

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2021/2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**STABILITÉ D'UN SYSTÈME DE TIMOSHENKO  
THERMOÉLASTIQUE AVEC DEUXIÈME SON  
ET SANS AMORTISSEUR DE FROTTEMENT**

Option : Analyse Fonctionnelle Appliquée

Par :

1. LOUHICHI Asma

2. FEZARI CHaima

Encadré par : HBHOUBE Fahima

M.C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : GHENNAM Karima

M.C.B U. SKIKDA

Examineur : FOUGHALI Fouzia

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022



# Dedicace

je dédié ce modeste travail :

À ma chère mère,

À mon cher père,

Toute ma famille Spécialement :  
mes frères,  
mes soeurs,

À

Toutes mes amies

À

Tous nos professeurs distingués.

À

la grande famille "LOUHICHI "





# Dedicace

je dédié ce modeste travail :

À ma chère mère,

À mon cher père,

Toute ma famille Spécialement :  
mes frères,  
mes soeurs,

À

Toutes mes amies

À

Tous nos professeurs distingués.

À

la grande famille "FEZARI "



# Remerciement

Nous remercions Dieu de nous avoir aider  
à accomplir ce travail.

Nous tenons à remercier chaleureusement,  
notre encadreur Dr. "HEBHOUB Fahima"  
qui nous a proposé le thème de ce  
mémoire, pour ses judicieux conseils et sa  
disponibilité du début jusqu'à la fin de ce  
travail.

Nos vifs remerciement, vont aussi aux  
membres de jury

"Dr. Ghennem" et "Dr. Foughali"  
qui nous ont aidé avec leurs remarques  
pour améliorer notre manuscrit.

---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème d'évolution, c'est un système linéaire unidimensionnel Thermostatique de type Timoshenko avec deuxième son et avec la présence d'un terme de retard constant dans l'équation de déplacement.

Sous quelques conditions initiales et aux bords, et quelques hypothèses sur le terme de retard et un nombre de stabilité  $\xi$ , nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode de semi-groupe, et à l'aide de la méthode des multiplicateurs, nous avons montré un résultat de décroissance exponentielle dans la présence du retard et le cas ( $\xi = 0$ ) par ailleurs lorsque le retard n'est plus introduit et ( $\xi \neq 0$ ) une stabilité polynomiale a été montrée.

---

**Mots clés :** Fonction de Lyapounov. Stabilité exponentielle. Système de Timoshenko

---

## ملخص

---

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة جملة معادلات تفاضلية أحادية البعد من صنف تيموشنكو بتأثير مطاطي حراري و بوجود، التأخر الثابت في الزمن الذي أدخل على المعادلة الأولى. تحت بعض الشروط الابتدائية و الحدية و تحت بعض الفرضيات على التأخر و معامل الاستقرار ( $\xi$ ) درسنا وجود وحدانية الحلول باستعمال طريقة أنصاف الزمر و باستعمال طريقة الطاقة برهنا الإستقرار الآسي في حالة وجود التأخر و بإعتبار ( $0 = \xi$ ) في الحالة المغايرة يعني إهمال التأخر و ( $\xi \neq 0$ ) برهنا الإستقرار الكثير حدودي.

---

---

# Abstract

---

In this work, we considered a one-dimensional linear thermoelastic system of Timoshenko with second sound, and with the presence of time delay acted on the displacement equation. Under some initial conditions and boundary condition and some hypothesis on delay and on some stability number  $\xi$ , we studied the existence and uniqueness of solution using the semi-group theory.

An exponential result is obtained in the case of ( $\xi = 0$ ), and the presence of delay, otherwise, when ( $\xi \neq 0$ ) and the absence of delay, a polynomial decay was proved.

---

**Key words :** Well-posedness · Exponential and polynomial stability · Thermoelasticity · Timoshenko · Second sound

---

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>10</b>
1.1	Les espaces de Sobolev . . . . .	10
1.1.1	L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ . . . . .	10
1.1.2	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$ . . . . .	12
1.1.3	L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$ . . . . .	12
1.2	Rappels sur La théorie des Semi-groupes . . . . .	13
1.2.1	Quelques définitions . . . . .	13
1.3	Quelques théorèmes utiles . . . . .	14
1.3.1	Théorème de Hille-Yosida . . . . .	14
1.3.2	Théorème (Lumer-Phillips) . . . . .	14
1.3.3	Théorème de Lax Milgram . . . . .	15
1.3.4	Théorème de Fubini . . . . .	15
1.4	Quelques inégalités importantes . . . . .	17
1.4.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	17
1.4.2	Inégalité de Young . . . . .	17
1.4.3	Inégalité de Poincaré . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Existence et unicité de la solution</b>	<b>18</b>
2.1	Position du problème . . . . .	18
2.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Stabilité exponentielle</b>	<b>34</b>
3.1	Energie du système . . . . .	34
3.2	Construction d'une fonctionnelle de Lyapounov . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Stabilité polynomial</b>	<b>54</b>
4.1	Position du problème . . . . .	54
4.2	Energie du système . . . . .	55

**5 Conclusion**

**66**

---

# Introduction

---

Le système de Timoshenko remonte à Timoshenko [38] en 1921 qui proposa un système hyperbolique couplé, décrivant la vibration transversale d'une poutre, de la forme

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = K(u_x - \varphi)_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi) \end{cases} \quad (0.1)$$

où  $t$  désigne la variable temporelle,  $x$  est la variable spatiale le long du faisceau de longueur  $L$ . dans sa configuration d'équilibre,  $u$  est le déplacement transversal du faisceau et  $\varphi$  est l'angle de rotation du filament du faisceau. Les coefficients  $\rho, I_\rho, E, I$  et  $K$  sont respectivement la masse volumique (la masse par unité de longueur), le moment d'inertie polaire d'une section, le module d'élasticité d'Young, le moment d'inertie d'une section. et le module de cisaillement, Pour une dérivation physique des systèmes de Timoshenko, nous nous référons à [10,17,23,25]. La question de la stabilité des systèmes de type Timoshenko ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années, et un certain nombre de résultats concernant la décroissance de l'énergie ont été établis. Un but de recherche important est de rechercher une dissipation minimale par laquelle les solutions de Timoshenko décroît uniformément jusqu'à zéro au fur et à mesure que le temps tend vers l'infini. A cet égard, plusieurs types de mécanismes de dissipation ont été introduits, tels que : l'amortissement par frottement, l'amortissement viscoélastique et la dissipation thermique. Nous nous intéressons dans ce travail seulement aux effets liés à la dissipation thermique dans un système de Timoshenko avec deuxième son en présence d'un terme de retard constant, où nous avons considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_x(x, t - \tau) = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{tx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \end{cases} \quad (0.2)$$

où  $\varphi$  est le déplacement transversal de la poutre,  $\psi$  est l'angle de rotation de la poutre,  $\theta$  est la différence de température,  $q$  est le flux de la chaleur, les coefficients  $\rho_i, \beta, k, \delta, b, \tau$  sont des constantes positives,  $\mu$  est un nombre réel et  $\tau_0 > 0$ . Il s'agit d'un système thermoplastique de type Timoshenko où le flux de chaleur est donné par La loi de Cattaneo. Le système est soumis à un retard interne constant, des conditions aux limites de type Neumann-Dirichlet, et des conditions initiales  $\varphi_0, \varphi_1, \theta_0, q_0, f_0$ . Des retards surviennent si souvent dans de nombreux domaines physiques, chimiques, biologiques, thermiques et des phénomènes économiques. Récemment, le contrôle des PDE avec des effets de retard est devenu un domaine de recherche actif et a attiré de nombreuses personnes, voir entre autres [20,30,33] et les références qui s'y trouvent. De plus, il a été démontré que les retards peut déstabiliser un système qui été asymptotiquement stable en l'absence de retards, voir [4] pour plus de détails.

Considérons le système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & x \in \omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma_0, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = -\mu_1 u_t(x, t) - \mu_2 u_t(x, t - \tau), & x \in \Gamma_0, t > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Il est bien connu qu'en l'absence de retard ( $\mu_2 = 0, \mu_1 > 0$ ), le système (1.2) est exponentiellement stable, voir [14]-[15], [40], [41]. Alors qu'en présence de retard ( $\mu_2 > 0$ ), Nicaise et Pignotti [26] ont prouvé, sous l'hypothèse  $\mu_2 < \mu_1$ , que l'énergie est exponentiellement stable. Cependant, pour le cas inverse ( $\mu_2 \geq \mu_1$ ), ils ont pu construire une suite de retards pour laquelle la solution correspondante est instable. Les mêmes résultats ont été obtenus pour le cas où l'amortissement et le retard agissent en interne dans le domaine, voir aussi [2] pour le traitement de ce problème sous une forme abstraite plus générale. Nicaise et Pignotti [27] ont traité la situation où le retard constant du système (1.2) est remplacé par un retard distribué de la forme

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds$$

et établi un résultat de stabilité exponentielle similaire à celui de [26] sous la condition que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) ds < \mu_1.$$

Pour plus de résultats concernant les problèmes de retard, nous renvoyons le lecteur à [6],[11],[22],[28],[29]

Pour la stabilisation des systèmes Timoshenko par effet thermique, Rivera et Racke [23] ont

considéré le système suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t - k\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 \end{cases} \quad (0.3)$$

où ils ont prouvé plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour le système linéarisé dans le cas de vitesses d'onde égales et une stabilité non exponentielle pour le cas de vitesses d'onde différentes.

Concernant le deuxième son, Messaoudi et al.[19] ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu\varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta\psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0 \end{cases}$$

où  $(x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty)$  et établi plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les cas linéaires et non linéaires dans des conditions appropriées sur la fonction non linéaire  $\sigma$ .

En 2009, Fernández Sare et Racke [5] ont traité le système

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, & in(0, 1) \times (0, \infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(\cdot, t-s) ds + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, & \in (0, 1) \times (0, \infty) \\ \rho_3 \theta_t + kq_x + \beta\psi_{tx} = 0, & in(0, 1) \times (0, \infty) \\ \tau q_t + q + k\theta_x = 0, & in(0, 1), t > 0 \\ \tau_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, & x \in (0, 1), \rho \in (0, 1) \times (0, \infty) \end{cases} \quad (0.4)$$

pour  $g \equiv 0$  et pour  $g > 0$ . Ils ont prouvé dans les deux cas que (0.4) n'est plus exponentiellement stable même si les vitesses de propagation sont égales  $\left(\frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right)$  et  $g$  est d'exponentielle.

Récemment, Santos et al. [35] considèrent le même système pour  $\mu = 0$  et introduit un nouveau nombre de stabilité

$$\chi = \left(\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right) \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa}\right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3}$$

ils ont utilisé la méthode du semi-groupe pour obtenir un résultat de décroissance exponentielle pour  $\chi = 0$  et une décroissance polynomiale pour  $\chi \neq 0$  à condition que  $\left(\tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3}\right) > 0$ .

Dans ce travail, nous montrons, en utilisant la méthode des multiplicateurs, que la dissipation induite par la chaleur est suffisamment forte pour stabiliser le système en présence d'un "petit" retard. Notons ici que le résultat de [35] est obtenu lorsque  $\mu = 0$ .

Ce manuscrit est organisé comme suit, dans le premier chapitre nous donnons quelques préliminaires sur les semi groupes et les espaces de Sobolev, le chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant la théorie de semi groupe, puis dans le chapitre nous utilisons la méthode du multiplicateur pour établir une décroissance exponentielle de l'énergie en fonction de  $\xi$  défini par 3.2 et du poids du retard ( $\mu$ ) et le cas où  $\mu = 0$  mais  $\xi = 0$  est traité dans le chapitre 4 où nous montrons un résultat de décroissance polynomiale.

# Préliminaire

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces de Sobolev, semi-groupe, quelques théorèmes utiles et quelques inégalités importantes, que nous utiliserons dans ce mémoire..

## 1.1 Les espaces de Sobolev

Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné ou non borné et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ .

### 1.1.1 L'espace de Sobolev $W^{1,p}$

Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné ou non borné et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ .

#### Définition 1.1.1

L'espace de Sobolev, noté  $W^{1,p}$ , est constitué des fonctions de  $L_p(I)$  dont la dérivées au sens des distributions, s'identifie à une fonction de  $L_p(I)$ . La définition précédente s'écrit donc comme ceci :

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \mid \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}$$

pour  $p = 2$ , il est d'usage de remplacer la notation  $W^{1,2}(I)$  par  $H^1(I)$

**Notation**

L'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ou parfois, si  $1 < p < \infty$ , de la norme équivalente  $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{1/p}$ )

L'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

est équivalente à la norme de  $W^{1,2}$ .

**Proposition 1.1.1**

*L'espace  $W^{1,p}$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace  $W^{1,p}$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$*

*L'espace  $H^1$  est un espace de Hilbert séparable.*

### 1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

#### Définition 1.1.2

Étant donné un entier  $m \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I), \quad u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que  $u \in W^{m,p}(I)$  si et seulement s'ils existe  $\mathbf{m}$  fonctions  $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$  telles que :

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

où  $D^j \varphi$  désigne la dérivée à l'ordre  $j$  de  $\varphi$ , lorsque  $u \in W^{m,p}(I)$ , on peut donc considérer les dérivées successives  $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$  jusqu'à l'ordre  $m$ , on les note  $Du, D^2u, \dots, D^m u$ . l'espace  $W^{m,p}$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace  $H^m$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

### 1.1.3 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$

#### Définition 1.1.3

Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(I)$  la fermeture de  $C_c^1(I)$  dans  $W^{1,p}(I)$ . On note  $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ .

L'espace  $W_0^{1,p}$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}$ , l'espace  $H_0^1$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1$ .

L'espace  $W_0^{1,p}$  est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

L'espace  $H_0^1$  est un espace de Hilbert séparable.

## 1.2 Rappels sur La théorie des Semi-groupes

### 1.2.1 Quelques définitions

#### Définition 1.2.1

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et de la norme associée  $\|\cdot\|$  et soit  $A : D(A) \rightarrow H$  un opérateur linéaire non-borné.

#### Définition 1.2.2

Une famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'éléments  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  pour  $t \geq 0$  forme un semi-groupe de classe  $C_0$  dans  $X$  (ou semi-groupe fortement continu), si elle vérifie les conditions suivantes :

- i)  $S(0) = I$  (identité dans  $\mathcal{L}(X)$ ).
- ii)  $S(t + s) = S(t)S(s)$  pour tout  $t, s \geq 0$  (propriété algébrique).
- iii)  $\lim_{t \rightarrow +0} \|S(t)x - x\|_X = 0$  pour tout  $x \in X$  (propriété topologique)

#### Définition 1.2.3

Soit  $A : D(A) \rightarrow H$  un opérateur linéaire non borné.

On dit que  $A$  est dissipatif si

$$\langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

$A$  est dit maximal si  $\text{Im}(I - A) = H$  c-à-d

$$\forall f \in H, \quad u \in D(A) \text{ telque } (I - A)u = f.$$

#### Remarque 1.2.1

$A$  est dit monotone si  $-A$  est dissipatif

## 1.3 Quelques théorèmes utiles

### 1.3.1 Théorème de Hille-Yosida

#### Théorème 1.3.1

**(Hille-Yosida)**

Soit  $A$  un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[ \\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale).} \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

### 1.3.2 Théorème (Lumer-Phillips)

#### Théorème 1.3.2

Soit  $A : D(A) \rightarrow H$  un opérateur linéaire de domaine dense dans  $H$ . Alors,  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions si et seulement si :

- i)  $A$  est dissipatif
- ii) il existe un  $\lambda > 0$  tel que  $\text{Im}(\lambda I - A) = H$

### 1.3.3 Théorème de Lax Milgram

#### Théorème 1.3.3

Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $\varphi \in H'$  il existe  $u \in H$  unique tel que :

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H.$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - (\varphi, u) = \underset{v \in H}{\text{Min}} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - (\varphi, v) \right\}.$$

### 1.3.4 Théorème de Fubini

#### Théorème 1.3.4

On suppose que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .

Alors, pour presque tout  $x \in \Omega_1$ ,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout  $y \in \Omega_2$ ,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

**Théorème 1.3.5**

( Cas non linéaire )

Soit  $F : [0, \infty[ \times X \rightarrow X$  une fonction continue en  $t$  et localement lipschitzienne en  $u$ . Si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ - semi groupe  $S(t)$  sur  $X$ , alors pour tout  $u_0 \in X$ , il existe un  $t_{max} \leq \infty$ , tel que le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = F(u) & \text{sur } [0, +\infty[ \\ u(0) = u_0 & . \end{cases} \quad (1.1)$$

admet une solution faible unique  $u \in [0, t_{max}[$ . De plus, si  $t_{max} < \infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|u(t)\| = +\infty$$

**Théorème 1.3.6**

Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ - semi groupe  $S(t)$  sur  $X$ . Si  $F : [0, \infty[ \times X \rightarrow X$  est continument différentiable de  $[t_0, T] \times X \rightarrow X$ . Alors la solution faible du système (1.3) est une solution forte.

---

## 1.4 Quelques inégalités importantes

### 1.4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit  $H$  un espace vectoriel, Un **produit scalaire**  $(u, v)$  est une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, définie positive [i.e.  $(u, v) \geq 0, \forall u \in H$  et  $(u, v) > 0$  si  $u \neq 0$ ]. Rappelons qu'un produit scalaire vérifie **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H$$

### 1.4.2 Inégalité de Young

Soient  $p$  et  $q$  deux réels vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors :

$$\forall (f, g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f^p| dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g^q| dx.$$

Si  $p = q = 2$  on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f^2| dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g^2| dx.$$

### 1.4.3 Inégalité de Poincaré

On suppose que  $I$  est borné.

Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $|I|$ ) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur  $W_0^{1,p}(I)$  la quantité  $\|u'\|_L^p$  est une norme équivalente à la norme de  $W^{1,p}(I)$ .

# Existence et unicité de la solution

Dans le chapitre, nous présentons le problème qui sera traité dans ce mémoire, puis nous montrons qu'il est bien posé en étudiant l'existence et l'unicité de sa solution.

## 2.1 Position du problème

Considérons un système unidimensionnelle de Timoshenko avec deuxième son et un retard constant introduit dans la première équation

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi(x, t - \tau_0) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0. \quad x \in (0, 1), t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Sous les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, 1) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in (0, 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

et les conditions au bords

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

En plus de ces conditions, si on intègre la deuxième équation du système (2.1), on trouve,

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} dx - b \int_0^1 \psi_{xx} dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) dx + \delta \int_0^1 \theta_x dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} dx - b \int_0^1 \psi_{xx} dx + k \int_0^1 \varphi_x dx + k \int_0^1 \psi dx + \delta \int_0^1 \theta_x dx = 0, \end{aligned}$$

les conditions aux bords nous donnent

$$\begin{aligned} -b \int_0^1 \psi_{xx} dx &= -b [\psi_x]_0^1 = 0, \\ \delta \int_0^1 \theta_x dx &= \delta [\theta]_0^1 = 0, \\ k \int_0^1 \varphi_x dx &= k [\varphi]_0^1 = 0, \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} dx + k \int_0^1 \psi dx = 0,$$

c-à-d

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \psi dx + \frac{k}{\rho_2} \int_0^1 \psi dx = 0. \quad (2.4)$$

C'est une équation différentielle à coefficients constants du 2<sup>me</sup> ordre.

Si on pose :  $\int_0^1 \psi dx = v$ , on trouve

$$v'' + \frac{k}{\rho_2} v = 0,$$

son équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{k}{\rho_2} = 0,$$

et sa solution :

$$v(t) = c_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t \right)$$

quand  $t = 0$ , d'après les conditions initiales, on a

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad , \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x)$$

$$\int_0^1 \psi(x, t) dx = c_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t \right) \quad (2.5)$$

$$\int_0^1 \psi(x, 0) dx = \int_0^1 \psi_0(x) dx = c_1.$$

En dérivant (2.5), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 \psi(x, t) dx \right] = \frac{d}{dt} \left[ c_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t \right) \right]$$

$$\int_0^1 \psi_t(x, 0) dx = \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} c_2$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{k}} \int_0^1 \psi_1(x) dx$$

en substituant  $c_1$  et  $c_2$  dans (2.5), on obtient

$$\int_0^1 \psi(x, t) dx = \int_0^1 \psi_0(x) dx \cos \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t + \sqrt{\frac{\rho_2}{k}} \left( \int_0^1 \psi_1(x) dx \right) \sin \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t. \quad (2.6)$$

On pose :

$$\bar{\psi}(x, t) = \psi(x, t) - \int_0^1 \psi_0(x) dx \cos \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t + \sqrt{\frac{\rho_2}{k}} \left( \int_0^1 \psi_1(x) dx \right) \sin \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t,$$

puis en intégrant sur (0,1), il vient

$$\int_0^1 \bar{\psi}(x, t) dx = \int_0^1 \psi(x, t) dx - \int_0^1 \psi_0(x) dx \cos \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t + \sqrt{\frac{\rho_2}{k}} \left( \int_0^1 \psi_1(x) dx \right) \sin \sqrt{\frac{k}{\rho_2}} t$$

d'après (2.6), on conclut que

$$\int_0^1 \bar{\psi}(x, t) dx = 0. \quad (2.7)$$

Afin de pouvoir appliquer l'inégalité de Poincaré pour  $\psi$  on va travailler avec  $\bar{\psi}(x, t)$  au lieu de  $\psi(x, t)$  en gardant la notation  $\psi$ .

D'autre part, à partir de la quatrième équation du système (2.1), nous avons,

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0,$$

une intégration par parties, conduit à

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 q dx + \frac{\beta}{\tau} \int_0^1 q dx = 0.$$

C'est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre, elle ressemble à :

$$u' + \frac{\beta}{\tau} u = 0$$

avec,

$$u = \int_0^1 q dx$$

sa solution s'écrit,

$$u = ce^{\frac{-\beta}{\tau}t}$$

faisant :  $c \rightarrow c(t)$

$$\begin{aligned} u &= c(t)e^{\frac{-\beta}{\tau}t} \\ u_t &= c'(t)e^{\frac{-\beta}{\tau}t} - \frac{\beta}{\tau}c(t)e^{\frac{-\beta}{\tau}t} \Rightarrow c'(t)e^{\frac{-\beta}{\tau}t} = 0 \\ c'(t) &= 0 \Rightarrow c(t) = C. \end{aligned}$$

Quand  $t = 0$

$$u(0) = C = \int_0^1 q(x,0)dx = \int_0^1 q_0(x) dx$$

d'où la solution

$$\int_0^1 q(x,t) = \left( \int_0^1 q_0(x) dx \right) e^{\frac{-\beta}{\tau}t}.$$

Posons

$$\bar{q}(x,t) dx = q(x,t) - \left( \int_0^1 q_0(x) dx \right) e^{\frac{-\beta}{\tau}t}$$

en intégrant par rapport à  $x$  sur  $(0,1)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{q}(x,t) dx &= \int_0^1 q(x,t) dx - \int_0^1 \left[ \left( \int_0^1 q_0(x) dx \right) e^{\frac{-\beta}{\tau}t} \right] dx \\ \int_0^1 \bar{q}(x,t) dx &= \int_0^1 q(x,t) dx - \left[ \left( \int_0^1 q_0(x) dx \right) e^{\frac{-\beta}{\tau}t} \right] \underbrace{\int_0^1 dx}_{=1} \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 \bar{q}(x,t) dx = 0 \tag{2.8}$$

Dans tout le mémoire on va considérer  $\bar{q}(x,t) = 0$  au lieu de  $q(x,t)$  et pour ne pas alourdir les notations, nous gardons la notation  $q(x,t)$

## 2.2 Existence et unicité de la solution

Pour simplifier les calculs et pouvoir intégrer, on va adapter un changement de variable qui a été introduit en premier par Nicaise [27 ] comme suit

$$z(x, \rho, t) = \varphi_t(x, t - \rho\tau_0)$$

une simple dérivation donne

$$\tau_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0$$

alors le système (2.1) se transforme en

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \mu z(x, 1, t) = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \tau_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \rho \in (0, 1), t > 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad x \in (0, 1) \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$z(x, 0, t) = \varphi_t(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0$$

$$\varphi_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad x \in (0, 1) \quad t \in (0, t)$$

et les mêmes conditions aux bords (2.3).

### Forme matricielle du système

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème(2.9) nous utilisons la théorie de semi-groupe.

Soit  $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T$  où  $u = \varphi_t$  et  $v = \psi_t$  la solution du système (2.9) tel que :

$$\begin{aligned}\varphi_{tt} = u_t &= \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x - \frac{\mu}{\rho_1} z(x, 1, t) \\ \psi_{tt} = v_t &= \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2} \theta_x \\ \theta_t &= -\frac{1}{\rho_3} q_x - \frac{\delta}{\rho_3} \psi_{tx} \\ q_t &= -\frac{\beta}{\tau} q - \frac{1}{\tau} \theta_x \\ z_t &= \frac{1}{\tau_0} z_\rho.\end{aligned}$$

Alors le système (2.9) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_t = u \\ \varphi_{tt} = \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x - \frac{\mu}{\rho_1} z(x, 1, t) \\ \psi_t = v \\ \psi_{tt} = \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2} \theta_x \\ \theta_t = -\frac{1}{\rho_3} q_x - \frac{\delta}{\rho_3} \psi_{tx} \\ q_t = -\frac{\beta}{\tau} q - \frac{1}{\tau} \theta_x \\ z_t = \frac{1}{\tau_0} z_\rho \end{array} \right.$$

notre problème s'écrit sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi'(t) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})\Phi(t) = 0, \quad t > 0 \\ \Phi(0) = \Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0, f_0)^T \end{array} \right.$$

plus précisément

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ \varphi_{tt} \\ v \\ \psi_{tt} \\ \theta_t \\ q_t \\ z_t \end{pmatrix}}_{\Phi'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -u \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{|\mu|}{\rho_1}\mu + \frac{\mu}{\rho_1}z(x, 1, t) \\ -v \\ -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ \frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\delta}{\rho_3}\psi_{tx} \\ \frac{\beta}{\tau}q + \frac{1}{\tau}\theta_x \\ \frac{1}{\tau_0}z_\rho \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}(\phi)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}\phi}$$

On considère les espaces de Hilbert suivants :

$$L_\star^2(0, 1) = \left\{ w \in L^2(0, 1) : \int_0^1 w(s)ds = 0 \right\}, \quad H_\star^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap L_\star^2(0, 1)$$

$$H_\star^2(0, 1) = \{ w \in H^2(0, 1) : w_x(0) = w_x(1) = 0 \}$$

et

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_\star^1(0, 1) \times L_\star^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_\star^2(0, 1) \\ \times L^2((0, 1) \times (0, 1))$$

L'espace  $\mathcal{H}$  est muni du produit scalaire

$$(\Phi, \tilde{\Phi})_{\mathcal{H}} = \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx + \rho_1 \int_0^1 u \tilde{u} dx + b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \rho_2 \int_0^1 v \tilde{v} dx \quad (2.10) \\ + \rho_3 \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx + \tau \int_0^1 q \tilde{q} dx + \tau_0 |\mu| \int_0^1 \int_0^1 z \tilde{z} d\rho dx.$$

et le domaine de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{ll} \Phi \in \mathcal{H} \mid \varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1), & \psi \in H_\star^2(0, 1) \cap H_\star^1(0, 1), \\ u, \theta \in H_0^1(0, 1), & v, q \in H_\star^1(0, 1) \\ z, z_\rho \in L^2((0, 1), L^2(0, 1)), & z(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right\}$$

on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

### **Théorème 2.2.1**

Soit  $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ . Alors il existe une solution unique  $\tilde{\Phi} \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$  du problème (2.6), De plus, si  $\tilde{\Phi}_0 \in D(\mathcal{A})$ , alors  $\tilde{\Phi} \in C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A}) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}))$ .

**Démonstration**

On utilise l'approche du semi groupes. Ce qui veut dire que nous devons montrer que,  $\mathcal{A}$  est maximal monotone et que l'opérateur  $\mathcal{B}$  est un opérateur Lipschitzien continu.

**•A monotone**

Soit  $\tilde{\Phi} \in D(\mathcal{A})$ . En utilisant le produit scalaire, on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})_{\mathcal{H}} = & -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)u_x - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x u \, dx + |\mu| \int_0^1 u^2 \, dx + \mu \int_0^1 uz \, dx - b \int_0^1 \psi v_x \, dx - \\ & b \int_0^1 \psi_{xx}v \, dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)v \, dx + \delta \int_0^1 \theta_x v + \int_0^1 q_x \theta \, dx + \delta \int_0^1 v \theta_x \, dx + \beta \int_0^1 q^2 \, dx + \int_0^1 q \theta_x \, dx + \\ & |\mu| \int_0^1 \int_0^1 z z_\rho \, d\rho \, dx. \end{aligned}$$

Après la simplification et grâce à la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} b \int_0^1 \psi_{xx}v \, dx &= b[v\psi_x]_0^1 - b \int_0^1 \psi_x v_x \, dx = b \int_0^1 \psi_x v_x \, dx \\ k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x u \, dx &= k[u(\varphi_x + \psi)]_0^1 - k \int_0^1 u_x(\varphi_x + \psi) \, dx = -k \int_0^1 u_x(\varphi_x + \psi) \, dx \\ \delta \int_0^1 \theta_x v \, dx &= \delta[\theta v]_0^1 - \delta \int_0^1 \theta v_x \, dx = -\delta \int_0^1 \theta v_x \, dx \end{aligned}$$

et le fait que  $z(x, 0) = u(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 q \theta_x \, dx &= [q_x \theta]_0^1 - \int_0^1 q_x \theta \, dx = - \int_0^1 q_x \theta \, dx \\ \int_0^1 \int_0^1 z z_\rho \, d\rho \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 z^2(\cdot, 1) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \, dx \end{aligned}$$

donc :

$$(\mathcal{A}\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})_{\mathcal{H}} = |\mu| \int_0^1 u^2 \, dx + \mu \int_0^1 uz \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 z^2(\cdot, 1) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \, dx + \beta \int_0^1 q^2 \, dx.$$

Grâce à l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \int_0^1 uz(\cdot, 1) \, dx &\leq \frac{|\mu|}{2} \int_0^1 z^2 \, dx + \frac{|\mu|}{2} \int_0^1 u^2 \, dx \\ \mu \int_0^1 uz(\cdot, 1) \, dx &\geq \frac{-|\mu|}{2} \int_0^1 z^2(\cdot, 1) \, dx - \frac{|\mu|}{2} \int_0^1 u^2 \, dx \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(\mathcal{A}\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})_{\mathcal{H}} \geq \beta \int_0^1 q^2 \, dx$$

Donc  $\mathcal{A}$  est monotone.

•  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  est surjectif

Soit  $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7)^T \in \mathcal{H}$ . Il faut trouver  $\phi \in D(\mathcal{A})$  tel que :

$$(I + \mathcal{A})\Phi = G \quad (2.11)$$

l'équation (2.11) est équivalente à,

$$\left\{ \begin{array}{l} -u + \varphi = g_1 \\ -\kappa(\varphi_x + \psi)_x + (|\mu| + \rho_1)u + \mu z(\cdot, 1) = \rho_1 g_2 \\ -v + \psi = g_3 \\ -b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x + \rho_2 v = \rho_2 g_4 \\ q_x + \delta v_x + \rho_3 \theta = \rho_3 g_5 \\ (\beta + \tau)q + \theta_x = \tau g_6 \\ z_\rho + \tau_0 z = \tau_0 g_7. \end{array} \right.$$

à partir de La septième équation de (2.11) avec (2.11) et le fait que  $z(x, 0) = u(x)$  on trouve

$$z_\rho + \tau_0 z = \tau_0 g_7$$

premièrement, on résout l'équation homogène,

$$z_\rho + \tau_0 z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{d\rho} = -\tau_0 z$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\tau_0 d\rho$$

$$z(x, y) = C e^{-\tau_0 \rho}$$

deuxièmement, on résout l'équation non-homogène  $C \rightarrow C(\rho)$ , ainsi

$$z_\rho = C_\rho e^{-\tau_0 \rho} - \tau_0 C e^{-\tau_0 \rho}$$

on remplace  $z$  et  $z_\rho$  :

$$C_\rho e^{-\tau_0 \rho} = \tau_0 g_7$$

$$\frac{dc}{d\rho} = z_0 e^{\tau_0 \rho} g_7$$

$$C(\rho) - C(0) = \int_0^\rho \tau_0 e^{z_0 s} g_7(x, s) ds$$

$$C = C(0) + \rho \int_0^\rho \tau_0 e^{\tau_0 s} g_7(x, s) ds$$

tel que

$$C(0) = z(x, 0) = \varphi_t(x) = u(x, t)$$

d'où

$$z(x, \rho) = \varphi(x) e^{-\tau_0 \rho} - e^{-\tau_0 \rho} g_1(x) + \tau_0 e^{-\tau_0 \rho} \int_0^\rho e^{\tau_0 s} g_7(x, s) ds.$$

A partir de la deuxième et la troisième equation du système (2.11), nous avons

$$u = \varphi - g_1 \in H_0^1(0, 1)$$

$$v = \psi - g_3 \in H_*^1(0, 1)$$

remplaçons par  $u$  et  $\theta_x, v, z$  dans les autres équations

$$\begin{cases} -\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu + \rho_1 \varphi + \mu \varphi e^{-\tau_0} = \rho_1 g_1 + e^{-\tau_0} g_1 - \tau_0 e^{-\tau_0} \mu \int_0^1 e^{\tau_0 s} g_7 ds + |\mu| + \rho_1 g_1 \\ -b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \delta(\beta + \tau)q + \rho_2 \psi = \rho_2 g_3 + \rho_2 g_4 - \delta\tau g_6 \\ q_x + \delta\psi_x + \rho_3 \theta = -\delta g_{3x} - \rho_3 \left( g_5 - \tau \int_0^x g_6(y) dy \right) g_{3x} \end{cases}$$

À partir de (2.11)<sub>6uve</sub>, on trouve

$$\theta_x = \tau g_6 - (\beta + \tau)q$$

alors

$$\theta = \tau \int_0^x g_6(y) dy - (\beta + \tau) \int_0^x q(y) dy$$

donc

$$\begin{cases} -\kappa(\varphi_x + \psi) + \tilde{u}\varphi = \tilde{\mu}g_1 + \rho_1 g_2 - \mu\tau_0 e^{-\tau_0} \int_0^1 e^{\tau_0 s} g_7(x, s) ds \\ -b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \delta(\beta + \tau)q + \rho_2 \psi = \rho_2 g_3 + \rho_2 g_4 - \delta\tau g_6 \\ q_x + \delta\psi_x - \rho_3(\beta + \tau) \int_0^x q(y) dy = -\delta g_{3x} - \rho_3 \left( g_5 - \tau \int_0^x g_6(y) dy \right) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = \rho_1 + |\mu| + \mu e^{-\tau_0} \\ h_1 = \tilde{\mu}g_1 + \rho_1g_2 - \mu\tau_0e^{-\tau_0} \int_0^1 e^{\tau_0s}g_7(x, s)ds \\ h_2 = \rho_2(g_3 + g_4) - \tau\delta g_6 \\ h_3 = -\delta g_{3x} - \rho_3 \left( g_5 - \tau \int_0^x g_6(y)dy \right). \end{cases}$$

Multiplions les équations (2.11)<sub>1</sub>, (2.11)<sub>2</sub>, (2.11)<sub>4</sub> respectivement par  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{q}$  et en intégrant par partie sur  $(0, 1)$ , on trouve

$$\begin{aligned} & -\kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\varphi} dx + \tilde{u} \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx = \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx \\ & -b \int_0^1 \psi_{xx} \tilde{\psi} dx + \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\psi} dx - \delta(\beta + \tau) \int_0^1 q \tilde{\psi} dx + \rho_2 \psi \tilde{\psi} dx = \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx \\ & \int_0^1 q_x \tilde{q} dx + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 \psi_x \tilde{q} dx + \rho_3(\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x \tilde{q}(y) dy \int_0^x \tilde{q}(y) dy \right) dx = \int_0^1 h_3 \int_0^x \tilde{q}(y) dy dx \end{aligned}$$

la formulation variationnelle associée, prend la forme

$$B \left( (\varphi, \psi, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}) \right) = F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}) \quad (2.12)$$

où B est une forme bilinéaire de  $[H_0^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times H_*^1(0, 1)]^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} B \left( (\varphi, \psi, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}) \right) &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx + (\beta + \tau) \int_0^1 q \tilde{q} dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \tilde{\psi} dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx \\ &- \delta(\beta + \tau) \int_0^1 q \tilde{\psi} dx + \tilde{u} \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 \psi \tilde{q} dx + \rho_3(\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \int_0^x \tilde{q}(y) dy \right) dx \end{aligned}$$

et F est une application linéaire de  $[H_0^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times H_*^1(0, 1)]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$F \left( \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q} \right) = \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx + \int_0^1 h_3 \int_0^x \tilde{q}(y) dy dx$$

Maintenant définissons l'espace  $V = [H_0^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times H_*^1(0, 1)]$  équipé de la norme

$$\|(\varphi, \psi, q)\|_v = \|(\varphi_x + \psi)\|$$

et appliquons le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence de la solution de (2.12).

Tout d'abord, on commence par :

**la continuité de la forme bilinéaire :**

$B(.,.)$  continue, alors :

$$\exists c > 0 : |B(x, \tilde{x})| \leq c \|x\|_V \|\tilde{x}\|_V \quad \forall x, \tilde{x} \in V$$

$$\begin{aligned} |B(x, \tilde{x})| &= \left| k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx + (\beta + \tau) \int_0^1 q \tilde{q} dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \tilde{\psi} dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx \right. \\ &\quad - \delta(\beta + \tau) \int_0^1 q \tilde{\psi} dx + \tilde{u} \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 \psi \tilde{q} dx \\ &\quad \left. + \rho_3(\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \int_0^x \tilde{q}(y) dy \right) dx \right| \\ &\leq k \int_0^1 |(\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})| dx + (\beta + \tau) \int_0^1 |q \tilde{q}| dx + b \int_0^1 |\psi_{xx} \tilde{\psi}| dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^1 |\psi \tilde{\psi}| dx - \delta(\beta + \tau) \int_0^1 |q \tilde{\psi}| dx + \tilde{u} \int_0^1 |\varphi \tilde{\varphi}| dx + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 |\psi \tilde{q}| dx \\ &\quad + \rho_3(\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left| \left( \int_0^x q(y) dy \int_0^x \tilde{q}(y) dy \right) \right| dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} |B(x, \tilde{x})| &\leq k \|(\varphi_x + \psi)\| \|(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})\| + (\beta + \tau) \|q\| \|\tilde{q}\| + b \|\psi_{xx}\| \|\tilde{\psi}\| + \rho_2 \|\psi\| \|\tilde{\psi}\| \\ &\quad - \delta(\beta + \tau) \|q\| \|\tilde{\psi}\| + \tilde{u} \|\varphi\| \|\tilde{\varphi}\| + \delta(\beta + \tau) \|\psi\| \|\tilde{q}\| + \rho_3(\beta + \tau)^2 \|q(y)\| \|\tilde{q}(y)\| \\ &\leq c \|\varphi, \psi, q\|_V \|\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}\|_V. \end{aligned}$$

Donc  $B(.,.)$  est continue.

**★ La coercivité de la forme bilinéaire**

$B(.,.)$  coercive :

$$\exists \alpha > 0 \quad B(X, X) \geq \alpha \|x\|_V^2 \quad \forall x \in V$$

on a :

$$\begin{aligned}
 B(X, X) &= \left| k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx + (\beta + \tau) \int_0^1 q\tilde{q} dx + b \int_0^1 \psi_{xx}\tilde{\psi} dx + \rho_2 \int_0^1 \psi\tilde{\psi} dx \right. \\
 &\quad - \delta(\beta + \tau) \int_0^1 q\tilde{\psi} dx + \tilde{u} \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi} dx + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 \psi\tilde{q} dx \\
 &\quad \left. + \rho_3(\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \int_0^x \tilde{q}(y) dy \right) dx \right|.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B((\varphi, \psi, q), (\varphi, \psi, q)) &= \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + (\beta + \tau) \int_0^1 q^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^1 \psi^2 dx + \tilde{\mu} \int_0^1 \varphi^2 dx + \rho_3(\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right)^2 dx \\
 &\geq \min \{k, (\beta + \tau), b, \rho_2, \tilde{\mu}, \rho_3(\beta + \tau)^2\} \|\varphi, \psi, q\| \\
 &\geq c \|\varphi, \psi, q\|_V^2
 \end{aligned}$$

Donc  $B(., .)$  coercive.

### ★ La continuité de la Forme linéaire

$F(., .)$  continue, alors :

$$\exists \beta > 0, |F(\bar{X})| \leq \beta \|\bar{X}\|_\omega \quad \forall \bar{X} \in V$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on trouve

$$\begin{aligned}
 |F(x)| &= \left| \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx + \int_0^1 h_3 \int_0^x \tilde{q}(y) dy dx \right| \\
 &\leq \int_0^1 |h_1 \tilde{\varphi}| dx + \int_0^1 |h_2 \tilde{\psi}| dx + \int_0^1 |h_3 \int_0^x \tilde{q}(y) dy| dx \\
 &\leq \|h_1\| \|\tilde{\varphi}\| + \|h_2\| \|\tilde{\psi}\| + \|h_3\| \|\tilde{q}\| \\
 &\leq \max \|h_1\| \|h_2\| \|h_3\| \left( \|\tilde{\varphi}\|, \|\tilde{\psi}\|, \|\tilde{q}\| \right) \\
 &\leq \beta \|\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{q}\|_V
 \end{aligned}$$

Donc  $F(., .)$  est continue.

D'après le théorème de **Lax-Milgram** on conclut qu'il existe une solution unique,  $x \in V$  tq :

$$B(x, \tilde{x}) = F(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in V$$

### ★ La régularité de la solution

A partir de l'égalité (2.11)<sub>1</sub>, on aurait  $\varphi = u - g_1 \in H_0^1$  et de (2.11)<sub>3</sub>, on aurait  $\psi = v - g_3 \in H_0^1$ .

De plus, si  $(\tilde{\varphi}, \tilde{q}) = (0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$  on a,

$$k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\psi} \, dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \tilde{\psi} \, dx - \rho_2 \int_0^1 \psi \tilde{\psi} \, dx + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 q \tilde{\psi} \, dx = \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} \, dx,$$

on intègre par partie et après simplification on obtient

$$\int_0^1 (k(\varphi_x + \psi) + b\psi_{xx} - \rho_2\psi + \delta(\beta + \tau)q - h_2) \tilde{\psi} \, dx = 0,$$

$$\int_0^1 (k\varphi_x - (k + \rho_2)\psi + b\psi_{xx} + \delta(\beta + \tau)q - h_2) \tilde{\psi} \, dx = 0$$

Ce qui implique que  $\forall \tilde{\psi} \in H_0^1$ .

$$(k\varphi_x - (k + \rho_2)\psi + b\psi_{xx} + (\beta + \tau)q\delta - h_2) = 0,$$

$$b\psi_{xx} = k\varphi_x - (k + \rho_2)\psi + (\beta + \tau)q\delta - h_2.$$

et comme  $\psi = v + g_3$ , alors

$$b\psi_{xx} = k\varphi_x - (k + \rho_2)(v + g_3) + (\beta + \tau)q\delta - h_2,$$

$$\psi_{xx} = \frac{(k + \rho_2)(v + g_3)}{b} + \frac{k}{b}\varphi_x - \frac{(\beta + \tau)}{b}\delta q - h_2.$$

Par la théorie de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il en résulte que

$$\psi \in H_2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

Par ailleurs, pour tout  $\phi \in C_*^1([0, 1]) \subset H_*^1(0, 1)$  une intégration par parties donne

$$b \int_0^1 \psi_{xx} \phi \, dx - \int_0^1 ((k + \rho_2)\psi + k\varphi_x - (\beta + \tau)\delta q - h_2) \phi \, dx = 0$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$b \int_0^1 \psi_x \phi_x \, dx - \int_0^1 ((k + \rho_2)\psi + k\varphi_x - (\beta + \tau)\delta q - h_2) \phi \, dx = 0$$

$$\psi_x(1)\phi(1) - \psi_x(0)\phi(0) = 0, \quad \forall \phi \in C^1([0, 1]).$$

Donc

$$\psi_x(1) = \psi_x(0) = 0,$$

par conséquent,

$$\psi \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

D'autre part si  $\tilde{\psi} = 0$  on a

$$-k\varphi_{xx} + \tilde{u}\varphi = h_1 - k\psi_x$$

alors,

$$\int_0^1 (-k\varphi_{xx} + \tilde{u}\varphi - h_1 - k\psi_x) \tilde{\varphi} \, dx$$

ce que implique que  $\forall \tilde{\varphi} \in H_0^1$

$$-k\varphi_{xx} + \tilde{u}\varphi - h_1 + k\psi_x = 0$$

$$-k\varphi_{xx} = \tilde{u}\varphi - h_1 + k\psi_x$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\tilde{u}}{k}\varphi - \frac{h_1}{k} + \psi_x$$

et comme  $\varphi = u + g_1$

$$\varphi_{xx} = \frac{\tilde{u}}{k}(u + g_1) - \frac{h_1}{k} + \psi_x$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\tilde{u}}{k}u + \frac{\tilde{u}}{k}g_1 - \frac{h_1}{k} + \psi_x \in L^2$$

$$\varphi_{xx} \in L^2 \Rightarrow \varphi \in H^2$$

par conséquent :  $\varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$  d'autre part, si  $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$  on a

$$-q_x + (\beta + \tau)\rho_3 \int_0^x q(y)(y) \, dy = \delta\psi_x + h_3$$

on intègre par partie et après calcul on obtient

$$\int_0^1 \left( -q_x + (\beta + \tau)\rho_3 \int_0^x q(y)(y) \, dy - \delta\psi_x - h_3 \right) \tilde{q} \, dx$$

Ce qui implique que  $\forall \tilde{q} \in H_0^1$

$$-q_x + (\beta + \tau)\rho_3 \int_0^x q(y)(y) \, dy - \delta\psi_x - h_3\tilde{q} = 0$$

$$q_x = (\beta + \tau)\rho_3 \int_0^x q(y)(y) - \delta\psi_x - h_3\tilde{q} \quad \in L^2(0, 1)$$

il en résulte que  $q \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ .

Donc, il existe une unique  $\phi \in D(A)$  tel que (2.11) soit satisfaite. Par conséquent, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est maximal. Avec cela, nous concluons que  $\mathcal{A}$  est un opérateur monotone maximal. En plus, il est évident que l'opérateur  $\mathcal{B}$  est continu de Lipschitz. En conséquence,  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction linéaire  $c_0$ - sur  $H$ . ce qui mène au résultat du théorème 2.2.1

# Stabilité exponentielle

Dans ce chapitre on montre la stabilité de la solution du système, en adaptant la méthode de l'énergie.

## 3.1 Energie du système

### Lemme 3.1.1

L'énergie du système (2.9) est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_3 \theta^2 + b \psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi)^2 + \tau q^2] dx + \frac{|\mu| \tau_0}{2} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (3.1)$$

avec,

$$E'(t) \leq -\beta \int_0^1 q^2 dx - \frac{|\mu|}{2} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \frac{|\mu|}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

### **Démonstration**

Multiplions (2.9)<sub>1</sub> par  $\varphi_t$  et intégrons par partie par rapport à  $x$  sur (0,1), avec les conditions aux bords, on obtient :

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx + \mu \int_0^1 \varphi_t z(x, 1, t) dx = 0 \\ & \rho_1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k [(\varphi_x + \psi) \varphi_t]_{x=0}^{x=1} + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \mu \int_0^1 \varphi_t z(x, 1, t) dx = 0 \\ & \rho_1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \mu \int_0^1 \varphi_t z(x, 1, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Multiplions l'équation (2.9)<sub>2</sub> par  $\psi_t$ , et intégrons par partie par rapport à  $x$ , en prenant en compte les conditions aux bords, on obtient :

$$\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0$$

$$\rho_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx - b[\psi_x \psi_t]_{x=0}^1 + b \int_0^1 \psi_x \psi_{tx} dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0$$

et on a :

$$b \int_0^1 \psi_x \psi_{tx} dx = \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx$$

alors :

$$\rho_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0 \quad (3.4)$$

Multiplions l'équation (2.9)<sub>3</sub> par  $\theta$ , et intégrons par partie par rapport à  $x$  on trouve,

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \theta dx + \int_0^1 q_x \theta dx + \delta \int_0^1 \psi_{tx} \theta dx = 0$$

on a :

$$\delta \int_0^1 \psi_{tx} \theta dx = \delta[\theta \psi_t]_{x=0}^1 - \delta \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = -\delta \int_0^1 \psi_t \theta_x dx$$

d'où :

$$\rho_3 \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 q_x \theta dx - \delta \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0 \quad (3.5)$$

Multiplions l'équation (2.9)<sub>4</sub> par  $q$  et intégrons par partie par rapport à  $x$  on trouve,

$$\tau \int_0^1 q_t q dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx = 0$$

$$\tau \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx = 0 \quad (3.6)$$

Multiplions l'équation (2.9)<sub>5</sub> par  $|\mu|z$  et intégrons par partie par rapport à  $\rho$  et  $x$  on trouve :

$$|\mu| \tau_0 \int_0^1 z z_t(x, \rho, t) dx + |\mu| \int_0^1 z z_\rho(x, \rho, t) dx = 0$$

$$\tau_0 |\mu| \int_0^1 \int_0^1 z_t d\rho dx + |\mu| \int_0^1 \int_0^1 z z_\rho d\rho = 0$$

$$z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{|\mu|}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{d\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx = 0$$

$$\tau_0|\mu|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1z^2(x,p,t)d\rho dx+\frac{|\mu|}{2}\int_0^1[z^2(x,1,t)-z^2(x,0,t)]dx=0$$

donc

$$\tau_0|\mu|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1z^2(x,p,t)d\rho dx+\frac{|\mu|}{2}\int_0^1z^2(x,1,t)dx-\frac{|\mu|}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx=0 \quad (3.7)$$

Maintenant nous additionnons les égalités ((3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7)), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\rho_1\varphi_t^2dx+\kappa\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx+b\int_0^1\psi_x^2dx+\rho_3\int_0^1\theta^2dx+\tau\int_0^1q^2dx+ \\ & \tau_0|\mu|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1z^2(x,p,t)d\rho dx \\ & =-\beta\int_0^1q^2dx+\frac{|\mu|}{2}\int_0^1z^2(x,1,t)dx-\frac{|\mu|}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx. \end{aligned}$$

## Stabilité exponentielle

Pour Prouver cette décroissance exponentielle, nous avons besoin de construire une fonction de lyapounov équivalente à l'énergie, pour cela nous avons besoin de quelques lemmes importants

## 3.2 Construction d'une fonctionnelle de Lyapounov

### Lemme 3.2.1

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  la solution du problème (2,9), la fonctionnelle  $F_1$  définie par

$$F_1(t)=-\int_0^1[\rho_1\varphi_t\varphi+\rho_2\psi_t\psi]dx \quad (3.8)$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq & -\rho_1\int_0^1\varphi_t^2dx-\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx+c\left(1+\frac{\mu^2}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2dx+c\left(1+\frac{\mu^2}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1\psi_x^2dx \\ & +c\int_0^1\theta^2dx+\varepsilon_1\int_0^1z^2(x,1,t)dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Démonstration**

Dérivons  $F_1(t)$

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_1 \left[ \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi \, dx + \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx \right] - \rho_2 \left[ \int_0^1 \psi_{tt} \psi \, dx + \int_0^1 \psi_t^2 \, dx \right] \\ &= -\int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} \varphi \, dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \int_0^1 \rho_2 \psi_{tt} \psi \, dx - \int_0^1 \psi_t^2 \, dx \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x - \mu z(x, 1, t) \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\int_0^1 \varphi [k(\varphi_x + \psi)_x - \mu z(x, 1, t)] \, dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \int_0^1 \psi [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x] \, dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx. \end{aligned}$$

une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 k [\varphi(\varphi_x + \psi)_x] \, dx &= -[k\varphi(\varphi_x + \psi)]_0^1 + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_x \, dx = k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_x \, dx \\ -b \int_0^1 \psi_{xx} \psi \, dx &= -b [\psi \psi_x]_0^1 + b \int_0^1 \psi_x^2 \, dx = b \int_0^1 \psi_x^2 \, dx \\ \delta \int_0^1 \theta_x \psi \, dx &= \delta \int_0^1 \theta \psi_x \, dx \end{aligned}$$

donc :

$$F_1'(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + b \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \delta \int_0^1 \psi_x \theta \, dx + \mu \int_0^1 \varphi z(x, 1, t) \, dx$$

Appliquons l'inégalité de Young :

$$\delta \int_0^1 \psi_x \theta \, dx \leq \frac{\delta \varepsilon}{2} \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \frac{\delta}{2\varepsilon} \int_0^1 \theta^2 \, dx$$

et en appliquant l'inégalité de Young, puis l'inégalité de Poincaré, on constate que

$$\mu \int_0^1 \varphi z(x, 1, t) \, dx \leq \frac{\mu \varepsilon}{2} \int_0^1 \varphi^2 \, dx + \frac{\mu}{2\varepsilon} \int_0^1 z^2(x, 1, t) \, dx$$

on veut avoir :

$$\frac{\mu}{2\varepsilon} = \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\mu}{2\varepsilon_1}$$

alors :

$$\mu \int_0^1 \varphi z(x, 1, t) dx \leq \frac{\mu^2}{4\varepsilon_1} \int_0^1 \varphi^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon_1}\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &+ c \left(1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon_1}\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \end{aligned}$$

### **Lemme 3.2.2**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  la solution du problème (2,9), la fonctionnelle  $F_2$  définie par :

$$F_2(t) = -\frac{\rho_2 \rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_2 > 0$

$$F_2'(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx$$

### **Démonstration**

Dérivons  $F_2(t)$

$$F_2'(t) = -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \rho_3 \theta \int_0^x \psi_t(y, t) dy dx - \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \int_0^x \rho_2 \psi_{tt}(y, t) dy dx$$

de (2.9) on a :

$$\begin{cases} \rho_3 \theta_t = -q_x - \delta \psi_{tx} \\ \rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \left( -q_x \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{tx} \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx \\ &- \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x b \psi_{xx} dy \right) dx + \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x k(\varphi_x + \psi) dy \right) dx + \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \theta_x dy \right) dx \end{aligned}$$

une intégration par partie, en prenant en compte (2.3), nous donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q_x \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx &= -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\rho_2}{\delta} \left[ q \int_0^x \psi_t \right] = -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \psi_t q dx \\
 \rho_2 \int_0^1 \psi_{tx} \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx &= -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \left[ \psi_t \int_0^x \psi_t \right]_{=0}^{=1} = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 -\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^y \psi_{yy} dy \right) dx &= -\frac{b\rho_3}{\theta} \int_0^1 \psi_x \theta dx + \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 [\psi_x(x, t) - \psi_x(0, t)] = -\frac{b\rho_3}{\theta} \int_0^1 \psi_y \theta dy \\
 -\rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^y \theta_y dy \right) dx &= -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx
 \end{aligned}$$

donc

$$F'_2(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx - \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x k(\varphi_y + \psi) dy \right) dx.$$

Appliquons l'inégalité de Young sur les termes  $\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx$ ,  $\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx$  :

$$\bullet \frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\rho_2 \varepsilon}{2\delta} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2\delta \varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

on veut avoir :

$$\frac{\rho_2}{2\delta \varepsilon} = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\delta}$$

alors :

$$\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\rho_2}{2\delta^2} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$\bullet \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx \leq \frac{b\rho_3 \varepsilon}{2\delta} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b\rho_3}{2\varepsilon \delta} \int_0^1 \psi_x^2 dx$$

on veut avoir :

$$\frac{b\rho_3}{2\delta \varepsilon} = 2\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{b\rho_3}{4\delta \varepsilon_2}$$

alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx &\leq \frac{b^2 \rho_3^2}{4\delta \varepsilon_2} \int_0^1 \theta^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 \bullet \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x k(\varphi_y + \psi) dy \right) dx &\leq \frac{c}{\varepsilon_2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_y + \psi)^2 dy
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$F'_2(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx$$

**Lemme 3.2.3**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  la solution du problème (2.9), la fonctionnelle  $F_3$  définie par :

$$F_3(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_3 > 0$

$$F_3'(t) \leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\mu^2}{b} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx$$

**Démonstration**

Dérivons  $F_3(t)$

$$F_3'(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_{tt} dx - \int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx$$

et on a :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x - \mu z(x, 1, t). \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x. \end{cases}$$

$$F_3'(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x) dx - \int_0^1 [k(\varphi_x + \psi)_x + \mu z(x, 1, t)] \int_0^x \psi(y, t) dy dx$$

$$- \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi(y, t) dy dx$$

$$F_3'(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \psi dx - \int_0^1 k(\varphi_x + \psi) \psi dx - \delta \int_0^1 \theta_x \psi dx - \int_0^1 k(\varphi_x + \psi)_x \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx$$

$$+ \mu z(x, 1, t) \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi(y, t) dy dx$$

On intègre par partie tenant en compte les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \int_0^1 b\psi\psi_{xx} &= -b[\psi\psi_x]_0^1 + b \int_0^1 \psi_x^2 = b \int_0^1 \psi_x^2 \\ \delta \int_0^1 \theta_x \psi dx &= \delta \int_0^1 \theta \psi_x \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \delta \int_0^1 \psi_x \theta dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx \\ &+ \mu \int_0^1 z(x, 1, t) \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Young :

$$\delta \int_0^1 \psi_x \theta \, dx \leq \frac{\delta \varepsilon}{2} \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \frac{\delta}{2\varepsilon} \int_0^1 \theta^2 \, dx$$

on veut avoir :

$$\frac{\delta \varepsilon}{2} = \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{b}{\delta}$$

alors :

$$\delta \int_0^1 \psi_x \theta \, dx \leq \frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \frac{\delta^2}{2b} \int_0^1 \theta^2 \, dx$$

et avec l'inégalité de Young et Cauchy Schwartz

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \right) &\leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \left( \int_0^x \psi_t \, dy \right)^2 \, dx \\ &\leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \left( \int_0^1 \psi_t \, dy \right)^2 \, dx \\ &\leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \left( \int_0^1 \psi_t^2 \, dy \right) \int_0^1 \, dx \\ &\leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^x \psi_t^2 \, dy \end{aligned}$$

$$-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \right) \leq \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx + \frac{\rho_1^2}{2\varepsilon_3} \int_0^x \psi_t^2 \, dy$$

et :

$$\begin{aligned} \mu \int_0^1 z(x, 1, t) \left( \int_0^x \psi(y, t) \, dy \right) \, dx &\leq \frac{\mu}{4\varepsilon_3} \int_0^1 z^2(x, 1, t) \, dx + \mu \varepsilon_3 \int_0^1 \psi_x \, dx \\ \mu \int_0^1 z(x, 1, t) \left( \int_0^x \psi(y, t) \, dy \right) \, dx &\leq \frac{\mu^2}{b} \int_0^1 z^2(x, 1, t) \, dx + \frac{b}{4} \int_0^1 \psi_x \, dx \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F'_3(t) \leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + c \int_0^1 \theta^2 \, dx + \frac{\mu^2}{b} \int_0^1 z^2(x, 1, t) \, dx$$

**Lemme 3.2.4**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  la solution du problème (2,9), la fonctionnelle  $F_4$  définie par :

$$F_4(t) = \tau \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_4$

$$F_4'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx$$

**Démonstration**

Dérivons  $F_4(t)$

$$F_4'(t) = \tau \int_0^1 \rho_3 \theta_t \int_0^x q(y, t) dy dx + \int_0^1 \theta \rho_3 \int_0^x \tau q_t(y, t) dy dx$$

et on a :

$$\begin{cases} \rho_3 \theta_t = -q_x - \delta \psi_{tx} \\ \tau q_t = -\beta q - \theta_x \end{cases}$$

$$F_4'(t) = \tau \int_0^1 (-q_x - \delta \psi_{tx}) \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx + \int_0^1 \rho_3 \theta \int_0^x (-\beta q - \theta_y) dy dx$$

$$\begin{aligned} F_4'(t) = & -\tau \int_0^1 q_x \left( \int_0^x q_t(y, t) dy \right) dx - \delta \int_0^1 \psi_{tx} \left( \int_0^x q_t(y, t) dy \right) dx - \beta \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q dy \right) dx \\ & - \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \theta_y dy \right) dx \end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} -\tau \int_0^1 q_x \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx &= \tau \int_0^1 q^2 dx = \left[ q \int_0^x q(y) dy \right]_{=0}^{=1} \\ -\tau \delta \int_0^1 \psi_{tx} \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx &= \tau \delta \int_0^1 q \psi_t dx = - \left[ \int_0^1 \psi_t \int_0^x q(y) dy \right]_{=0}^{=1} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$-\rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \theta_y dy \right) dx = -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx$$

d'où

$$F'_4(t) = -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \tau \int_0^1 q^2 dx + \tau \delta \int_0^1 q \psi_t dx - \beta \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx.$$

Appliquons l'inégalité de Young :

$$\delta \tau \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\tau \delta}{2\varepsilon} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau \delta \varepsilon}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\tau \delta \varepsilon}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\varepsilon_4}{\tau \delta}$$

alors :

$$\delta \tau \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\tau^2 \delta^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

et :

$$-\beta \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx \leq \frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\beta^2 \rho_3}{2} \int_0^1 q^2 dx$$

Par conséquent :

$$F'_4(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx - \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \theta_x \right)$$

Pour la suite On pose

$$\xi = \left[ \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} \right) \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3} \right]$$

### Lemme 3.2.5

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  et supposons que  $\xi = 0$ , la fonctionnelle  $F_5$  définie par :

$$\begin{aligned} F_5(t) = & \frac{\tau\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\tau\rho_1}{\kappa^2} \int_0^1 \varphi_t\psi_x dx - \frac{b\tau\rho_3}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 \theta\varphi_t dx \\ & + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q(\varphi_x + \psi) dx \end{aligned}$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_5 > 0$

$$\begin{aligned} F_5'(t) \leq & -\frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \\ & + c \left( \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 q^2 dx + \frac{\mu^2}{\varepsilon_5} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu^2}{\varepsilon_5} \int_0^1 \theta^2 dx \right). \end{aligned}$$

### Démonstration

Dérivons  $F_5(t)$

$$\begin{aligned} F_5'(t) = & \frac{\tau\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)_t dx + \frac{b\tau\rho_1}{\kappa^2} \left( \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx + \int_0^1 \varphi_t\psi_{xt} dx \right) \\ & - \frac{b\tau\rho_3}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \left( \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx + \int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx \right) + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \left( \int_0^1 q_t(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 q(\varphi_x + \psi)_t dx \right) \\ F_5'(t) = & \frac{\tau\rho_2}{k} \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) dx - \frac{b\tau\rho_3}{\delta k} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right) \int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx + \frac{\tau\rho_2}{k} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b\tau\rho_1}{\kappa^2} \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx \\ & + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q_t(\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q\varphi_{xt} dx + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q\psi_t dx \\ & - \frac{b\tau\rho_3}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx - \frac{b\tau}{\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 \varphi_t\psi_{xt} dx \end{aligned}$$

Maintenant, nous élaborons les termes du membre de droite de (3.13), en utilisant l'intégration

par parties et les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} (\varphi_x + \psi) &= -\kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + b \int_0^1 \psi_{xx} (\varphi_x + \psi) dx - \delta \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi) dx \\
 - \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx &= \frac{\kappa}{\rho_1} \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi) dx + \frac{\mu}{\rho_1} \int_0^1 \theta z(x, 1, t) dx \\
 \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \psi_x dx &= -\kappa \int_0^1 \psi_{xx} (\varphi_x + \psi) dx - \mu \int_0^1 \psi_x z(x, 1, t) dx \\
 \tau \int_0^1 q_t (\varphi_x + \psi) dx &= -\beta \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi) dx \\
 -\rho_3 \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx &= - \int_0^1 q_x \varphi_t dx + \delta \int_0^1 \varphi_t \psi_{xt} dx
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -\tau \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\tau \rho_2}{\kappa} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q \psi_t dx - \\
 &\frac{b\beta}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx - \frac{\mu b \tau}{\kappa^2} \int_0^1 \psi_x z(x, 1, t) dx + \frac{\mu b \tau \rho_3}{\kappa \delta \rho_1} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 \theta z(x, 1, t) dx \\
 &+ \frac{b\rho_3}{\delta\rho_1} \left[ \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} \right) \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3} \right] \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi) dx.
 \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Young en posant :

$$\begin{aligned}
 \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) &= A \\
 \frac{\mu b \tau}{\kappa^2} &= B \\
 \frac{\mu b \tau \rho_3}{\kappa \delta \rho_1} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) &= C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \int_0^1 q \psi_t dx &\leq \frac{\tau^2 A^2}{2\beta^2 \beta} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 A \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx &\leq \frac{A^2}{2\tau} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 -B \int_0^1 \psi_x z(x, 1, t) dx &\leq \frac{B^2 \mu^2}{2\mu^2 \varepsilon_5} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\varepsilon_5}{2} \int_0^1 z(x, 1, t)^2 dx \\
 C \int_0^1 \theta z(x, 1, t) dx &\leq \frac{C^2 \mu^2}{2\mu^2 \varepsilon_5} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_5}{2} \int_0^1 z(x, 1, t)^2 dx
 \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &\leq -\frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \\
 &\quad + c \left( \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 q^2 dx + \frac{\mu^2}{\varepsilon_5} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu^2}{\varepsilon_5} \int_0^1 \theta^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

**Lemme 3.2.6**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  la solution du problème (2.9), la fonctionnelle  $F_6$  définie par :

$$F_6(t) = \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z(x, \rho, t) z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx$$

vérifie

$$F_6' \leq -m_0 \left( \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) + \int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

**Démonstration**

Dérivons  $F_6(t)$

$$F_6' = 2\tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z(x, \rho, t) z_t(x, \rho, t) d\rho dx$$

et on a

$$\begin{cases} \tau_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0 \\ z_t(x, \rho, t) = \frac{-1}{\tau_0} z_\rho(x, \rho, t) \end{cases}$$

$$F_6' = -2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z(x, \rho, t) z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx$$

et

$$e^{-\tau_0 \rho} z(x, \rho, t) z_\rho(x, \rho, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) - e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t)$$

donc

$$F_6' = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{d\rho} e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx - e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx - \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx$$

$$F_6' = - \int_0^1 e^{-\tau_0} [z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)] dx - \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx$$

$$F_6' \leq - \underbrace{e^{-\tau_0}}_{m_0} \left[ \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right] + \int_0^1 \underbrace{z^2(x, 0, t)}_{\varphi_t^2} dx$$

$$F_6' = -m_0 \left[ \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right] + \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

Maintenant nous pouvons donner une expression d'une fonctionnelle de Lyapounov comme suit :

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + F_1(t) + N_1 F_2(t) + N_2 F_3(t) + N_3 F_4(t) + N_4 F_5 + \frac{\rho_1}{2} F_6, \quad (3.10)$$

et le lemme suivant affirme son équivalence avec l'énergie

**Lemme 3.2.7**

Pour  $N$  suffisamment grand, le fonctionnel défini par :

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + F_1(t) + N_1F_2(t) + N_2F_3(t) + N_3F_4(t) + N_4F_5 + \frac{\rho_1}{2}F_6,$$

où  $N$  et  $N_i$  sont des nombres réels positifs à choisir convenablement plus tard, satisfait

$$c_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2E(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.11)$$

**Démonstration**

Soit

$$|G(t)| := |\mathcal{L}(t) - NE(t)| = \left| F_1(t) + N_1F_2(t) + N_2F_3(t) + N_3F_4(t) + N_4F_5 + \frac{\rho_1}{2}F_6 \right|$$

si on remplace par les  $F_i(t)$ ,  $i = 1..6$  on obtient :

$$\begin{aligned} |G(t)| = & - \int_0^1 [\rho_1\varphi_t\varphi + \rho_2\psi_t\psi] dx + N_1 \left( -\frac{\rho_2\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \psi_t(y,t)dy \right) dx \right) \\ & + N_2 \left( -\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_t dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi(y,t)dy \right) dx \right) + N_3 \left( \tau\rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q(y,t) dy \right) dx \right) \\ & + N_4 \frac{\tau\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + N_4 \frac{b\tau\rho_1}{\kappa^2} \int_0^1 \varphi_t\psi_x dx - N_4 \frac{b\tau\rho_3}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 \theta\varphi_t dx \\ & + N_4 \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho}{2}\tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0\rho} z(x,\rho,t) z_\rho(x,\rho,t) d\rho dx \end{aligned}$$

à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwartz, il vient

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}(t)| \leq & \rho_1 \int_0^1 |\varphi_t\varphi| dx + \rho_2 \int_0^1 |\psi_t\psi| dx + \frac{\rho_2\rho_3N_1}{\delta} \int_0^1 \left| \theta \int_0^x \psi_t(y,t)dy \right| dx \\ & + \rho_2N_2 \int_0^1 |\psi_t\psi| dx + \rho_1N_2 \int_0^1 \left| \varphi_t \int_0^x \psi(y,t)dy \right| dx \\ & + \tau\rho_3N_3 \int_0^1 \left| \theta \int_0^x q(y,t)dy \right| dx + \frac{\tau_0\rho_1}{2} \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0\rho} z^2(x,\rho,t) d\rho dx \\ & + \frac{\tau\rho_2N_4}{\kappa} \int_0^1 |\psi_t (\varphi_x + \psi)| dx + \frac{b\tau N_4}{\delta\kappa} \left| \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \right| \int_0^1 |q (\varphi_x + \psi)| dx \\ & + \frac{b\tau\rho_1N_4}{\kappa^2} \int_0^1 |\varphi_t\psi_x| dx + \frac{b\tau\rho_3N_4}{\delta\kappa} \left| \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \right| \int_0^1 |\theta\varphi_t| dx \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi dx &\leq \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
 \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx &\leq \rho_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 \rho_2 \int_0^1 \psi_t \psi dx &\leq \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 \frac{N_1 \rho_2 \rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t dy dx &\leq \frac{N_1 \rho_2 \rho_3}{2\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{N_1 \rho_2 \rho_3}{2\delta} \int_0^1 \theta^2 dx \\
 N_2 \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx &\leq \frac{N_2 \rho_2}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{N_2 \rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 \rho_1 N_2 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx &\leq \frac{\rho_1 N_2}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\rho_1 N_2}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 \tau \rho_3 N_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx &\leq \frac{\tau \rho_3 N_3}{2} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau \rho_3 N_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \\
 \frac{\tau \rho_2 N_4}{\kappa} \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx &\leq \frac{\tau \rho_2 N_4}{2\kappa} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\tau \rho_2 N_4}{2\kappa} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 \frac{b\tau \rho_1 N_4}{\kappa^2} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx &\leq \frac{b\tau \rho_1 N_4}{2\kappa^2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{b\tau \rho_1 N_4}{2\kappa^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 \frac{\rho}{2} \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z(x, \rho, t) z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx &\leq \frac{\rho}{2} \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 |G(t)| &\leq \underbrace{\left( 2 + N_1 + \frac{b\tau N_4}{2\kappa^2} \right)}_{\alpha_1} \int_0^1 \rho_1 \varphi_t^2 dx + \underbrace{\left( \frac{\rho_1}{b} + \frac{\rho_2}{2b} + \frac{\rho_1 N_2}{2b} + \frac{\tau \rho_1 N_4}{2\kappa^2} \right)}_{\alpha_2} \int_0^1 b \psi_x^2 dx \\
 &\quad \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{N_2}{2} + \frac{N_1 \rho_3}{2\delta} + \frac{\tau N_4}{2\kappa} \right)}_{\alpha_3} \int_0^1 \rho_2 \psi_t^2 dx + \underbrace{\left( \frac{\rho_1}{k} + \frac{\tau \rho_2 N_4}{2\kappa} \right)}_{\alpha_4} \int_0^1 k (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 &\quad + \underbrace{\left( \frac{N_3 \tau}{2} + \frac{N_1 \rho_2}{2\delta} \right)}_{\alpha_5} \int_0^1 \rho_3 \theta^2 dx + \underbrace{\frac{N_3 \rho_3}{2}}_{\alpha_6} \int_0^1 \tau q^2 dx + \underbrace{\frac{\rho}{|\mu|}}_{\alpha_7} \left[ \frac{|\mu| \tau_2}{2} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right] \\
 &\leq \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) E(t)
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq cE(t) \\
 -cE(t) &\leq \mathcal{L}(t) - NE(t) \leq cE(t) \\
 (N - c)E(t) &\leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c)E(t)
 \end{aligned}$$

si on prend :

$$c_1 = N - c \quad \text{et} \quad c_2 = N + c$$

telle que  $N > c$  on obtient alors :

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t)$$

**Théorème 3.2.1**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$  la solution du problème (2.9)

$$\text{si } \xi = \left[ \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} \right) \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3} \right] = 0$$

alors,

$$E(t) \leq k_1 E(0) e^{-k_2 t} \quad (3.12)$$

**Démonstration**

Dérivons (3.10) et utilisons les lemmes précédentes, on obtient

$$\mathcal{L}'(t) = NE'(t) + F_1'(t) + N_1 F_2'(t) + N_2 F_3'(t) + N_3 F_4'(t) + N_4 F_5'(t) + \frac{\rho_1}{2} F_6'(t)$$

$$\mathcal{L}'(t) \leq N \left[ -\beta \int_0^1 q^2 dx + |\mu| \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right]$$

$$-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left( 1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx +$$

$$c \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx$$

$$+ N_1 \left[ -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx \right]$$

$$+ N_2 \left[ -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\mu^2}{b} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \right]$$

$$+ N_3 \left[ -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx \right]$$

$$+ N_4 \left[ -\frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + c \left( \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 q^2 dx + \frac{\mu^2}{\varepsilon_5} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu^2}{\varepsilon_5} \int_0^1 \theta^2 dx \right) \right]$$

$$\frac{\rho_1}{2} \left[ -m_0 \left( \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \tau_0 \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) + \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right]$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) \leq & - \left[ \beta N - cN_1 - cN_3 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) - cN_4 \right] \int_0^1 q^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_1}{2} - \varepsilon_3 N_2 - |\mu|N \right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_1 m_0 \tau_0}{2} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_2}{2} N_1 + \rho_2 - \varepsilon_4 N_3 - cN_2 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) - cN_4 \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 & - \left[ \frac{b}{2} N_2 - 2\varepsilon_2 N_1 - c \left( 1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon_1} \right) - \frac{c\mu^2}{\varepsilon_5} N_4 \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_3}{2} N_3 - c - cN_1 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - cN_2 - \frac{c\mu^2}{\varepsilon_5} N_4 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\tau}{2} N_4 - \varepsilon N_1 - c \left( 1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon_1} \right) \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_1 m_0}{2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_5 N_4 - \frac{\mu^2}{b} N_2 \right] \int_0^1 z^2(x, \rho, t) dx.
 \end{aligned}$$

Commençons par choisir les  $\varepsilon_i$   $i = 1, 5$  comme suit :

$$\varepsilon_1 = \frac{m_0 \rho_1}{4} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{\tau N_4}{4N_1} \quad , \quad \varepsilon_3 = \frac{\rho_1}{4N_2} \quad , \quad \varepsilon_4 = \frac{\rho_2}{N_3} \quad , \quad \varepsilon_5 = \frac{\rho_1 m_0}{8N_4}$$

En remplaçant, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) \leq & - [\beta N - cN_1 - cN_3(1 + N_3) - cN_4] \int_0^1 q^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_2}{2} N_1 - cN_2(1 + N_2) - cN_4 \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 & - \left[ \frac{b}{2} N_2 - c(1 + \mu^2) - cN_4(1 + \mu^2 N_4) \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_3}{2} N_3 - c - cN_1 \left( 1 + \frac{N_1}{N_4} \right) - cN_2 - c\mu^2 N_4^2 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\tau}{4} N_4 - c(1 + \mu^2) \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \left[ \frac{\rho_1}{4} - |\mu|N \right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 & - \left[ \frac{\rho_1 m_0}{8} - \frac{\mu^2}{b} N_2 \right] \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx - \frac{\rho_1 m_0 \tau_0}{2} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx.
 \end{aligned}$$

choisissons  $N_4$  assez grand tel que

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{4} N_4 - c > 0$$

puis nous choisissons  $N_2$  assez grand de sorte que

$$\alpha_2 = \frac{b}{2}N_2 - c - cN_4 > 0$$

après  $N_1$  est choisi assez grand pour avoir,

$$\alpha_3 = \frac{\rho_2}{2}N_1 - cN_2(1 + N_2) - cN_4 > 0$$

après  $N$  est choisi assez grand tel que

$$\alpha_5 = \beta N - cN_1 - cN_3(1 + N_3) - cN_4 > 0$$

Finalement on choisi  $|\mu|$  très petit tel que :

$$\frac{\rho_1}{4} - |\mu|N > 0, \quad \frac{\rho_1 m_0}{8} - \frac{\mu^2}{b}N_2 > 0$$

$$\alpha_2 - c\mu^2(1 + N_4) > 0, \quad \alpha_4 - c\mu^2N_2 > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\frac{\alpha_1}{k} \int_0^1 k(\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{\alpha_2}{b} \int_0^1 b\psi_x^2 dx - \frac{\alpha_3}{\rho_2} \int_0^1 \rho_2\psi_t^2 dx - \frac{\alpha_4}{\rho_3} \int_0^1 \rho_3\theta^2 dx \\ &\quad - \frac{\alpha_5}{\tau} \int_0^1 \tau q^2 dx - \frac{\alpha_6}{\rho_1} \int_0^1 \rho_1\varphi_t^2 dx \\ &\leq -\min\left(\frac{\alpha_1}{k}, \frac{\alpha_2}{b}, \frac{\alpha_3}{\rho_2}, \frac{\alpha_4}{\rho_3}, \frac{\alpha_5}{\tau}, \frac{\alpha_6}{\rho_1}, \frac{2\alpha_7}{|\mu|\tau_0}\right) \\ &\quad \int_0^1 \left[ k(\varphi_x + \psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_3\theta^2 + \tau q^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \frac{|\mu|\tau_0}{2} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho \right] dx \end{aligned}$$

on pose :

$$\min\left(\frac{\alpha_1}{k}, \frac{\alpha_2}{\rho_1}, \frac{\alpha_3}{\rho_2}, \frac{\alpha_4}{\rho_3}, \frac{\alpha_5}{\tau}, \frac{\alpha_6}{\rho_1}, \frac{2\alpha_7}{|\mu|\tau_0}\right) = c_3$$

donc :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c_3 E(t) \quad \forall t > 0$$

A partir de (3.10)

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\frac{c_3}{c_2} \mathcal{L}(t)$$

on pose :  $k_2 = \frac{c_3}{c_2}$

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_2 \mathcal{L}(t)$$

une simple intégration, nous conduit à :

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \exp^{-k_2 t}$$

l'équivalence entre  $\mathcal{L}(t)$  et  $E(t)$ , nous donne

$$E(t) \leq k_1 E(0) e^{-k_2 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

ce qui achève la preuve du lemme.

# Stabilité polynomial

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du problème précédent (2.1) sans retard ( $\mu = 0, \xi \neq 0$ )

## 4.1 Position du problème

Considérons un problème unidimensionnel de Timoshenko avec deuxième son comme suit

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{tx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

sous les conditions de Dirichlet Newman

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(1, t), \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \quad x \in (0, 1) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), & \quad x \in (0, 1) \end{aligned}$$

## 4.2 Energie du système

### Lemme 4.2.1

L'énergie du système (3.1) est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_3 \theta^2 + b \psi_x^2 + k (\varphi_x + \psi)^2 + \tau q^2] dx$$

de plus,

$$E'(t) = -\beta \int_0^1 q^2 dx$$

### Démonstration

Multiplions (3.1)<sub>1</sub>, (3.1)<sub>2</sub>, (3.1)<sub>3</sub>, (3.1)<sub>4</sub> par  $\varphi_t, \psi_t, \theta, q$  respectivement, et intégrons par partie par rapport à  $x$  sur  $(0, 1)$ , en prenant en compte (les conditions aux bords), on obtient :

$$\bullet \quad \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - k \int_0^1 [(\varphi_x + \psi)_x] \varphi_t dx = 0$$

$$\rho_1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + k \int_0^1 \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi) dx = 0 \quad (3.3)$$

$$\bullet \quad \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0$$

$$\rho_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_x \psi_{tx} dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0$$

$$\rho_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0 \quad (3.4)$$

$$\bullet \quad \rho_3 \int_0^1 \theta_t \theta dx + \int_0^1 q_x \theta dx + \delta \int_0^1 \psi_{tx} \theta dx = 0$$

$$\rho_3 \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 q_x \theta dx - \delta \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0 \quad (3.5)$$

$$\bullet \quad \tau \int_0^1 q_t q dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx = 0$$

$$\tau \frac{1}{2} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx = 0 \quad (3.6)$$

en additionnant les égalités ((3.3),(3.4),(3.5),(3.6)) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \rho_1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + k \int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x + \psi) dx \\ & + \rho_2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx + \delta \int_0^1 \theta_x \psi_t dx \\ & + \rho_3 \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 q_x \theta dx - \delta \int_0^1 \psi_t \theta_x dx \\ & + \tau \frac{1}{2} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 \rho_1 \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \tau \int_0^1 q^2 dx \right\} \\ & = -\beta \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

**Énergie seconde :** pour avoir l'équation de l'énergie seconde du système (3.1), on doit dériver ce dernier par rapport à t, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{ttt} - \kappa (\varphi_{tx} + \psi_t)_x = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_2 \psi_{ttt} - b \psi_{txx} + \kappa (\varphi_{tx} + \psi_t) + \delta \theta_{tx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \rho_3 \theta_{tt} + q_{tx} + \delta \psi_{txx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ \tau q_{tt} + \beta q_t + \theta_{tx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \end{array} \right. \quad (p)$$

En adaptant le même procédé calculer E(t), on :

**Lemme 4.2.2**

De plus, pour toute solution forte, on définit la fonctionnelle d'énergie du second ordre :

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 \varphi_{tt}^2 + \rho_2 \psi_{tt}^2 + \rho_3 \theta_t^2 + b \psi_{tx}^2 + k (\varphi_{tx} + \psi_t)^2 + \tau q_t^2] dx.$$

de plus,

$$E_2'(t) = -\beta \int_0^1 q_t^2 dx$$

**Démonstration**

multiplions par  $\varphi_{tt}$ , et intégrons par partie par rapport à  $x$  sur  $[0,1]$ , en prenant en compte (les conditions aux limites), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^1 \varphi_{ttt} \varphi_{tt} dx - k \int_0^1 [(\varphi_{ttx} + \psi_t)_x] \varphi_{tt} dx &= 0 \\ \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx - k [(\varphi_{tx} + \psi_t) \varphi_{tt}]_{x=0}^{x=1} + k \int_0^1 (\varphi_{tx} + \psi_t) \varphi_{ttx} dx &= 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_{tx} + \psi_t) \varphi_{ttx} dx = 0 \quad (3.7)$$

Multiplions l'équation par  $\psi_{tt}$ , et intégrons par partie par rapport à  $x$  en prenant en compte les conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^1 \psi_{ttt} \psi_{tt} dx + b \int_0^1 \psi_{txx} \psi_{tt} dx + k \int_0^1 (\varphi_{tx} + \psi_t) \psi_{tt} dx + \delta \int_0^1 \theta_{tx} \psi_{tt} dx &= 0 \\ \rho_2 \int_0^1 \psi_{ttt} \psi_{tt} dx - b [\psi_{tx} \psi_{ttx}]_{x=0}^{x=1} + b \int_0^1 \psi_{tx} \psi_{ttx} dx + k \int_0^1 (\varphi_{tx} + \psi_t) \psi_{tt} dx + \delta \int_0^1 \theta_{tx} \psi_{tt} dx &= 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_{tt}^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x \psi_{ttx} dx + k \int_0^1 (\varphi_{tx} + \psi_t) \psi_{tt} dx - \delta \int_0^1 \theta_t \psi_{ttx} dx = 0 \quad (3.8)$$

Multiplions l'équation par  $\theta_t$ , et intégrons par partie par rapport à  $x$  en prenant en compte les conditions aux limites, on obtient :

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_{tt} \theta_t dx + \int_0^1 q_{tx} \theta_t dx + \delta \int_0^1 \psi_{ttx} \theta_t dx = 0$$

alors

$$\frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta_t^2 dx - \int_0^1 q_t \theta_{tx} dx + \delta \int_0^1 \psi_{ttx} \theta_t dx = 0 \quad (3.9)$$

multiplions l'équation par  $q_t$  et intégrons par partie par rapport à  $x$  en prenant en compte les conditions aux limites, on obtient :

$$\tau \int_0^1 q_{tt} q_t dx + \beta \int_0^1 q_t q_t dx + \int_0^1 q_t \theta_{tx} dx = 0$$

alors :

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q_t^2 dx + \beta \int_0^1 q_t^2 dx + \int_0^1 q_t \theta_{tx} dx = 0 \quad (3.10)$$

En rassemblant les équations ((3.7),(3.8),(3.9),(3.10))

on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left[ \rho_1 \varphi_{tt}^2 + \rho_2 \psi_{tt}^2 dx + k(\varphi_{tx} + \psi_t)^2 + b \int_0^1 \psi_{tx}^2 + \rho_3 \theta_t^2 dx + \tau q_t^2 \right] = -\beta \int_0^1 q_t^2 dx$$

La méthode utilisé pour prouver la stabilité polynomiale est similaire à celle vu en chapitre 3 pour la stabilité exponentielle et qui consiste à construire une fonctionnelle de Lyapounov. Pour en trouver une, les lemmes suivants nous seront utiles.

**Lemme 4.2.3**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  la solution du problème (3.1), la fonctionnelle  $I_1$  définie par :

$$I_1(t) = - \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi] dx$$

$$I_1'(t) \leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx$$

**Démonstration**

Dérivons  $I_1(t)$ .

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= - \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi]_t dx \\ &= -\rho_1 \left[ \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi dx + \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right] - \rho_2 \left[ \int_0^1 \psi_{tt} \psi dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx \right] \\ &= - \int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} \varphi dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \int_0^1 \rho_2 \psi_{tt} \psi dx - \int_0^1 \psi_t^2 dx \end{aligned}$$

de on a (3.1) :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= - \int_0^1 \varphi [k(\varphi_x + \psi)_x] dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \int_0^1 \psi [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x] dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

$$I_1'(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \delta \int_0^1 \psi_x \theta dx$$

par application de l'inégalité de Young :

$$\int_0^1 \delta \psi_x \theta \, dx \leq \frac{\delta}{2} \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^1 \theta^2 \, dx$$

Par conséquent :

$$I_1'(t) \leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^1 \theta^2 \, dx$$

**Lemme 4.2.4**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  la solution du problème (3.1), la fonctionnelle  $F_2$  définie par :

$$I_2(t) = -\frac{\rho_2 \rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \right) \, dx$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_2 > 0$

$$I_2'(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 \, dx + c \int_0^1 q^2 \, dx$$

**Démonstration**

Dérivons  $I_2(t)$

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= -\frac{\rho_2 \rho_3}{\delta} \int_0^1 \left[ \left( \theta \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \right) \right]_t \, dx \\ &= -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \rho_3 \theta_t \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \, dx - \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \int_0^x \rho_2 \psi_{tt}(y, t) \, dy \, dx \end{aligned}$$

de on a (3.1) :

$$\begin{cases} \rho_3 \theta_t = -q_x - \delta \psi_{tx} \\ \rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta \theta_x \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \left( -q_x \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \right) \, dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{tx} \left( \int_0^x \psi_t(y, t) \, dy \right) \, dx - \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x b \psi_{xx} \, dy \right) \, dx \\ &\quad - \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x k(\varphi_x + \psi) \, dy \right) \, dx + \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x \theta_x \, dy \right) \, dx \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
 -\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^y \psi_{yy} dy \right) dx &= -\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \psi_x \theta dx + \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta [\psi_x(x, t) - \psi_x(0, t)] = -\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \psi_x \theta dx \\
 -\rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^y \theta_y dy \right) dx &= -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx
 \end{aligned}$$

puis, par intégration par partie et en prenant en compte  $\left( \int_0^1 \bar{\psi}(x, t) = 0 \right), \left( \int_0^1 \bar{q}(x, t) = 0 \right)$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q_x \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx &= -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\rho_2}{\delta} \left[ q \int_0^x \psi_t \right]_{=0}^{=1} = -\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 \psi_t q dx \\
 \rho_2 \int_0^1 \psi_{tx} \left( \int_0^x \psi_t(y, t) dy \right) dx &= -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \left[ \psi_t \int_0^x \psi_t \right]_{=0}^{=1} = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx
 \end{aligned}$$

donc :

$$I_2'(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx - \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \frac{\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \left( \int_0^x k(\varphi_y + \psi) dy \right) dx. \quad (3.13)$$

Appliquons l'inégalité de Young sur les termes  $\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx$ ,  $\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx$  :

$$\bullet \frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\rho_2 \varepsilon}{2\delta} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2\delta \varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

on veut avoir :

$$\frac{\rho_2}{2\delta \varepsilon} = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\delta}$$

alors :

$$\frac{\rho_2}{\delta} \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\rho_2}{2\delta^2} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$\bullet \frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx \leq \frac{b\rho_3 \varepsilon}{2\delta} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b\rho_3}{2\varepsilon \delta} \int_0^1 \psi_x^2 dx$$

on veut avoir :

$$\frac{b\rho_3}{2\delta \varepsilon} = 2\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{b\rho_3}{4\delta \varepsilon_2}$$

alors :

$$\frac{b\rho_3}{\delta} \int_0^1 \theta \psi_x dx \leq \frac{b^2 \rho_3^2}{4\delta \varepsilon_2} \int_0^1 \theta^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx$$

par conséquent :

$$I_2'(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx$$

**Lemme 4.2.5**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  la solution du problème (3.1), la fonctionnelle  $I_3$  définie par :

$$I_3(t) = -\rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left( \int_0^x \psi(y, t) dy \right) dx$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_3 > 0$

$$I_3'(t) \leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx$$

**Démonstration**

Voir Démonstration du lemme(2.2.3) (c'est la même fonctionnelle).

**Lemme 4.2.6**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  la solution du problème (p), la fonctionnelle  $I_4$  définie par :

$$I_4(t) = \tau \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \int_0^x q(y, t) dy \right) dx$$

vérifie pour tout  $\varepsilon_4 > 0$

$$I_4'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx$$

**Démonstration**

Voir Démonstration du lemme(2.2.4) (c'est la même fonctionnelle).

**Lemme 4.2.7**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  et supposons que  $\xi = 0$ , la fonctionnelle  $(I_5)$  définie par :

$$I_5(t) = \frac{\tau\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\tau\rho_1}{\kappa^2} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx - \frac{b\tau\rho_3}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 \theta \varphi_t dx$$

$$+ \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx$$

satisfait

$$I_5'(t) \leq -\frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left( \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 q_t^2 dx \right)$$

**Démonstration**

Récupérons le calcul de  $F_5'(t)$  du chapitre 2 précédent en posant  $\mu = 0$ , on obtient

$$I_5'(t) = -\tau \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\tau\rho_2}{\kappa} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q \psi_t dx -$$

$$\frac{b\beta}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx + \frac{b\rho_3}{\delta\rho_1} \left[ \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} \right) \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3} \right] \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi) dx.$$

grâce à l'inégalité de Young et en posant :

$$\frac{b\tau}{\delta\kappa} \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) = A, \quad \frac{\mu b\tau}{\kappa^2} = B, \quad \frac{b\rho_3}{\delta\rho_1} \left[ \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} \right) \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3} \right] = C,$$

on obtient :

$$A \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\tau^2 A^2}{2\beta^2\beta} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$A \int_0^1 q (\varphi_x + \psi) dx \leq \frac{A^2}{\tau} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau}{4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx$$

$$c \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi) dx \leq \frac{c^2}{\tau} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{\tau}{4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx$$

On remplace les trois inégalités précédentes dans  $F_5'$  et en se servant de la formule suivant :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq c \left( \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 q_t^2 dx \right)$$

on obtient ::

$$F_5'(t) \leq -\frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left( \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 q_t^2 dx \right)$$

**Théorème 4.2.1**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  la solution du problème(3.1)

si :

$$\xi = \left[ \left( \tau - \frac{\rho_1}{\kappa\rho_3} \right) \left( \frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{b\kappa\rho_3} \right] \neq 0$$

alors l'énergie du système vérifie

$$E_1(t) \leq \frac{\lambda_0}{t}$$

**Démonstration**

Pour démontrer ce théorème , on a besoin de définir une fonction de Lyapounov à partir des  $I_i, i = 1.5$  comme suit

$$\mathcal{L}(t) = N(E_1(t) + E_2(t)) + I_1(t) + N_1I_2(t) + N_2I_3(t) + N_3I_4(t) + N_4I_5$$

En dérivant  $\mathcal{L}(t)$  et en utilisant  $I'_1, I'_2, I'_3, I'_4, I'_5$  on obtient :

$$\mathcal{L}'(t) = N(E'_1(t) + E'_2(t)) + I'_1(t) + N_1I'_2(t) + N_2I'_3(t) + N_3I'_4(t) + N_4I'_5(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -N(\beta \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q_t^2 dx) \\ &\quad - \left[ \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - c \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - c \int_0^1 \psi_x^2 dx - c \int_0^1 \theta^2 dx \right] \\ &\quad - N_1 \left[ \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx - 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx - c \int_0^1 q^2 dx \right] \\ &\quad - N_2 \left[ \frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx - \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx - c \int_0^1 \theta^2 dx \right] \\ &\quad - N_3 \left[ -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx - \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx - c \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx \right] \\ &\quad - N_4 \left[ \frac{\tau}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - c \left( \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 q^2 dx - \int_0^1 q_t^2 dx \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq N \left[ -\beta N - cN_1 - cN_3 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) - cN_4 \right] \int_0^1 q^2 dx - [\beta N - cN_4] \int_0^1 q_t^2 dx \\
 &\quad - \left[ \frac{\rho_2}{2} N_1 + \rho_2 - \varepsilon_4 N_3 - cN_2 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) - cN_4 \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad - [\rho_1 - \varepsilon_3 N_2] \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \left[ \frac{b}{2} N_2 - 2\varepsilon_2 N_1 - c \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad - \left[ \frac{\rho_3}{2} - c - cN_1 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - cN_2 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
 &\quad - \left[ \frac{\tau}{2} N_4 - \varepsilon_2 N_1 - c \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Commençons par choisir les  $\varepsilon_i$   $i = 1, 5$  comme suit :

$$\varepsilon_3 = \frac{\rho_1}{4N_2} \quad , \quad \varepsilon_4 = \frac{\rho_2}{N_3} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{\tau N_4}{N_1}.$$

alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq N [-\beta N - cN_1 - cN_3 (1 + N_3) - cN_4] \int_0^1 q^2 dx - [\beta N - cN_4] \int_0^1 q_t^2 dx \\
 &\quad - \left[ \frac{\rho_2}{2} N_1 + \rho_2 - cN_2 (1 + N_2) - cN_4 \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad - \frac{3\rho_1}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \left[ \frac{b}{2} N_2 - \frac{\tau N_4}{2} - c \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad - \left[ \frac{\rho_3}{2} - c - cN_1 \left( 1 + \frac{N_1}{N_4} \right) - cN_2 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
 &\quad - \left[ \frac{\tau}{4} N_4 - c \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx
 \end{aligned}$$

En plus du même choix de  $N$  et  $N_i (i = 1 - 5)$  que dans la preuve du théorème 3.1, nous choisissons en outre  $N$  assez grand pour que

$$\beta N - cN_4 > 0$$

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\lambda_1 E(t)$$

on intégrant sur  $(0, t)$ ,

$$\int_0^t \mathcal{L}'(s) ds \leq -\lambda_1 \int_0^t E(s) ds$$

alors :

$$L(t) - L(0) \leq -\lambda_1 \int_0^t E(s) ds$$

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{1}{\lambda_1}[\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t)]$$

comme  $\mathcal{L}(t) > 0$ , alors

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{1}{\lambda_1}[\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t)] \leq \mathcal{L}(0)$$

il est facile de voir que  $\mathcal{L}(t) = E_1(t) + E_2(t)$

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{1}{\lambda_1}[E_1(0) - E_2(0)]$$

d'autre part :

$$(tE(t))_t = E(t) + tE'(t)$$

notons que  $E'(t) \leq 0$ , donc :

$$(tE(t))_t \leq E(t)$$

intégrons sur  $(0, t)$

$$\int_0^t (sE(s))_s ds \leq \int_0^t E(s)ds$$

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s)ds \leq \frac{1}{\lambda_1} \mathcal{L}(0)$$

$$tE(t) \leq \frac{[E_1(0) - E_2(0)]}{\lambda_1}$$

on pose :  $\frac{[E_1(0) - E_2(0)]}{\lambda_1} = \lambda_0$

$$E(t) \leq \frac{\lambda_0}{t}$$

. Ce qui achève la preuve.

# Conclusion

---

Le problème traité dans ce mémoire a été étudié dans deux cas, premièrement nous avons étudié le cas où le retard est introduit dans un système de Timoshenko , puis nous avons ignoré ce terme de retard dans le deuxième cas, le point important dans cette étude est l'élimination de l'amortissement  $\varphi_t$ . Les décroissances exponentielle et polynomiale dépendent d'un nombre de stabilité  $\xi$  ont été prouvé. Le problème où  $\xi = 0$  avec la présence du retard reste un problème ouvert très intéressant.

---

# Bibliographie

---

- [1] Abdallah, C., Dorato, P., Benitez-Read, J., and Byrne, R. : Delayed positive feedback can stabilize oscillatory system. In : Proceedings of the ACC, pp. 31063107. San Francisco (1993)
- [2] Ait Benhassi, E.M., Ammari, K., Boulite, S., Maniar, L. : Feedback stabilization of a class of evolution equations with delay. *J. Evol. Equ.* 9, 103121 (2009)
- [3] Apalara, T.A., Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I. : Energy decay in thermoelastic type III with viscoelastic damping and delay. *Electron. J. Differ. Equ.* 2012(128), 115 (2012)
- [4] Datko, R., Lagnese, J., Polis, M.P. : An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM J. Control Optim.* 24, 152156 (1986)
- [5] Fernández Sare, H.D., Racke, R. : On the stability of damped Timoshenko systems : Cattaneo versus Fourier law. *Arch. Rational Mech. Anal.* 194(1), 221251 (2009)
- [6] Fridman, E., Nicaise, S., Valein, J. : Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with time-dependent delay. *SIAM J. Control Optim.* 48(8), 50285052 (2010)
- [7] Guesmia, A., Messaoudi, S.A. : On the control of a viscoelastic damped Timoshenko-type system. *Appl. Math. Comput.* 206(2), 589597 (2008)
- [8] Guesmia, A., Messaoudi, S.A. : General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping. *Math. Method Appl. Sci.* 32(16), 21022122 (2009)
- [9] Guesmia, A. : Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay. *IMA J. Math. Control Inf.* dns039v1-dns039, (2013)
- [10] Kim, J.U., Renardy, Y. : Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM J. Control Optim.* 25(6), 14171429 (1987)
- [11] Kirane, M., Said-Houari, B. : Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. *Z. Angew. Math. Phys.* 62, 10651082 (2011)

- [12] Kirane, M., Said-Houari, B., Anwar, M.-N. : Stability result for the Timoshenko system with a time- varying delay term in the internal feedbacks. *Commun. Pure Appl. Anal.* 10(2), 667686 (2011)
- [13] Komornik, V. : *Exact Controllability and Stabilization : The Multiplier Method.* Masson-John Wiley, Paris (1994)
- [14] Komornik, V., Zuazua, E. : A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *J. Math. Pures Appl.* 69, 3554 (1990)
- [15] Lasiecka, I. : Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary. *J. Differ. Equ.* 79, 340381 (1989)
- [16] Lasiecka, I. : Global uniform decay rates for the solution to the wave equation with nonlinear boundary conditions. *Appl. Anal.* 47, 191212 (1992)
- [17] Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I. : On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams. *Nonl. Differ. Eqs. Appl.* 15, 655671 (2008)
- [18] Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I. : On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation. *Math. Method Appl. Sci.* 32(4), 454469 (2009)
- [19] Messaoudi, S.A., Pokojovy, M., Said-Houari, B. : Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound-global existence and exponential stability. *Math. Method Appl. Sci.* 32(5), 505534 (2009)
- [20] Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I. : A stability result in a memory-type Timoshenko system. *Dyn. Sys. Appl.* 18(3), 457468 (2009)
- [21] Messaoudi, S.A., Said-Houari, B. : Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history. *J. Math. Anal. Appl.* 360(2), 459475 (2009)
- [22] Mustafa, M.I. : Uniform stability for thermoelastic systems with boundary time-varying delay. *J. Math. Anal. Appl.* 383, 490498 (2011)
- [23] Muñoz Rivera, J.E., Racke, R. : Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability. *J. Math. Anal. Appl.* 276(1), 248278 (2002)
- [24] Muñoz Rivera, J.E., Racke, R. : Timoshenko systems with indefinite damping. *J. Math. Anal. Appl.* 341(2), 10681083 (2008)
- [25] Muñoz Rivera, J.E., Fernández Sare, H.D. : Stability of Timoshenko systems with past history. *J. Math. Anal. Appl.* 339(1), 482502 (2008)
- [26] Nicaise, S., Pignotti, C. : Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM J. Control Optim.* 45, 15611585 (2006)

- [27] Nicaise, S., Pignotti, C. : Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Diff. Int. Eqs.* 21(910), 935958 (2008)
- [28] Nicaise, S., Valein, J., Fridman, E. : Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. 2*(3), 559581 (2009)
- [29] Nicaise, S., Pignotti, C. : Interior feedback stabilization of wave equations with time dependent delay. *Electron. J. Differ. Eqs.* 2011(41), 120 (2011)
- [30] Pazy, A. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, New York (1983)
- [31] Pignotti, C. : A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay. *Syst. Control Lett.* 61, 9297 (2012)
- [32] Said-Houari, B., Laskri, Y. : A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback. *Appl. Math. Comput.* 217(6), 28572869 (2010)
- [33] Said-Houari, B., Rahali, R. : A stability result for a Timoshenko system with past history and a delay term in the internal feedback. *Dyn. Sys. Appl.* 20, 327354 (2011)
- [34] Said-Houari, B., Soufyane, A. : Stability result of the Timoshenko system with delay and boundary feedback. *IMA J. Math. Control Inf.* 29(3), 383397 (2012)
- [35] Santos, M.L., Almeida Júnior, D.S., Muñoz Rivera, J.E. : The stability number of the Timoshenko system with second sound. *J. Diff. Eqs.* 253, 27152733 (2012)
- [36] Soufyane, A., Whebe, A. : Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping. *Electron. J. Differ. Eqs.* 2003(29), 114 (2003)
- [37] Suh, I.H., Bien, Z. : Use of time delay action in the controller design. *IEEE Trans. Automat. Control* 25, 600603 (1980)
- [38] Timoshenko, S. P. : On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philos. Mag. Ser.* 6(41), 245, 744746 (1921)
- [39] Xu, G.Q., Yung, S.P., Li, L.K. : Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control. *ESAIM COCV* 12, 770785 (2006)
- [40] Zhang, X., Zuazua, E. : Decay of solutions of the system of thermoelasticity of type III. *Commun. Contemp. Math.* 5, 2583 (2003)
- [41] Zuazua, E. : Uniform Stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback *SIAM. J. Control Optim.* 28(2), 466477 (1990)