

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2023/2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Sur l'étude des transformations bidimensionnelles et la théorie du chaos

Option: Système dynamique et commande optimale

Par:

Medareg narou Roumaissa

Encadré par : *Selmani Wissame*

MCB U. SKIKDA

Devant le jury:

Président : *Lallouche Abdellah*

MCA U. SKIKDA

Examinatrice : *Bendib El Ouahma*

MCB U. SKIKDA

Année universitaire: 2023/2024

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier sincèrement mon encadrante **Dr.Selmani Wissame** pour ses précieux conseils et son aide permanente durant toute la période du travail. Mon sincère remerciement aux membres de jury **Dr.Lallouche Abdellah** et **Dr.Bendib El Ouahma** qui ont accepté d'examiner et de juger ce travail.

Enfin, je remercie vivement tous mes enseignants et tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à achever ce mémoire.

Dédicace

Je remercie Dieu créateur qui m'a donné la capacité d'écrire et de réfléchir et la puissance d'aller jusqu'au bout du rêve.

Je dédie ce modeste travail a :

Mon père et ma mère qui n'ont pas cessé de m'encourager tout au long de mon parcours scolaire et universitaire pour que j'arrive à ce jour- là.

Mes trois frères : Fayçal, Houcine, AHCEN et ma sœur Soulef.

Tout mes amis et mes collègues de ma promotion de Master 2 Mathématiques.

Tous les profs qui m'ont enseignée.

Tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire.

Je partage cet honneur et ce bonheur avec eux.

Principales notations utilisées

$B(x, r, p, q)$: la fonction de Blumberg en dimension un dépend des trois paramètres réels r, p, q .

I : matrice identité.

$\det J$: déterminant de la matrice jacobienne.

$tr J$: trace de la matrice jacobienne.

S_i ($i = 1, 2$) : valeurs propres ou multiplicateurs.

(k, j) : cycle d'ordre k , j caractérise l'ordre d'échange des k points du cycle.

$\lambda^J_{(k)_0}$: une courbe de bifurcation " nœud-col " ou "fold" ou "pli".

λ^j_k : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".

N_i ($i > 0$) : points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).

p_{BB} : point de la bifurcation big bang.

O : est l'origine ou le point fixe $(0, 0)$.

N^k_s : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud stable.

N^k_I : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud instable.

C^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type col.

C^j_k : point cuspidal.

C^k_{ij} : les points du cycles d'ordre k , (i, j deux entiers naturels).

TNI : transformations non inversibles.

LC_{-1} : le lieu des points pour lequel le $\det J$ de T s'annule.

$LC = LC_0$: lignes critiques de rang 1 des courbes LC_{-1} .

LC_i ($i = 1, \dots, n$) : itérations, les images des courbes LC_{-1} .

E_i ($i \geq 0$) : les ensembles de commutations.

S_i ($i \geq 0$) : les points d'intersections des E_i et E_{i+1} .

P_i ($i \geq 0$) : les points de plyinge.

Z_i : zones, (i entier naturel).

$B(A)$ (D) : bassin (domaine) d'attraction de l'attracteur A .

Δ_c : la diagonale ou l'asymptote pour $c = 1$.

ω : la droite décrivant la stabilité du point fixe $(0, 0)$.

S : le plan de caractérisation de la stabilité du point fixe $x = 0$.

CI : courbe invariante.

Liste Des Figures

Figures-Chapitre 1 :

Figure 1.1 : Section de Poincaré.

Figure 1.2 : Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

Figure 1.3 : Courbe invariante d'un point fixe col.

Figure 1.4 : Bifurcation flod ou nœud-col(pli).

Figure 1.5 : Bifurcation transcritique des points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système(à droite), (-) :stable , (..) :instable.

Figure 1.6 : Bifurcation fourche supercritique(à gauche), sous-critique(à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (..) : instable.

Figure 1.7 : Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous critique (à droite).

Figure 1.8 : Structure de bifurcation boites emboîtées.

Figure 1.9 : Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .

Figure 1.10 : Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .

Figure 1.11 : Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .

Figure 1.12 : Bifurcation d'un domaine D_0 connexe \leftrightarrow non connexe.

Figure 1.13 : Bifurcation d'un bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe.

Figure 1.14 : Bifurcations d'un changement du nombre d 'ilôts.

Figures-Chapitre 2 :

Figure 2.1 : Shéma de la logistique $\alpha(x)$.

Figure 2.2 : Le graphe de f_μ .

Figure 2.3 : Convergence en escalier de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} = f(x_n), \mu = 1.5, x_0 = 0.1$.

Figure 2.4 : Convergence en spirale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} = f(x_n), \mu = 1.5, x_0 = 0.1$.

Figure 2.5 : Les points fixes de f^2 .

Figure 2.6 : Les graphes de f, f^2, f^4 .

Figure 2.7 : Diagramme de bifurcation.

Figures-Chapitre 3 :

Figure 3.1 : Les régions de la stabilité des points fixes P_1 et P_2 .

Figure 3.2 : Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Figure 3.3 : Diagramme de bifurcation de Hénon .

Figure 3.4 : Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0; y_0) = (0.001; 0.001)$.

Figure 3.5 : Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0; y_0) = (0.001; 0.001)$.

Figure 3.6 : Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Figure 3.7 : Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour $a=1.4$ et $b=0.3$ (Dynamics).

Figure 3.8 : Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

Figure 3.9 : Bassin d'attraction et attracteur de Lozi pour $a=1.7$ et $b=0.5$ (Dynamics).

Résumé

Dans ce mémoire, on présente les notions de base des systèmes dynamiques, en commençons par une étude bien détaillée en dimension un sur la récurrence de Verhulst, les propriétés et discussion sur les différents cas selon un paramètre de croissance d'une population, ce dernier est toujours positif. Ensuite, on présente deux systèmes chaotiques bien connus et célèbres " Hénon et Lozi ", ce passage en dimension deux nous a permis d'étudier les singularités et les bifurcations, de plus tracer les attracteurs chaotiques qui existent pour certain valeurs des paramètres.

Mots Clés: la récurrence de Verhulst, attracteur chaotique, bifurcations, Hénon, Lozi.

Abstract

In this dissertation, we present the basic notions of dynamic systems, starting with a well detailed study in the first dimension on the Verhulst recurrence, where the different cases are discussed according to the population growth parameter, the latter is always positive. Then we present two well known and famous chaotic systems « Hénon and Lozi », this passage into dimension two allowed us to study singularities and bifurcations, and to trace the chaotic attractors which exist for certain values of the parameters.

Key words : the Verhulst recurrence, the chaotic attractor, bifurcations, Hénon, Lozi.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بتقديم المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية, بدءا بدراسة مفصلة في البعد الأول لنموذج فاراست حيث تم مناقشة الحالات المختلفة لمعدل النمو السكاني الموجب دوما. بعدها قمنا بتقديم النظامين الفوضويين المشهورين "هنون و لوزي" في البعد الثاني. هذا الانتقال في البعد سمح لنا بدراسة التشعبات و المتفرقات, و تتبع الجاذبات الفوضوية الموجودة لقيم بعض الوسائط.

الكلمات المفتاحية: نموذج فاراست, التشعبات, جاذبات فوضوية, جاذب هنون, جاذب لوزي

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Principales notations utilisées	iii
Liste des figures	v
Résumé	vi
Introduction	1
1 Définitions et propriétés générales sur les systèmes dynamiques.	3
1.1 Introduction	3
1.2 Rappels de quelques définitions élémentaires	4
1.3 Singularités et stabilité	5
1.3.1 Singularités	5
1.3.2 Stabilité des singularités	6
1.4 Ensembles stables et instables	7
1.5 Plan paramétrique Bifurcation	9
1.5.1 La bifurcation fold (Nœud - Col)	9
1.5.2 Cas particulier de la bifurcation fold	10
1.6 Bifurcation concernant les bassins d'attractions	12
1.6.1 La bifurcation de contact de type 1	12
1.6.2 La bifurcation de contact de type 2	13

1.7	Structure de bifurcation Boites-emboîtées	13
1.8	Structure feuilletée d'un plan paramétrique	14
1.8.1	Zone de communication entre feuillets	14
1.9	Plan de phase d'une transformation non inversible	17
1.9.1	Les Lignes critiques	17
1.9.2	Formulation mathématique des lignes critiques	18
1.10	Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins	18
1.11	Attracteurs et Attracteurs chaotiques	21
1.12	chaos stable ou attrateur étrange	22
1.13	le chaos instable ou répulseur étrange	22
1.14	Bassin d'attraction	22
2	Modèle de Verhulst, Suite Logistique, Convergences et Intérêts	24
2.1	Introduction	24
2.2	Le modèle logistique continu	25
2.3	Le modèle logistique discret	25
2.4	Intérêts de ce modèle	26
2.5	La suite logistique : première exploration	27
2.6	La fonction f et ses points fixes	28
2.6.1	points fixes et convergence :quelques rappels	28
2.6.2	Les points fixes de f	29
2.7	Les cas de convergence : $0 < \mu \leq 3$	30
2.7.1	Le cas $0 < \mu < 1$	30
2.7.2	Le cas $\mu = 1$	30
2.7.3	Le cas $1 < \mu < 2$	31
2.7.4	Le cas $\mu = 2$	31
2.7.5	Le cas $2 < \mu < 3$	31
2.7.6	Le cas $\mu = 3$	31
2.8	Les points fixes de f^2	33
2.9	Les points fixes de f^4	34
2.10	les bifurcations de l'application logistique	35
2.10.1	Classification des bifurcations	35

3	Etude de l'attracteur de Hénon et Lozi	38
3.1	Introduction	38
3.2	Application de Hénon en dimension 2	39
3.2.1	Calcul des points fixes	39
3.2.2	Stabilité des points fixes	41
3.2.3	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$	44
3.2.4	Etude du plan des paramètres	44
3.2.5	Sensibilité aux conditions initiales	46
3.2.6	Analyse numérique de bifurcation	47
3.2.7	Bassin d'attraction de Hénon	48
3.3	Application de Lozi en dimension 2	49
3.3.1	Propriétés de l'application de Lozi	49
3.3.2	Stabilité des points fixes	50
3.3.3	L'attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	51
3.3.4	Le type de chaos dans l'application de Lozi	52
4	Annexe	54
4.1	Programme Maple	54
	Bibliographie	57

Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de mesure et des probabilités. La nature de cette recherche est conditionnée par le système dynamique étudié. Quelque soit sa nature, un système dynamique est la donnée conjointe d'un espace des phases c'est à dire une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré, d'un paramètre usuellement appelé temps, qui peut être discret ou continu, et d'une loi d'évolution.

La théorie des systèmes dynamiques introduite par Newton vers 1665 dans la mécanique fournissant des modèles mathématiques pour des systèmes évoluant dans le temps suivant des règles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles symbolisent les systèmes dynamiques continus.

Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. C'est à dire, des systèmes dans lesquels le temps évolue par rupture de séquences régulières.

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du *XIX^e* siècle. Ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Mais progressivement, au fur et à mesure de la diversification des mathématiques, les systèmes dynamiques se sont considérablement élargis. Ils sont définis en deux classes : les systèmes continus et discrets.

Dans ce travail nous allons étudier essentiellement les systèmes dynamiques discrets, et nous avons divisé le mémoire en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions importantes et propriétés gé-

nères sur les systèmes dynamiques. et on introduira des notions élémentaire concernant les singularités des transformations ponctuelles de dimension un et deux et leur propriétés qui jouent un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires et quelques types de bifurcation en dimension un. Nous étudions la notion de bifurcation de singularités et de bassins d'attraction.

Dans le deuxième chapitre, nous avons représenté le modèle de Verhulst, suite Logistique, et utilisé quelques rappels pour étudier Les points fixes et convergence de la Logistique, puis nous étudions les bifurcations de l'application logistique et la route vers le chaos.

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier deux exemples des systèmes dynamiques chaotiques (Hénon, Lozi) en dimension 2 et leurs propriétés, puis nous avons étudié la stabilité de leurs points fixes, leurs régions de stabilité, les bifurcations.

Définitions et propriétés générales sur les systèmes dynamiques.

1.1 Introduction

La modélisation de nombreux systèmes dynamiques conduit à une formulation par équations différentielles non linéaires et non autonomes. Dans le cas de la dimension deux, la forme explicite suivante :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \lambda, t) \\ y' = g(x, y, \lambda, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

est la plus courante où f et g sont deux fonctions de classe C^r ($r \geq 0$) par rapport aux variables réelles x et y du paramètre λ de \mathbb{R}^q , périodiques du période τ par rapport à t .

par la méthode de surface de section de Poincaré, on peut associer au système différentiel (1.1) localement une récurrence autonome T de type difféomorphisme.

L'avantage de cette méthode est de diminuer de l'ordre effectif par l'élimination de la dépendance explicite de temps. Ainsi une transformation ponctuelle constitue l'outil essentiel d'étude des équations différentielles.

L'idée de base de cette méthode est d'associer à un point $M_n(X_n)$ situé à l'intersection de la surface de section et d'une trajectoire de phase donnée, son conséquent $M_{n+1}(X_{n+1})$ point d'intersection de la surface de section et de la trajectoire considérée, situé après M_n dans le sens du temps croissant. Les points M_n et M_{n+1} sont alors liés par une transformation bidimensionnelle autonome $T : M_{n+1} = TM_n$, $n = 1, 2, \dots$ (voir Figure (1.1))

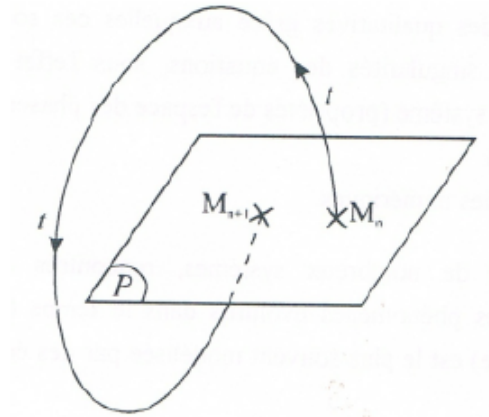


Figure 1.1 : Section de poincaré

Le but de ce chapitre est de rappeler les définitions principales et les résultats généraux spécifiques aux systèmes dynamiques discrets et nous intéressons aux ceux lié aux transformations ponctuelles bidimensionnelles.

1.2 Rappels de quelques définitions élémentaires

Dans ce paragraphe, nous considérons les transformations ponctuelles (ou récurrences) autonomes sous la forme explicite donnée par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = TX_n = F(X_n, \lambda) \\ X_n \in \mathbb{R}^p (p = 2), \lambda \in \mathbb{R}^q \quad (q \geq 1) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où, F est au moins de classe \mathbb{C}^k , $k \geq 1$ par rapport à la variable X et au paramètre λ . \mathbb{R}^p est l'espace d'état (de phase) et p la dimension de la transformation (1.2), \mathbb{R}^q s'appelle l'espace des paramètres.

Définition 1.1. Une solution de (1.2) est formée par une suite de points $X_n, n = 0, 1, \dots$ avec X_0 est appelé condition initiale, les points $X_n, n = 0, 1, \dots$ forment une trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

Définition 1.2. La transformation T est un difféomorphisme si F dans (1.2) est continuellement différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition. Si F est discontinue ou non différentiable et à inverse unique, alors T est simplement dit inversible. Enfin, si F ne possède pas d'inverse unique, T est appelé un endomorphisme.

Définition 1.3. L'itéré X_{n+r} avec $r \geq 1$, est appelé conséquent de rang r de X_n , c'est à dire :

$$X_{n+r} = T^r(X_n)$$

X_n est un antécédent de rang r de X_{n+r} noté : $X_n = T^{-r}(X_{n+r})$.

Lorsque T est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang 1 ou aucun.

1.3 Singularités et stabilité

1.3.1 Singularités

On distingue deux types de singularités de dimension zéro pour la transformation T : les points fixes et les cycles, encore appelés orbites périodiques.

Définition 1.4. les points fixes

Un point fixe X^* est un point du plan des phases vérifiant :

$$X^* = T(X^*) \tag{1.3}$$

Définition 1.5. les Cycles d'ordre k (k entier)

Un Cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (X_1^*, \dots, X_k^*) du plan des phases, vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1}^* = T(X_i^*) , i = 1, \dots, k-1 \\ X_i^* = T(X_k^*) \\ X_i^* = T^k(X_i^*) , i = 1, \dots, k \\ X_i^* \neq T^h(X_i^*) , i = 1, \dots, k \text{ et } 1 \leq h < k. \end{cases} \tag{1.4}$$

Chaque point X_i^* d'un cycle d'ordre K est un point fixe de T^k . Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points X_i^* par applications successives de T , un tel cycle sera désigné par le système (k, j) (k représente l'ordre du cycle et J caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de T). Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un, il peut également apparaître des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation T ou T^k .

Définition 1.6. *courbes invariantes*

Dans le plan de phases \mathbb{R}^2 , une courbe définie par l'équation $Q(X) = C$, C une constante, est invariante par la transformation T ou T^k , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$Q(T(X)) = Q(X) \text{ ou } Q(T^k(X)) = Q(X) \quad (1.5)$$

Plus généralement, un ensemble A de \mathbb{R}^p est invariant par T ssi $T(A) = A$.

1.3.2 Stabilité des singularités

Pour caractériser la nature des singularités de dimension zéro, on introduit la notion de multiplicateurs (ou valeurs propres) définie lorsque F est différentiable au point considéré.

(1) Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe X^* est

$$S = F'(X^*) \text{ avec } F' = \frac{dF}{dX} \text{ et celui d'un cycle d'ordre } k, (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*) \text{ et } S = \prod_{i=1}^k F'(X_i^*).$$

Un point fixe ou un cycle d'ordre k est dit attractif (asymptotiquement stable) si $|S| < 1$ et répulsif (instable) si $|S| > 1$.

(2) Si la dimension de la récurrence $p = 2$, un point fixe X^* ou un cycle d'ordre k , $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ possède deux multiplicateurs S_1 et S_2 qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de F (pour un point fixe) ou F^k (pour un cycle d'ordre K) au point considéré.

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et répulsif si $|S_1| > 1$ ou $|S_2| > 1$.

Selon les valeurs prises par S_1 ou S_2 avec $|S_i| \neq 1, i = 1, 2$, on définit différentes sortes de points fixes ou cycles :

1. Col : S_1 et S_2 sont réels : $|S_1| > 1$ et $|S_2| < 1$. Un col est toujours instable.
2. Nœud : S_1 et S_2 sont réels.
 - Attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$.
 - Répulsif si $|S_i| > 1, i = 1, 2$.
3. Foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués, $S_1 = \rho e^{-i\theta}, S_2 = \rho e^{+i\theta}$
 - Attractif si $\rho < 1$.
 - Répulsif si $\rho > 1$.

La figure 1.2 représente les trajectoires au voisinage d'un point fixe.

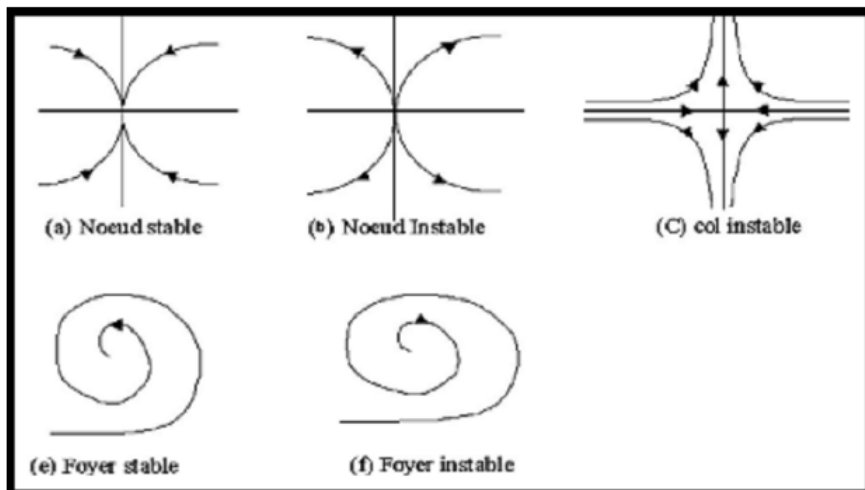


Figure 1.2 : Trajectoires au voisinage d'un point fixe

1.4 Ensembles stables et instables

Pour une transformation ponctuelle T définie par (1.2), on peut définir les ensembles stables et instables associés à un point fixe.

Définition 1.7. Soit X^* un point fixe répulsif et U un voisinage de X^* .

- On appelle $W_{loc}^i(X^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est à dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U qui converge vers X^* .
- On appelle $W^i(X^*)$ ensemble instable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers X^* .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(X^*) = \{X \in U : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{-n} \in U\} \quad (1.6)$$

$$W^i(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^*\} = \cup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i(X^*)) \quad (1.7)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

- 1) $W^i(X^*)$ est invariante par rapport à T c'est à dire : $T[W^i(X^*)] = W^i(X^*)$.
- 2) Si T est un endomorphisme, en général $W^i(X^*)$ n'est pas invariant par rapport à T^{-1} et on a : $W^i(X^*) \subseteq T^{-1}[W^i(X^*)]$.

L'invariance de $W^i(X^*)$ par rapport à T^{-1} a lieu lorsque T est inversible.

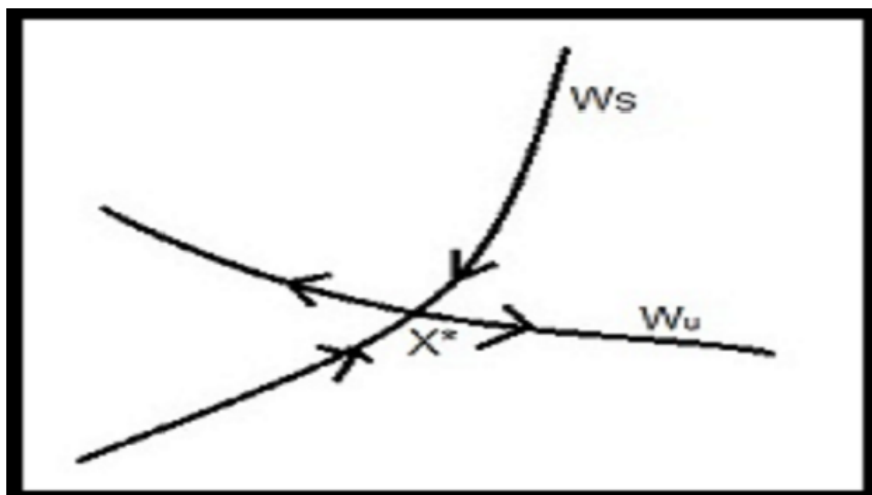


Figure 1.3 : Courbe invariante d'un point fixe

Définition 1.8. Soit X^* un point fixe T répulsif ou attractif.

- On appelle $W_{loc}^s(X^*)$ ensemble stable local ou variété stable locale (c'est à dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers X^* .
- On appelle $W_{loc}^s(X^*)$ ensemble stable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p dont la séquence d'images successives converge vers X^* .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_n \in T^n(X) \rightarrow X^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_n \in U\} \quad (1.8)$$

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_n \in T^n(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)) \quad (1.9)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

- 1) $W^s(X^*)$ est invariante par rapport à $T^{-1}[W^s(X^*)] = W^s(X^*)$.
- 2) Si T est un endomorphisme, en général $W^s(X^*)$ n'est pas invariant par rapport à T et on a : $T[W^s(X^*)] \subseteq W^s(X^*)$. L'invariance de $W^s(X^*)$ par rapport à T a lieu lorsque T est inversible.

Remarque 1.1. (1) Si X^* est un point fixe attractif l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.

- (2) Si T est un difféomorphisme les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.
- (3) Dans le cas d'un point fixe X^* de type nœud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de X^* se réduit à X^* lui même lorsque T est inversible. Lorsque T est non

inversible l'ensemble stable local de X^ se réduit à X^* lui même et l'ensemble stable global de X^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de X^* Ceci s'écrit :*

$$W^s(X^*) = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(X^*) \text{ et } \forall X \in W^s(X^*) : \exists m \in \mathbb{N} / T^m(X) = X^* \quad (1.10)$$

(4) Les définitions des ensembles stables et instables d'un cycle d'ordre k se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de T^k .

1.5 Plan paramétrique Bifurcation

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre λ traverse une valeur critique λ_0 . En particulier les valeurs de λ correspondent à un cas critique de Lyapounov sont liées à des bifurcations dites classiques. Sous l'effet d'une petite variation autour λ_0 , ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de nouvelles singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Pour les transformations décrites par (1.2) plusieurs sortes de bifurcations se produisent.

1.5.1 La bifurcation fold (Nœud - Col)

Naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre k , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux points fixes (cycles) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle S_1 ou S_2 est égal à 1.

Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\emptyset \xrightarrow{S=+1} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) + C^k \quad (1.11)$$

\emptyset signifie absence de cycle, N_s^k cycle nœud d'ordre k stable, N_i^k cycle nœud d'ordre k instable, C^k cycle col d'ordre k .

Les valeurs du paramètre λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\lambda_{(k)0}^j$, k correspond à l'ordre du cycle, j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T .

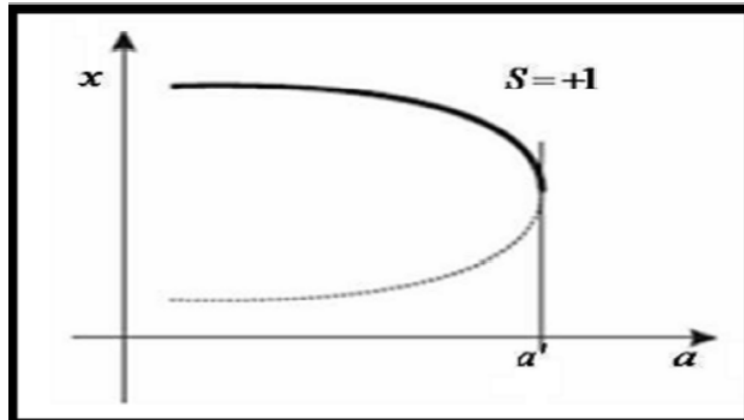


Figure 1.4 : Bifurcation flod ou nœud-col(pli)

1.5.2 Cas particulier de la bifurcation fold

1.5.2.1 Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux collecteurs différents points fixes se croisent. Au point de passage de l'échange des points fixes il y a la propriété de stabilité. Le point fixe instable devient stable et vice versa. Notez qu'au-de là du point de bifurcation, le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation nœud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation nœud-col, sa représentation dans les Figures (1.5) - (1.6).

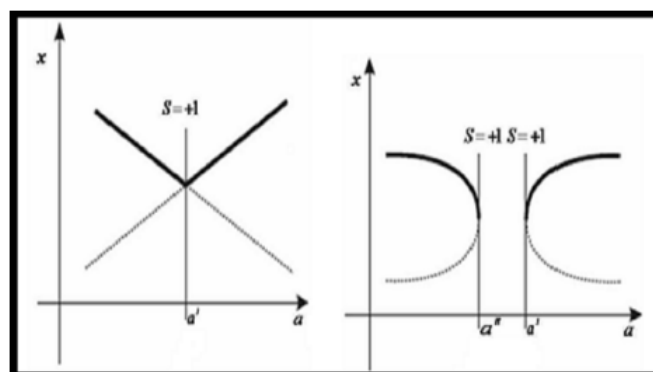


Figure 1.5 : Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) :stable, (...) :instable.

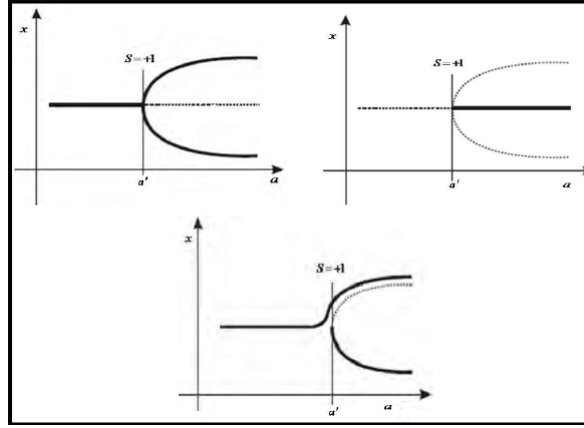


Figure 1.6 : Bifurcation fourche supercritique(à gauche), sous-critique(à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (...) : instable.

1.5.2.2 La bifurcation flip (doublement de période)

Un point fixe (resp. cycle d'ordre k) de type nœud change de stabilité lorsque S_1 ou S_2 est égal à (-1) , et donne naissance à un cycle d'ordre 2 (resp cycle d'ordre $2k$) qui a la même stabilité que le point fixe (resp. cycle d'ordre k) d'origine.

Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\begin{cases} N_s^k(\text{resp. } N_i^k) \xrightarrow{S=-1} N_i^k(\text{resp. } N_s^k) + N_s^{2k}(\text{resp. } N_i^{2k}) \\ C^k \xrightarrow{S=+1} N_s^k(\text{resp. } N_s^k) + C^{2k} \end{cases} \quad (1.12)$$

N_s^{2k} signifie cycle nœud d'ordre $2k$ stable, N_i^{2k} cycle nœud d'ordre $2k$ instable, C^{2k} cycle col d'ordre $2k$.

Les valeurs du paramètre λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées λ_k^j .

1.5.2.3 La bifurcation de Neimark-Hopf

Un point fixe (resp. cycles d'ordre k) de type foyer change de stabilité (lorsque $S_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi}$ vérifient $\rho = 1$) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. On a le schéma :

$$F_s^k(\text{resp. } F_i^k) \xrightarrow{\rho=1} F_i^k(\text{resp. } F_s^k) + C.F.I_s^k(\text{resp. } C.F.I_i^k) \quad (1.13)$$

Où F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable, F_i^k cycles foyer d'ordre k instable, $C.F.I_s$ correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k stables (attractives), $C.F.I_i$

correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k instables (répulsives). Ces courbes fermées invariantes s'échangent cycliquement par k applications successives de T . Les valeurs du paramètre λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées Γ_k^j .

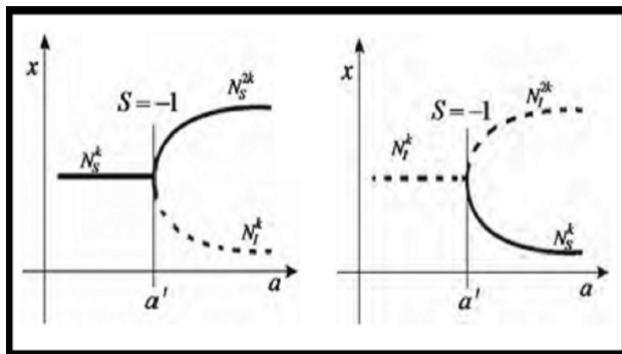


Figure 1.7 : Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous critique (à droite).

1.6 Bifurcation concernant les bassins d'attractions

Dans ce paragraphe on décrit les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction, ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin avec une ligne critique d'une transformation ponctuelle non inversible.

1.6.1 La bifurcation de contact de type 1

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière du bassin \mathcal{F} entre en contact avec LC a une certaine valeur de bifurcation, elle concerne le changement de l'intersection entre le bassin d'attraction \mathcal{D} et LC est formée de segments non connexe :

- bassin connexe \rightarrow bassin non connexe.
- bassin non connexe \rightarrow bassin connexe.
- bassin simplement connexe \rightarrow bassin multiplément connexe.

1.6.2 La bifurcation de contact de type 2

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière d'un aire chaotique entre en contact avec la frontière de son bassin immédiat après la bifurcation l'aire chaotique se détruit en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de l'aire chaotique. Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leur point limite et de leurs antécédents, appartenant à l'aire chaotique avant la bifurcation.

Ces points son responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évoluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

1.7 Structure de bifurcation Boites-emboîtées

La structure de bifurcation " boîtes-emboîtées " a été mise en évidence en 1975, cette structure est un autre type d'organisation fractal pour l'ensemble de bifurcation dans le plan paramétrique d'un système dynamique donné.

Rappelons que le terme bifurcation désigne des changements qualitatifs du système sous l'effet des variations des paramètres.

Ici le terme fractal indique que les boîtes sont autosimilaires c'est à dire que l'ensemble est semblable aux parties (boîtes) et ceci reste vrai même quand ces parties sont infinitésimales. Cette structure fractale donne une route vers le chaos pour un grand nombre de systèmes dynamiques.

La cascade de Merberg ou cascade de doublement de période constitue une partie de la structure de bifurcation " boîtes-emboîtée " les détails concernant cette structure peuvent être trouvés dans Mira et Gumowski [6,7].

Appelons ω l'intervalle $[\lambda_{(1)0}, \lambda_1^*]$ l'axe paramétrique contenant tous les structures de bifurcation "boîtes-emboîtées". A l'intérieur de cette boîte Ω_1 on distingue deux sous intervalles (boites) sur l'axe paramétrique notés ω_1 et Δ_1 . En gèneral, l'indice k utilisé désigne les boîtes ω_k et Δ_k qui forment la boîte ω_k , cette dernière traduit la même organisation des bifurcations que la boîte Ω_1 mais par rapport à la transformations T^k .

La Figure(1.8) donne une représentation de la disposition de ces boîtes. Dans [7] une structure de bifurcation " boîtes-emboîtées " de type cubique a été décrite pour la transformation définie par :

$$X_{n+1} = -X_n^3 + \mu X^2 + \lambda X^n \quad (1.14)$$

Ce type de structure constitue une propriété caractéristique des endomorphismes à une dimension défini par une fonction à deux extrema, vérifiant des conditions de régularités suffisantes pour assurer l'existence d'un attracteur au voisinage de chaque extremum.

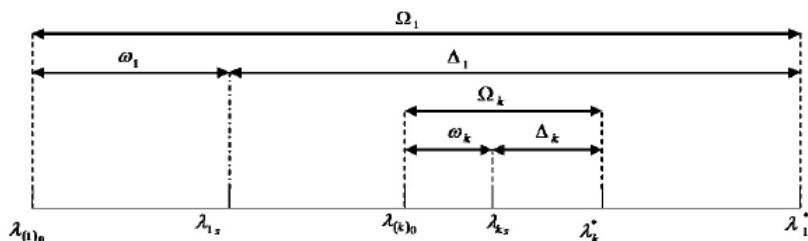


Figure 1.8 : Structure de bifurcation boîtes emboîtées.

1.8 Structure feuilletée d'un plan paramétrique

L'étude de la structure de bifurcation de (1.3) dans le plan de paramètres $\gamma^* = (\lambda_1, \lambda_2)$ montre que pour un point de ce plan, il peut exister plusieurs cycles d'ordre et de stabilité différents.

Cette remarque induit le caractère feuilleté du plan des paramètres. Chaque feuillet est alors associé à un cycle bien défini par son ordre k , l'ordre d'échange de ses points j , et les valeurs propres de la transformation linéaire associée S_1 et S_2 , les feuillets pouvant se joindre en des points ou courbes particuliers. Soit $|z|$ une norme qualitative associée à un cycle, l'espace $(|z|, \lambda_1, \lambda_2)$ donne une représentation tridimensionnelle qualitative de la structure de ces feuillets.

Les courbes $\gamma_{(k)0}^j$ désignent les courbes correspondant à une bifurcation fold. Elles sont la jonction de deux feuillets, l'un lié au cycle né stable, l'autre lié au cycle né instable. Des communications plus complexes entre feuillets peuvent apparaître par des singularités de codimension deux comme les points cuspidaux.

1.8.1 Zone de communication entre feuillets

Des zones de communication entre feuillets du plan des paramètres peuvent apparaître. Ces zones sont caractérisées par l'existence d'un point cuspidal C_k^j sur une courbe de bifurcation de type fold associée à des courbes de bifurcation de type flip. Il existe trois schémas

distincts d'association de la courbe fold avec courbes flip qui correspondent à trois zones de communication.

1.8.1.1 Zone échangeur

Dans le plan de paramètres (λ_1, λ_2) , une zone échangeur met en jeu une courbe de type fold $\gamma_{(k)0}^j$ formant un point cuspidal C_k^j , des courbes de types flip $\gamma_{(k)}^j, \gamma_{(k)}^{j'}, \gamma_{(k)}^I$ et soit une courbe de bifurcation fold $\gamma_{(k)0}^I$, soit une courbe de bifurcation flip $\gamma_{k/2}^I$, donnant naissance à un cycle d'ordre double (k, l) à partir d'un cycle $(k/2, l)$ Figures (1.9) (a)(b).

Ces zones échangeurs sont respectivement désignées par $ZEK[l_0, j]$, $ZEK[l, j]$.

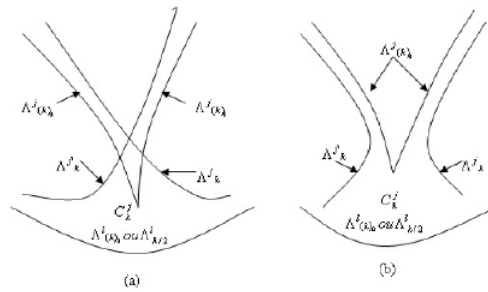


Figure 1.9 : Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

1.8.1.2 Zone col

Cette zone met en jeu deux courbes de type fold $\gamma_{(k)0}^j$ et $\gamma_{(k)0}^{j'}$ et deux courbes flip γ_k^j et $\gamma_k^{j'}$ voir Figure (1.10).

Le principe de cette communication est que le cycle col (k, j) , $(S > 1)$ qui naît au cours de la bifurcation $\gamma_{(k)0}^{j'}$, $(S = +1)$ est le cycle de base qui définit aussi la courbe de bifurcation $\gamma_{(k)0}^j$ présentant un point cuspidal $C_k^{j'}$ dans le plan des paramètres. La zone col est désignée par le formalisme $ZCK[j, j']$.

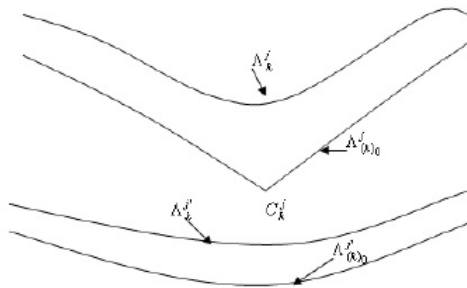


Figure 1.10 : Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

1.8.1.3 Zone source

Cette zone met en jeu sept courbes de bifurcation :

- La courbe de type fold $\gamma_{(k)0}^j$ présentant un point cuspidal C_k^j .
- La courbe de type flip γ_k^j formant une boucle qui entoure le point cuspidal.
- La courbe de type flip γ_k^l située sur le même feuillet que γ_k^j .
- Les deux courbes de type fold $\gamma_{(2k)0}^m$ et $\gamma_{(2k')0}^{m'}$ se terminant sur γ_k^j par les deux points C_{2k} et $C_{2k'}$.
- Les deux courbes de type flip γ_{2k}^m et $\gamma_{2k'}^{m'}$, chacune d'elles résultant d'un doublement d'ordre d'une branche de γ_k^j et venant aussi des cycles $(2k, m)$ et $(2k, m')$ générés par les deux courbes fold précédentes. Cette zone est désignée par le formalisme $ZSK[l, j, (m, m')]$.

Ces différentes zones de communications correspondent, lorsque elles sont associées à des cycles stables, à des zones de multistabilité dans l'espace des paramètres.

Plusieurs études dont ont mis en évidence plusieurs scénarios concernant les transitions d'une zone source ou d'une zone col avec une zone échangeur lors de la variation d'un troisième paramètre.

$$T(LC_{-1}) = LC \text{ et } LC_{-1} \subset T^{-1}(LC).$$

L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :

- a) Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.
- b) Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations.
- c) Les lignes critiques partagent le plan de phase en zones Z_i , chaque zone Z_i possède i antécédents de rang un.

1.9.2 Formulation mathématique des lignes critiques

1.9.2.1 Cas différentiable.

Dans le cas où T est différentiable, une courbe LC_1 est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de T s'annule.

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, J(X) = 0\}$$

1.9.2.2 Cas non différentiable

Dans le cas où T est non différentiable, une courbe LC_1 est le lieu des points de non différentiabilité. On suppose que ces points sont des antécédents de rang un confondus puisque T est continûment différentiable par morceaux. Cet ensemble est donc :

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\}$$

1.10 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine D , situé dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur A . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de D avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible.

On notera ∂D la frontière de D , D_0 le bassin immédiat de l'attracteur A et ∂D sa frontière.

1.10. RÔLE DES LIGNES CRITIQUES DANS LES BIFURCATIONS FONDAMENTALES DES BASSINS

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type (Z_0, Z_2) .

Proposition 1.1

Soit T un endomorphisme de type (Z_0, Z_2) dépendant d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_b , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :

- (a) Bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)
- (b) Bassin simplement connexe \leftrightarrow Bassin multiplément connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)
- (c) Augmentation ou diminution du nombre d'ilôts de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
- (d) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.
- (e) Transition lacs \leftrightarrow baie.
- (f) Transition frontière externe faiblement fractale \leftrightarrow frontière externe fortement fractale.

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC .

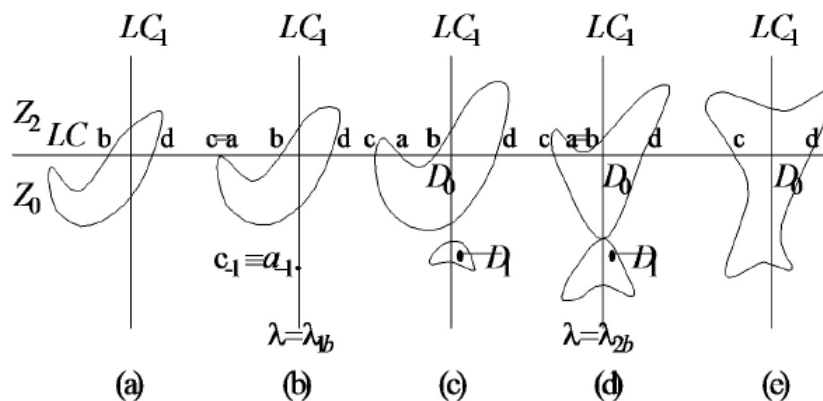


Figure 1.12 : Bifurcation d'un domaine D_0 connexe \leftrightarrow non connexe.

La partie (a) de cette proposition est illustrée par la Figure (1.12), sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation $\lambda = \lambda_{1b}$, correspond à un contact entre

1.10. RÔLE DES LIGNES CRITIQUES DANS LES BIFURCATIONS FONDAMENTALES DES BASSINS

∂D_0 et LC au point $a \equiv c.\{T^{-1}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, est une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour $\lambda < \lambda_{1b}$, devient non connexe pour $\lambda > \lambda_{1b}$. La seconde bifurcation $\lambda = \lambda_{2b}$, correspond à un contact tangentiel entre D_0 et LC au point $a \equiv b$, donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre ∂D_0 et la frontière ∂D_1 de l'îlot D_1 . Après cette dernière bifurcation D redevient connexe.

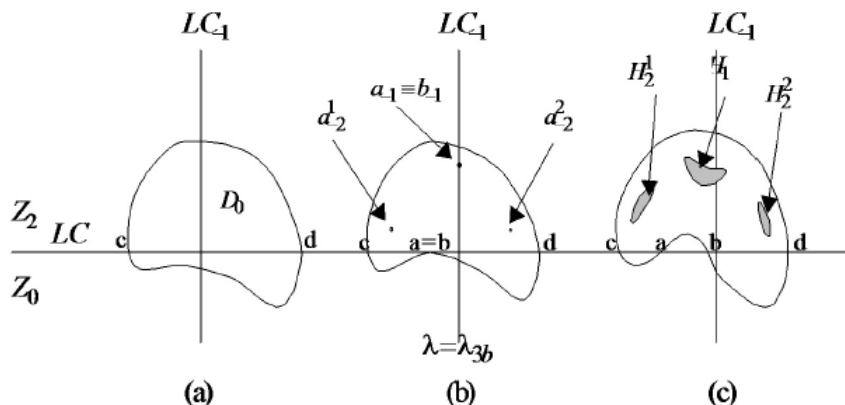


Figure 1.13 : Bifurcation d'un bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe.

La partie (b) de cette proposition, est illustrée par la Figure (1.13), sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur $\lambda = \lambda_{3b}$ a lieu un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$. Les antécédents de tout rang $T^{-n}(a)$ du point a , forment une séquence arborescent de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N lacs.

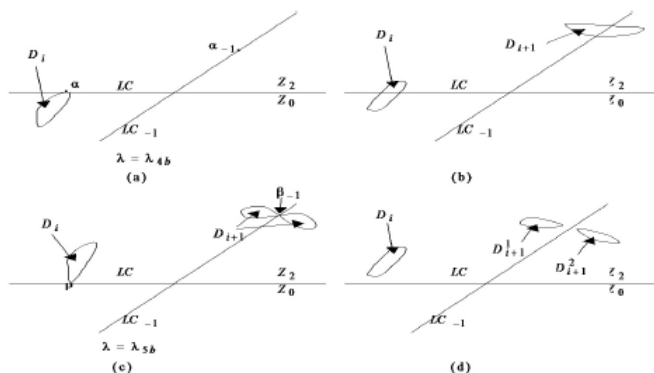


Figure 1.14 : Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

La partie (c) est illustrée par la Figure 1.14, sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu

à la valeur $\lambda = \lambda_{4b}$ (Figure 1.14 a) et qui correspond à un contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\alpha = D_i \cap LC$. Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_{4b}$, l'îlot D_i était à l'intérieur de la région $Z_0(D_i \cap \bar{Z}_2 = 0)$. A la bifurcation, les antécédents de tout rang $T_{-n}(\alpha)$ de $\alpha(T_{-n}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1})$ constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots $D_{i+n}, D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$.

En continuant à faire varier le paramètre λ de manière continue, l'îlot D_i progresse dans la région $Z_2(FIG(1.14)b)$. La seconde valeur de bifurcation $\lambda = \lambda_{5b}$ (Fig 1.14 c), correspond à un nouveau contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\beta = D_i \cap LC(D_i \subset \bar{Z}_2)$.

Ceci implique que le point $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$ est un point d'intersection limite entre LC_{-1} et D_{i+1} , avant que ce dernier se divise en deux îlots $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$, lorsque la valeur de λ dépasse la seconde valeur de bifurcation (Figure 1.14 d).

La partie (d) est analogue à la partie (c), en substituant dans le raisonnement de la partie (c) les îlots par des lacs d'un bassin multiplement connexe.

1.11 Attracteurs et Attracteurs chaotiques

Dans ce paragraphe nous donnons les définitions des attracteurs et attracteurs chaotiques.

Définition 1.11. *Un ensemble fermé invariant A est appelé ensemble attractif si dans tout voisinage W de A il existe un voisinage $U \subset W$ de A tel que $T(U) \subset U$ et $T^n(X) \rightarrow A$ quand $n \rightarrow \infty$ pour tout $X \in U$*

Définition 1.12. *Un attracteur A est un ensemble attractif topologiquement transitif, ce qui signifie que pour tout couple d'ensemble ouverts $U, V \subset A$ il existe un entier positif k tel que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$, de façon équivalente, il existe un point $P \subset A$ dont l'orbite est dense dans A un attracteur est peut être un point fixe ou un cycle d'ordre k ou une courbe invariante fermée ou un ensemble plus complexe.*

Définition 1.13. *Un attracteur chaotique est un ensemble attractif invariante, dont les points génèrent des suites itérées qui vérifient la propriété de sensibilité aux conditions initiales.*

Actuellement il n'y a pas de définition générale du terme " chaos". En fonction du contexte, on dit qu'un état est chaotique quand il est non périodique. On parle même de mouvement chaotique pour un mouvement chaotique très irrégulier sur une période, et pour lequel la du-

rée des observations physiquement possibles est inférieure à cette période. Le comportement chaotique est caractérisé par :

- Existence des cycles attractifs d'ordre infini.
- Coexistence d'une infinité des cycles répulsifs.
- L'absence des cycles attractifs d'ordre fini.

Qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique. On distingue deux types du chaos.

1.12 chaos stable ou attrateur étrange

Le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir, les caractéristiques de cet attrateur sont :

- Dans l'espace des phase, l'attrateur est de volume nul.
- La dimension de l'attrateur est fractale (non entière).
- Sensibilité au contitions initiales.

1.13 le chaos instable ou répulseur étrange

le système évolue d'une manière similaire, mais diverge après un certain nombre d'itération.

Définition 1.14. Soit A un sous ensemble fermé et borné du plan alors A est dite aire absorbante par rapport à T si :

1. $T(A) \subseteq A$.
2. Sa frontière est constitué d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques.
3. Il existe un voisinage U de A tel que $T(U) \subset U$ et tout point $X \in U \setminus A$ a une image de rang fini à l'intérieure de A .

1.14 Bassin d'attraction

Définition 1.15. le bassin d'attraction \mathcal{D} d'une attrateur (point fixe, cycle d'ordre k ou attrateur chaotique) est l'ensemble ouvert de contitions initiales X_0 dont les itérés successifs vont converger vers un attrateur $T^n(X_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$

Propriété 1.1.

\mathcal{D} est invariant par itération inverse T^{-1} , mais pas nécessairement invariant par T :

$$T^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \quad , \quad T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$$

lorsque la transformation est inversible on a $T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$

Définition 1.16. *La frontière de \mathcal{D} est notée \mathcal{F} ou $(\partial\mathcal{D})$. Elle est définie par : $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{C(\mathcal{D})}$. où $C(\mathcal{D})$ représente l'ensemble complémentaire de \mathcal{D} . $\overline{\mathcal{D}}$ (resp. $\overline{C(\mathcal{D})}$) représente l'adhérence de \mathcal{D} (resp. $C(\mathcal{D})$)*

Remarque 1.2. *Le bassin d'attraction peut être connexe, multiplement connexe (connexe avec tous) ou non connexe c'est à dire formé d'un nombre fini ou infini de composantes connexes (qui peuvent être simplement ou multiplement connexe) et sa frontière peut être fractale.*

Modèle de Verhulst, Suite Logistique, Convergences et Intérêts

2.1 Introduction

En dynamique des populations, le Modèle de Verhulst est un modèle de croissance proposé par Pierre François Verhulst vers 1840. Il a proposé ce modèle en réponse au modèle de Malthus qui proposait un taux d'accroissement constant sans frein conduisant à une croissance exponentielle de la population.

Le modèle de Verhulst imagine que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente, Verhulst propose d'autre part que, lorsqu'une population est de petite taille, elle a tendance à croître.

Le même modèle est utilisable pour des réaction autocatalytique, dans lesquelles l'augmentation des individus touchés est proportionnelle à la fois au nombre d'individus déjà touchés et au nombre d'individus qui peuvent encore être touchés.

Ce modèle conduit en temps continu à une fonction logistique et en temps discret à une suite logistique dont la particularité est d'être dans certaines circonstances chaotique.

2.2 Le modèle logistique continu

On suppose que la population ne peut croître indéfiniment et on suppose qu'elle admet une borne m .

L'idée de Verhulst [8] c'est que l'accroissement de p donné par la dérivée p' , est "proportionnel" à la fois à la population p , mais aussi à la place disponible $m - p$, d'où l'équation

$$p' = \mu p(m - p).$$

Il est facile d'intégrer cette équation par deux méthodes au moins :

- 1) Le changement de fonction $z = \frac{1}{p}$ qui conduit à l'équation linéaire $z' = \mu(1 - zm)$.
- 2) La décomposition en éléments simples qui mène à $\frac{p'}{p} + \frac{p'}{m - p} = \mu m$. Où il ne reste plus qu'à prendre des primitives.

Avec l'une ou l'autre méthode, on trouve la solution : $p(t) = \frac{m}{1 + \lambda e^{-\mu m t}}$ et l'étude de cette fonction est très simple.

2.3 Le modèle logistique discret

On peut utiliser un modèle comme ci-dessus, donnant l'accroissement de population $p_{n+1} - p_n = k p_n(m - p_n)$ ou une analyse en terme de population idéale .

Dans tous les cas, on obtient une équation de degré 2 :

$$p_{n+1} = \mu p_n - \lambda p_n^2 = \lambda p_n \left(\frac{\mu}{\lambda} - p_n \right) = \mu p_n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} p_n \right)$$

Comme $p_n \geq 0$, on a nécessairement $p_n \leq \frac{\mu}{\lambda}$. Si on appelle u_n le rapport entre la population p_n et la population maximum $\frac{\mu}{\lambda}$, on trouve l'équation logistique standard :

$$u_{n+1} = \mu u_n (1 - u_n).$$

On note que cette équation ne dépend plus que de μ .

Comme u_n doit rester compris entre 0 et 1, puisque c'est le rapport entre la population et la population maximale, on vérifie qu'il faut que μ soit compris entre 0 et 4 .

Définition 2.1. Soit $\mu > 0$ un paramètre fixé. **L'application logistique** est :

$$f := \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \mu x(1 - x) \end{cases}$$

Partant d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose,

$$x_1 = f_\mu(x_0) , x_2 = f_\mu(x_1) , \dots , x_{n+1} = f_\mu(x_n) ,$$

Où

$$x_1 = f_\mu(x_0) , x_2 = f_\mu(x_1) = f_\mu(f_\mu(x_0)) = f_\mu^2(x_0), \dots , x_n = f_\mu^n(x_0) .$$

Remarque 2.1. On dit que c'est un système dynamique de dimension 1 car l'état est une variable $x \in \mathbb{R}$ et "à temps discret" car les points évoluent par étapes (et non continûment comme avec une ODE). La loi du mouvement est simplement $x_{n+1} = f(x_n)$. C'est une loi déterministe car la valeur de x_n à l'instant n et la fonction f déterminent la valeur x_{n+1} à l'instant suivant $n + 1$.

Définition 2.2. L'application logistique est l'application notée usuellement f_μ définie par :

$$f_\mu := \begin{cases} [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow \mu x(1 - x) \end{cases}$$

avec $\mu \in [0, 4]$. Cette application peut être appliquée plusieurs fois de suite, ce qui permet de définir par récurrence une suite $(u_n)_\mathbb{N}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f_\mu(u_n)$.

2.4 Intérêts de ce modèle

- 1) Les modèles dynamiques de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ en dimension 1 sont les plus simples que l'on puisse imaginer. Leur étude est donc importante.

Le cas $f(x) = ax + b$ (1^{er} degré) est simple à résoudre, c'est à dire il est facile d'exprimer x_n à partir de x_0 et n .

Le cas suivant $f(x) = ax^2 + bx + c$ du second degré est le cas suivant à considérer et apparaît dans de nombreux domaines. Par contre ce modèle dynamique du second degré n'est pas facile du tout à étudier.

- 2) En biologie des populations, Si $x_n \geq 0$ désigne le nombre d'individus (en unité de million d'individus) le jour n , on suppose que le jour suivant il y a $x_{n+1} = \alpha x_n$ individus avec $\alpha \geq 0$. Donc $x_n = \alpha^n x_0$.

Si $0 \leq \alpha < 1$ alors la population décroît.

Si $\alpha > 1$ alors la population croît. Pour être plus "réaliste", on suppose que le facteur

de reproduction α dépend du nombre d'individus et décroît avec x . (voir [10])

Par exemple $\alpha(x) = \mu(1 - x)$, son schéma est comme suit ;

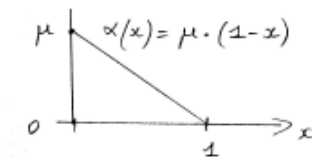


Figure 2.1 Schéma de la logistique $\alpha(x)$

Cela représente le fait que la présence d'un trop grand nombre x d'individus implique un manque de ressources et donc une baisse du facteur de reproduction $\alpha(x)$.

La loi obtenue est l'application logistique :

$$x_{n+1} = \alpha(x_n).x_n = \mu x_n(1 - x_n) = f(x_n)$$

2.5 La suite logistique : première exploration

Dans tout ce qui suit on pose $I = [0, 1]$, nous allons étudier la suite logistique mentionnée précédemment. Il s'agit de la suite (u_n) , définie par récurrence par une valeur initiale $u_0 \in I$ et par la formule $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$ avec $0 < \mu \leq 4$, (voir [9]) De façon plus érudite, on parle aussi de l'étude du système dynamique défini par la fonction $f(x) = \mu x(1 - x)$, c'est-à-dire de l'étude de la suite des itérés $x, f(x), f(f(x)), f_n(x)$ pour $x \in I$ (on a noté $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, n fois). L'ensemble de tous ces transformés est l'orbite de x . Ce qu'il faut garder en tête, lorsqu'on pense système dynamique, c'est qu'on va faire varier le x , ou le u_0 , ainsi que le paramètre μ , l'objectif étant d'étudier le comportement asymptotique d'un x générique, pour un μ générique. Il y a d'ailleurs deux sens possibles à ce mot : celui des topologues, pour lequel générique signifie " sur un ouvert dense " et celui des ergodiciens, pour lequel il veut dire " hors d'un ensemble de mesure nulle". Nous reviendrons (voir [9]) sur ce point plus loin. Il faut comprendre aussi que les calculs explicites des itérés de f deviennent très vite compliqués. De plus, le fait que la dynamique soit parfois chaotique fait que les calculs approchés sont rapidement suspects. C'est ce qui conduit à préférer un traitement qualitatif et géométrique.

2.6 La fonction f et ses points fixes

Soit $\mu \in]0, 4]$. On pose $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.

Quand il n'y a aucun risque de confusion, on note même $f = f_\mu$.

On a $f'(x) = \mu(1 - 2x)$ donc si $x = \frac{1}{2}$ cela implique que $f'(x) = 0$ et si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ cela implique que $f'(x) > 0$ et si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ cela implique que $f'(x) < 0$.

Le graphe de f est une parabole dont le sommet est le point $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$. On note qu'on a $f(0) = f(1) = 0$.

L'image de I est le segment $[0, \frac{\mu}{4}]$. En particulier, comme on a $\mu \leq 4$, l'intervalle I est stable.

2.6.1 points fixes et convergence : quelques rappels

Proposition 2.1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathbb{C}^1 .

- (1) Si une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un point l c'est un point fixe de f (i.e. on a $f(l) = l$). Dans la suite de cette proposition, l désigne un point fixe de f .
- (2) Si on a $|f'(l)| > 1$ (**point fixe répulsif**), une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ ne peut converger vers l que si elle est constante et égale à l à partir d'un certain rang.
- (3) Si on a $|f'(l)| < 1$ (**point fixe attractif**), il existe un intervalle J contenant l , stable par f tel que pour tout $u_0 \in J$, la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ associée converge vers l et on a une inégalité $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$ avec $0 < k < 1$. Le point l sera dit **super-attractif** si $f'(l)$ est nul. Dans ce cas, la convergence de la suite (u_n) est rapide.
- (4) Si on a $|f'(l)| = 1$ (**point fixe parabolique**), la convergence de la suite est possible, mais non assurée, et si elle a lieu, elle est lente (en n^α).
- (5) Si $f'(l) > 0$, la suite est monotone à partir d'un certain rang (convergence **en escalier**). Au contraire, si $f'(l) < 0$ les suites des termes pairs et impairs sont monotones de monotonies opposées. On parle d'une convergence en **escargot**.
- (6) **L'ensemble attracteur** A pour l'application f est l'adhérence des trajectoires $(x_n)_n$, partant de toute condition initiale x_0 **L'ensemble répulsif** de f est l'ensemble attracteur pour l'application inverse f^{-1} .

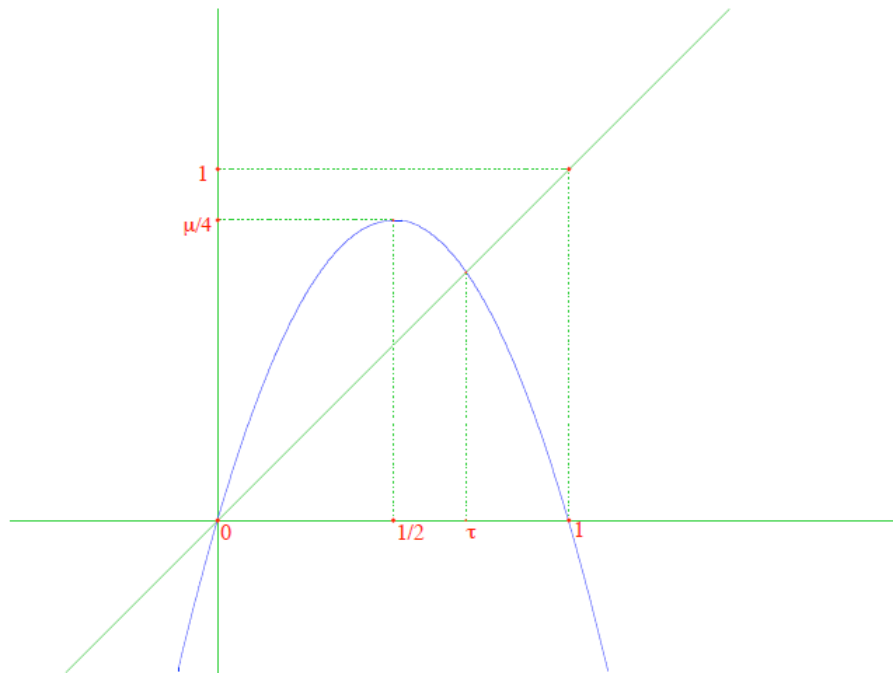


Figure 2.2 : le graphe de f_μ

2.6.2 Les points fixes de f

On considère l'application logistique :

$$f_\mu(x) = \mu x(1 - x), \quad x \in [0, 1] \text{ et } \mu \in [0, 4]$$

$$f_\mu(x) = x \Leftrightarrow \mu x(1 - x) = x \Leftrightarrow x(\mu - \mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\mu - 1}{\mu} \end{cases}$$

Les points fixes de f sont $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{\mu - 1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$ ($\mu > 1$) On a,

$$f'_\mu(x) = -2\mu x + \mu$$

Notons qu'on a $f'(0) = \mu > 0$ et $f'(x_2) = -2\mu\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) + \mu = 2 - \mu$.

Cela conduit à $x_1 = 0$ est un point fixe attractif si et seulement si $\mu < 1$, Il est répulsif pour $\mu > 1$ et douteux pour $\mu = 1$.

donc, si $\mu \in]0, 1[$, le point fixe 0 est asymptotiquement stable et si $\mu = 1$ il est semi-stable, et si $\mu \in]1, 3[$ 0 est instable.

D'autre part, on note déjà que $f'(x_2) = 2 - \mu$ est positif pour $\mu < 2$, nul pour $\mu = 2$ et négatif pour $\mu > 2$.

le point x_2 est attractif si ,

$$\begin{cases} |f'(x_2)| = |2 - \mu| < 1 \\ -1 < 2 - \mu < 1 \\ 1 < \mu < 3 \end{cases}$$

Le point fixe x_2 est attractif pour $1 < \mu < 3$ et douteux pour $\mu = 1$ et $\mu = 3$, et il est répulsif pour $\mu < 1$ et $\mu > 3$.

Donc, si $\mu \in]1, 3[$ le point fixe x_2 est asymptotiquement stable et si $\mu > 3$ il est instable.

2.7 Les cas de convergence : $0 < \mu \leq 3$

Dans ce qui suit, on montre le théorème suivant :

Théorème 2.1. *pour $0 < \mu \leq 3$ et pour toute valeur initiale $u_0 \in I$, la suite (u_n) est convergente (voir[8]).*

Pour $3 < \mu < 3.44$, la suite $(f_\mu^n(x))$, x dans le voisinage de $[0, 1]$, oscille entre deux valeurs, f_μ a une orbite périodique de période 2.

En réalité, ce résultat est une conséquence évidente du théorème de Coppel En effet, on vérifie que pour $\mu \geq 3$, la fonction f_μ n'admet pas de point de période 2 et pour $\mu = 3.4$ montre que toute suite récurrente de premier terme $u_0 \in I$ converge.

2.7.1 Le cas $0 < \mu < 1$

Il y a un unique point fixe dans I , le point $x_1 = 0$ qui est attractif.

Théorème 2.2. *On suppose $0 < \mu < 1$, soit $u_0 \in I$:*

1- *Pour $u_0 = 0$ la suite est constante, pour $u_0 = 1$ elle est constante et égale à 0 à partir du rang 1.*

2- *On suppose $u_0 \in]0, 1]$, La suite u_n décroît et converge géométriquement vers 0.*

2.7.2 Le cas $\mu = 1$

Pour $u_0 \in I$, on montre encore que la suite converge vers 0, mais la convergence est en $\frac{1}{n}$.

2.7.3 Le cas $1 < \mu < 2$

Le cas $1 < \mu < 2$ se ramène au cas $0 < \mu < 1$ en vertu du lemme suivant :

Lemme 2.1. *On pose $v = 2 - \mu$. La fonction $f(x) = \mu x(1 - x)$ est conjuguée de $g(x) = vx(1 - x)$ par la fonction h définie par $h(x) = \frac{\mu - 1 - \mu x}{\mu - 2}$.*

Théorème 2.3. *On suppose $1 < \mu < 2$ donc $0 < x_2 < \frac{1}{2}$. Soit $u_0 \in I$,*

1- *Pour $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, la suite est constante.*

Pour $u_0 = 1$ (resp. $u_0 = \frac{1}{\mu}$), elle est constante et égale à x_1 (resp. x_2) à partir du rang 1.

2- *On suppose $u_0 \in]0, x_2[$ (resp. $u_0 \in]\mu, \frac{1}{2}[$). La suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) et converge vers x_2 .*

3- *On suppose $u_0 \in]\frac{1}{\mu}, 1[$ (resp. $u_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu}[$). Alors on a $u_1 \in]0, x_2[$ (resp. $]x_2, \frac{1}{2}[$) et on est ramené au deuxième cas.*

2.7.4 Le cas $\mu = 2$

Cette fois, on a $x_2 = \frac{1}{2}$ et $f'(x_2) = 0$ de sorte que x_2 est un point super attractif.

2.7.5 Le cas $2 < \mu < 3$

Le point μ est encore attractif, mais avec une dérivée négative. On a donc, au moins au voisinage de x_2 , un comportement " en escargot ".

Soit $u_0 \in]0, 1[$. La suite u_n converge vers x_2 .

2.7.6 Le cas $\mu = 3$

Pour $\mu = 3$, la suite converge vers x_2 (sauf si u_0 est nul) en vertu de Coppel.

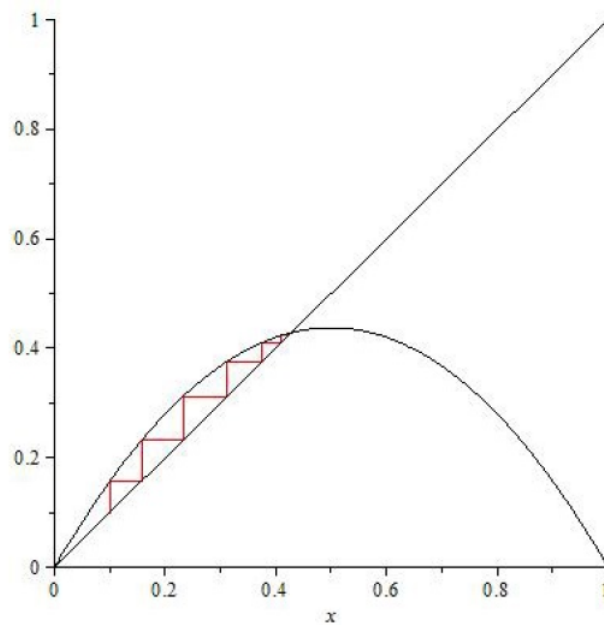


Figure 2.3 : Convergence en escalier de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\mu = 1.5$, $x_0 = 0.1$ voir[5]

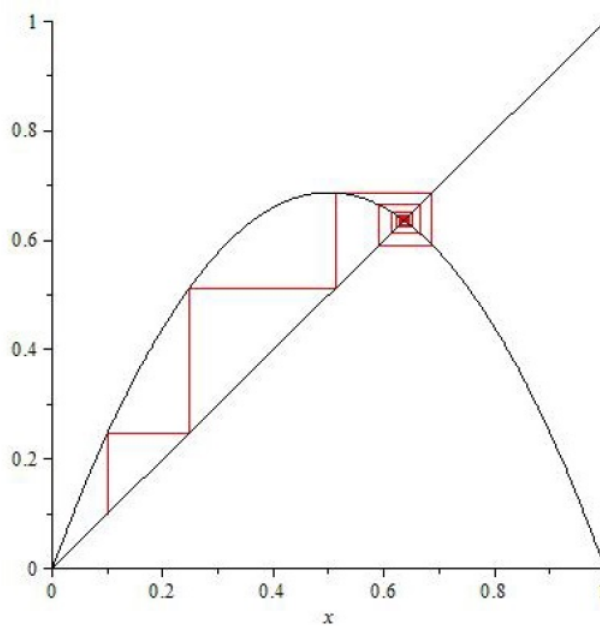


Figure 2.4 : Convergence en spirale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\mu = 1.5$, $x_0 = 0.1$ voir[5]

Théorème 2.4. Le théorème de Coppel

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. On suppose que f n'admet pas de 2-cycle. Alors, pour tout $x_0 \in I$, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge.

Remarque 2.2. La réciproque de ce résultat est évidemment vraie car, si f admet un 2-cycle : $f(x) = y$ et $f(y) = x$ avec $x \neq y$, la suite récurrente définie par $x_0 = x$ est divergente.

2.8 Les points fixes de f^2

Vu le théorème de Coppel, [8] les points fixes de f^2 vont jouer un rôle essentiel :

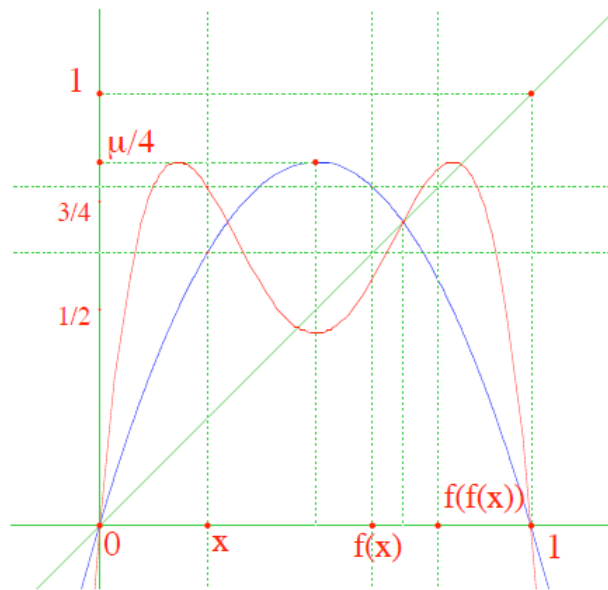


Figure 2.5 : les points fixes de f^2

On a $f^2(x) - x = -x(\mu x - \mu + 1)(\mu x^2 - (\mu + 1)x + \frac{\mu + 1}{\mu})$.

Les points fixes de f^2 autres que 0 et $1 - \frac{1}{\mu}$ sont les racines de l'équation :

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1 = 0$$

Il n'y en a que pour $\mu \geq 3$.

Ces points fixes sont alors,

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} - \frac{\sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

et

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} + \frac{\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}$$

Ces points sont dans I , précisément, le point x_4 est toujours supérieur à $\frac{1}{2}$, tandis que

$$\begin{cases} x_3 < \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x_3 > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \mu > 1 + \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ \mu = 1 + \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ \mu < 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Remarque 2.3. *On remarque sur cet exemple, le phénomène de bifurcation.*

Pour $\mu < 3$, il n'y a pas de 2-cycle, tandis qu'il y en a pour $\mu > 3$. Lorsque μ tend vers 3 par valeurs supérieures, on voit sur l'expression des racines ci-dessus, que x_1 et x_2 tendent vers toutes deux vers le point fixe $\frac{2}{3}$ de f et $\mu = 3$.

2.9 Les points fixes de f^4

Lorsque le cycle d'ordre 2 cesse d'être attractif, le théorème de Coppel appliqué à f^2 montre qu'il y a un cycle d'ordre 2 pour f^2 , donc d'ordre 4 pour f .

À partir de maintenant, on a résoudre des équations algébriques de plus en plus compliquées et on va utiliser le calculatrice.

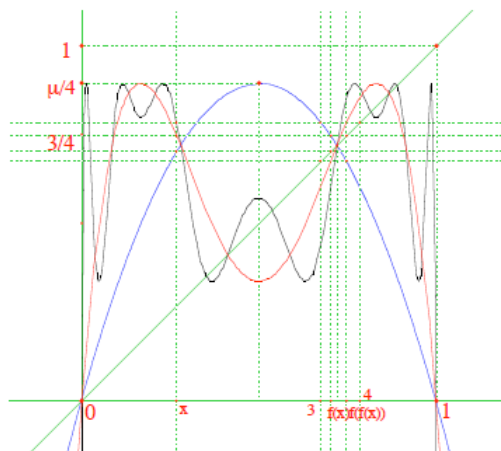


Figure 2.6 : les graphes de f, f^2, f^4

2.10 les bifurcations de l'application logistique

Proposition 2.2

L'application f_μ a une première bifurcation en $\mu = 1$ et une deuxième en $\mu = 3$ et une troisième bifurcation pour $\mu = 3.44$.

2.10.1 Classification des bifurcations

2.10.1.1 Bifurcations selle-nœud

Proposition 2.3

L'application f_μ a une bifurcation selle-nœud en $\mu = 1$, c'est l'unique bifurcation de ce type.

Preuve :

On a,

$$f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x,$$

Donc,

$$f'_1(x) = 1 - 2x.$$

De plus, pour $\mu = 1$ le point fixe est 0. D'où, $f'_1(0) = 1$ Donc, d'après la définition $\mu = 1$ est une bifurcation selle-nœud .

2.10.1.2 Bifurcation par doublement de période

Proposition 2.4

L'application f_μ a une bifurcation par doublement de la période en 3.

Preuve :

Nous avons,

$$f'_3(x) = 3 - 6x,$$

Pour $\mu = 3$ le seul point fixe dans I est

$$x_3 = \frac{3 + 1 + \sqrt{(3 + 1)(3 - 3)}}{6} = \frac{2}{3},$$

De plus,

$$f'_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Donc, d'après la définition $\mu = 3$ est une bifurcation par doublement de période.

Proposition 2.5

L'application f_μ^2 a une bifurcation fourche en $\mu = 3.44$, Par généralisation c'est une bifurcation par doublement de période de f_μ .

Preuve :

Les points x_3 et x_4 sont fixes pour f_μ^2 , Pour $\mu = 3.44$, nous avons

$$x_3 = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

et,

$$x_4 = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

d'où,

$$f_\mu^2(x) = \mu x(1-x)(1-\mu x(1-x))$$

De plus,

$$f_\mu'^2(x_3) = f'_\mu(x_3)f'_\mu(x_3) = -\mu^2 + 2\mu + 4$$

Donc,

$$f_{3.44}'^2(x_3) \simeq -1$$

De même,

$$f_{3.44}'^2(x_4) \simeq -1$$

Donc $\mu = 3.44$ est une bifurcation de doublement de période de f_μ^2 .

Cette démonstration montre de plus, que les points x_3 et x_4 subissent la même bifurcation.

Ainsi lorsque x_3 change de stabilité, il donne naissance à deux points fixes de f_μ^4 .

Le point x_4 se comporte exactement de la même façon, créant lui aussi deux points fixes de f_μ^4 .

Il y a création de 4 points fixes pour f_μ^4 , par conséquent d'une orbite périodique de période 4 pour f_μ^4 .

Les bifurcations jouent un rôle important dans le diagramme de bifurcation puisqu'elles indiquent un changement de comportement.

Nous définissons alors la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite des bifurcations par doublement de période de l'application logistique.

Les premiers termes de cette suite sont $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 3.44$, Une deuxième suite de paramètre est également fondamentale dans l'étude du diagramme, c'est la suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$ définie de telle sorte que pour $\mu = s_n$ l'application f_{μ}^{2n-1} a un point fixe super attractif.

Les termes de cette suite sont appelés paramètres super attractifs et ses premiers termes sont $s_1 = 2$ et $s_2 = 1 + \sqrt{5}$ [5].

Remarque 2.4. *Pour $\mu = 4$ la fonction logistique est chaotique.*

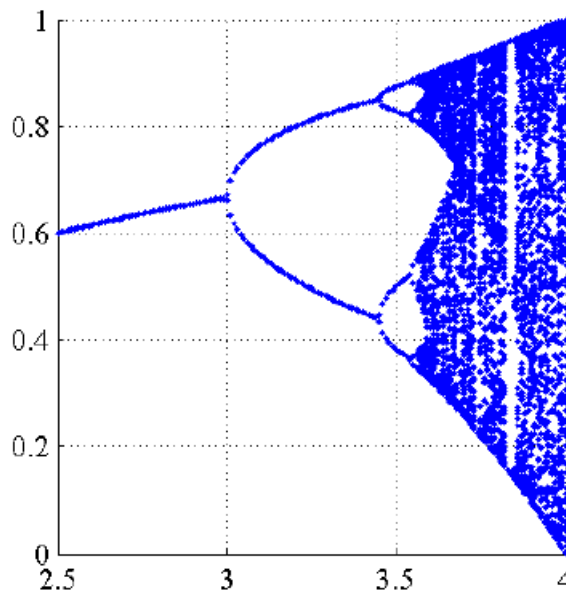


Figure 2.7 : Diagramme de bifurcation.

Etude de l'attracteur de Hénon et Lozi

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier deux exemples sur les systèmes chaotiques. Le premier c'est le système de Hénon et le deuxième c'est le système de Lozi.

l'attracteur de Hénon fut introduit par l'astronome Michel Hénon, comme une simplification de la section de Poincaré de l'attracteur de Lorenz. ce dernier montre comment les différents variable du système dynamique évoluent dans le temps en une trajectoire non périodique.

En 1976, Michel Hénon découvrit des équations qui ont permis d'observer les phénomènes que sont les attracteurs étranges a deux dimension :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

En 1978, Lozi a présenté un système bidimensionnel qui possède des équations et des attracteurs qui ressemblent à ceux du célèbre système de Hénon mentionné précédement. La seul différence est que le terme quadratique du système de Hénon est remplacé par une contribution linéaire continue par morceau, cela démontre de manière rigoureuse l'aspect tumultueux du système itéré de Lozi suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a |x_n| \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

3.2 Application de Hénon en dimension 2

l'application de Hénon est une bijection du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans lui-même définie par :

$$H(x_n, y_n) \rightarrow H(x_{n+1}, y_{n+1}) :$$

Où,

$$H(x_n, y_n) := \begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation.

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et temps discret car les points évoluent par étape et non continûment. Les valeurs habituellement utilisées pour a et b sont $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite.

On note que le système dynamique de Hénon n'est pas conservatif, car le jacobien de la transformation est constant et vaut $-b$, qui est différent de l'unité dans les cas intéressants.

L'application de Hénon est inversible et son inverse est :

$$H^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{b}y, x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \right)$$

La matrice jacobienne ici a pour expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est $|J| = -b$.

Considérons l'application de Hénon :

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx), \quad \text{avec } 0 < b < 1.$$

3.2.1 Calcul des points fixes

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation :

$$H(x_n, y_n) = (x_n, y_n)$$

Cela veut dire,

$$H(x_n, y_n) = (x_n, y_n) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y_n - ax_n^2 = x_n \\ bx_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow -ax^2 + (b-1)x + 1 = 0$$

Théorème 3.1. Pour $|b| < 1$ et $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ on a :

- 1) Si $a < a_0(b)$, l'itération H n'a aucun point fixe.
- 2) Si $a = a_0(b)$, l'itération H a un seul point fixe.
- 3) Si $a > a_0(b)$, l'itération H a deux points fixes.

Preuve : [4]

Nous obtenons du discriminant de l'équation $H(x_n, y_n) = (x_n, y_n)$ l'équation $(b-1)^2 + 4a = 0$.
Ce qui implique que $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2 = a_0(b)$.

- 1) Pour $a < a_0(b)$, $(x \pm (a, b)) \notin \mathbb{R}^2$, alors dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour H .
- 2) Pour $a = a_0(b)$, nous obtenons $x + (a, b) = x - (a, b) = \frac{b-a}{2a}$. Donc dans ce cas le système H admet exactement un seul point fixe $(x_1, y_1) = \left(\frac{b-1}{2a}, b\left(\frac{b-1}{2a}\right)\right)$.
- 3) Pour $a > a_0(b)$, nous avons $x + (a, b)$ et $x - (a, b)$ dans \mathbb{R}^2 et $x + (a, b) \neq x - (a, b)$.
Dans ce cas nous avons deux points fixes de la forme,

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ et } P_2 = (x_2, y_2)$$

avec,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b-1-\beta}{2a} \\ y_1 = b\left(\frac{b-1-\beta}{2a}\right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_2 = \frac{b-1+\beta}{2a} \\ y_2 = b\left(\frac{b-1+\beta}{2a}\right) \end{cases}$$

Où $\beta = \sqrt{4a + (b-1)^2}$.

3.2.2 Stabilité des points fixes

La stabilité de ces points fixes est fixée par les valeurs propres obtenues en résolvant l'équation $\det(J - \lambda I) = 0$, où I est la matrice identité et J est la matrice jacobienne donnée par l'expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$ on a,

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2ax - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = (2ax + \lambda)\lambda - b = 0.$$

Donc nous avons l'équation caractéristique suivant,

$$\lambda^2 + 2a\lambda x - b = 0,$$

Alors les valeurs propres (multiplicateurs) de la récurrence de Hénon sont :

$$\lambda_1 = \frac{-2ax + \sqrt{4a^2x^2 + 4b}}{2} = -ax + \sqrt{a^2x^2 + b}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2ax - \sqrt{4a^2x^2 + 4b}}{2} = -ax - \sqrt{a^2x^2 + b}$$

pour le point fixe P_1

La matrice jacobienne correspond à cette point s'écrit :

$$J(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} -(b - 1 - \beta) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -(b - 1 - \beta) - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = (b - 1 - \beta + \lambda)\lambda - b = \lambda^2 + \lambda(b - 1 - \beta) - b = 0.$$

On résout donc,

$$\Delta = (b - 1 - \beta)^2 + 4b,$$

Les valeurs propres sont,

$$\lambda_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{\beta + 1 - b}{2} + \sqrt{b + \frac{1}{4}(b - 1 - \beta)^2} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{\beta + 1 - b}{2} - \sqrt{b + \frac{1}{4}(b - 1 - \beta)^2} \right).$$

Pour le point fixe P_2

La matrice jacobienne correspond à cette point s'écrit :

$$J(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -(b - 1 + \beta) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda(b - 1 + \beta) - b = 0$$

On résout donc,

$$\Delta = (b - 1 + \beta)^2 + 4b$$

Les valeurs propres sont,

$$\lambda_3 = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + \sqrt{b + \frac{1}{4}(b - 1 + \beta)^2} \right),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} - \sqrt{b + \frac{1}{4}(b - 1 + \beta)^2} \right).$$

On peut aussi montré que l'un de ces deux points est stable lorsque le signe devant la racine est positif, tandis que l'autre est toujours instable. En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont $a = 1.4$ et $b = 0,3$ et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont $(-1.1314, -0.3394)$ et $(0.6314, 0.1894)$, les valeurs propres au premier point d'équilibre sont $(2.3284, -0.0657)$ et les valeurs propres au deuxième point sont $(0.5657, -1.8284)$. D'où le premier est un point instable et le deuxième est clairement un point stable.

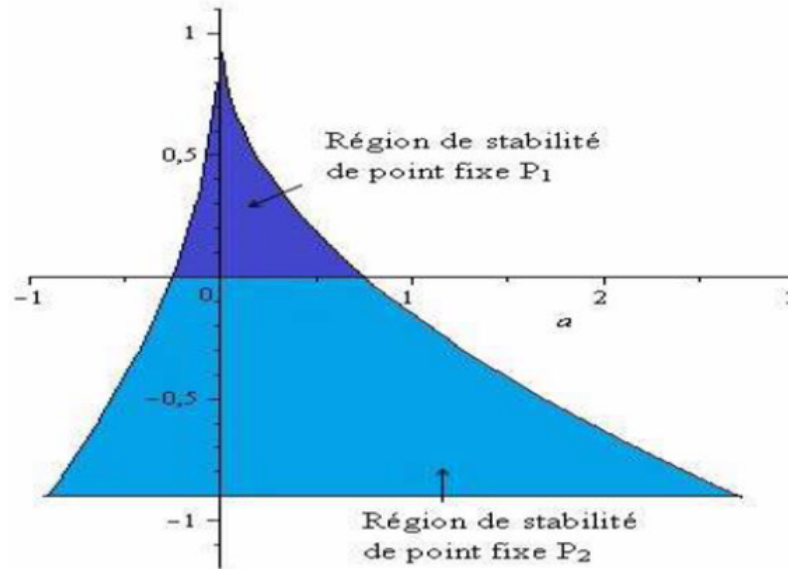


Figure 3.1 : les régions de la stabilité des points fixes P_1 et P_2 (voir[4])

Deuxième itération

La deuxième itération du système original de Hénon est d'intérêt depuis qu'une bifurcation par doublement de période est un mécanisme éminent comme révélé dans le diagramme de bifurcation [5]. Selon la variation de Jacobi la deuxième itération du système de Hénon est donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a^3 x_n^4 + 2a^2 x_n^2 y_n + 2a^2 x_n^2 - a y_n^2 - 2a y_n - a + b x_n + 1 \\ y_{n+1} = b(-a x_n^2 + y_n + 1) \end{cases}$$

Ce système dispose de quatre points d'équilibre dont deux sont hérités du système original de Hénon et les deux autres points d'équilibre sont :

$$(x_3, y_3) = \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2} ; -b\left(\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}\right) \right)$$

et

$$(x_4, y_4) = \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2} ; -b\left(\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}\right) \right)$$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$DH^2 = \begin{pmatrix} -4a^3 x^3 + 4a^2 xy + 4a^2 x + b & 2a^2 x^2 - 2ay - 2a \\ -2abx & b \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

Le modèle de Hénon est le système dynamique de comportement chaotique les plus étudiés. Il dépend de deux paramètres a et b , qui ont pour valeurs canoniques : $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Pour ces valeurs, l'attracteur de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de a et b il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique. On peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, (voir Figure 3.2).

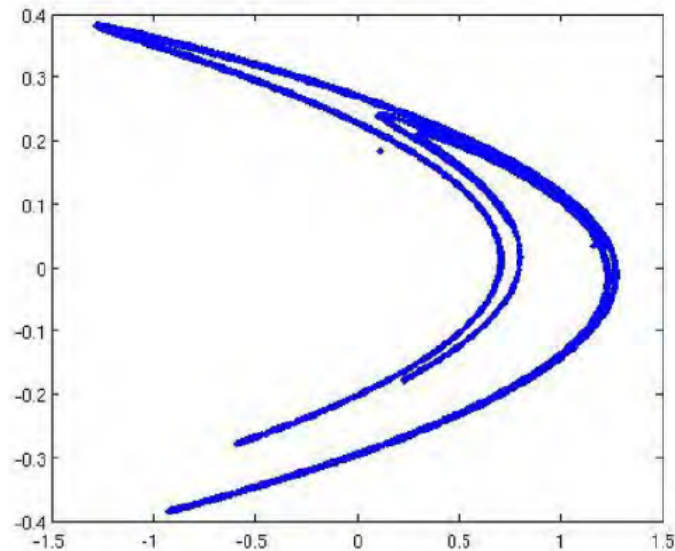


Figure 3.2 : Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

3.2.4 Etude du plan des paramètres

Dans cette section, nous présentons l'étude du plan des paramètres (a, b) .

Les domaines de stabilité pour les cycles de cette récurrence ont été déjà simulés et construits numériquement.

3.2.4.1 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite [2] en faisant varier le paramètre a de 0 à 2 avec un pas de 0.0005 et la valeur du paramètre b est de 0.3 (voir figure 3.3).

On observe dans ce diagramme la bifurcation de doublement de période.

L'attracteur de Hénon contient deux points fixes.

La partie stable d'un point fixe est observée dans l'intervalle $[0, 0.3675]$ et un cycle stable d'ordre deux commence à $a = 0.3675$ suivi d'un cycle stable d'ordre quatre à $a = 0.9$.

La période continue de doubler jusqu' à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a = 1.4$ on ne distingue plus les cycles chose qu'est dû à la présence de plusieurs cycles ou peut être le système est chaotique.

L'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ est représenté dans la Figure 3.3.

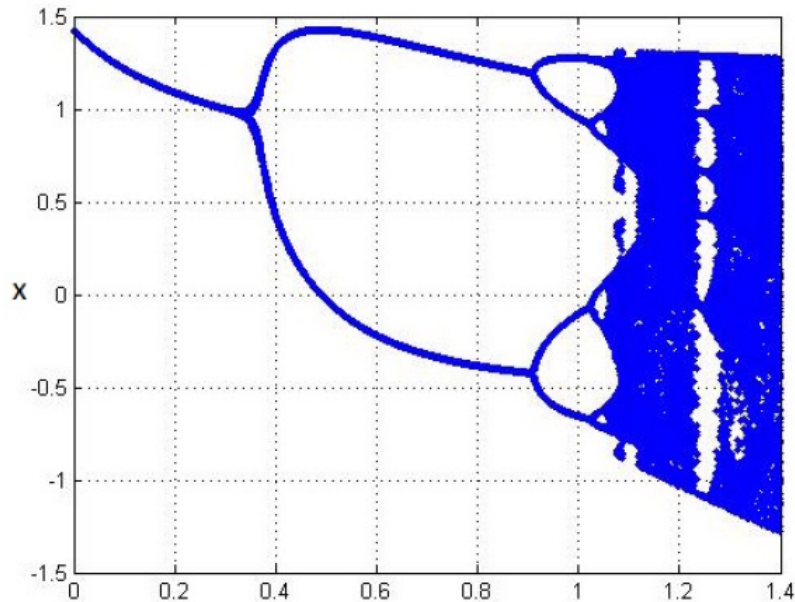


Figure 3.3 : Diagramme de bifurcation de Hénon.

la structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives. Cette structure dont la permanence à différentes échelles est caractéristique d'un objet fractale.

On peut aussi associer à l'attracteur de Hénon la dimension de Lyapunov, qu'est calculée à partir des exposants de Lyapunov, en l'occurrence pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

3.2.4.2 Exposants de Lyapunov

Pour justifier l'apparition de l'état chaotique et pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b .

Pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov

$$\lambda_1 = 0.42205 \quad , \quad \lambda_2 = -1.626$$

la dimension de Lyapunov par définition est égale à

$$D_l = 1 + \frac{0.42205}{|-1.626|} = 1.2596$$

3.2.5 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales de système de Hénon est illustré sur les Figures (3-4), (3-5) pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$:

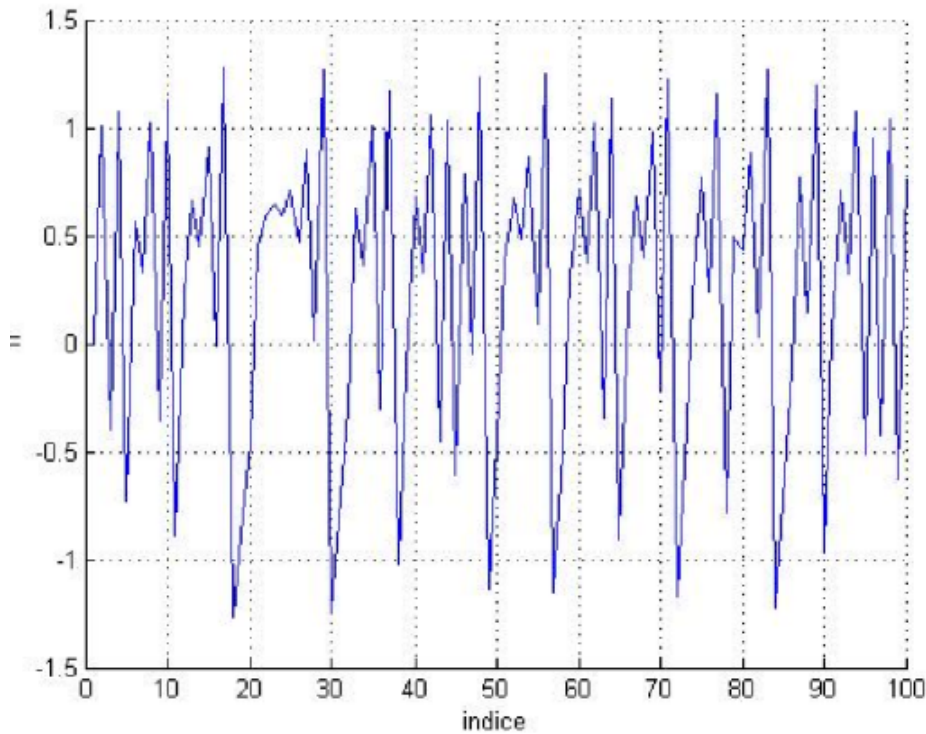


Figure 3.4 : Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$, (voir[5]).

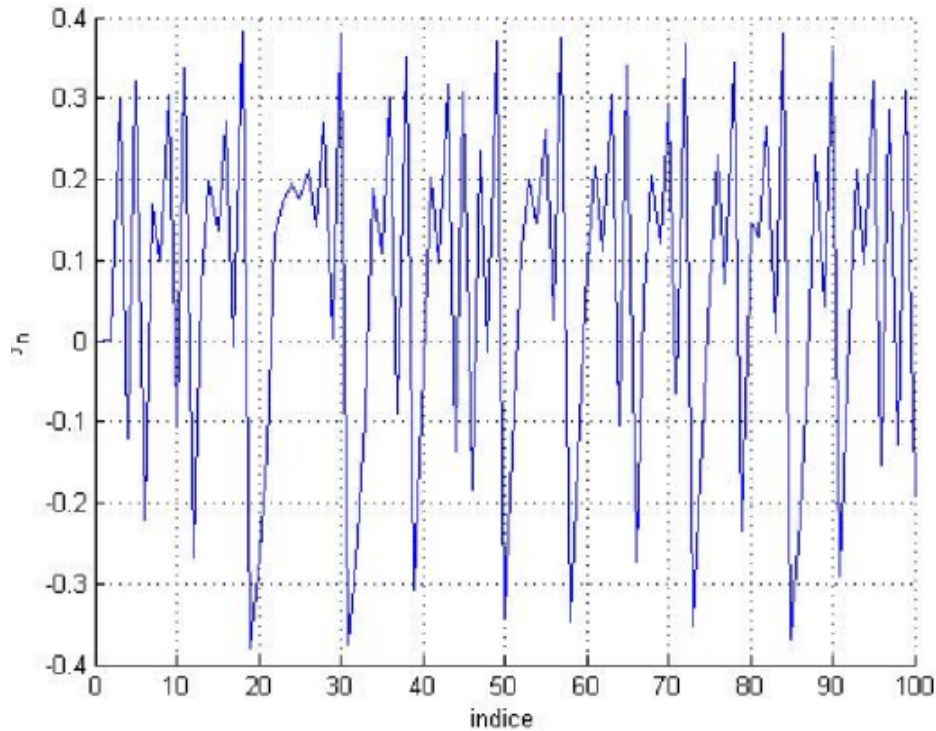


Figure 3.5 : Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$, (voir[5]).

3.2.6 Analyse numérique de bifurcation

En donnant les résultats [5] de stabilité pour le système de Hénon et rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$.

- 1) Pour $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ et $\beta = 0$, le système de Hénon a un unique point d'équilibre en $\left(\frac{b-1}{2a}, b\left(\frac{b-1}{2a}\right)\right)$ avec les valeurs propres $\{1, -b\}$ indiquant une bifurcation selle-nœud.
- 2) Pour $b = 0.3$ et $a = -0.1225$, on a une bifurcation selle-nœud.

Preuve.

Pour $b = 0.3$ et $a = -0.1225$, le point d'équilibre du système est $(2.8571; 0.8571)$ indiquent une bifurcation selle-nœud avec une branche stable et une branche instable.

- 3) Pour le cas particulier de $a = 0.3675$ une bifurcation par doublement de la période est observée.

Preuve

Pour $a = \frac{3}{4}(b-1)^2 = 0.3675$ le système de Hénon a deux points d'équilibre en $(0.9524; 0.2857)$. Les valeurs propres sont $\{-1; 0.3\}$ et $\{2.2343, -0.1343\}$. En effet, quand a s'approche de 0.3675 , une orbite périodique de période 2 est constatée.

3.2.7 Bassin d'attraction de Hénon

Les itérations ne convergent pas pour toutes les conditions initiales $(x_0; y_0)$. L'ensemble des conditions initiales pour lequel les itérations convergent est le bassin d'attraction de l'attracteur. Un calcul numérique permet de construire une partie de ce bassin d'attraction (voir Figure 3.6).

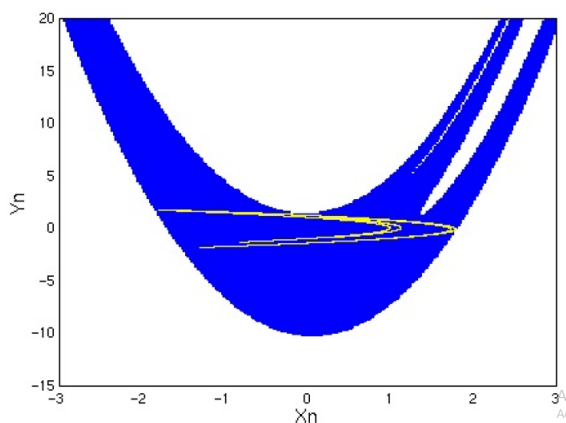


Figure 3.6 : Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

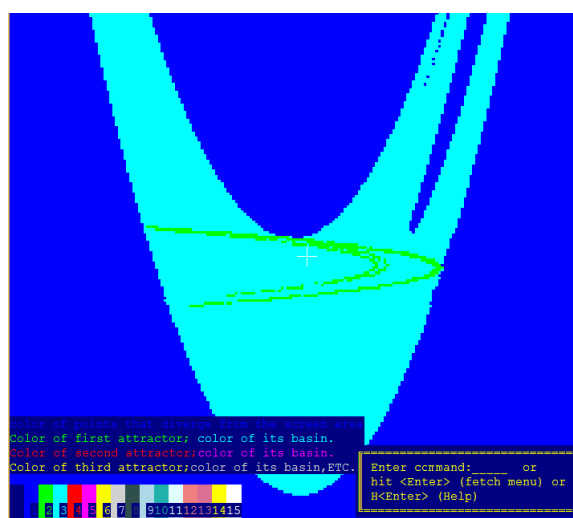


Figure 3.7 : Bassin d'attraction et attracteur de Hénon pour $a=1.4$ et $b=0.3$ (Dynamics).

3.3 Application de Lozi en dimension 2

L'application de Lozi en dimension 2 est définie de \mathbb{R}^2 dans lui-même par :

$$L(x, y) = (1 - a |x| + y, bx)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}^2$.

Le système itératif associé étant :

$$L(x_n, y_n) := \begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a |x_n| \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases}$$

Où a et b sont des paramètres réels non nulle. L'intérieur de la région où les orbites restent bornées, la carte de Lozi peut présenter à la fois des comportements réguliers et chaotiques suivant les valeurs des deux paramètres a et b .

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

3.3.1 Propriétés de l'application de Lozi

- 1) La seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non linéaire x^2 de l'application de Hénon est remplacée par $|x|$ dans l'application de Lozi.
Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour $x > 0$ et $x < 0$.
- 2) L'application de Lozi n'est pas différentiable.
- 3) Si $a = 0$, l'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$.
- 4) L'application de Lozi est inversible, son inverse est :

$$L^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-1} |y|).$$

où a et b sont des paramètres réels.

- 5) Cette application possède deux points fixes P_1 et P_2 :

Si $x_n > 0$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases}$$

$$L(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow 1 + bx - ax = x \Leftrightarrow 1 + (b - a - 1)x = 0.$$

Donc,

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{1 + a - b}, \frac{b}{1 + a - b} \right), \quad \text{si } b < a + 1.$$

Si $x_n < 0$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n + ax_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

$$L(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow 1 + bx + ax = x \Leftrightarrow 1 + (b + a - 1)x = 0.$$

Donc,

$$P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{1 - a - b}, \frac{b}{1 - a - b} \right), \quad \text{si } b < 1 - a.$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points fixes par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne.

6) la matrice jacobienne s'écrit par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à : $|J| = -b$.

7) Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne aux points fixes s'écrit :

Pour P_1 ,

$$\begin{vmatrix} -a - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow (a + \lambda)\lambda - b = \lambda^2 + a\lambda - b.$$

Pour P_2 ,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow (\lambda - a)\lambda - b = \lambda^2 - a\lambda - b.$$

3.3.2 Stabilité des points fixes

Stabilité de P_1 :

Le discriminant du polynôme caractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$.

i) Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles. Elles sont de module inférieur à 1 si : $1 - a < b < 1 + a$.

ii) Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes. Elles sont de module inférieur à 1 si : $b > -1$.

Donc le point fixe P_1 est stable.

iii) Les valeurs propres sont de module supérieur à un si : $b < a + 1, b < 1 - a$, $b < -1$.

Donc Le point fixe P_1 est instable.

iv) Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont : $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si : $b > a + 1, b > 1 - a$ et le point fixe P_1 est un point selle.

Stabilité de P_2 :

Le discriminant du polynôme caractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$:

i) Les valeurs propres sont toujours des réelles.

Elles sont de module inférieur à 1 si : $1 + a < b < 1 - a$, donc le point fixe P_2 est stable.

Elles sont de module supérieur à 1 si $b > 1 - a, b > a + 1$, donc le point fixe P_2 est instable .

ii) En calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 on obtient :

$$|\lambda_1| < 1 \text{ et } |\lambda_2| > 1 \text{ si : } b > a + 1, b > 1 - a.$$

Donc le point P_2 est un point selle.

3.3.3 L'attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$

Misiurewicz prouve l'existence d'un attracteur étrange de l'application de Lozi.

Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.5$ la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la Figure 3.8.

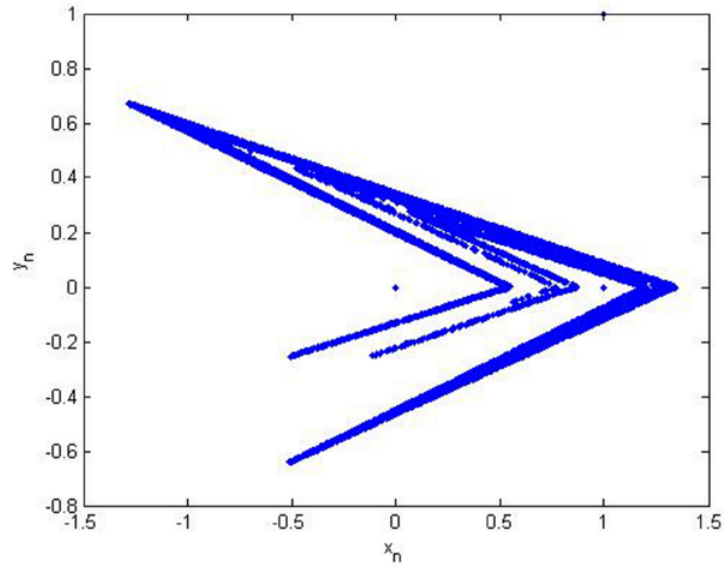


Figure 3.8 : Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$

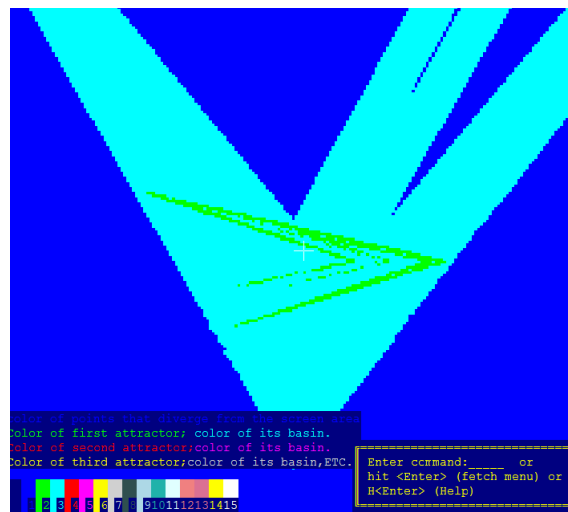


Figure 3.9 : Bassin d'attraction et attracteur de Lozi pour $a=1.7$ et $b=0.5$ (Dynamics)

3.3.4 Le type de chaos dans l'application de Lozi

3.3.4.1 Structure fractale

Pour déterminer la structure de l'attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d'une région de l'attracteur et on observe que la structure se répète [14]. Contrairement au cas de l'application de Hénon, la route vers le chaos par l'application de Lozi n'est pas une bifurcation de doublement de période Puisque la dérivée de l'application de Lozi n'est pas continue.

3.3.4.2 L'exposants de Lyapunov pour l'application de Lozi

Pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$ qui est positif, $\lambda_2 = -1.204$. On vérifie bien cependant que la somme de ces exposants est strictement négative. Et sa dimension de Lyapunov est $D_L = 1.5757$. L'attracteur correspondant à ces deux valeurs de a et b est chaotique .

4.1 Programme Maple

Tracer la logistique pour $\mu = 2$

```
>with(plots) :with(plottools) :
>f :=x->2*x*(1-x) :
>x :=0.2 :y :=f(x) :s :=[x,0] : to 10 do
>s :=s,[x,y],[y,y];x :=y;y :=f(x) :od :
>x :=-0.1 :y :=f(x) :s1 :=[x,0] : to 3 do
> :s1,[x,y],[y,y];x :=y;y :=f(x) :od :
>plot(f,t->t,[s],[s1],-1..1,-1..1,color=red,axes=boxed) ;
```

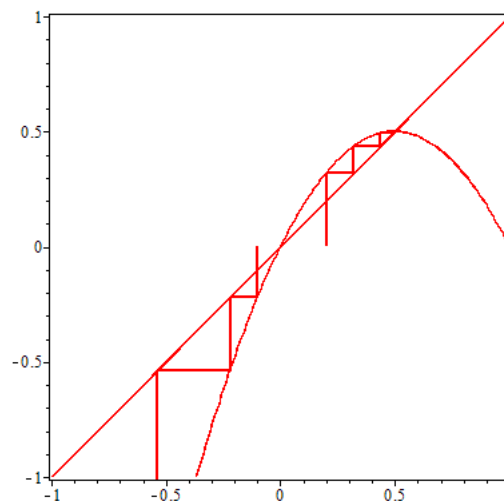


Figure 4.1 : Tracer la logistique pour $\mu = 2$

Calculons les points fixes et leurs dérivées :

```
>x :='x' :s :=solve(f(x)=x,x) ;
```

$$s := 0, \frac{1}{2}$$

$$> D(f)(0), D(f)(0.5);$$

$$s := 0, 2$$

Prenons un exemple de cycle attracteur de période 2 :

$$> f := x \rightarrow 3.1 * x * (1-x) :$$

$$> x := 0.65 : y := f(x) : s := [x, 0] : \text{to } 50 \text{ do } s := s, [x, y], [y, y] ; x := y ; y := f(x) : \text{od} :$$

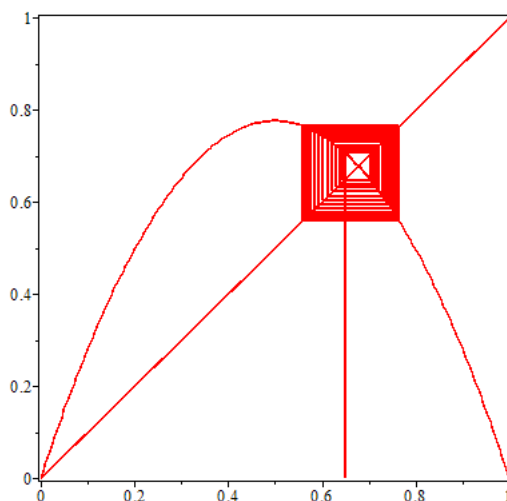
$$> \text{plot}(f, t \rightarrow t, [s], 0..1, 0..1, \text{color}=\text{red}, \text{axes}=\text{boxed}) ;$$


Figure 4.2 : cycle attracteur de période 2

Traçons la courbe ainsi que la première bissectrice pour $\mu = 0.6, 1$ et 2 .

$$> f := x \rightarrow \mu * x * (1-x) ;$$

$$f := x \beta (1 - x)$$

$$> \mu := 0.6 : p1 := \text{plot}(f, t \rightarrow t, -0.8..1, \text{color}=\text{black}, \text{tickmarks}=[4,3]) :$$

$$> \mu := 1 : p2 := \text{plot}(f, t \rightarrow t, -0.5..1, \text{color}=\text{black}, \text{tickmarks}=[4,3]) :$$

$$> \mu := 2 : p3 := \text{plot}(f, t \rightarrow t, -0.3..1, \text{color}=\text{black}, \text{tickmarks}=[3,3]) :$$

$$> A := \text{matrix}(1,3, [p1, p2, p3]) :$$

$$> \text{display}(A) ;$$

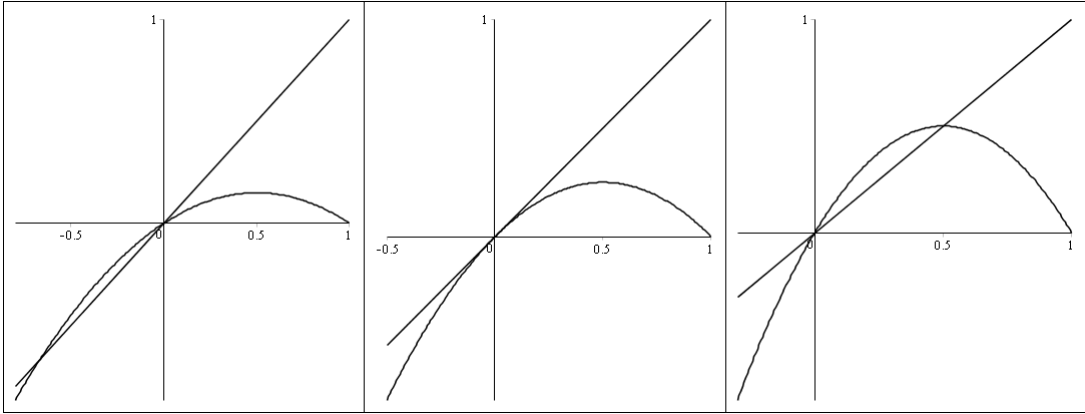


Figure 4.3 : application logistique pour $\mu = 0.6, 1$ et 2

Conclusion

La théorie du chaos est une théorie scientifique rattachée aux mathématiques et à la physique qui étudie le comportement des systèmes dynamiques déterministes et sensibles aux conditions initiales. Dans de nombreux systèmes dynamiques, des modifications infimes des conditions initiales entraînent des évolutions rapidement divergentes, rendant toute prédiction impossible à long terme. Bien que ce soient des systèmes déterministes, dont le comportement futur est déterminé par les conditions initiales, sans aucune intervention du hasard, ils sont imprévisibles (au moins dans le détail) car on ne peut pas connaître les conditions initiales avec une précision infinie.

L'objectif générale de notre mémoire est de présenter la logistique et de passer à la dimension deux pour étudier deux systèmes dynamiques non linéaires. Cette étude approfondi nous a permis de détecter les plusieurs caractéristiques sans oublier le comportement chaotique de ces systèmes, due la perturbation des paramètres, on cite le modèle de Verhulst, Hénon et Lozi en dimension deux.

Bibliographie

- [1] A.Ali-pacha, N.Hadj-said, A.M'hamde, A.Belghoraf, Chaos Crypto-Système basé sur l'attracteur de Hénon-Lozi, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran USTO BP 1505 El M'Naouer Oran 31036, Algérie, 09 December 2014.
- [2] Amrane Soufiane, Slamani Abdelhad, Systèmes dynamiques discrets, Université A/mira de Bejaia, Mémoire de Master (2020).
- [3] Bensmail Ahlia, Allaoua Nacira, Propriétés des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle, Mémoire de Master (2018/2019).
- [4] Bessam Amina, Etude d'un système dynamique chaotique, Université Mohamed KHider, BISKRA, Mémoire de Master (2020).
- [5] Boukhalfa El-hafsi, Sur le chaos et synchronisation dans les systèmes dynamiques discrets, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar-Annaba, 2017.
- [6] Carcasses, J P ." A new kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an n-dimensional map" Nonlinear Analysis TM A, vol28, No5, p917-946. (1997).
- [7] Carcasses J. P, Taha A.K. ."Study of a two-dimensional endomorphism by use of the parametric singularities". International journal. (2000)
- [8] Daniel Perrin, La suite logistique et le chaos, Almanach du pauvre Richard, 1758.
- [9] Djilani Ikram, Sur l'étude des comportements complexes des systèmes modélisés par des transformations, Université de Skikda, Mémoire de Master (2021).
- [10] Frédéric Faure Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications, Université Grenoble Alpes, France.

- [11] Hénon.M, A two-dimensional mapping with a strange attractor Communications of Mathematical Physics, 1976.
- [12] Lambert Victor, La suite logistique : un système dynamique chaotique, Tipe – Rapport ENS.
- [13] Lozi.R, (1978), " Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon ", Journal de physique, colloque c5, supplément au n°8, tome 39, août 1978, page c5-9 vol.39.
- [14] Menasri Abdella, Chaos et bifurcations dans les systèmes dynamiques en dimensions $n(n > 1)$, Université Larbi Ben M'hidi Oum el-Bouaghi, Doctorat en Mathématiques (2016/2017).
- [15] Selmani.W, Etude du comportement de la dynamique de la récurrence de Myrberg généralisée. Thèse de doctorat Selmani, W. U.Annaba (2017).