

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم  
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Problèmes Mal Posés Et Méthodes De Régularisation

Option : Analyse fonctionnel appliquée

Par :

BOUGUERN LOUBNA

Encadré par : Settara Loubna

M.C.B U.SKIKDA

Devant le jury :

Président (e) : Mouy Mounia

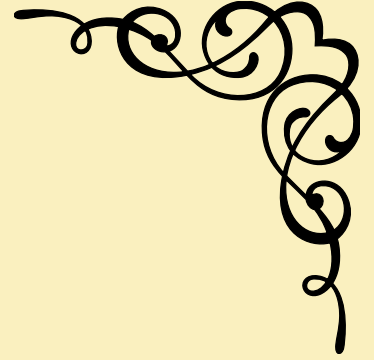
M.A.A U.SKIKDA

Examineur: Toumi Habiba


M.A.A U.SKIKDA

Année : 2021/2022





# Dédicaces

 Je dédie ce travail:

A

Mes Parents

Pour tous leurs sacrifices, leurs soutiens,  
Leurs encouragements et leurs amours qui ont été la  
raison de ma réussite.  
Que dieu leur présente une bonne santé et une longue  
vie.

A

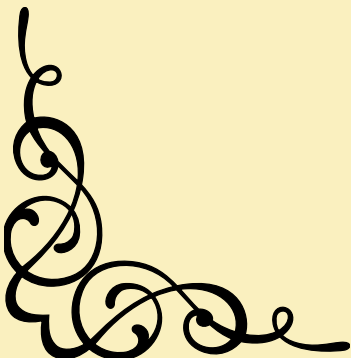
Mes frères,

Pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et  
les sources de mon stress,  
Avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leur  
vie.

A

Tous ceux que j'aime et qu'ils m'aiment.  
Qu'ils trouvent dans ce travail l'expression de mes  
sentiments les plus affectueux.

★ ★ ★



# Remerciement

J'aimerais en premier lieu remercier mon Dieu Allah qui m'a donné la volonté et la force et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce rapport dans le  
profonde gratitude à mon encadrant **Settara Loubna** de m'avoir  
pro  
d'encadrement qu'il m'a accordée  
m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens également à remercier le  
de relire mon manuscrit et d'y consacrer une partie de leur temps.

Je remercie également me  
transmettre leurs acquis et leurs ex

---

# Résumé

Dans le présent travail on étudie la stabilité des problèmes rétrogrades mal posés des équations différentielles du premier ordre. A cette effet nous proposons quelques méthodes de régularisation, les résultats de convergence et les estimations d'erreurs sont valable. Finalement, une de méthodes est appliquée pour résoudre un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel.

---

**Mots clés :** problème de Cauchy mal posé, méthode de quasi-valeurs aux limites, semigroupes, régularisation.

---

# Abstract

In this work we study the stabilization of ill posed backward problem for a first order differential equation. For this purpose, we propose some regularization methods; we establish convergence results and error estimates. Finally, we apply one of the methods to the solution of an ill posed problem for the Bessel operator.

---

**Key words** : ill-posed Cauchy problem, quasi-boundary value method, semi-group, regularization.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappel sur les espaces de Hilbert et les opérateurs</b>	<b>6</b>
1.1 Espaces de Hilbert . . . . .	7
1.1.1 Définitions et exemples . . . . .	7
1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert . . . . .	9
1.1.3 Bases hilbertiennes . . . . .	11
1.2 Les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert . . . . .	11
1.2.1 Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire . . . . .	12
1.2.2 Opérateur auto-adjoints . . . . .	13
1.2.3 Spectre d'un opérateur linéaire . . . . .	13
1.3 Opérateurs intégraux et équations intégrales . . . . .	14
1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires . . . . .	16
1.4.1 les semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés . . . . .	16
1.4.2 les semi groupes fortement continus d'opérateurs li- néaires bornés . . . . .	17
1.4.3 Théorème de Hille Yosida . . . . .	18
<b>2 Modélisation et méthodes de résolution de problèmes mal posés</b>	<b>20</b>
2.1 Modélisation des problèmes inverses . . . . .	21
2.1.1 problèmes bien et mal posés . . . . .	21
2.1.2 Les problèmes inverses . . . . .	22

2.2	Exemples illustratifs . . . . .	23
2.3	Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés	32
2.3.1	Méthode de Tikhonov . . . . .	32
2.3.2	Décomposition en valeurs singulières (Méthode S.V.D)	36
2.3.3	La méthode de quasi-réversibilité (Q.B.V) . . . . .	41
2.3.4	Méthode des quasi-valeurs aux limites (Q.B.V.M) . .	43
<b>3</b>	<b>Régularisation d'un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel</b>	<b>50</b>
3.1	Position du problème . . . . .	51
3.2	Régularisation du problème . . . . .	54
	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

**B**eaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles auxquelles sont jointes des conditions aux limites s'exprimant sur la frontière du domaine où le phénomène évolue, ainsi que des conditions initiales, finales ou autres.

Généralement, la modélisation d'un problème est suivie d'une analyse théorique et d'une implémentation numérique.

Certains de ces problèmes, qui apparaissent dans beaucoup de domaines pratiques des sciences et des techniques; comme la médecine (échographie, scanners, rayons X, ...), l'énergie (calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits) et autres, ne peuvent être traités directement.

Pour les résoudre on est contraint de passer par une étape précédant l'analyse théorique et qui est régularisation (ces problèmes sont dits mal posés).

---

## ■ PROBLÈMES BIEN ET MAL-POSÉS

**E**n étudiant la résolution des équations aux dérivées partielles, le mathématicien Jacques Hadamard (1902) a exprimé le concept du problème bien-posé, par les trois conditions :

1. La solution existe,
2. La solution est unique,
3. La dépendance continue de la solution par rapport aux données du pro-

blème.

Ces conditions reflètent les contraintes pour qu'un modèle en physique mathématique ait un sens et conduise à une résolution raisonnable du problème qui représente.

Un problème mal posé est donc un problème pour lequel au moins des trois conditions n'est pas vérifiées i-e :

- La non existence de la solution dans un certain domaine nous conduit à utiliser une technique de relaxation qui consiste à transformer des contraintes fortes en des contraintes moins fortes afin d'élargir le domaine d'existence pour avoir une solution.
- Certains problèmes peuvent avoir plusieurs solutions, il est donc nécessaire de disposer d'informations supplémentaires (ou conditions) pour discriminer entre elles et choisir une solution convenable.
- Le choix des espaces de départ et d'arrivée est bien sur très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale, en effet, s'il ya un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Parmi les situations qui se traduisent par un problème mal posé, nous pouvons citer celle de déterminer les états passés d'un système physique décrit par une équation différentielle à partir de son état présent, ou bien celui de déterminer les paramètres d'un système à partir de données expérimentales. dans les deux cas nous parlons de problèmes inverses voir [31].

---

## ■ PROBLÈMES INVERSESES

D'après Jd.B.Keller [20], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre ; si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est qu'un **problèmes inverse** consiste à déterminer des **causes** d'un phénomène en fonction de l'observation de ses **effets**.

Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé **problème direct** consistant à chercher les **effets** à partir des **causes** qui sont observables. Par exemple,

localiser l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse. Les problèmes inverses sont multiples et leurs applications

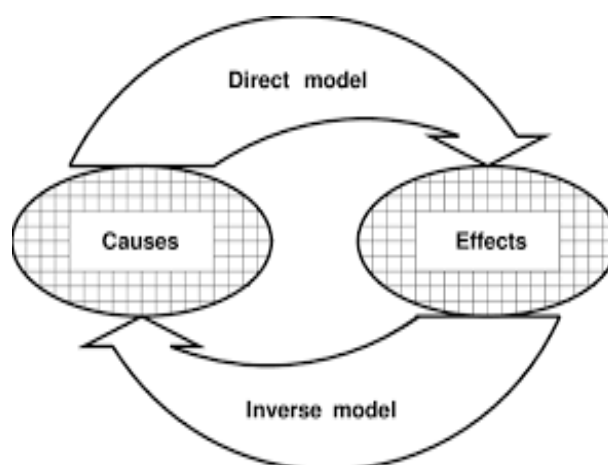


Figure 1 – Direct and inverse model

se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, la détection des fissures, le contrôle non destructif, la mécanique des structures,...

D'après la définition d'un **problème inverse**, on peut voir que ces problèmes risquent de poser des difficultés particulières. En effet, il est raisonnable d'exiger qu'un **problème direct** soit **bien posé**. Par contre, il est facile d'imaginer que les mêmes **effets** puissent provenir des **causes** différentes. Ceci illustre une difficulté de l'étude des **problèmes inverses** : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour les différencier.

---

## ■ RÉGULARISATION

En mathématiques, la **régularisation** est une procédure qui consiste à modifier un problème **mal posé** par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés (bien posé) rendant son étude théorique et numérique plus aisée.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de **régularisation** ont

été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy **mal posé**. Parmi elles, on cite :

• La méthode de **régularisation** de Tikhonov [2] est la méthode de **régularisation** la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original **mal posé** en un problème de minimisation.

• La méthode de Quasi-réversibilité, introduite par Lattes et Lions (1969) [39], qui consiste à transformer le problème de Cauchy **mal posé** d'ordre 2 en un problème différentiel **bien posé** d'ordre plus élevé (d'ordre 4), en perturbant l'opérateur-coefficient de l'équation. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre le problème de Cauchy, notamment : Kilbanov et Santosa [33] et plus récemment Bourgeois [28]

• La méthode de **régularisation** par les conditions non locales "**Quasi-Boundary Value Method**" introduite par Showalter [37], L'idée de cette méthode est de remplacer le problème **mal posé** par un problème **bien posé**, dans lequel on perturbe la condition finale en la remplaçant par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre  $\alpha$ . Elle a été utilisée par plusieurs auteurs, comme D.N.Hào [5, 6].

• La méthode de décomposition en valeurs singulières (S.V.D), est considéré comme étant un outil puissant, grâce aux multiples propriétés qu'elle offre. Les différentes contributions de mathématiciens célèbres ont permis l'élaboration de cet outil. Camille Jordan(1838-1921), et James Joseph Sylvester (1814-1897), pour parvenir à cette décomposition ont travaillé à partir des formes bilinéaires. Tandis que Erland Schmidt (1876-1959) et Hermann Weyl (1885-1955) ont utilisé une approche dérivées équations intégrales.

L'étude intensive des problèmes inverses est dictée par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique.

Toute problématique directe génère une variété de problèmes inverses, qui donne naissance à des questions théoriques et des défis numériques.

## Contenu du mémoire

Ce mémoire s'intéresse aux problèmes inverses mal posés linéaires. Il est subdivisé comme suit :

- ☞ Dans le premier chapitre, on rappelle certaines notions préliminaires fondamentales et les ingrédients nécessaires du calcul différentiel pour l'étude du problème proposé, et pour éviter des renvois permanents à d'autres ouvrages.
- ☞ Au chapitre deux, on a exposé quelques exemples de problèmes mal posés et, des méthodes de régularisation des problèmes mal posés illustrées par des exemples.
- ☞ Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème mal posé pour l'opérateur de Bessel, puis le régularisé par la méthode des valeurs quasi-limites.

# CHAPITRE 1

## RAPPEL SUR LES ESPACES DE HILBERT ET LES OPÉRATEURS

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notation et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, la théorie des opérateurs. Dans tout ce qui suit, nous désignons par  $H_i$  les espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , muni de la norme  $|\cdot|_{H_i}$  et le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H_i}$ , ( $i = 1, 2$ ).

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Espaces de Hilbert</b>	<b>7</b>
1.1.1	Définitions et exemples	7
1.1.2	Propriétés des espaces de Hilbert	9
1.1.3	Bases hilbertiennes	11
<b>1.2</b>	<b>Les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert</b>	<b>11</b>
1.2.1	Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire	12
1.2.2	Opérateur auto-adjoints	13
1.2.3	Spectre d'un opérateur linéaire	13
<b>1.3</b>	<b>Opérateurs intégraux et équations intégrales</b>	<b>14</b>
<b>1.4</b>	<b>Semi-groupes d'opérateurs linéaires</b>	<b>16</b>
1.4.1	les semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés	16

1.4.2	les semi groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés . . . . .	17
1.4.3	Théorème de Hille Yosida . . . . .	18

## Références

- H.Brezis ; *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson (1993).
- Li.Daniel ; *Cours d'analyse fonctionnelle* ISBN 978-2-7298-83058 ©Ellipses Édition Marketing S.A.,rue Bague 75740 Paris cedex 15(2013).
- Jean-pierre aubin ; *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tome 2, Presses universitaires de france, puF (1987).
- N.I.Akhiezer and I.M.Glazman. *Theory of linear operator in Hilbert space*, translated from the Russian by Merlynd Nestell p. Cm. Originally published : New York : F.Ungar Pub.Co., cl961- cl963.Dover Publications, Inc.New York, (1993).
- P.Lévy-Bruhl ; *Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés*, Dunod (2003).
- W.Hengartner, M.Lambert, C.Reischer. *Introduction à l'analyse fonctionnelle*. Les Presses de l'université du Québec, (1981).

## 1.1 Espaces de Hilbert

### 1.1.1 Définitions et exemples

#### Définition 1.1 (Norme)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Une norme sur  $E$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , possédant les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$  et  $\|x\|_E = 0 \Rightarrow x = 0$ .
2.  $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\|_E = |\alpha| \|x\|_E$ .
3.  $\forall (x, y) \in E^2 : \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ .

**Exemple 1.1**

Dans le cas où  $E$  est de dimension  $n$  (nous l'identifions alors à  $\mathbb{R}^n$ ), les normes suivantes sont les plus utilisées :

$$(i) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$(ii) \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(iii) \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

**Définition 1.2 (Produit scalaire) :**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Un produit scalaire sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , possédant les propriétés suivantes :

$$1. \quad \forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$2. \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$3. \quad \forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle.$$

**Définition 1.3** Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

**Exemple 1.2**

1. Sur  $\mathbb{R}^n$  le produit scalaire euclidien usuel :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.1)$$

2. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace vectoriel des fonctions carrés intégrables sur  $\Omega$  est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \infty \right\},$$

est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  par la formule suivante :

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Définition 1.4 (Espace de Hilbert) :**

On appelle un espace de Hilbert tout espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée.

**Exemple 1.3**

1. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , muni produit scalaire euclidien usuel, est un espace de Hilbert.
2. L'espace  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

est un espace de Hilbert.

### 1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

**Proposition 1.1** pour tout  $x, y \in E$  :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle .$$

**Théorème 1.1 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Pour tout  $x, y \in E$  :

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|.$$

**Définition 1.5**

On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace préhilbertien  $E$  sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

On note  $x \perp y$ .

**Proposition 1.2** D'après la proposition (1.1), on a :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

ce que l'on peut appeler le "Théorème de Pythagore".

**Définition 1.6** L'orthogonal d'une partie  $A \subseteq E$  est l'ensemble :

$$A^\perp = \{y \in E; y \perp x, \forall x \in A\}.$$

On a  $B^\perp \subseteq A^\perp$  si  $A \subseteq B$ .

**Lemme 1.1 (Identité du parallélogramme)**

Pour tout  $u, v \in H$  :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

**Théorème 1.2 (Projection).**

Soit  $C$  un convexe fermé et non vide de  $H$ . Alors, pour tout point  $x \in E$ , il existe un unique point  $x_c \in C$  tel que :

$$\|x - x_c\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

**Corollaire 1.1** Pour tout sous-espace vectoriel fermé  $A$  de  $E$ ,

$$E = A \oplus A^\perp.$$

### 1.1.3 Bases hilbertiennes

**Définition 1.7** On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert  $E$ , toute suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , tel que :

$$\begin{cases} \|e_n\|_E = 1, \forall n, \\ \langle e_n, e_m \rangle = 0, \forall n \neq m. \end{cases}$$

L'espace vectoriel engendré par cette base est dense dans  $E$ . Alors, tout élément  $u$  de  $E$ , s'écrit :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n;$$

et vérifie l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\|u\|_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2,$$

un tel développement est unique, c'est-à-dire si :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n,$$

avec :  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$ , alors :  $u_n = \langle u, e_n \rangle$ .

#### Exemple 1.4

Les deux suites de fonctions suivantes :

$$\left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n\pi) \right)_{n \geq 1}, \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\pi) \right)_{n \geq 1},$$

sont des bases Hilbertiennes de  $L^2(0, 2\pi)$ .

## 1.2 Les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert.

### 1.2.1 Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire

**Définition 1.8** Un opérateur (linéaire, continue)  $A$  d'un espace de Hilbert  $E$  dans un espace de Hilbert  $F$  est une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ , c'est-à-dire qui vérifie :

1.  $\forall u \in E, Au \in F$ ;
2.  $\forall (u, v) \in E \times E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$ ;
3.  $\exists M > 0, \forall u \in E, \|Au\|_F \leq M\|u\|_E$ .

Le plus petit nombre  $M$  qui vérifie le 3<sup>ème</sup> point ci-dessus s'appelle la norme de l'opérateur  $A$  :

$$\|A\| = \sup_{u \in E} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E}.$$

Rappelons les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire :

1. Le noyau de  $A$  est le sous-espace de  $E$  :  $\ker A = \{u \in E, Au = 0\}$ .
2. L'image de  $A$  est le sous-espace de  $F$  :  $\text{Im } A = \{v \in F, \exists u \in E, Au = v\}$ .

**Définition 1.9** On dit que l'opérateur  $A : E \rightarrow F$  est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans  $\mathcal{D}(A)$ , un ensemble borné dans l'espace  $F$ .

**Définition 1.10** Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$ , défini sur  $\mathcal{D}(A) = H$  est continu, s'il est continu en  $0 \in H$ .

**Théorème 1.3** Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$ , tel que  $\mathcal{D}(A) = H$  est borné si et seulement si pour tout  $u \in H$ , on a :

$$\|Au\| \leq c\|u\|.$$

**Théorème 1.4** Soit un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$ , tel que  $\mathcal{D}(A) = H$ .  $A$  est continu si et seulement s'il est borné.

**Théorème 1.5** (de Riesz) Soit  $L$  une forme linéaire continue sur  $E$ . Il existe un unique vecteur  $x_0 \in E$  tel que :

$$L(x) = \langle x_0, x \rangle, \forall x \in E.$$

## 1.2.2 Opérateur auto-adjoints

Soit  $E$  un espace de Hilbert.

**Théorème 1.6** Soit  $A$  un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$ . Il existe un unique opérateur de  $F$  dans  $E$ , noté  $A^*$ , tel que :

$$\forall u \in E, \forall v \in F, \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle .$$

Cet opérateur est appelé l'adjoint de  $A$ . Il vérifié de plus  $(A^*)^* = A$  et  $\|A^*\| = \|A\|$ .

**Proposition 1.3** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires ,  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires :

1. Linéarité  $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ .
2. La composition  $(AB)^* = B^*A^*$ .

Il existe des relations remarquables entre le noyau et l'image d' un opérateur et ceux de son adjoint.

**Proposition 1.4** On a les relations suivantes (ou  $\overline{X}$  indique l'adhérence de l'ensemble  $X$ ) :

1.  $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$ .
2.  $(\ker A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}$ .

**Définition 1.11** Un opérateur dans  $E$  est dit auto-adjoint si et seulement si :

$$\forall \langle u, v \rangle \in E \times E, \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle .$$

**Remarque 1.1** En dimension finie, les opérateurs auto-adjoints sont ceux qui ont matrice symétrique .

## 1.2.3 Spectre d'un opérateur linéaire

Soit  $A$  un opérateur linéaire défini de  $E$  dans  $F$  tel que  $\mathcal{D}(A) = E$ .

**Définition 1.12** On dit que le point  $\lambda$  est un point régulier de  $A$  si l'opérateur  $(A - \lambda I)$  est inversible, i.e :  $\det(A - \lambda I) \neq 0$ .

**Définition 1.13** L'ensemble des points réguliers de l'opérateur  $A$  est appelé ensemble résolvant de  $A$  et noté par  $\rho(A)$  tel que :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} / (A - \lambda I)^{-1}, \text{ existe et borné}\}.$$

1. Si  $\lambda \in \rho(A)$  ; l'opérateur linéaire et borné  $R(A) = (A - \lambda I)^{-1}$  est appelé résolvant de  $A$ .
2. Le spectre  $\sigma(A)$  et le complémentaire de  $\rho(A)$  dans le plan complexe i.e  $\sigma(A) = \mathbb{R} / \rho(A)$ .
3. On dit que  $\lambda$  est valeur propre, et on note  $\lambda \in VP(A)$  si  $\ker(A - \lambda I) \neq 0$ .

**Remarque 1.2** Si  $\dim E < \infty$  alors  $\sigma(A) = VP(A)$ .

**Proposition 1.5** Le spectre  $\sigma(A)$  est un ensemble compact et :

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|].$$

**Proposition 1.6** Si  $A$  un opérateur linéaire et borné, alors :

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}.$$

## 1.3 Opérateurs intégraux et équations intégrales

**Théorème 1.7** Soit  $K$  une fonction de l'espace  $L^2([c, d] \times [a, b])$ . L'opérateur :

$$Au(t) = \int_a^b K(t, s)u(s)ds, \quad t \in [a, b]; \quad (1.2)$$

est bien défini en tant qu'opérateur de  $L^2(a, b)$  dans  $L^2(c, d)$ .

### Preuve

La linéarité est évidente, seule la continuité reste à démontrer.

Bien entendu, nous voulons majorer :

$$\int_c^d |Au(t)|^2 dt = \int_c^d \left( \int_a^b K(t, s)u(s) \right)^2 dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_c^d |Au(t)|^2 dt \leq \int_c^d \left( \int_a^b |K(t, s)|^2 ds \right) \left( \int_a^b |u(s)|^2 ds \right) dt \leq M^2 \int_a^b |u(s)|^2 ds.$$

**Définition 1.14** L'opérateur  $A$  défini au théorème (1.7) s'appelle l'opérateur intégral de noyau  $K$ .

**Exemple 1.5** (Opérateur de Volterra) .

Il s'agit d'opérateurs de la forme :

$$Au(t) = \int_0^t K(t, s)u(s)ds, \text{ pour } t \in [0, 1]; \quad (1.3)$$

avec  $K \in ([0, 1] \times [0, 1])$ .

### Remarque 1.3

Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est -à- dire de la forme :

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^p a_j(t)b_j(s). \quad (1.4)$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

Il est habituel de classer les équations intégrales que l'on peut associer à l'opérateur intégral  $A$  en deux catégories :

**Équations de première espèce** Il s'agit de l'équation :

$$Au = f, \text{ où } f \in L^2(c, d) \text{ est donnée.} \quad (1.5)$$

**Équations du second espèce** Il s'agit de l'équation :

$$u - Au = f, \text{ où } f \in L^2(c, d) \text{ est donnée.} \quad (1.6)$$

## 1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

### 1.4.1 les semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.15** Soit  $E$  un espace de Banach, une famille à paramètre  $T(t), 0 \leq t < \infty$ , d'opérateurs linéaires bornés de  $E$  vers  $E$  est un semi groupe de opérateurs linéaires bornés sur  $E$  si :

1.  $T(0) = I$ .
2.  $T(s + t) = T(s)T(t)$ .

Un semi groupe d'opérateur linéaires bornés,  $T(t)$  est uniformément continue si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0. \quad (1.7)$$

L'opérateur linéaire  $A$  défini par :

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in E : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\},$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt} \text{ pour } x \in \mathcal{D}(A),$$

est le générateur infinitésimal du semi groupe  $T(t)$ ,  $\mathcal{D}(A)$  est le domaine de  $A$ .

**Théorème 1.8** Un opérateur linéaire  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe continu si et seulement si  $A$  est un opérateur linéaire borné.

**Théorème 1.9** Soient  $S(t)$  et  $T(t)$  deux semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés. Si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t}, \quad (1.8)$$

alors  $T(t) = S(t)$ , pour tout  $t \geq 0$ .

### 1.4.2 les semi groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.16** Un semi groupe  $T(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , des opérateurs linéaires bornés sur  $E$  est un semi groupe fortement continu d'opérateur linéaire bornés si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \text{ pour tout } x \in E. \quad (1.9)$$

Un semi groupe fortement continu d'opérateur linéaire borné sur  $E$  sera appelé semi groupe de classe  $C_0$  ou simplement semi groupe  $C_0$ .

**Théorème 1.10** Soit  $T(t)$  un  $C_0$  semi groupe. Il existe des constantes  $\omega \geq 0$  et  $M \geq 1$  tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}; \text{ pour } 0 \leq t < \infty. \quad (1.10)$$

#### Remarque 1.4

1. Si  $\omega = 0$  ( $\|T(t)\| \leq M$ ) alors  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un semi groupe uniformément borné.
2. Si  $\omega = 0$  et  $M = 1$  ( $\|T(t)\| \leq 1$ ) alors  $(T(t))_{t \geq 0}$  est un semi groupe de contraction.

**Corollaire 1.2** Si  $T(t)$  est  $C_0$  semi groupe alors pour tout  $x \in E$ ,  $t \rightarrow T(t)x$  est un fonction continue de  $\mathbb{R}_0^+$  dans  $E$ .

**Théorème 1.11** Soit  $T(t)$  un  $C_0$  semi groupe et soit  $A$  un générateur infinitésimal, alors :

1. Pour  $x \in E$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

2. Pour  $x \in E$ ,  $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$  et

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x.$$

3. Pour  $x \in \mathcal{D}(A)$ ,  $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$  et

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4. Pour  $x \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

**Corollaire 1.3** Si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi groupe  $T(t)$  alors :  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $E$  et  $A$  est un opérateur linéaire fermé.

**Théorème 1.12** Soient  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$  et  $B$  le générateur infinitésimal du  $C_0$  semi groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$ .

Si  $A = B$  alors,  $S(t) = T(t) \quad \forall t \geq 0$ .

### 1.4.3 Théorème de Hille Yosida

Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$  semi groupe sur  $E$  et  $A$  son générateur infinitésimal, Désignons par  $\Lambda_\omega$  l'ensemble de  $\lambda \in \mathbb{C}$  tq :  $\Re \lambda \geq \omega$  pour tout  $\omega \geq 0$  c-à-d :  $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}, \Re \lambda \geq \omega\}, \forall \omega \geq 0$ .

**Définition 1.17** L'opérateur :

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$x \longrightarrow R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt;$$

s'appel la transformée de Laplace du  $C_0$  semi groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ .

**Définition 1.18** Soit  $A$  un opérateur linéaire l'application :

$$R(\cdot, A) : \rho(A) \longrightarrow (x)$$

$$\lambda \longrightarrow R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1};$$

s'appel la résolvante de  $A$ .

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et linéaire et borné}\}.$$

**Définition 1.19** La famille des opérateurs  $(\lambda AR(\lambda, A))_{\lambda \in \Lambda_\omega}$  s'appelle l'approximation généralisée de Yosida, on note  $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ .

**Théorème 1.13 (Hille-Yosida)**

Un opérateur linéaire  $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi groupe si et seulement si :

1.  $A$  est fermé et  $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$ .
2. Il existe  $\omega \geq 0$  et  $M \geq 1$  tel que  $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$  et pour tout,  $\lambda \in \Lambda_\omega$  on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\Re \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

# CHAPITRE 2

## MODÉLISATION ET MÉTHODES DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MAL POSÉS

Ce chapitre est composé de deux parties : d'abord, problème inverse, des exemples variés de problèmes mal posés, et quelques méthodes de régularisation.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modélisation des problèmes inverses</b>	<b>21</b>
2.1.1	problèmes bien et mal posés	21
2.1.2	Les problèmes inverses	22
<b>2.2</b>	<b>Exemples illustratifs</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés</b>	<b>32</b>
2.3.1	Méthode de Tikhonov	32
2.3.2	Décomposition en valeurs singulières (Méthode S.V.D)	36
2.3.3	La méthode de quasi-réversibilité (Q.B.V)	41
2.3.4	Méthode des quasi-valeurs aux limites (Q.B.V.M)	43

---

## Références

- M.Kern. *Problèmes inverses aspects numériques*. Lecture, école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002-2003).
- M.T.Nair. *Linear operator equations : approximation and regularization*. World Scientific, (2009).
- Kirsch, A. (2011), *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, (Vol. 120). New York : Springer.
- H.W.Engl, M.Hanke and A.Neubauer : *Regularisation of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- R. Ahmed Yahia, *Sur une classe de problème non standards décrits par des équations différentielle*, Mémoire de Magister en Mathématiques, université mentouri constantine, (2007) .

## 2.1 Modélisation des problèmes inverses

### 2.1.1 problèmes bien et mal posés

**Définition 2.1** Soit  $F$  et  $G$  deux espaces métrique est  $A : F \longrightarrow G$  tel que :

1.  $A$  est injective.<sup>1</sup>
2.  $A$  est surjective.<sup>2</sup>
3.  $A^{-1}$  n'est pas continue.

On dit alors que le problème inverse, à savoir : connaissant  $g \in G$ , trouver  $f \in F$  tel que  $f = A^{-1}g$ , est mal posé .

**Définition 2.2** Soit  $X$  et  $Y$  des espaces normés,  $A : X \longrightarrow Y$  une application (linéaire ou non linéaire). L'équation  $Ax = y$  est dite correctement posée ou bien posée au sens d'Hadamard si les conditions suivantes sont remplies :

1. Existence de la solution : pour tout  $y \in Y$  il y a au moins un  $x \in X$  tel que  $Ax = y$ .

---

1.  $f$  est injective si pour tous  $a, b$  dans  $E$ ,  $f(a) = f(b)$  entraîne  $a = b$ .  
 2. Une fonction  $f : E \longrightarrow F$  est dite surjective si, pour tout élément  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet toujours au moins une solution  $x \in E$ .

2. *Unicité de solution* : pour tout  $y \in Y$  il y a au plus un  $x \in X$  avec  $Ax = y$ .
3. *Stabilité* : la solution  $x$  dépend continument de  $y$  ; c'est -à-dire pour chaque suite  $(x_n) \subset X$  avec  $Ax_n \rightarrow Ax(n \rightarrow \infty)$ , alors  $x_n \rightarrow x(n \rightarrow \infty)$ .

Si au moins une condition n'est pas vérifiée alors l'équation est dite mal posée.

### 2.1.2 Les problèmes inverses

Un problème inverse consiste à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets. Ce problème de l'inverse du problème dit direct, consistant à déduire les effets à partir de la connaissance des causes .

On peut schématiser un problème inverse comme suit :



Figure 2.1 – Inverse model

**INPUT**=vecteur, données initiales, conditions aux limites, paramètre, géométrie du domaine,.....

**OUTPUT**=Solution=état du système physique, quantité matricielle, propriétés qualitatives.

**Problème direct=OUTPUT=Solution=Modèle (INPUT).**

**Problème inverse=(modèle)<sup>-1</sup> (OUTPUT).**

L'étude des problèmes inverses est difficile et ça est dû à la possibilité d'avoir plusieurs solutions, car des causes différentes mènent aux mêmes effets. Des informations en plus sont nécessaires pour récupérer l'unicité de la solution. Une autre difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, d'où le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments

spécifiques à ce problème. Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu.

Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important nous pouvons citer : l'imagerie médicale, l'ingénierie pétrolière, l'hydrogéologie, la chimie, le radar et l'acoustique sous-marine, le traitement d'image.

Du point de vue mathématique, les problèmes inverses se répartissent en deux grands groupes :

► Les problèmes linéaires qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu où la résolution d'un système dans le cas discret.

► Les problèmes non linéaires qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans les équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Le plus part des problèmes inverses ne satisfait pas à la définition d'un problème bien-posé, on les appelle problèmes mal-posés.

## 2.2 Exemples illustratifs

**Exemple 2.1** (*Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace*)

*Trouver une solution  $u$  de l'équation de Laplace*

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}, \text{ dans } \mathbb{R} \times [0, \infty]$$

*qui satisfait aux "conditions initiales"*

$$u(x, 0) = f(x), \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = g(x), x \in \mathbb{R},$$

*où  $f$  et  $g$  sont des fonctions données. Évidemment la solution (unique) pour  $f(x) = 0$  et  $g(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$  est donné par :*

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny), x \in \mathbb{R}, y \geq 0,$$

par conséquent, nous avons :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty,$$

mais

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \longrightarrow \infty, n \longrightarrow \infty,$$

pour tout  $y > 0$ . L'erreur dans les données tend vers zéro tandis que l'erreur dans la solution  $u$  tend vers l'infini. Par conséquent, la solution ne dépend pas continument des données, et le problème mal posé.

### Exemple 2.2

Par exemple, le nombre de racines réelles du polynôme  $p(x) = -x^2 + 3x - m$  varie de façon discontinue quand  $m$  varie continûment sur la droite réelle. Il y a en effet, 2 racines réelles  $m \leq 9/4$ , et il n'y en a aucune si  $m > \frac{9}{4}$ ;

#### Preuve

$$\Delta = 9 - 4m$$

✓ Si  $m > 9/4$  :  $\Delta < 0$  pas de racines .

✓ Si  $m \leq 9/4$  :  $\Delta \geq 0$ , deux racines distinctes.

✓ Si  $m = 9/4$  : une racine double.

### Exemple 2.3

On souhaite résoudre le système linéaire  $AX = Y$ , où  $A$  est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Si  $Y$  est le vecteur :

$$Y = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix},$$

alors on trouve :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais si  $Y$  est le vecteur :

$$Y = \begin{pmatrix} 36, 1 \\ 26, 9 \\ 37, 1 \\ 34, 9 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$X = \begin{pmatrix} 60/7 \\ -70/7 \\ 32/7 \\ -8/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.57 \\ -11.28 \\ 4.57 \\ -1.14 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, de très petites variations sur  $Y$  ont conduit à de grandes variations sur  $X$ .

De façon précise, si  $A$  est une matrice, son conditionnement est  $K(A)$ . Dans l'exemple précédent, on trouve  $K(A) = 546.06$ , où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{R}^4$  i.e :

Ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement  $Y$ . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de  $X$ .

### Exemple 2.4

Il est à noter que la définition de problème mal posé ne se rapporte qu'à un couple donné d'espace métrique  $(F, U)$  car, transposé dans d'autre espace métrique, le même problème peut s'avérer bien posé, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant :

Le calcul de la série de Fourier que nous écrivons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

et supposons que chaque coefficient  $a_n$  soit entaché d'une erreur  $\epsilon/n$  (à l'exception de  $a_0$  évidemment); nous écrivons donc :

$$c_n = a_n + \epsilon/n, c_0 = a_0, \text{ et } \epsilon > 0.$$

La fonction  $f(x)$  est donc remplacée par la fonction  $g(x)$  :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx).$$

En supposant que  $f$  et  $g$  sont continues et bornées pour appliquer la norme  $\|\cdot\|_1$  dans  $l_2$ . Dans la métrique  $l_2$ , les coefficients diffèrent de la quantité :

$$\epsilon_1 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon\pi}{\sqrt{6}}.$$

Par conséquent,  $\epsilon_1$  est aussi petite que l'on veut, par un choix approprié de la quantité  $\epsilon$ . D'autre part, si la distance entre  $f(x)$  et  $g(x)$  est donné par la norme de convergence uniforme, nous avons :

$$\sup |g(x) - f(x)| = \sup \left| \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \right| = |\epsilon| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Cette quantité peut être aussi grande que l'on veut. Ainsi, si l'écart de la somme de la série est pris dans la métrique de  $\mathbb{C}$ , la sommation de la série de Fourier n'est pas stable.

Si on choisit la norme de la convergence en moyenne quadratique, le problème devient bien posé sur un tel couple d'espace métriques  $(F, U)$ ; en effet :

$$\left( \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = E_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\left( \int_0^\pi |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left( \int_0^\pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \frac{\cos(nx)}{n} \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_0^\pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \frac{1 + \cos(2nx)}{2} \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \epsilon \left( \int_0^\pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (c_n - a_n)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sin(2nx)}{4n} \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

### Example 2.5

L'équation de Fredholm de première espèce constitue un problème mal posé. Considérons l'équation fonctionnelle suivante :

$$\int_a^b K(x, t)z(t)dt = u(x), \text{ pour } x \in (c, d). \quad (2.1)$$

Expression dans laquelle  $z(t)$  est une fonction inconnue de l'espace  $F$  des fonctions continues sur  $(a, b)$  et  $u(x)$  est une fonction connue de l'espace  $U$ . mentionnons au passage que l'équation de convolution est un cas particulier de cette équation fonctionnelle  $K(x, t)$  devenant  $K(x, -t)$ .

Ajoutons une hypothèse supplémentaire sur le noyau  $K(x, t)$  qui est connu : c'est une fonction continue en  $x$  qui possède une dérivée partielle  $\partial K(x, t)/\partial x$  également continue .

Montrons que le problème est mal-posé. Supposons que pour un second membre  $u_1(x)$ , nous connaissons une solution exacte  $z_1(t)$  ; on peut alors écrire :

$$\int_a^b K(x, t)z_1(t)dt = u_1(x).$$

Maintenant supposons que l'on connaisse un second membre approché peu différent de  $u_1(x)$  dans la métrique  $L^2$ , et on se propose de rechercher une solution voisine de  $z_1(t)$ . Considérons dans  $L^2$ , la solution

$$z_2(t) = z_1(t) + \Gamma \sin(\omega t).$$

Elle est solution de l'équation :

$$\Gamma \int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt + u_1(x) = u_2(x).$$

Dans une métrique quadratique  $\mu_n$  ( $U$  est l'espace des fonctions carrés sommables  $L^2$ ), cette expression permet de calculer la distance de  $|u_1(x) - u_2(x)|$  :

$$\mu_u(u_1, u_2) = \left[ \int_c^d |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mu_u(u_1, u_2) = |\Gamma| \left( \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenant  $\omega > |\Gamma|$ , on peut trouver un  $K(x, t)$  où, l'intégrale converge avec  $\omega$  au dénominateur. Cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut. Calculons maintenant la distance des solutions correspondantes, dans la même métrique :

$$\mu_u(z_1, z_2) = \left( \int_a^b |z_1(t) - z_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\Gamma| \left[ \int_a^b \sin^2(\omega t) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[ \int_a^b \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[ \int_a^b \frac{dt}{2} - \int_a^b \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[ \frac{(b-a)}{2} + \frac{\sin(2\omega b)}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega a)}{4\omega} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mu_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[ \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin[\omega(b-a)] \cos[\omega(b+a)] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

$$(\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)).$$

On voit sans peine qu'on peut choisir les nombres  $\omega$  et  $\Gamma$  tels que pour les écarts aussi petits que l'on veut de  $u_1(x)$  et  $u_2(x)$ , l'écart des solutions respectives calculé par la formule (2.2) soit arbitrairement grand.

Si l'on se propose d'évaluer l'écart des solutions dans la métrique  $\mu_z$  de la

convergence uniforme ( $F$  peut être pris égal à  $L^\infty$ ).

$$\mu_z(z_1, z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| \text{ pour } t \in (a, b).$$

On calcule alors,

$$\mu_z(z_1, z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| = \sup |\Gamma \sin(\omega t)| = |\Gamma| \text{ pour } t \in (a, b).$$

Choissant  $\omega$  et  $\Gamma$  tels que pour que les écart de  $u_1(x)$  et  $u_2(x)$  soient aussi petits que l'on veut, l'écart des solutions peut être arbitrairement grand .

Ici le problème n'a pas été modifié par le choix de la norme.

### Exemple 2.6

Changeons le signe dans l'équation différentielle :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Delta u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+$$

$$u(x, 0) = v(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

L'équation différentielle est appelée, équation rétrograde de la chaleur.

Par exemple, si  $d = 1$  et  $v(x) = n^{-1} \sin(nx)$ , où  $n$  est un entier naturel positif, alors la solution est :

$$u(x, t) = n^{-1} \exp(n^2 t) \sin(nx),$$

vérifier, en la substituant dans l'équation :

$$\|v\|_c = n^{-1} (\longrightarrow 0 \text{ qd } n \longrightarrow \infty); \quad \|u(t)\|_c = n^{-1} \exp(n^2 t) (\longrightarrow \infty \text{ qd } n \longrightarrow \infty).$$

Ce problème est mal posé.

En d'autres termes, trouver la propagation de température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème bien posé.

Cependant, trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal-posé.

### Exemple 2.7



Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in [0, 1], y \in [0, 1]; \\ u(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\pi}{n} \sin(\pi n x) & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Les fonctions  $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(\pi n x) \sinh(\pi n y)$  sont solutions du système précédent. Or, pour chaque valeur de  $n$ , on peut trouver un nombre  $x_n \in [0, 1]$  tel que  $\sin(\pi n x_n) = 1$  vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |u_n(x, y)| = \infty.$$

Ce qui prouve que les fonctions de ce problème ne dépendent pas continûment des données initiales.

### Exemple 2.8

Soit le problème suivant :

$$Au = f.$$

$A \in (H, F)$ ,  $H, F$  deux espaces de Hilbert.

Si  $A$  est compact et  $\text{Im}(A)$  non fermé alors, le problème est mal posé .

$\text{Im}(A)$  est non fermé  $\Rightarrow A^{-1}$  est non borné  $\Rightarrow$  la troisième condition n'est donc pas vérifiée.

Le problème reste mal posé.

### Exemple 2.9

Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1; \\ 4u(0) = 0. \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution

$$u(x) = e^x - 1.$$

Si la condition initiale est donnée par  $u(0) = \epsilon$ , la solution est alors :

$$v(x) = (1 + \epsilon)e^x - 1.$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$v(x) - u(x) = \epsilon e^x.$$

Si  $x$  varie dans l'intervalle  $[0, 30]$ , on a

$$v(30) - u(30) = \epsilon e^{30} \simeq 10^{13}\epsilon$$

Si la précision des calculs est de  $10^{-10}$ , le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.

### Exemple 2.10

Recherche du prolongement analytique d'une fonction, comme sur une partie d'un domaine, dans le domaine tout entier.

Soit  $D$  un domaine fini,  $E$  l'arc de courbe appartenant au domaine  $D$ . Dans ce cas le problème du prolongement analytique d'une fonction définie sur l'arc de courbe  $E$  dans le domaine  $D$  tout entier est instable.

En effet, soit  $z_0$  un point à la frontière du domaine  $D$ , dont la distance à  $E$  est  $d > 0$ , et  $f_1(z)$  une fonction analytique dans  $D$ .

La fonction

$$f_2(z) = f_1(z) + \frac{\epsilon}{z - z_0};$$

où  $\epsilon$  est un nombre positif connu, est analytique dans  $D$  elle aussi.

Ces fonctions diffèrent sur l'ensemble  $D$  de la quantité  $\epsilon/z - z_0$  dont le module ne dépasse pas  $\epsilon/d$ ,

C'est -à-dire que

$$|f_2(z) - f_1(z)| < \epsilon/d \text{ sur l'ensemble } E.$$

On peut faire  $\epsilon/d$  aussi petit que l'on veut par un choix convenable de la

valeur de  $\epsilon$ , Or, dans le domaine  $D$ , la différence des fonctions

$$f_2(z) - f_1(z) < \epsilon/z - z_0,$$

n'est pas bornée en module. Les problèmes mal posés sont issus de divers domaines de recherche, ils nécessitent souvent une analyse mathématique sophistiquée et des méthodes numériques de haut niveau.

## 2.3 Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés

Dans cette section on aborde, des différentes méthodes directes de régularisation des problèmes mal posés linéaires, parmi elles, citons : méthodes de Tikhonov, méthode de quasi-réversibilité, méthodes de quasi-valeur limites, méthode de décomposition en valeurs singulières.

### 2.3.1 Méthode de Tikhonov

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert, supposons  $A : X \longrightarrow Y$ , cette méthode consiste à résoudre le système :

$$Ax = y, \tag{2.3}$$

qui revient à minimiser :

$$\|Ax - y\|_Y. \tag{2.4}$$

Si  $X$  est de dimension infinie et  $A$  compact alors le problème  $Ax = y$  est mal posé donc le problème de minimisation est aussi mal posé, voir le lemme suivant :

**Lemme 2.1** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces de Hilbert  $A : X \longrightarrow Y$ , un opérateur linéaire et borné et  $y \in Y$ . Il existe  $\hat{x} \in X$  tel que :

$$\|A\hat{x} - y\|_Y \leq \|Ax - y\|_Y,$$

pour tout  $x \in X$  si et seulement si  $\hat{x} \in X$ , est une solution de l'équation

$$A^*A\hat{x} = A^*y.$$

Ici  $A^* : Y \rightarrow X$  désigne l'adjoint de  $A$ .

### Preuve

Une simple application du théorème du binôme donne :

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|^2 - \|A\hat{x} - y\|^2 &= 2\operatorname{Re}(A\hat{x} - y, A(x - \hat{x})) + \|A(x - \hat{x})\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}(A^*(A\hat{x} - y), x - \hat{x}) + \|A(x - \hat{x})\|^2, \end{aligned}$$

pour tout  $x, \hat{x} \in X$ . Si  $\hat{x}$  vérifie  $A^*A\hat{x} = A^*y$  alors :

$$\|Ax - y\|^2 - \|A\hat{x} - y\|^2 \geq 0;$$

autrement dit  $\hat{x}$  minimise  $\|Ax - y\|$ . Si, au contraire,  $\hat{x}$  minimise  $\|Ax - y\|$ , alors on substitue  $x = \hat{x} + tz$  à tout  $t > 0$  et  $z \in X$  et on arrive à :

$$0 \leq 2t\operatorname{Re}(A^*(A\hat{x} - y), z) + t^2\|Az\|^2.$$

La division par  $t > 0$  et  $t \rightarrow 0$  donne  $\Re(A^*(A\hat{x} - y), z) \geq 0$ , pour tout  $z \in X$ ; i.e  $A^*(A\hat{x} - y) = 0$  et  $\hat{x}$  solution de l'équation.

On se donne  $A : X \rightarrow Y$ , un opérateur linéaire et borné et  $y \in Y$  et on veut déterminer  $x^\alpha \in X$ , qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov :

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2.$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 2.1** Soient  $A : X \rightarrow Y$ , un opérateur linéaire et borné entre les espaces de Hilbert et  $\alpha > 0$ . La fonctionnelle de Tikhonov  $J_\alpha$  admet un seul minimum  $x^\alpha \in X$ . Ce minimum est la solution unique de l'équation :

$$\alpha x^\alpha + A^*Ax^\alpha = A^*y. \quad (2.5)$$

### Preuve

Soit  $(x_n) \subset X$  une suite minimisante i.e :  $J_\alpha(x_n) \rightarrow I = \inf_{x \in X} J_\alpha(x)$ , lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . Nous montrons que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy.

Application de la formule binomiale donne :

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) &= 2J_\alpha\left(\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right) + \frac{1}{2}\|A(x_n - x_m)\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2 \\ &\geq 2I + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2. \end{aligned}$$

Le membre gauche converge vers  $2I$  lorsque  $n, m$  tendent vers l' infini.

Ceci montre que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy et donc convergente.

Soit  $x_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , en notant que  $x_\alpha \in X$ . De la continuité de  $J_\alpha$  on conclut que  $J_\alpha(x_n) \rightarrow J_\alpha(x_\alpha)$ ; i.e :  $J_\alpha(x_\alpha) = I$ . Ceci prouve l'existence d'un minimum de  $J_\alpha$ . On utilise maintenant la formule suivante comme dans la preuve du lemme précédent :

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x^\alpha) &= 2\operatorname{Re}(Ax^\alpha - y, A(x - x^\alpha)) + 2\alpha\operatorname{Re}(x^\alpha, x - x^\alpha) \\ &\quad + \|A(x - x^\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x^\alpha\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}(A^*(Ax^\alpha - y) + \alpha x^\alpha, x - x^\alpha) \\ &\quad + \|A(x - x^\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x^\alpha\|^2 \end{aligned}$$

pour tout  $x \in X$ . A partir de là, l'équivalence de l'équation normale avec le problème de minimisation pour  $J_\alpha$  est montrée exactement comme dans la preuve de lemme (2.1). Enfin, nous montrons que  $\alpha I + A^*A$  est égal à un pour chaque  $\alpha > 0$ . Soit  $ax + A^*Ax = 0$ , la multiplication par  $x$  donne  $\alpha(x, x) + (Kx, Kx) = 0$ ; c'est -à-dire  $x = 0$ .

La solution  $x^\alpha$  de l'eq (2.4) peut s'écrire sous la forme  $x^\alpha = R_\alpha y$  avec

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* : Y \rightarrow X \quad (2.6)$$

Le choix d'un système singulier  $(\mu_j, x_j, y_j)$  pour l'opérateur compact  $A$ ,

on voit que  $R_\alpha y$  a la représentation :

$$R_\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (y, y_j) x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (y, y_j) x_j, \quad y \in Y \quad (2.7)$$

avec :  $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$ , Cette fonction  $q$  est appelée la fonction de filtre.

**Théorème 2.2** Soit  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire et compact et  $\alpha > 0$ .

1. L'opérateur  $\alpha I + A^*A$  admet un inverse borné. L'opérateur  $R_\alpha : Y \rightarrow X$  défini par (2.6), forme d'une stratégie de régularisation avec  $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ .

On l'appelle la méthode de régularisation de Tikhonov.  $R_\alpha y^\delta$  est déterminé comme la solution unique  $x^{\alpha, \delta} \in X$  de l'équation du second espèce :

$$\alpha x^{\alpha, \delta} + A^*A x^{\alpha, \delta} = A^*y^\delta,$$

chaque choix  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) avec  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) est admissible.

2. Soit  $x = A^*Az \in \text{Im}(A^*)$  avec  $\|z\| \leq E$ . On choisit  $\alpha(\delta) = \frac{c\delta}{E}$  pour  $c > 0$ , alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) \sqrt{\delta E}.$$

3. Soit  $x = A^*Az \in \text{Im}(A^*)$  avec  $\|z\| \leq E$ . Le choix  $\alpha(\delta) = c\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{3}}$ , pour  $c > 0$  donne l'estimation de l'erreur :

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}.$$

Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour :

$$\|(A^*)^{-1}x\| \leq E,$$

où  $\|(A^*A)^{-1}x\| \leq E$ .

### Preuve


 Pour plus de détails voir [22].

**Théorème 2.3** Soit  $A : X \longrightarrow Y$  un opérateur linéaire et compact tel que l'image  $\text{Im}(A)$  est de dimension infinie. De plus, soit  $x \in X$ , et on assume qu'il existe une fonction continue  $\alpha : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$  avec  $\alpha(0) = 0$  tel que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \delta^{-\frac{2}{3}} = 0,$$

pour tout  $y^\delta \in Y$  avec  $\|y^\delta - Ax\| \leq \delta$ .

### Preuve

 Pour plus de détails voir [22].

## 2.3.2 Décomposition en valeurs singulières (Méthode S.V.D)

### Cas dimension infinie

**Définition 2.3** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces de Hilbert,  $A : X \longrightarrow Y$  un opérateur linéaire compact et  $A^* : Y \longrightarrow X$  son adjoint. Les racines carrées non négatives des valeurs propres de l'opérateur compact auto-adjoint non négatif  $A^*A : X \longrightarrow X$  sont appelées valeurs singulières de  $A$ .

**Théorème 2.4** Soit  $(\mu_n)$  la suite des valeurs singulières non nulles d'opérateur linéaire compact  $A$  (avec  $A \neq 0$ ) répétées selon leur multiplicité, i.e selon la dimension des espaces nuls  $\ker(\mu_n^2 I - A^*A)$ . Alors il existe des suites orthonormées  $(\phi_n)$  en  $X$  et  $(g_n)$  en  $Y$  telles que :

$$A\phi_n = \mu_n g_n, \quad A^*g_n = \mu_n \phi_n, \quad (2.8)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour chaque  $\phi \in X$  nous avons la décomposition en valeurs singulières :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n) \phi_n + \varrho \phi, \quad (2.9)$$

avec l'opérateur de projection orthogonale  $\varrho : X \longrightarrow \ker(A)$  et

$$A\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\phi, \phi_n)g_n. \quad (2.10)$$

Chaque système  $(\mu_n, \phi_n, g_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , possédant ces propriétés est appelé système singulier de  $A$ . Lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs singulières, les séries (2.9) et (2.10) dégénèrent en sommes finies.

### Preuve

Soit  $(\phi_n)$  une suite orthonormée des éléments propres de  $A^*A$ , i.e

$$A^*A\phi_n = \mu_n^2\phi_n;$$

et définissons une deuxième suite orthonormée par :

$$g_n = \frac{1}{\mu_n}A\phi_n.$$

Des calculs directs montrent que le système  $(\mu_n, \phi_n, g_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , satisfait (2.1). L'application du développement à l'opérateur compact auto-adjoint  $A^*A$  donne :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\phi_n + \varrho\phi, \phi \in X$$

où  $\varrho$  désigne l'opérateur de projection orthogonale de  $X$  sur  $\ker(A^*A)$ . Soit  $\psi \in \ker(A^*A)$  alors :

$$(A\psi, A\psi) = (\psi, A^*A\psi) = 0,$$

et ceci implique que  $\ker(A^*A) = \ker(A)$ . Par conséquent, (2.9) est prouvé et (2.10) s'ensuit en appliquant  $A$  à (2.9).

Notez que la décomposition en valeurs singulières implique que pour tout  $\phi \in X$  nous avons

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi, \phi_n)|^2 + \|\varrho\phi\|^2, \quad (2.11)$$

et

$$\|A\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |(\phi, \phi_n)|^2. \quad (2.12)$$

**Théorème 2.5 (Picard)** Soit  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire compact de système  $(\mu_n, \phi_n, g_n)$ . L'équation du premier type

$$A\phi = f, \quad (2.13)$$

est résoluble si et seulement si  $f$  appartient au complément orthogonal  $\ker(A^*)^\perp$  est vérifie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 < \infty. \quad (2.14)$$

Dans ce cas une solution est donnée par :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, g) \phi_n. \quad (2.15)$$



### Preuve

Voir [22].

### Cas dimension finie

**Définition 2.4** Les valeurs singulières  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  d'une matrice  $A$  ( $m \times n$ ) sont les racines carrées positives,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ , des valeurs propres non nulles de la matrice Gram associée  $K = A^T A$ . Les vecteurs propres correspondants de  $K$  sont appelés vecteurs singuliers de  $A$ .

**Proposition 2.1** Si  $A = A^T$  est une matrice symétrique, ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non nulles :  $\sigma_i = |\lambda_i| > 0$ ; ses vecteurs singuliers coïncident avec ses vecteurs propres non nuls.



### Preuve

Lorsque  $A$  est symétrique,  $K = A^T A = A^2$ . Donc si

$$Av = \lambda v, \text{ alors } Kv = A^2 v = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

Ainsi, toute valeur propre  $v$  de  $A$  est aussi un vecteur propre de  $K$  de valeur propre  $\lambda^2$ .

La généralisation de la factorisation spectrale aux matrices non symétriques est connue sous le nom de décomposition en valeurs singulières, communément abrégée SVD.

**Théorème 2.6** Une matrice réelle  $A$  ( $m \times n$ ) non nulle de rang  $r > 0$  peut être factorisée

$$A = P\Sigma Q^T, \quad (2.16)$$

dans le produit d'une matrice  $P$  ( $m \times r$ ) à colonnes orthonormées, donc  $P^T P = I$ , la matrice diagonale  $\Sigma$  ( $r \times r$ ) où  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  qui a les valeurs singulières de  $A$  comme entrées diagonales, et une matrice  $Q^T$  ( $r \times n$ ) avec des lignes orthonormées, donc  $Q^T Q = I$ .

### Preuve

Commençons par réécrire la factorisation souhaitée (2.16) sous la forme  $AQ = P\sigma$ . Les colonnes individuelles de cette équation matricielle sont les équations vectorielles :

$$Aq_i = \sigma_i p_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.17)$$

Reliant les colonnes orthonormées de  $Q = (q_1, \dots, q_r)$  aux colonnes orthonormées de  $P = (p_1, \dots, p_r)$ . Ainsi, notre but est de trouver les vecteurs  $p_1, \dots, p_r$  et  $q_1, \dots, q_r$  qui satisfont (2.17). Pour cela, on pose  $q_1, \dots, q_r$  des vecteurs propres orthonormés de la matrice de Gram  $K = A^T A$  correspondant aux valeurs propres non nulles, qui forment une base pour  $\text{Im } K = \text{coIm } g A$ , de dimension  $r = \text{rang } K = \text{rang } A$ . Ainsi, par

La définition des valeurs singulières :

$$A^T A q_i = K q_i = \sigma_i^2 q_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.18)$$

Nous affirmons que les vecteurs images  $w_i = A q_i$  sont automatiquement orthogonaux. En effet, compte tenu de l'orthonormalité du  $q_i$  combiné avec (2.18),

$$w_i w_j = w_i^T w_j = (A q_i)^T A q_j = q_i^T A^T A q_j = \sigma_j^2 q_i^T q_j = \sigma_j^2 q_i q_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_i^2, & i = j \end{cases}$$

par conséquent,  $w_1, \dots, w_r$  forment un système orthogonal de vecteurs de normes respectives

$$\|w_i\| = \sqrt{w_i, w_i} = \sigma_i.$$

Nous concluons que les vecteurs unitaires associés

$$p_i = \frac{w_i}{\sigma_i} = \frac{A q_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, r;$$

forment un ensemble orthonormé de vecteurs satisfaisant les équations requises (2.17).

**Définition 2.5** *Le pseudo-inverse d'une matrice  $A$  ( $m \times n$ ) non nulle avec décomposition en valeurs singulières  $A = P \Sigma Q^T$  est la matrice  $A^+$  ( $n \times m$ ),  $A^+ = Q \Sigma^{-1} P^T$ .*

**Lemme 2.2** *Soit  $A$  une matrice ( $m \times n$ ) de rang  $n$ . puis*

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T. \quad (2.19)$$

### Preuve

 En remplaçant  $A$  par sa décomposition en valeurs singulières ((2.17)),

on trouve

$$A^T A = (P\Sigma Q^T)^T (P\Sigma Q^T) = Q\Sigma P^T P\Sigma Q^T = Q\Sigma^2 Q^T$$

puisque  $\Sigma = \Sigma^T$  est une matrice diagonale, tandis que  $P^T P = I$ , puisque les colonnes de  $P$  sont orthonormées. Il s'agit simplement de la factorisation spectrale de la matrice de Gramm  $A^T A$  que nous connaissons en fait déjà par la définition originale des valeurs singulières et des vecteurs. Or si  $A$  est de rang  $n$ , alors  $Q$  est une matrice orthogonale  $n \times n$ , et donc  $Q^{-1} = Q^T$  alors :

$$(A^T A)^{-1} A^T = (Q\Sigma^{-2} Q^T)^{-1} (P\Sigma Q^T)^T = (Q\Sigma^{-2} Q^T) (Q\Sigma P^T) = Q\Sigma^{-1} P^T = A^+.$$

### 2.3.3 La méthode de quasi-réversibilité (Q.B.V)

Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert tel que  $-A$  le générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction compact sur  $H$ . Nous considérons le problème de trouver un  $u : [0, T] \rightarrow H$  tel que :

$$(F.V.P) \begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0; & 0 < t < T, \\ u(T) = f. \end{cases}$$

Pour une certaine valeur finale  $f$  dans  $H$ . De tels problèmes ne sont pas bien posés, c'est -à-dire que même s'il existe une solution unique sur  $[0, T]$ , elle n'a pas besoin de dépendre continuellement de la valeur finale  $f$ . Une méthode pour aborder ces problèmes est la quasi-réversibilité, introduite par Lattès et Lions dans les années 1960. L'idée est de remplacer (FVP) par un problème approché bien posé, puis utiliser les solutions de ce nouveau problème pour construire des solution approchées à (FVP). Dans la méthode originale de quasi-réversibilité Lattès et Lions approchés (FVP) avec :

$$\begin{cases} v'_\alpha(t) + Av_\alpha(t) - \alpha A^2 v_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T; \\ v_\alpha(t) = f, \end{cases}$$

où l'opérateur  $A$  est remplacé par une perturbation, en l'occurrence par  $A - \alpha A^2$  pour chaque  $\alpha > 0$ , ils utilisent la valeur initiale  $u_0 = v_\alpha(0)$  dans

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0; & 0 < t < T, \\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0). \end{cases}$$

Enfin ils montrent que  $u_\alpha(t)$  convergent vers zéro. La méthode ne considère pas  $u(t)$  pour  $t < T$  et l'opérateur portant  $f$  dans  $v_\alpha(0)$  a grande norme pour petit  $\alpha$ .

Showalter approxime (FVP) avec :

$$\begin{cases} v'_\alpha(t) + \alpha Av'_\alpha(t) + Av_\alpha(t) = 0; & 0 < t < T, \\ v_\alpha(T) = f, \end{cases}$$

et comme ci-dessus pour chaque  $\alpha > 0$ , utilise la valeur initiale  $u_0 = v_\alpha(0)$  dans :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T \\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0). \end{cases}$$

Les solutions  $u_\alpha$  se rapprochent de (FVP) en ce sens que  $u_\alpha(T)$  converge vers zéro lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. De plus, les  $u_\alpha(t)$  convergent vers la solution  $u(t)$  de (FVP) si et seulement si elle existe, mais encore la norme de la fonction portant  $f$  dans  $v_\alpha(0)$  est assez grande pour  $\alpha$  petit.

Miller aborde ce problème de grand norme en trouvant des perturbations optimales de l'opérateur  $A$ . Il déclare qu'il devrait être possible de faire la norme de l'ordre de  $\frac{c}{\alpha}$  plutôt que  $e^{\frac{c}{\alpha}}$  et dérive des conditions sur la perturbation  $f(A)$  pour obtenir les meilleurs résultats possibles. Comme dans les méthodes ci-dessus, il se rapproche (FVP) avec :

$$\begin{cases} v'(t) + f(A)v(t) = 0, & 0 < t < T; \\ v(T) = f, \end{cases}$$

et résout à nouveau le problème en utilisant  $v(0)$  comme condition initiale. Miller appelle cela la quasi-réversibilité stabilisée.

### 2.3.4 Méthode des quasi-valeurs aux limites (Q.B.V.M)

Enfin Showalter aborde un problème plus général d'une manière différente. Il se rapproche du problème :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0, & 0 < t < T; \\ u(0) = f, \end{cases}$$

par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0, & 0 < t < T; \\ u(0) + \alpha u(T) = f. \end{cases}$$

Il appela cette méthode "méthode des quasi- valeurs aux limites". Il conclu que cette méthode donne une meilleure approche.

**Perturbation des condition finales :** Nous approchons (FVP) avec le problème de la valeur quasi-frontière :

$$(QBVP) \begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T; \\ \alpha u(0) + u(T) = f. \end{cases}$$

Un avantage superficiel de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire de résoudre en avant. Ici, Plus important encore, l'erreur introduite par de petits changements dans la valeur finale  $f$  n'est pas exponentielle mais l'ordre  $\frac{1}{\alpha}$ . Nous montrerons que ce problème est bien posé pour chaque  $\alpha > 0$ , et que les approximations  $u_\alpha$  stable. Nous montrons que  $u_\alpha(T)$  converge vers  $f$  comme  $\alpha$  va à zéro et que les valeurs  $u_\alpha(t)$  converge sur  $[0, T]$  si et seulement si (FVP) a une solution.

Dans ce qui suit, supposons que  $H$  est un espace de Hilbert séparable et que  $A$  est comme ci-dessus et que  $0$  est dans l'ensemble résolvant de  $A$ . Soit  $S(t)$  le semi groupe de contraction compact engendré par  $-A$  comme  $A^{-1}$  compact, il existe une base propre orthonormée  $\phi_n$  pour  $H$  et des valeurs propre  $\frac{1}{\lambda_n}$  de  $A^{-1}$  tel que  $A^{-1}\phi_n = \frac{1}{\lambda_n}\phi_n$ . Alors les valeurs propres de  $-A$  sont  $-\lambda_n$  et celles de  $S(t)$  sont  $e^{-t\lambda_n}$  (et éventuellement zéro). En particulier, pour chaque  $\alpha$  positif,  $\alpha I + S(T)$  est inversible. Aussi, si  $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$ , alors :

$$S(T)u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} a_i \phi_i \text{ et :}$$

$$(S(T)u, u) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} a_i^2 \geq 0$$

De cette condition de type accréatif, nous obtenons :

$$\|(\alpha I + S(t))^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Il est utile de savoir exactement quand (FVP) a une solution ce lemme suivant répond à cette question.

**Lemme 2.3** Si  $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$ . Alors (FVP) admet une solution si et seulement si  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{2T\lambda_i}$  converge.

### Preuve

Si  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{2T\lambda_i}$  converge on définit simplement  $u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{(T-t)\lambda_i} b_i \phi_i$ . Soit  $u$  une solution à (FVP) Alors  $u(0)$  a un développement en fonction propre  $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$ , et

$$S(T)u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} a_i \phi_i = f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i.$$

Ceci implique que  $e^{-T\lambda_i} a_i = b_i$  et donc  $a_i = b_i e^{T\lambda_i}$ . Puisque  $u(0)$  est dans  $H$ , on a  $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ . La démonstration est achevée.

Nous souhaitons montrer que notre problème approché est bien posé et ce qui suit nous donne ce que nous avons besoin.

**Définition 2.6** Définissons  $u_\alpha(t) = S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} f$ , pour  $f$  dans  $H$ ,  $\alpha > 0$  et  $t \in [0, T]$ .

**Théorème 2.7** La fonction  $u_\alpha(t)$  est l'unique solution de (QBVP) et elle dépend continûment de  $f$ .

### Preuve

Puisque  $(\alpha I + S(T))^{-1}f$  est dans le domaine  $A$ , il est clair  $u_\alpha$  est un solution classique de l'équation différentielle. En outre :

$$\begin{aligned}\alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) &= \alpha(\alpha I + S(T))^{-1}f + S(T)(\alpha I + S(T))^{-1}f \\ &= (\alpha I + S(T))(\alpha I + S(T))^{-1}f = f.\end{aligned}$$

Pour voir la dépendance continue de  $u_\alpha$  sur  $f$ , calculons

$$\begin{aligned}\|S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}f_1 - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}f_2\| &= \|S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}(f_1 - f_2)\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|f_1 - f_2\|.\end{aligned}$$

L'unicité découle du fait que tout  $v$  solution doit satisfaire  $v(0) = (\alpha I + S(T))^{-1}f$  et l'unicité des solution au problème direct.

Nous faisons ici deux observations qui seront utiles plus tard. Première, d'après ce précède, il est clair que :

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|.$$

Deuxièmement, si  $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$  alors :

$$(\alpha I + S(T))u = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha + e^{-T\lambda_i})a_i \phi_i,$$

et :

$$(\alpha I + S(T))^{-1}u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\alpha + e^{-T\lambda_i}} \phi_i.$$

**Théorème 2.8** Pour tout  $f \in H$ ,  $\alpha > 0$ , et  $t$  dans  $[0, T]$  on a : ‘

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha \frac{t - T}{T} \|f\|.$$

### Preuve

Si  $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$ , on a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2t\lambda_i} b_i^2 (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2t\lambda_i} b_i^2 \left[ (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{\frac{t}{T}} (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{1-\frac{t}{T}} \right]^{-2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \left( \alpha^{1-\frac{t}{T}} \right)^{-2} \\ &= \left( \alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2. \end{aligned}$$

La démonstration est achevée.

**Théorème 2.9** Pour tout  $f$  dans  $H$ ,  $\|u_\alpha(T) - f\|$  tend vers zéro lorsque  $\alpha$  tend vers zéro.

C'est -à-dire que  $u_\alpha(T)$  converge vers  $f$  dans  $H$ .

### Preuve

Si  $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$ , alors

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \|S(T)(\alpha I + S(T))^{-1} f - f\|^2 \\ &= \alpha^2 \|(\alpha I + S(T))^{-1} f\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^2 b_i^2 (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2}. \end{aligned}$$

Fixons  $\epsilon > 0$ . Choisissons  $N$  tel que :  $\sum_{i=N}^{\infty} b_i^2 < \epsilon/2$ . Ainsi ,

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &< \sum_{i=1}^N \alpha^2 b_i^2 (\alpha + e^{-T\lambda_i})^{-2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \alpha^2 \sum_{i=1}^N b_i^2 e^{2\lambda_i T} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\alpha$  tel que  $\alpha^2 < \epsilon \left( 2 \sum_{i=1}^N b_i^2 e^{2\lambda_i T} \right)^{-2}$ .

**Théorème 2.10** *Pour tout  $f$  dans  $H$ , (FVP) admet une solution  $u$  si et seulement si la suite  $u_\alpha(0)$  converge dans  $H$ . De plus, on a alors que  $u_\alpha(t)$  converge vers  $u(t)$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro uniformément en  $t$ .*

### Preuve

Supposons que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(0) = u_0$  existe. Depuis  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(T) = f$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| &= \|S(t)u_0 - u_\alpha(t)\| \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|S(t)(u_0 - (\alpha I + S(T))^{-1}f)\| \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_0 - (\alpha I + S(T))^{-1}f\| \\ &= \|u_0 - u_\alpha(0)\| = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $u(T) = f$  et  $u(t) = S(t)u_0$  résout (FVP). On voit aussi que  $u_\alpha(t)$  converge vers  $u(t)$  uniformément en  $t$ .

Supposons maintenant que  $u(t)$  est la solution de (FVP). Soit  $\epsilon > 0$  et  $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$ . D'après le lemme (2.3) nous avons  $\|u(0)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{2T\lambda_i}$ .

Choisissons  $N$  tel que :  $\sum_{i=N}^{\infty} b_i^2 e^{2T\lambda_i} < \frac{\epsilon}{2}$ . Soit  $\alpha, \gamma > 0$ , alors :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\| &= \|(\alpha I + S(T))^{-1}f - (\gamma I + S(T))^{-1}f\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha + e^{-T\lambda_i}} - \frac{1}{\gamma + e^{-T\lambda_i}} \right) b_i \phi_i \right\| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-T\lambda_i} + e^{-2T\lambda_i})^{-2} b_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-T\lambda_i} + e^{-2T\lambda_i})^{-2} b_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-T\lambda_i} + e^{-2T\lambda_i})^{-2} b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\gamma - \alpha)^2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left( \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \gamma} \right)^2 b_i^2 e^{2T\lambda_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\gamma - \alpha)^2 e^{4T\lambda_i} b_i^2 + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant si nous choisissons  $\delta > 0$  pour que :  $\delta^2 < \epsilon \left( \sum_{i=1}^N e^{4T\lambda_i} b_i^2 \right)^{-1}$  et exigeons que  $\alpha$  et  $\gamma$  soient inférieure à  $\delta$ , on a

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 < \epsilon.$$

On a donc que  $u_\alpha(0)$  est de Cauchy et donc converge. Depuis la première partie du théorème, nous avons que  $u_\alpha(t)$  converge vers  $u(t)$  uniformément en  $t$ .

Nous terminons par un résultat qui donne des taux de convergence explicites dans le cas où (FVP) est soluble pour un temps final positif.

**Théorème 2.11** Si  $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$  est dans  $H$  et il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{\epsilon \lambda_i T}$  converge, alors  $\|u_\alpha(T) - f\|$  converge vers zéro d'ordre  $\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$ .

### Preuve

Soit  $\epsilon$  dans (0.2) tel que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{\epsilon \lambda_i T}$$

est fini et soit  $k$  dans (0.2).

Fixer un nombre naturel  $n$ . Définissons

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2}.$$

La différenciation par rapport à  $\alpha$  donne

$$g'_n(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\alpha + k e^{-T\lambda_n}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^3}.$$

Donc  $g'_n(\alpha) = 0$  lorsque  $\alpha = 0$  où

$$\alpha = \frac{k}{2-k} e^{-T\lambda_n}.$$

Puisque  $g_n(\alpha) > 0$ ,  $g_n(0) = 0$ , et  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g_n(\alpha) = 0$  on a  $\alpha_0 \frac{k}{2-k} e^{-T\lambda_n}$  est la valeur critique à laquelle  $g_n$  atteint son maximum. Ainsi nous

avons l'inégalité :

$$g_n(\alpha) \leq \frac{\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-kT\lambda_n}}{(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^2}.$$

Nous calculons maintenant

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} = \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 g_n(\alpha) \\ &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-kT\lambda_n} (\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^{-2} \\ &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\lambda_n} (\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{\lambda_n T} + 1)^{-1} \\ &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\lambda_n} \\ &= \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{(2-k)T\lambda_n}. \end{aligned}$$

Si on choisit  $k = 2 - \epsilon$  on arrive à :

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 \alpha^\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{\epsilon T \lambda_n} = c \alpha^\epsilon \epsilon^{-2}.$$

Si on suppose que  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_i T}$  converge, en travaillant comme ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &= \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 g_n(\alpha) e^{2T\lambda_n} \\ &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(4-k)T\lambda_n}. \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, en laissant  $k = 2 - \epsilon$ , on arrive au suivant.

**Corollaire 2.1** Si  $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i$  est dans  $H$  et il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{(2+\epsilon)\lambda_i T}$  converge,  $\|u_\alpha(t) - u(t)\|$  converge vers zéro d'ordre  $\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$  uniformément en  $t$ .

# CHAPITRE 3

## RÉGULARISATION D'UN PROBLÈME MAL POSÉ POUR L'OPÉRATEUR DE BESSEL

### Sommaire

3.1	Position du problème	51
3.2	Régularisation du problème	54

### Références

- MASOOD, Khalid, MESSAOUDI, Salim, et ZAMAN, F. D. *Initial inverse problem in heat equation with Bessel operator*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, vol. 45, no 14, p. 2959-2965.
- Settara.L *Problème mal posé et méthodes de résolution*; Mémoire de Magister (2007), Université de Skikda.

Nous aurons besoin dans ce qui suit des résultats suivants :

**Proposition 3.1** Si  $\mu_1, \mu_2$  sont les racines de l'équation :

$$\gamma J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad \gamma \geq 0, \beta \geq 0. \quad (3.1)$$

$\gamma + \beta > 0$  et  $\nu > -1$  alors :

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = 0, \quad \mu_1^2 \neq \mu_2^2.$$

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x) dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1).$$

**Proposition 3.2** *Sous les mêmes conditions de la proposition précédente, Les racines de l'équation (3.1) sont réelles, simples et réparties symétriquement par rapport à zéro . Elle n'ont pas de point d'accumulation fini .*

### 3.1 Position du problème

Considérons le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, 0 < x < 1 \quad (3.2)$$

$$u(1, t) = 0. \quad (3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \quad (3.4)$$

$$u(x, T) = \varphi(x). \quad (3.5)$$

Nous voulons retrouver la température à l'instant  $t = 0$ , c-à-d la valeur de  $g(x) = u(x, 0)$ .

Définissons l'opérateur  $A$  par :

$$Au = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x},$$

où :

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H_x[0, 1], u(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} xu'(x) = 0\}.$$

L'étude du spectre de l'opérateur  $A$  nous conduit au problème aux valeurs propres

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \lambda x u = 0,$$

qui est l'équation de Bessel d'ordre zéro. La solution générale de cette équation est :

$$u = \gamma J_0(\sqrt{\lambda_n} x) + \beta N_0(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Dans cette expression  $J_0$  et  $N_0$  sont respectivement les fonction de Bessel et de Neumann d'ordre zéro et  $\gamma$  et  $\beta$  des constantes.

Les conditions (3.3) et (3.4) qui se retrouvent dans la définition de  $\mathcal{D}(A)$  impliquent  $\beta = 0$  et  $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$ .

En appliquant les propositions précédentes nous obtenons :

1. Les valeurs propres de l'opérateur  $A$  sont  $\lambda_k = \xi_k^2$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  où les  $\xi_k$  sont les racines positives de la fonction de Bessel  $J_0$ .
2. Les fonctions propres associées sont :  $\phi_k(x) = \gamma_k J_0(\sqrt{\lambda}x)$  pour  $\gamma_k = \frac{\sqrt{2}}{J_0'(\sqrt{\lambda}x)}$ , cette famille est orthonormée, complète dans l'espace  $H_x[0, 1]$ .
3.  $\lambda = 0$  n'est pas une valeur propre.

Considérons alors la fonction  $u(., t) \in L^2((0, T) \cap H_x(0, 1))$ ;  $u(., t)$  s'écrit alors :

$$u(., t) = \sum_{k \geq 1} v_k(t) \phi_k(x),$$

avec  $v_k(t) = \int_0^1 x u(x, t) \phi_k(x) dx$ .

Dans ce cas les fonctions  $v_k(t)$  vérifient :

$$v_k'(t) + \lambda_k v_k(t) = 0,$$

ce qui donne :

$$v_k(t) = c_k \exp(-\lambda_k t),$$

donc :

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} c_k \exp(-\lambda_k t) \phi_k(x).$$

La condition (3.5) nous donne

$$\varphi(x) = u(x, T) = \sum_{k \geq 1} c_k \exp(-\lambda_k T) \phi_k(x).$$

pour  $g(x)$  nous obtenons l'expression :

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{k \geq 1} c_k \phi_k(x).$$

Ce qui nous permet de retrouver les coefficients  $c_k$  par la formule

$$c_k = \int_0^1 x \phi_k(x) g(x) dx.$$

Entre  $\varphi(x)$  et  $g(x)$  nous avons alors la relation :

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, \xi) g(\xi) d\xi,$$

avec

$$K(x, \xi) = \sum_{k \geq 1} \xi \exp(-\lambda_k T) \phi_k(\xi) \phi_k(x).$$

Si nous voulons retrouver  $u(x, 0)$  en connaissant  $u(x, t)$  nous devons donc résoudre l'intégrale de première espèce .

Selon le théorème de picard ce problème admet une solution si, et seulement

$$g(x) = \sum_{k \geq 1} \exp |2\lambda_k T| |\varphi|^2 < \infty$$

où les  $\varphi_k$  sont les coefficient de Fourier de la fonction  $\varphi$  .

Par ce même théorème nous obtenons

$$g(x) = \sum_{k \geq 1} \exp |\lambda_k T| \varphi_k(x) \phi_k(x),$$

alors :

$$g(x) = \int_0^1 K'(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

avec :

$$K'(x, \xi) = \sum_{k \geq 1} \xi \exp(\lambda_k T) \phi_k(\xi) \phi_k(x).$$

Et par la même, le problème de trouver  $u(x, 0)$  en connaissant  $u(x, T)$  est mal posé . En effet :

À la donnée finale perturbée  $\varphi_\delta = \varphi + \delta \phi_k$  correspond la donnée initiale  $g_\delta = g + \delta \phi_k \exp(\lambda_k T)$ .

Ce qui signifie :

$$\begin{aligned}\|g_\delta - g\| &= \|\delta\phi_k \exp(\lambda_k T)\| \\ &= \exp(\lambda_k T)\|\varphi_\delta - \varphi\|.\end{aligned}$$

De la dernière formule nous constatons qu'une petite perturbation de la donnée finale peut induire une perturbation arbitrairement grande de la donnée initiale.

Nous avons donc :

**Proposition 3.3** *Le problème (3.2) – (3.3) – (3.4) et (3.5) est mal posé .*

## 3.2 Régularisation du problème

En utilisant les notations induites ci-dessus, nous pouvons formuler le problème (3.2) – (3.3) – (3.4) et (3.5) sous la forme :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0; & 0 < t < T, \\ u(T) = \varphi. \end{cases}$$

Il faut préciser ici que l'espace  $H$  est  $H_x[0, 1]$ .

Notons que  $A$  auto adjoint, positivement défini (Les valeurs propre sont strictement positives).

Nous allons suivre la méthode des valeurs quasi-limites exposée au chapitre précédent, et nous allons donc étudier le problème :

$$(P_\alpha) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \alpha u(0) + u(T) = \varphi. \end{cases}$$

En appliquant les théorèmes (2.7) et (2.11) nous obtenons le résultat suivant :

### Théorème 3.1

(1) La fonction  $u_\alpha(x, t) = \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_k t}}{\alpha + e^{-\lambda_k T}} \varphi$  est la solution du problème  $(P_\alpha)$  et dépend continûment de  $\varphi$ .

(2) Pour toute  $\varphi(x) \in H_x[0, 1]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $t \in [0, T]$ , on a

$$\int_0^1 x \left[ \frac{e^{-\lambda_k t}}{\alpha + e^{-\lambda_k T}} \varphi(x) \right]^2 dx \leq \alpha^{\frac{t-T}{T}} \int_0^1 x \varphi(x)^2 dx.$$

(3) Pour toute  $\varphi(x) \in H_x[0, 1]$ ,  $\int_0^1 x \left[ \frac{e^{-\lambda_k T}}{\alpha + e^{-\lambda_k T}} \varphi(x) - \varphi(x) \right]^2 dx$  tend vers zéro; quand  $\alpha \rightarrow 0$ .

(4) Si  $\varphi(x) = \sum_{k \geq 1} \varphi_k \phi_k(x) \in H_x[0, 1]$ , et il existe  $\varepsilon \in [0, 2]$  tel que :

$\sum_{k \geq 1} \varphi_k^2 \exp(\xi \lambda_k T) < \infty$  alors,  $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_k T}}{\alpha + e^{-\lambda_k T}} \varphi(x)$  converge vers  $\varphi(x)$  d'ordre  $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$ ; quand  $\alpha \rightarrow 0$ .

### Preuve

(1) La fonction  $u_\alpha(x, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi$ , la solution unique du problème approché  $(P_\alpha)$ ; de plus dépend continûment de  $\varphi$ .

On a :  $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \in \mathcal{D}(A)$  de plus :

$$\begin{aligned} \alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) &= \alpha \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi \\ &= \varphi \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha + e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi = \varphi \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la solution du problème est dépend continûment des données du problème :

$$\|u_\alpha \varphi_1 - u_\alpha \varphi_2\| = \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} (\varphi_1 - \varphi_2) \right\|.$$

On a :

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Alors :

$$\|u_\alpha \varphi_1 - u_\alpha \varphi_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \quad (3.6)$$

d'où la stabilité.

(2) Pour tout  $\varphi(x) \in H_x[0, 1]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $t \in [0, T]$  on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n t}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi \right]^2 dx &= \int_0^1 x \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \varphi^2 dx \\ &= \frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \varphi \int_0^1 x \varphi^2(x) dx \\ &\leq \left( \alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \int_0^1 x \varphi^2(x) dx. \end{aligned}$$

(3) Pour tout  $\varphi(x) \in [0, 1]$  :

$$\int_0^1 x \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi(x) - \varphi(x) \right]^2 dx, \quad (3.7)$$

tend vers zéro, quand  $\alpha \rightarrow 0$ . En effet :

$$\begin{aligned} (3.7) &\Leftrightarrow \int_0^1 x \left[ \frac{e^{-\lambda_n T} \varphi(x) - \alpha \varphi(x) - e^{-\lambda_n T} \varphi(x)}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right]^2 dx \\ &= \int_0^1 x \left[ \frac{-\alpha \varphi(x)}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \right]^2 dx \\ &= \int_0^1 x \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \varphi^2(x) dx \\ &= \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \int_0^1 x \varphi^2(x) dx \\ &\leq \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left( \int_0^1 x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 (\varphi^2(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \|\varphi^2(x)\|. \end{aligned}$$

En majorant  $(\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2}$  par  $e^{2\lambda_n T}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} (3.7) &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha^2 e^{2\lambda_n T} \|\varphi^2(x)\| \leq 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0 \\ 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha^2 e^{2\lambda_n T} \|\varphi^2(x)\| \leq 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0; \end{aligned}$$



alors pour tout  $\varphi(x) \in [0, 1]$  :  $\int_0^1 x \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi(x) - \varphi(x) \right]^2$   
tend vers zéro, quand  $\alpha \rightarrow 0$

- (4) Soit  $\varepsilon \in [0, 2]$  tel que  $\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2(\xi \lambda_n T)$  est fini et soit  $k \in [0, 2]$ . Fixons un nombre naturel  $n$ .

Définissons :

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2}.$$

La différenciation par rapport à  $\alpha$  donne :

$$g'_n(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\alpha + ke^{-\lambda_n T}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^3}.$$

On a :  $g_n(\alpha) \leq g_n(\alpha_0)$  où :

$$\alpha_0 = \frac{k}{2-k} e^{-\lambda_n T}.$$

Alors :

$$g_n(\alpha) \leq \left( \frac{k}{2-k} \right)^k \frac{e^{-k\lambda_n T}}{(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - \varphi\| &= \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda_n T}}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} \varphi - \varphi \right\| \\ &= \left\| \sum_{n \geq 1} \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \varphi_n^2 \right\| \\ &= \alpha^{2-k} \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 g_n(\alpha) \\ &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 \left( \frac{k}{2-k} \right)^k \frac{e^{-k\lambda_n T}}{(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^2} \end{aligned}$$

En majorant  $(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^{-2}$  par  $e^{2\lambda_n T}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 \left( \frac{k}{2-k} \right)^k e^{(2-k)\lambda_n T} \\ &\leq \alpha^{2-k} \left( \frac{k}{2-k} \right)^k \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 e^{(2-k)\lambda_n T} \end{aligned}$$

Choisissons  $k = 2 - \varepsilon$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\leq \left( \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{2-\varepsilon} \alpha^\varepsilon \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 e^{\varepsilon \lambda_n T} \\ &\leq \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \alpha^\varepsilon \sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 e^{\varepsilon \lambda_n T} = c \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}. \end{aligned}$$

Comme :  $\left( \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{2-\varepsilon} \leq \left( \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \leq \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^2$  {car  $\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} > 0$ } alors :

$$\sum_{n \geq 1} \varphi_n^2 e^{\varepsilon \lambda_n T} < \infty .$$

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

**D**ans ce mémoire nous avons essayé de donner une définition au problème inverse, puis problème mal et bien posé, le sujet décrit essentiellement la description de différentes méthodes de régularisation.



**La première partie** est un rappels des outils nécessaires dans l'étude du problème étudié.



**Quant à la deuxième partie**, elle est consacrée à la présentation de quelques méthodes de régularisation.



**La dernière partie**, elle comporte l'étude d'un problème inverse pour l'opérateur de Bessel, et la régularisation par la méthode de Quasi-valeurs aux limites introduite par Showlater [37].

**N**ous espérons que ce travail éclairai quelques méthodes de régularisation, et comme perspectives il sera intéressant d'étudier les méthodes d'analyse numérique, concernant la résolution des problèmes mal-posés.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abul Hasan Sidiqi; *Functional Analysis and Application*, Springer (2018).
- [2] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston and Sons,(1977).
- [3] B.Haridi ;*Méthode de régularisation avec des conditions auxiliaires modifiées pour un problème parabolique rétrograde à coefficients dépendants du temps*, mémoire de Master 2020, Université de Guelma.
- [4] D.N. Hào, N.V. Duc, D. Lesnic, *Regularization of parabolic equations backward in time by a non-Local boundary value problem method*, IMA J. Appl. Math. 75 (2) (2010) 291–315.
- [5] D.N.Hào, T.D.Van and R.Gorenflo, *Toward the Cauchy Problems for the Laplace Equations*, vol 27(Warsaw : Polish Academyof Sciences) pp 111-28, 1992.
- [6] D.N. Hào, V.D.Nguyen and Sahli. *A non-Local boundary value problem method for parabolic equation backward in time*, J.Math. Anal. Appl., 345(2008), 805-815.
- [7] D.N.Hào, V.D.Nguyen and D.Lesnic, *A non-Local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems 25(2009)055002 (27pp).
- [8] Djemoui sebti. Thèse de Doctorat : *Sur classe de Problèmes Mal-posés*(2016),Université d'Annaba.

- [9] E.B.Davies ; *Linear Operator and their Spectra*, Cambridge University Press (2007).
- [10] Fan Yong, Miao Zhang and Xiao-Xiao Li ; *A quasi-boundary value regularization method for identifying an unknown source in the Poisson equation*, journal of Inequalities and Application 2014, 2014 :117.
- [11] F.Ben Belgacem, *Why is the Cauchy problem severely ill-posed ?* Inverse Problems 23 823-36,2007.
- [12] G.Allessandrini, L.Rondi, E.Rosset,and S.Vessella,*The stability of the Cauchy problem for elliptic equations*, *Inverse Problems* 25(12),2009.
- [13] H.Brezis ; *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson (1993).
- [14] H.W.Engl, M.Hanke and A.Neubauer : *Regularisation of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [15] H.W.Engl,M.Hanke, A.Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, vol.375,Springer,1996.
- [16] I.V.Melnikova, *Regularization of ill-posed differential problems*, *Siberian Math.J.*33 289-98,1992.
- [17] Jean-pierre aubin ; *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tome 2, Presses universitaires de France, puF (1987)
- [18] J.Hadamard. *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale Uni Press, New Haven, 1923.
- [19] J.Hadamard. *Lecture on Cauchy problem in linear partial differential equation*, Dover, New York (1953).
- [20] J.B.Keller. *Inverse problems*, *Amer.Math.Monthly*,83 :107-118,(1976).
- [21] K.A. Ames, L.E. Payne, *Asymptotic behavior for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation*, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 8 (1) (1998) 187.
- [22] Kirsch, A. (2011). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems* (Vol. 120). New York : Springer.

- [23] K.A.Ames, L.E.Payne and J.C.Song, *On two classes of nonstandard parabolic problems*, J.Math.Anal.Appl, 311 (2005),254-267.
- [24] K.A.Ames, R.J.Hughes, *Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space*, Semigroup Forum, Vol.70(2005),No 1,127-145.
- [25] khelili Bisma. Thèse de Doctorat : *Sur quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problème de Cauchy inverses*, (2018),Université d'Annaba.
- [26] Kress, R., Maz'ya, V., & Kozlov, V. (1989). *Linear integral equations* (Vol. 82, p. 1). Berlin : Springer.
- [27] Lakhdari abdelghani, *Sur quelques méthodes de régularisation itératives pour une classe de problèmes inverses en EDP* Thèsz doctorat, 2014-2015,Université de Guelma.
- [28] L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems 22 (2006), 413-430.
- [29] Li.Daniel ;*Cours d'analyse fonctionnelle* ISBN 978-2-7298-83058 ©Ellipses Édition Marketing S.A., ,rue Bague 75740 Paris cedex 15 (2013).
- [30] MASOOD, Khalid, MESSAOUDI, Salim, et ZAMAN, F. D. *Initial inverse problem in heat equation with Bessel operator*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, vol. 45, no 14, p. 2959-2965.
- [31] M.Kern. *Problèmes inverses aspects numériques.Lecture*, école supérieure d'ingénieurs Léonard de vinci, (2002-2003).
- [32] M.M.Lavrent'ev, *On the Cauchy problem for the Laplace equation*,(In Russian).Izvest.Akad.Nauk SSSR (Ser. Matem.)20,819-842,1956.
- [33] M.V. Klibanov, F. Santosa, *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation*, SIAM J. Appl.Math. 51, 1653-1675, 1991.
- [34] N.Driche, *Régularisation des problèmes mal-posés*,Mémoire de Master (2019),Université de Biskra.

- [35] N.I.Akhiezer and I.M.Glazman. *Theory of linear operator in Hilbert space*, translated from the Russian by Merlynd Nestell p. Cm. Originally published : New York : F.Ungar Pub.Co., cl961- cl963.Dover Publications, Inc.New York, (1993).
- [36] P.Lévy-Bruhl ; *Introduction à la Théorie Spectrale :Cours et Exercices Corrigés*, Dunod (2003).
- [37] R.E. Showalter, *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations*, in : *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 110, 1985, pp. 421–425.
- [38] R.E. Showalter, *The final value problem for evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. 47 (3) (1974) 563–572.
- [39] R.Lattès & J.-L. Lions, *The method of quasi-reversibility, Applications to partial differential equations*, Elsevier, New York (1969).
- [40] R.Touil, *Régularisation methods of ill posed problems*,Mèmoire Master (2019),Université de M'sila.
- [41] Settata.L *Problèmes mal posés et méthodes de résolution* ; mémoire de Magistère (2007), Université Skikda.
- [42] V.Isakov, *Inverse Problems for Partial Differeential equations*, 2<sup>nd</sup> edn(Berlin : Springer) 2006.
- [43] V.K.Ivanov, I.V.Mel'nikova and A.I.Flinkov 1995 *Operator-Differential equations and Ill-posed Problems*, (Moscow : Nauka)(in Russian)
- [44] Y.Ahmim, *Une méthode de résolution numèrique des problèmes inverses Linéaires*,Mémoire de Master (2014),Université de Béjaia.