leq(-\gamma)J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}}(-2)(p+q+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}\\
&=2\gamma(p+q+2)E(0)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}},
\end{aligned}\tag{2.70}$$

لدينا $\gamma=\frac{p+q}{4}-\frac{1}{2}$، ومنه $2\gamma(p+q+2)=\frac{(p+q)^2}{2}-2$، ولدينا العبارة (2.70) مكتوبة على الشكل التالي:

$$J''(t)\leq\left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)E(0)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}},\quad t\geq t_0. \tag{2.71}$$

نلاحظ بواسطة النتيجة 3.2 أن $J'(t)<0$ إذا كان $t\geq t_0$. بضرب (2.71) في $J'(t)$ نجد:

$$J''(t)J'(t)\geq\left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)E(0)J'(t)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}},\quad t\geq t_0 \tag{2.72}$$

بمكاملة (2.72) من t_0 إلى t نجد:

$$\int_{t_0}^t J''(s)J'(s)ds\geq\left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)E(0)\int_{t_0}^t J'(s)J(s)^{1+\frac{1}{\gamma}}ds, \tag{2.73}$$

لدينا

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} J''(s)\, J'(s)\, ds &= \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[J'(s)^2\right] ds \\ &= \frac{1}{2}J'(t)^2 - \frac{1}{2}J'(t_0)^2 . \end{aligned} \tag{2.74}$$

بتعويض (2.54) في (2.74) نحصل على:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t} J''(s)\, J'(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2}J'(t)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p+q}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \times J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}}.\end{aligned} \tag{2.75}$$

من نفس الكتابة نستخرج:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} J'(s)\, J(s)^{1+\frac{1}{\gamma}}\, ds &= \int_{t_0}^{t} \frac{\gamma}{2\gamma+1}\frac{d}{ds}\left[J(s)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}}\right] ds \\ &= \frac{\gamma}{2\gamma+1} J(t)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}} - \frac{\gamma}{2\gamma+1} J(t_0)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}} \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) J(t)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) J(t_0)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma}} ,\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right) E(0) \int_{t_0}^{t} J'(s)\, J(s)^{1+\frac{1}{\gamma}}\, ds \\ &= \left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) E(0)\, J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) E(0)\, J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}} .\end{aligned} \tag{2.76}$$

بتعويض (2.75) و (2.76) في (2.73) نجد:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}J'(t)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p+q}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \times J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} \\ \geq\ & \left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) E(0)\, J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{(p+q)^2}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) E(0)\, J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}},\end{aligned}$$

ومنه

$$J'(t)^2 \geq \alpha + \beta J(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} ,$$

بحيث:

$$\begin{aligned}\alpha\ :&= \left\{\left(\frac{p+q}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 \left[H'(t_0) - (p+1)\|u_0\|_H^2 - (q+1)\|v_0\|_H^2\right]^2 \right. \\ &\left. - \left((p+q)^2-4\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) E(0)\, J(t_0)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} \times \\ & J(t_0)^{2+\frac{2}{\gamma}} > 0,\end{aligned} \tag{2.77}$$

و

$$\beta := \left((p+q)^2-4\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+q}\right) E(0). \tag{2.78}$$

بإستخدام النتيجة 3.1 يكون البرهان مكتملاً.
إذن يوجد زمن محدد (t) حيث $\lim\limits_{t\to T^{*-}} \{J(t)\} = 0$، والحدود العظمى ل (T^*) هي على التوالي محققة(النتيجة2.4).

الخاتمــة

في هذه المذكرة، حددنا ظروفًا كافية يمكن أن تقود الحل نحو الميل نحو الصفر عندما يميل t إلى اللانهاية أو ينفجر في وقت محدد لنظام لزج مفردي في وجود مصطلح مصدر من نوع متعدد الحدود أو وحيد، إستبدال شروط الحدود شرط لا يتجزأ. على الرغم من تعقيد الحسابات التقنية للطرق المستخدمة، تمكنا في الفصل 2 من توفير ظروف كافية لإنفجار حلول نظام اللزوجة المفردة مع تبديد قوي في الوقت المحدد، تعتمد الأداة الرئيسية المستخدمة على الطريقة المباشرة لـ Li وعلى تقنية معالجة تستخدمها Zarai.

هدفنا النهائي بعد هذه المذكرة هو معالجة المشكلات غير المحلية الأكثر تعقيدًا مع التبديد الكسري.

المراجع العلميـــة

[1] Bouziani, A. : Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition. Nonlinear Anal. ,55 904–883 .(2003)

[2] Bouziani, A. : Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. J. Appl. Math. Stoch. Anal. ,9 330–323 .(1996)

[3] Cannon, R. : The solution of heat equation subject to the speci…cation of energy. Q. Appl. Math. ,(2)21 160–155 .(1963)

[4] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Ferreira, J. : Existence and unfiorm decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping. Math. Methods Appl. Sci. ,24 –1043 1053 .(2001)

[5] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Soriano, J.A. : Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Di¤er. Equ. ,(44)2002 14–1 .(2002)

[6] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H.P. : Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J. Control Optim. ,(4)42 1324–1310 .(2003)

[7] Cannon R. The solution of heat equation subject to the speci…cation of energy. Q Appl Math. 1963 21; .160–155:

[8] Capasso V, Kunisch K. A reaction-di¤usion system arising in modeling man-environment diseases. Quart Appl Math. 1988 46; .449–431:

[9] Cahlon DM, Shi P. Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constraint. SIAM J Numer Anal. 1995 32; .593–571:

[10] Choi YS, Chan KY. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. Nonlinear Anal. 1992 18; .331–317:

[11] Chunlai Mu, Ma Jie. On a system of nonlinear wave equations with Balakrishnan-Taylor damping. Z Angew Math Phys. 2014 (1)65; .113–91:

[12] Ewing RE, Lin T. A class of parameter estimation techniques for ‡uid ‡ow in porous media. AdvWater Resour. 1991 14; .97–89:

[13] Garding, L. : Cauchy problem for hyperbolic equations. In : Lecture Notes, University of Chicago .(1957)

[14] Ionkin, N.I. : Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundary conditions. Di¤er. Uravn. ,(2)13 1182–1177 .(1977)

[15] Ionkin, N.I., Moiseev, E.I. : A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition. Di¤er. Uravn. ,(7)15 1295–1284 .(1979)

[16] IonkinNI. Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundary conditions. Di¤er Uravn. 1977 (2)13; .1182–1177:

[17] Ionkin NI, Moiseev EI. A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition. Di¤er Uravn. 1979 (7) 15; .1295–1284:

[18] Kamynin, N.I. : A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition. TH. Vychisl. Mat. Fiz. ,(6) 43 1024–1006 .(1964)

[19] Kartynnik, A.V. : Three-point boundary value problemwith an integral space-variable condi- tion for a second order parabolic equation. Di¤er. Equ. ,26 1162–1160 .(1990)

[20] Kirane, M., Tatar, N.E. : A memory type boundary stabilization of a mildly damped wave equation. Electron. J. Qual. Theory Di¤er. Equ. ,6 7–1 .(1999)

[21] Kartynnik AV. Three-point boundary value problem with an integral space-variable condi-tion for a second order parabolic equation. Di¤er Equ. 1990 26; .1162–1160:

[22] Kamynin LI.Aboundary-value problem in the theory of heat conduction with non-classical boundary conditions. (Russian) μZ Vy c isl Mat i Mat Fiz. 1964 4; .1024–1006: MR0171085.

[23] Ka…ni M, Messaoudi S. A blow up result for a viscoelastic system in Rn. Electron J Di¤e- rential Equations. 2007 113; 7: pp.

[24] Li MR, Tsai LY. Existence and nonexistence of global solutions of some systems of semilinear wave equations. Nonlinear Anal Theory, Methods & Applications. 2003 54; .1415–1397:

[25] Mesloub, S. : On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with non local conditions. Nonlinear Anal. ,68 2607–2594 .(2008)

[26] Mesloub, S. : A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order parabolic equation. J. Math. Anal. Appl. ,316 209–189 .(2006)

[27] Mesloub, S. : On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation. Acta Sci. Math. (Szeged) ,67 219–203 .(2001)

[28] Mesloub, S., Bouziani, A. : Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator. J. Appl. Math. Stoch. Anal. ,(3) 15 300–291 .(2002)

[29] Mesloub, S., Bouziani, A. : Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg. ,6 69–59 .(1998)

[30] Mesloub, S., Bouziani, A. : On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition. Int. J. Math. Math. Sci. ,(3) 22 519–511 .(1999)

[31] Mesloub, S., Lekrine, N. : On a nonlocal hyperbolic mixed problem. Acta Sci. Math. (Szeged) ,70 75–65 .(2004)

[32] Mesloub, S., Mecheri, H., Messaoudi, S.A. : On solutions of a singular viscoelastic equation with an integral condition. GMJ ,2008) to appear).

[33] Messaoudi, S.A., Tatar, N.E. : Global existence asymptotic behavior for a nonlinear viscoe- lastic problem. Math. Methods Sci. Res. J. ,(4) 7 149–136 .(2003)

[34] Muravei, L.A., Philinovskii, A.V. : On a certain nonlocal boundary value problem for hy- perbolic equation. Mat. Zamet. ,54 116–98 .(1993)

[35] Mesloub S, Bouziani A. Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles. Bull. Classe Sci. Acad. R. Belg. 1998 6; .69–59:

[36] Mesloub S, Bouziani A. Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator. J Appl Math Stoch Anal. 2002 (3) 15; .300–291:

[37] Mesloub S, Messaoudi SA. Global existence, decay, and blow up of solutions of a singular nonlocal viscoelastic problem. Acta Appl Math. 2010 110; .724–705:

[38] Mesloub S,Messaoudi SA. A non local mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations. Electron J Di¤er Equ. 2003 (30) 2003; .17–1:

[39] Mesloub S, Lekrine N. On a nonlocal hyperbolic mixed problem. Acta Sci Math (Szeged). 2004 70; .75–65:

[40] Mesloub S. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with non local conditions. Nonlinear Anal. 2008 68; .2607–2594:

[41] Mesloub S. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order parabolic equation. J Math Anal Appl. 2006 316; .209–189:

[42] Messaoudi SA. Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. Mathematische Nachrichten. 2003 260; .66–58:

[43] Mesloub S, Mesloub F. Solvability of a mixed nonlocal problem for a nonlinear singular viscoelastic equation. Acta Appl Math. 2010 110; .129–109:

[44] Zarai A, Drafiia A, Boulaaras S. Blow up of solutions for a system of nonlocal singular viscoelatic equations. Appl Anal. .2017 In press, https ://doi.org/10.1080/00036811.2017.1359564.

[45] Pulkina LS. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. Electron J Di¤er Equ. 1999 45; .6–1:

[46] Pulkina LS. On solvability in L2 of nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. Di¤er Uravn. 2000 2; :

[47] Shi P.Weak solution to an evolution problem with a non local constraint. SIAM J Math Anal. 24(N (1 .58–46:

[48] Shi P, ShilorM.Design of contact patterns in one dimensional thermoelasticity, in Theoretical aspects of industrial design. Philadelphia : SIAM ; .1992

[49] Wu Shuntang. Blow-up of solutions for a singular nonlocal viscoelastic equation. J Partial Di¤er Equ. 2011 (2) 24; .149–140:

[50] Yurchuk NI. Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. Di¤erUravn. 1986 (19) 22; .2126–2117: