

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Les cycles limites des systèmes différentiels perturbés et la théorie de moyennisation

Option : Commande optimale et système dynamique

Par :

Bouasla Nour El Houda

Encadré par : *Bendib El Ouahma*

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : *Selmani Wissame*

MCB U. SKIKDA

Examineur: *Mallem Khadidja*

MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

REMERCIEMENTS

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je remercie Allah qui m'a donné la patience et le courage durant ces longues années et pour achever ce travail.

Je remercie mon encadreur Mme **Bendib El Ouahma** pour le thème qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité qu'elle a su faire au long de la préparation de ce modeste travail et pendant mon parcours de master.

Je voudrais également remercier Mme **Selmani Wissame**, M.C.B à l'université de Skikda pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Mme **Mallem Khadidja** M.C.B à l'université de Skikda pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Merci à tous qui m'ont enseigné en primaire, cela lycée, université et ailleurs, merci à tous les mathématiciens

Merci à mes collègues à tous qui n'ont contribué de loin ou de près dans ce travail.

Et enfin dois-je dire à quel point les parents sont aujourd'hui à mes pensées, je leurs dois toute ma gratitude et reconnaissance éternelle sans eux je suis rien

Merci infiniment

♥ **BOUASLA NOUR EL HOUDA**



DEDICACE **DEDICACE**

Je dédie ce mémoire à mes chers parents pour leur patience, leur générosité, ils sont ma véritable source de motivation et d'inspiration et beaucoup de bonheur, je le dédie aussi à ma sœur, mes trois frères, mes grandes mères, mes grands père et toute ma famille et ma deuxième famille mes chères amis pour le soutien qu'elles m'ont apporté lors de la réalisation de ce travail.

Sans oublier les personnes qui ont toujours été là pour moi dans les moments les plus durs, qui ne m'ont jamais laissé seul, et aussi je tiens à exprimer Ma grande gratitude à tous les collègues, docteur et enseignants du département de mathématiques de **l'université de 20 Aout 1955 de Skikda.**

♥ **BOUASLA NOUR EL HOUDA**
▲ **BOUASLA NOUR EL HOUDA**



Résumé

L'objectif de ce mémoire est consacré à étudier la relation entre la théorie de moyennisation et l'existence des cycles limites pour les systèmes différentiels perturbés.

Premièrement, on utilise la théorie de moyennisation d'ordre un et deux pour étudier l'existence et le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme :

$$x' = y - l(x)y, y' = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2$$

où $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x), f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x), g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ et $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ où $l_k(x)$ est de degré m et $f_k(x), g_k(x)$ et $h_k(x)$ sont de degré n pour $k = 1, 2$, et ε est un petit paramètre.

En outre, on a changé la fonction $f(x)$ dans ce système par la fonction $f(x, y)$, et on a réussi à obtenir un nouveau résultat concernant le nombre maximum de cycles limites, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un.

Dans la seconde partie de ce travail, on s'intéresse à étudier les solutions périodiques de l'équation différentielle du troisième ordre de la forme suivante :

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x''),$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $F \in C^2$ est une fonction 2π -périodique en t , en utilisant un autre théorème de la moyennisation du premier ordre.

De plus, nous allons illustrer ces études par des applications.

Mots clés : Cycle limite, solution périodique, système différentiel perturbé, système de Liénard, théorie de moyennisation.

Abstract

The objective of this work is to study the relation between the averaging theory and the existence of limit cycles for a perturbed differential systems.

First, we use the averaging theory of first and second order to study the existence and the maximum number of limit cycles which bifurcate from the periodic orbits of the linear center $x' = y, y' = -x$, perturbed inside the class of the generalized polynomial Liénard systems of the form :

$$x' = y - l(x)y, y' = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2$$

where $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$, $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ and $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ where $l_k(x)$ has degree m and $f_k(x), g_k(x)$ and $h_k(x)$ have degree n for each $k = 1, 2$, and ε is a small paramater.

Besides, we have changed the function $f(x)$ in this system by $f(x, y)$ and we obtained a new result conserning the maximum number of limit cycles for considered system, using the averaging theory of first order.

In the second place, we study the periodic solutions of the third-order differential equation :

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x''),$$

where ε is a small parameter and $F \in C^2$ is function 2-périodic in t , using another theorem of the averaging theory of first order.

In addition, we will illustrate these studies via applications.

Key words : Limit cycle, periodic solution, perturbed differential system, Liénard systems, averaging theory.

الهدف من هذا العمل هو دراسة العلاقة بين نظرية المتوسط ووجود دورات حدودية للأنظمة التفاضلية المضطربة.

يستخدم أولاً نظرية المتوسط من الرتبة الأولى والثانية لدراسة وجود و العدد الأقصى للدورات الحدودية بالنسبة للأنظمة التفاضلية المضطربة المعممة لـ Liénard من النموذج :

$$x' = y - l(x)y, y' = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2$$

حيث : $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x), f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x), g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$

و $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ و حيث : $l_k(x)$ من الدرجة m و $g_k(x), f_k(x)$ و $h_k(x)$ من الدرجة n من أجل $k = 1, 2$ و ε صغير.

علاوة على ذلك قمنا بتغيير الدالة $f(x)$ في هذا النظام بالدالة $f(x, y)$. ولقد نجحنا في التحصل على نتيجة جديدة بخصوص الحد الأقصى للحلول الدورية المعزولة للنظام المقترح، بإستعمال نظرية المتوسطة من الدرجة الأولى.

في الجزء الثاني من هذا العمل نهتم بدراسة الحلول الدورية للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثالثة بالشكل التالي :

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x''),$$

حيث يكون ε صغير بدرجة كافية وتكون $F \in C^2$ دالة ذات دورتين عند بإستخدام نظرية المتوسط الأخرى من الدرجة الأولى.

بالإضافة إلى ذلك، سوف نوضح هذه الدراسات من خلال تطبيقات.

الكلمات المفتاحية: دورة الحد، الحل الدوري، النظام التفاضلي المضطرب، نظام لينارد، نظرية المتوسط.

Table des matières

Résumé	i
Introduction	4
1 Généralités sur les systèmes différentiels non linéaires	7
1.1 Equations différentielles	7
1.1.1 Equation différentielle ordinaire	7
1.1.2 Système différentiel non linéaire	7
1.1.3 L'existence et l'unicité de la solution	8
1.1.4 Stabilité de la solution	9
1.2 Système dynamique	11
1.3 Les points d'équilibre et linéarisation	12
1.3.1 Les points d'équilibre	12
1.3.2 Linéarisation	12
1.4 Classification des points d'équilibre	12
1.5 Nature des points d'équilibre	13
1.6 Plan et portrait de phase	14
1.7 Cycle limite	15
1.7.1 Solution périodique	15
1.7.2 Cycle limite	15
1.8 Existence et non-existence des cycles limites	16
1.9 Perturbation	16

2 Cycles limites d'une certaine classe de systèmes différentiels perturbés et la théorie de moyennisation	18
2.1 Théorie de moyennisation	18
2.1.1 La méthode de moyennisation du premier ordre	18
2.1.2 La méthode de moyennisation du second ordre	23
2.2 Nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée des systèmes différentiels de Liénard	27
3 Solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles du troisième ordre	35
3.1 Autre théorème de moyennisation du premier ordre	35
3.2 Existence des solutions périodiques pour une équation différentielle du troisième ordre	37
Conclusion	44
Bibliographie	45

Introduction

Les équations différentielles sont apparues la première fois à la fin du 17^{ème} siècle dans les travaux de Isaac Newton, Leibniz et Bernoulli. Elle se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certain problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des mathématiciens et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton et Liouville aux 18^{ème} siècle et 19^{ème} siècle pendant plus de 300 ans, les équations différentielles s'en servi l'outil essentiel pour d'écrire et analyser des problèmes dans plusieurs domaines scientifiques (Mécanique, Géométrie, Physique...)

L'un des principaux problèmes dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de cycles limites des systèmes différentiels.

Les cycles limites été introduits pour la première fois par *H. Poincaré* en 1881[12]. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Androv ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de type vide était un cycle limite. Après ces travaux, la non existence, l'existence, l'unicité et d'autres propriétés des cycles limites ont été étudiés largement par des mathématiciens, des physiciens et plus récemment par des chimistes, des biologistes et des économistes. En 1881-1886 Poincaré a défini la motion d'un centre comme étant un point isolé singulier entouré par des orbites périodiques.

Alors une façon de produire des cycles limites est de perturber un système qui a un centre. Il ya cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques ayant un centre.

Une de ces méthodes de perturbations est la méthode de moyennisation "Averaging Method". L'idée de base de cette méthode peut être datée de la fin de 18^{ème} siècle avec les

travaux de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode.

Le développement rapide de diverses variantes de la méthode de moyennisation a été motivé par la recherche d'une méthode universelle qui convient à l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires.

La première démonstration de la validité asymptotique de la méthode de moyennisation dans le cas périodique est dû à Fatou en 1928.

On va utiliser cette méthode tout au long de notre étude, c'est l'outil principale utilisé dans nos différentes démonstrations.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la recherche de l'existence et le nombre maximum de cycles limites pour deux types d'équations différentielles non linéaires.

- Equations différentielles de Liénard.
- Equations différentielles du troisième ordre.

Ce mémoire se compose en trois chapitres :

Le chapitre 01 est un rappel sur la théorie qualitative des systèmes différentiels non linéaires dans \mathbb{R}^n . On introduira des notions élémentaires tels que les systèmes dynamiques, les cycles limites, l'existence et la non existence des cycles limites et la perturbation.

Le chapitre 02 est basé sur l'utilisation de la théorie de moyennisation pour étudier l'existence et le nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard. De plus, on a appliqué la théorie de moyennisation d'ordre un à un système plus général que celui étudié précédemment et on a obtenu un nouveau résultat concernant le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $x'=y, y'=-x$ perturbé par ce dernier. On illustre cette étude par une application pour laquelle ce nombre est atteint.

Le chapitre 03 s'intéresse à la recherche des solutions périodiques d'une équation différentielle du troisième ordre, en utilisant un autre théorème de la moyennisation du premier ordre. On donne un exemple pour lequel ce résultat soit explicite.

Généralités sur les systèmes différentiels non linéaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques généralités sur l'étude qualitative des systèmes différentiels non linéaires.

1.1 Equations différentielles

1.1.1 Equation différentielle ordinaire

Définition 1.1. Une équation différentielle ordinaire est une équation définie en termes d'une variable $t \in I$, où I un intervalle réel, une fonction inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et ses dérivées par rapport à t définie par :

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Exemple 1.1.

$$\begin{aligned}y'(t) - t &= 0 \\ e^{y^2(t)-t^2} + y &= 0.\end{aligned}$$

1.1.2 Système différentiel non linéaire

Définition 1.2. On appelle système différentiel non linéaire d'ordre 1 tout système de la forme :

$$X'(t) = F(X(t)),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

et $t \in \mathbb{R}$, $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction définie et continue et E un sous ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n .

1.1.3 L'existence et l'unicité de la solution

Définition 1.3. *Considérons la fonction $f(t, x)$ avec $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $|t - t_0| \leq a$, et D un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que la fonction $f(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x s'il existe $k > 0$ telle que :*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times D.$$

La constante k est appelée constante de Lipschitz.

Définition 1.4. *Pour $(t_0, x_0) \in u$ donné, une solution du problème à valeur initiale est dite unique si elle coïncide avec toute solution partout où elle sont toutes les deux définies.*

Théorème 1.1. (unicité) *Soit u un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ si $f = f(t, x) : u \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et lipschitzienne en x , alors pour tout $(t_0, x_0) \in u$, le problème admet une solution unique.*

Exemple 1.2. *Soit*

$$y' = \sin(xy)/x^2$$

$$y(1) = 1.$$

La fonction $f(x, y) = \sin(xy)/x^2$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur son domaine de définition puisque $]0, +\infty[$. Par application du théorème de Cauchy Lipschitz, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution maximale de l'équation différentielle.

1.1.4 Stabilité de la solution

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 1.5. (*Stabilité au sens de Lyapunov*) Une solution $\Phi(t)$ du système (1.1) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que toute solution $x(t)$ de (1.1) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0. \quad (1.2)$$

Alors la solution $\Phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi_t = 0$ la définition devient : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que la solution $x(t)$ de (1.1) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si en plus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

Alors $\Phi(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

L'étude de la stabilité de la solution Φ_t peut être ramenée à celle de la solution nulle $y = 0$ d'un système (analogue) au système (1.1).

En effet, posons $y(t) = x(t) - \Phi(t)$ où $y(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi), \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi), \\ &\frac{dy}{dt} = g(t, y).\end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système.

Exemple 1.3. ($n = 1$)

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1, x(0) = 1.$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{(-t)} + 1.$$

La solution $\phi(t)$ telle que $\phi(0) = 1$ et $\phi(t) = 1$.

$$|x(t) - \phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{(-t)}| < |x_0 - 1|, \forall t > 0.$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon; \delta = \varepsilon \Rightarrow \phi(t)$ à stabilité asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{(-t)}| = 0.$$

D'où $\phi(t)$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1.4. Utilisons la méthode de Lyapunov pour étudier la stabilité du point d'équilibre du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

L'origine $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre pour ce système.

Considérons la fonction de Lyapunov définie positive suivante

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

On a $v(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ pour toute $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Pour toute solution $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ on a :

$$\begin{aligned}v'(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt}(v(x_1, x_2)) = \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \\ &= 2x_1(x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)) + 2x_2(-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)^2 > 0.\end{aligned}$$

Alors, l'origine est un point d'équilibre instable.

1.2 Système dynamique

En général, un système est dit dynamique lorsqu'il décrit des phénomènes évoluent au cours du temps, cette évolution temporelle est décrite généralement par des équations différentielles ou des applications.

Définition 1.6. *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application*

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

telle que

1. $\phi(., x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $\phi(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $\phi(0, x) = x$.
4. $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.7. *Un système dynamique ϕ sur \mathbb{R}^n est linéaire si :*

$$\phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \phi(t, x) + \beta \phi(t, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.8. *Système dynamique continu*

Un système dynamique continu dans lequel les variables dynamiques sont continues est représenté par un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), x \in U,$$

où U est un ouvert de \mathbb{R}^n .

1.3 Les points d'équilibre et linéarisation

1.3.1 Les points d'équilibre

Définition 1.9. Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé point critique ou point d'équilibre du système

$$x' = f(x(t)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

si elle vérifie $f(x_0) = 0$.

Définition 1.10. Le point d'équilibre x_0 de (1.3) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_f(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

1.3.2 Linéarisation

Définition 1.11. Le système $x' = Ax$, où $A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)$, $1 \leq i, j \leq n$, est appelé le système linéarisé de (1.3) en x_0 .

1.4 Classification des points d'équilibre

Définition 1.12. On considère le système :

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Soit x_0 son point critique.

1. Le point critique x_0 est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.
2. Le point critique x_0 est appelé puits si toutes les parties réelles négatives.
3. Le point critique x_0 est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives.

Exemple 1.5. Soit le système non linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y^2 \\ \dot{y} = +2x^3 - 3y. \end{cases}$$

Ce système a un seul point d'équilibre qui est l'origine $(0, 0)$, et le système a deux valeurs propres réelles de même signe $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$.

Alors le point critique $(0, 0)$ est un puits.

Remarque 1.1. *l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.*

1.5 Nature des points d'équilibre

Dans cette section on considère le système différentiel plan linéaire à coefficients constants :

$$\dot{x} = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

où A une matrice carrée constante, et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice.

On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 .

- (1) Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent alors le point critique $(0, 0)$ est appelé un selle, il est toujours instable.
- (2) Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe on a trois cas :
 - (a) Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, le point critique $(0, 0)$ est appelé un nœud stable.
 - (b) Si $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, le point critique $(0, 0)$ est appelé un nœud instable.
 - (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $(0, 0)$ est appelé nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.
- (3) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées alors le point critique $(0, 0)$ est appelé un foyer, Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ est instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$.
- (4) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $(0, 0)$ est appelé un centre, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

Exemple 1.6. *On va étudier la nature du point critique $(0, 0)$ du système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4x + y. \end{cases}$$

Écrivons l'équation caractéristique de la matrice associée à ce système on a :

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{44}}{2} > 0$, $\lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{44}}{2} < 0$ sont réelles non nulles et de signe différent alors le point critique $(0,0)$ est une selle instable.

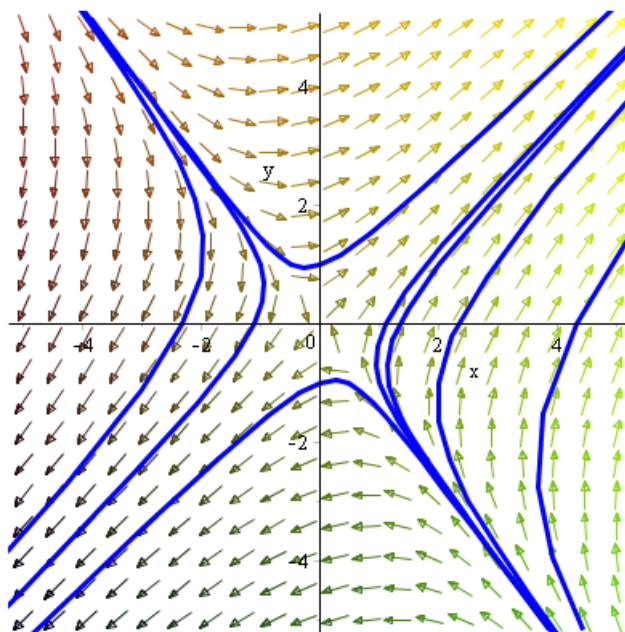


FIGURE 1.1 – L'origine $(0,0)$ est une selle instable

1.6 Plan et portrait de phase

Définition 1.13. Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré quelconque.

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions $(x(t), y(t))$ du système représentent dans le plan (x, y) des arcs appelés orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites

de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (x, y) est appelé le plan de phase.

1.7 Cycle limite

1.7.1 Solution périodique

Définition 1.14. Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

On appelle solution périodique toute solution $\varphi(t, x)$ du système (1.4) vérifiant :

$$\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x),$$

où le plus petit réel $T > 0$ est appelé période.

Remarque 1.2. Toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Proposition 1.1. Toute solution périodique contient au moins un point d'équilibre.

1.7.2 Cycle limite

Définition 1.15. Pour un système plan, un cycle limite est une orbite fermée isolée, c'est à dire au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.

Théorème 1.2. (Stabilité des cycles limites).

C étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines s'enroulent en spirale autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

1. Le cycle limite est dit stable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C .
2. Le cycle limite est dit instable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de C .

1.8 Existence et non-existence des cycles limites

Théorème 1.3. (Poincaré-Bendixon). *Soit le système plan suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.5)$$

Supposons que f, g sont des fonctions de classe C^1 sur D , où D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 . Le système (1.5) a une orbite Γ telle que l'orbite positive $\Gamma_+(p) = \{\phi(p, t), t \geq 0\}$ passant par le point p est contenue dans un sous ensemble compact A de D , alors

1. $\Gamma_+(p)$ est une solution périodique de (1.5).
2. $\Gamma_+(p)$ tend vers un point fixe.
3. $\Gamma_+(p)$ tend vers une orbite périodique.

Théorème 1.4. (Critère de Bendixon). *Soit le système plan*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champ de vecteur F (notée ∇F) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

1.9 Perturbation

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t, x, \varepsilon)$ continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, où ε est un petit paramètre. La fonction f est développable en série de Taylor au voisinage de $\varepsilon = 0$, d'où

$$f(t, x, \varepsilon) = f(t, x, 0) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \cdots + \varepsilon^n f_n(t, x) + \cdots .$$

Les coefficients f_1, f_2, \dots, f_n dépendent de t et de x . Les expressions $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$, sont appelés des fonctions d'ordre.

Théorème 1.5. (Poincaré). *On considère le problème à valeur initiale*

$$\dot{y} = F(t, y, \varepsilon), y(t_0) = \mu,$$

où $|t - t_0| \leq h, y \in D \subset \mathbb{R}^n, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 \leq \mu \leq \mu_0$. Si $F(t, y, \varepsilon)$ est continue par rapport à t, y et ε , et si F est développable en série entière convergente par rapport à y et ε pour $\|y\| \leq \rho, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Alors, $y(t)$ est développable en série entière convergente par rapport à ε et μ dans un voisinage de $\varepsilon = \mu = 0$.

Cycles limites d'une certaine classe de systèmes différentiels perturbés et la théorie de moyennisation

2.1 Théorie de moyennisation

La théorie de moyennisation est une théorie classique à été introduit pour la première fois par Krylov et Bogoliubov en 1930. Cette théorie utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques.

Elle donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné autonome fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels non autonomes.

Elle s'applique aux systèmes de la forme

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x),$$

où ε est suffisamment petit, et $f(t, x)$ est T-périodique en la première variable. Pour plus d'informations sur cette théorie voir le livre de Sanders, Verhulst.

2.1.1 La méthode de moyennisation du premier ordre

Considérons le problème de Cauchy à valeur initiale suivant

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. D est un domaine borné. Pour tout $t \geq 0$, on suppose que $f(t, x)$ et $g(t, x, \varepsilon)$ sont des fonction T-périodique en t .

Le système moyenné associé au système (2.1) est

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y), \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Définition 2.1. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f a une moyenne notée f^0 si la limite suivante existe

$$f^0(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau.$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

Théorème 2.1. [13] Soit le système (2.1), on suppose que $F, R, D, F, D_s^2 F$ et $D_s R$ sont continues et bornées par une constante M dans $[0, \varepsilon) \times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Supposons aussi que F et R sont T -périodique en t , où T est indépendante de ε .

Alors

(a) Si p est un point critique pour le système (2.2) tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.4)$$

Alors pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ de système (2.1) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) Si le point critique $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x(t, \varepsilon)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Preuve. Voir [13] ■

Exemple 2.1. Considérons l'équation de Van Der Pol :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x},$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.5)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ et $r > 0$, ce système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{-1 + \varepsilon \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta},$$

On sait que

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + O(z^2), \quad |z| < 1.$$

En posant $z = \varepsilon \cos \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta$, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2), \quad (2.7)$$

l'équation (2.7) doit s'écrire sous la forme de système (2.2), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant $x = r, t = \theta, T = 2\pi$ et $F(r, \theta) = r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta$.

La fonction moyennée de système (2.7) :

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -r (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta, \\ &= \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{r^2}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) \right) \\ &= \frac{-r}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - \frac{r^2}{8} \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} \right) \right)_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{8} r (r^2 - 4). \end{aligned}$$

Maintenant : $f^0(r) = \frac{1}{8} r (r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r = 2$ (puisque r doit être positif).

$$\text{(Sachant que : } (D_r f^0(r) = \frac{1}{8} (3r^2 - 4)) \text{)}.$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est $r = 2$. Comme $D_r f^0(2) = 1$, d'après le théorème 2.1 il suit que le système (2.5) pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui est l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (2.5) avec $\varepsilon = 0$.

De plus comme $D_r f^0(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable. Voir la figure 2.1.

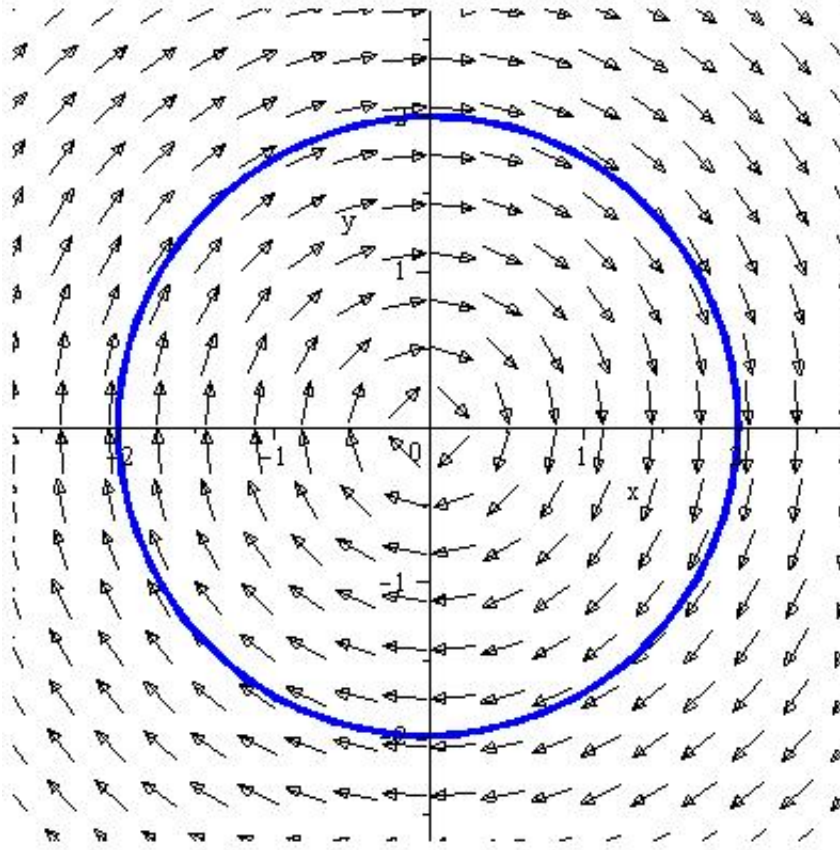


FIGURE 2.1 – Cycle limite instable du système (2.5) pour $\varepsilon = 0.01$.

Exemple 2.2. *Le système de Liénard*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n), \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (2.8)$$

pour ε suffisamment petit et $a_n \neq 0$ a au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cycles limites.

En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système (2.8) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r (a_1 \cos^2 \theta + \cdots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta (a_1 \cos \theta + \cdots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta). \end{cases} \quad (2.9)$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta)}{1 - \varepsilon \sin \theta (a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)}. \quad (2.10)$$

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2), \quad |x| < 1,$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r (a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) + \varepsilon^2 r \sin \theta \cos \theta (a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)^2. \quad (2.11)$$

On cherche maintenant la fonction moyennée $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On a

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_{10}(r).$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r}{2\pi} \left(a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a_3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta + \dots \right. \\ &\quad \left. + a_{n-1} r^{n-2} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta + a_n r^{n-1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \theta d\theta \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

— Si n est impair, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-1} I_{n+1}). \quad (2.14)$$

On cherche les points d'équilibre de l'équation (2.14). En posant $X = r^2$, on a

$$F_{10}(r) = 0 \implies (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_{n+1} X^{\frac{n-1}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus $\frac{n-1}{2}$ racines positives.

— Si n est pair, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} \left(a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \cdots + a_n r^{n-2} I_n \right). \quad (2.15)$$

On cherche les points d'équilibre de (2.15). Posant toujours $X = r^2$, on trouve

$$F_{10}(r) = 0 \implies \left(a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \cdots + a_n I_n X^{\frac{n-2}{2}} \right) = 0.$$

Dans ce cas, ce polynôme possède au plus $\frac{n-2}{2}$ racines positives et comme

$$\frac{n-2}{2} = \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Alors le système (2.8) possède au plus $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ cycles limites.

2.1.2 La méthode de moyennisation du second ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions d'un système différentiel périodique.

Théorème 2.2. [13] *Considérons les deux problèmes à valeurs initiales*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x) + \varepsilon^3 h(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.16)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.17)$$

où $f, g : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : [0, \infty) \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, D un ouvert de \mathbb{R}^n , les fonctions f, g et h sont continues et T -périodiques en t .

Soit

$$f^1(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x), \quad (2.18)$$

où

$$y^1(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds + z(x), \quad (2.19)$$

avec $z(x)$ une fonction de classe C^1 telle que la moyenne de y^1 est nulle. f^0, f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées de f, g et h respectivement.

Supposons que

1. $\frac{\partial f}{\partial x}$, g et h sont Lipschitziennes en x et continues sur leurs domaines de définition,
2. $|h(t, x, \varepsilon)|$ est uniformément bornée par une constante M dans $\left[0, \frac{M}{\varepsilon} \right] \times D \times (0, \varepsilon_0]$,
3. T est indépendant de ε ,
4. $y(t)$ appartient à D pendant un temps de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Pendant un temps de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.1. *Si les hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites et de plus*

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

(a) *Si p est le point d'équilibre du système moyenné (2.17) tel que*

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y)) \right|_{y=p} \neq 0, \tag{2.20}$$

alors, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.16) telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow p \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(b) *Si (2.20) est négative, alors la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.16) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (2.20) est positive, alors cette solution périodique est instable.*

Remarque 2.1.

1. *Si $f^0(y) = 0$, alors en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient que $f^0(r) = 0$, d'où*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) d\theta = 0.$$

Calculons f^{10} , on trouve

$$\begin{aligned} f^{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \int_0^s f(r, \theta) ds \right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, s) z(r) ds, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \int_0^s f(r, \theta) d\theta \right) ds + \frac{z(r)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, s) ds, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$f^{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r, s) \int_0^s f(r, \theta) ds \right) d\theta.$$

2. Pour $f^0(y) = 0$, on note la fonction moyennée de second ordre par

$$A(r) = f^{10}(r) + g^0(r).$$

Exemple 2.3. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(2x^2 - 3xy) \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2(y^5 - x^2y - y^3 + xy + 2y^2). \end{cases} \quad (2.21)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$ on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = (-\cos^6(\theta)r^5 + 3\cos^4(\theta)x^5 - 3\cos^2(\theta)r^5 - 2\sin(\theta)\cos^2(\theta)r^2 - \cos^3(\theta)r^2r + \cos^2(\theta)r^3 + r^5 \\ \quad + 2\sin(\theta)r^2 + \cos(\theta)r^2 - r^3)\varepsilon^2 + (-3\sin(\theta)\cos^2(\theta)r^2 + 2\cos^3(\theta)r^2)\varepsilon. \\ \dot{\theta} = 1 + (\sin(\theta)\cos^5(\theta)r^4 - 2\sin(\theta)\cos^3(\theta)r^4 + \sin(\theta)\cos(\theta)r^4 + \sin(\theta)\cos^2(\theta)r \\ \quad - r^2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\cos^3(\theta)r + 2r\cos(\theta))\varepsilon^2 + (-2\sin(\theta)\cos^2(\theta)r - 3\cos^3(\theta)r \\ \quad + 3r\cos(\theta))\varepsilon. \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme une variable indépendante, en obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + o(\varepsilon^3).$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= -3\sin(\theta)\cos^2(\theta)r^2 + 2\cos^3(\theta)r^2 \\ F_2(r, \theta) &= \sin^2(\theta)r^5\cos^4(\theta) - 12\sin^2(\theta)\cos^4(\theta)r^3 - 2\sin^2(\theta)r^5\cos^2(\theta) \\ &\quad - 5\sin(\theta)\cos^5(\theta)r^3 + \sin^2(\theta)r^5 + 9\sin(\theta)\cos^3(\theta)r^3 \\ &\quad + \sin^2(\theta)r^2\cos(\theta) - \sin^2(\theta)r^3 - 2\sin(\theta)\cos^2(\theta)r^2 + 2\sin(\theta)r^2. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème 2.2 on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0.$$

On peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) = -6 \sin(\theta) \cos^2(\theta)r + 4 \cos^3(\theta).$$

ensuite

$$\int_0^\theta F_1(r, s)ds = -r^2 + \cos^3(\theta)r^2 + \frac{2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta)r^2 + \frac{4}{3} \sin(\theta)r^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f^{(10)}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, \theta)ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\ &= \frac{5}{16}r^5 - \frac{5}{4}r^3. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation (2.22) et on obtient une racine positive $r = 2$.

Comme

$$\frac{d}{dr}f^{(10)}(r) = \frac{25}{16}r^4 - \frac{15}{4}r^2.$$

D'où

$$\frac{d}{dr}f^{(10)}(r = 2) = 10 \neq 0.$$

Donc il existe un cycle limite, et d'après l'hypothèse 2.2 du corollaire 2.1 on a

$$\frac{d}{dr}f^{(10)}(r) = -0,687500004 < 0.$$

Alors, le cycle limite est stable d'amplitude $r = 2$ pour ε suffisamment petit. Voir la figure 2.2.

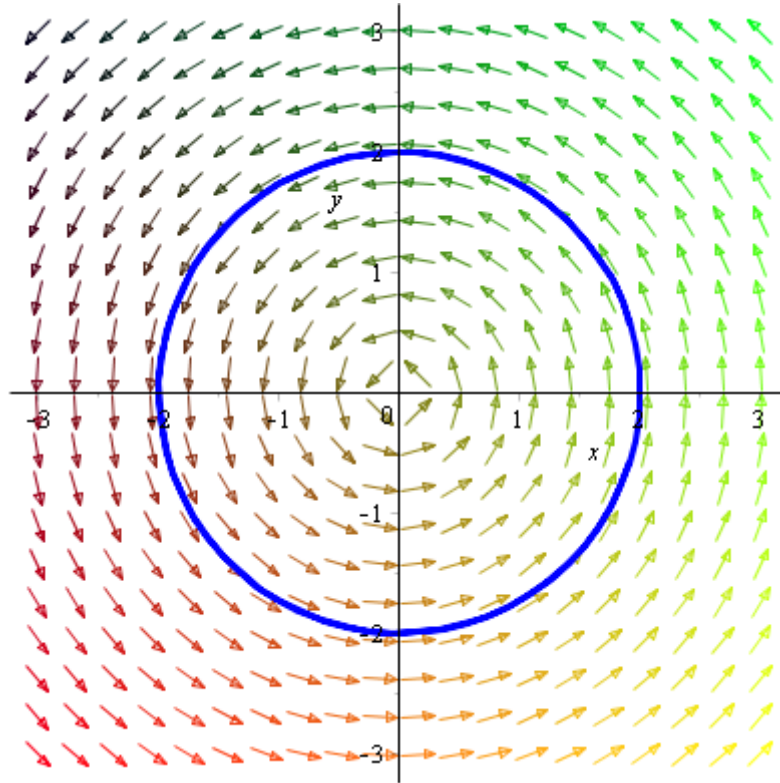


FIGURE 2.2 – Cycle limite stable du système (2.21) pour $\varepsilon = 0.001$.

2.2 Nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée des systèmes différentiels de Liénard

L'objectif de cette section est consacré à étudier l'existence des cycles limites pour une classe généralisée des systèmes différentiels de Liénard.

En 2020, Boulfoul et Mellahi [3] ont utilisé la théorie de moyennisation d'ordre un et deux pour étudier le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $x' = y, y' = -x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \ell(x)y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2, \end{cases} \quad (2.23)$$

où

$$\ell(x) = \varepsilon \ell_1(x) + \varepsilon^2 \ell_2(x), f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x), g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x), h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$$

où $\ell_k(x)$ de degré m , $f_k(x)$, $g_k(x)$ et $h_k(x)$ sont de degré n , pour chaque $k = 1, 2$ et ε est un petit paramètre.

Ils ont obtenu le résultat suivant

Théorème 2.3. *Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites de la classe généralisée du système de Liénard (2.23) bifurquant des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est :*

$$H_1(m, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Voir [3]. ■

Exemple 2.4. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - 4\varepsilon x^2 y \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(2 - x^4 + y(\frac{-1}{4} + x + 2x^2 - x^4) + y^2(1 - 2x^2 + x^4)). \end{cases} \quad (2.24)$$

Donc, dans ce système la fonction $\ell_1(x)$ de degré $m = 2$ et les fonction $f_1(x)$, $g_1(x)$ et $h_1(x)$ de degré $n = 4$. D'après le théorème 2.3 le système (2.24) admet deux cycles limites.

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $r > 0$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} &= (\sin(\theta)r^6 \cos^4(\theta) + \sin(\theta)r^2 - \sin(\theta) \cos^6(\theta)r^6 - \sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) - 2 \sin(\theta)r^4 \cos^2(\theta) \\ &+ \sin(\theta)r^4 \cos^4(\theta) - 4r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2 \sin(\theta) - \frac{1}{4}r \sin^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ &+ 2r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta)) \varepsilon \\ \dot{\theta} &= -1 + \left(-\frac{1}{4} \sin(\theta) \cos(\theta) + 2r^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) - r^4 \sin(\theta) \cos^5(\theta) - 4r^2 \cos^4(\theta) \right. \\ &+ r \sin(\theta) \cos^2(\theta) + r \cos(\theta) - 2r^3 \cos^3(\theta) + \frac{2 \cos(\theta)}{r} + r^3 \cos^5(\theta) + 4r^2 \cos^2(\theta) \\ &\left. - r \cos^3(\theta) + r^5 \cos^5(\theta) - r^5 \cos^7(\theta) \right) \varepsilon, \end{cases}$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (2.24) devient

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \varepsilon F(r, \theta) + o(\varepsilon^2). \quad (2.25)$$

Ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation d'ordre un prenant :

2.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DE LIÉNARD

$x = r, t = \theta, T = 2\pi$ et

$$\begin{aligned} F(r, \theta) = & -\sin(\theta)r^6 \cos^4(\theta) - \sin(\theta)r^2 + \sin(\theta) \cos^6(\theta)r^6 + \sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) \\ & + 2 \sin(\theta)r^4 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)r^2 \cos^4(\theta) + 4r^3 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - 2 \sin(\theta) \\ & + \frac{1}{4}r \sin^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - 2r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta). \end{aligned}$$

La fonction moyennée du système (2.24) est

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = \frac{1}{16}r(2 - 4r^2 + r^4)$$

La fonction $f^0(r)$ admet deux racines positives $r_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, r_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ la condition $Dr f^0(r_1) = 1,207106781 \neq 0$ et $Dr f^0(r_2) = -0,2071067814 \neq 0$.

Alors le système (2.24) a deux cycles limites instable et asymptotiquement stable d'amplitude $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ respectivement qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, y' = -x$. Voir la figure (2.3).

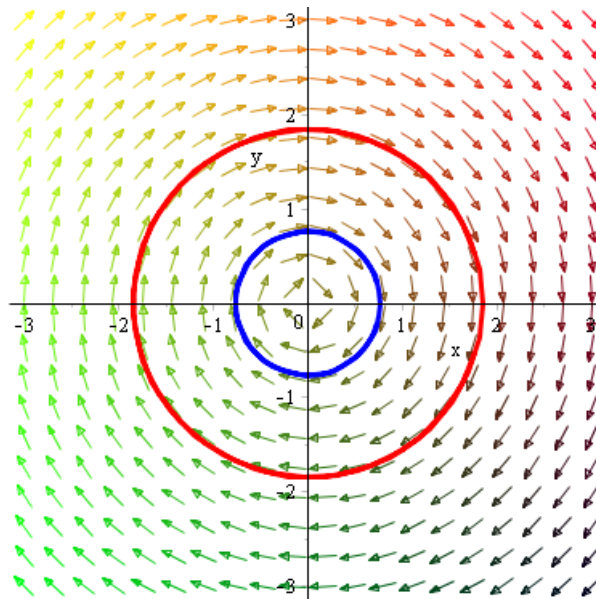


FIGURE 2.3 – Deux cycle limites du système (2.24) pour $\varepsilon = 0.00001$.

Dans cette partie, on va présenter un nouveau résultat concernant le nombre maximum de cycles limites. En effet, on va changer la fonction $f(x)$ par la fonction $f(x, y)$ pour $k = 1$ dans le système (2.23) pour savoir ce qui se passe pour le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques d'un centre linéaire $x' = y, y' = -x$, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un. Pour cette raison, on considère le système

suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \ell(x)y, \\ \dot{y} = -x - f(x, y) - g(x)y - h(x)y^2. \end{cases} \quad (2.26)$$

où

$$\begin{cases} \ell(x) = \varepsilon \ell_1(x) \\ f(x, y) = \varepsilon f_1(x, y) \\ g(x) = \varepsilon g_1(x) \\ h(x) = \varepsilon h_1(x), \end{cases}$$

où $\ell_1(x), f_1(x), g_1(x)$ et $h_1(x)$ de degré m, n_1, n_2 et n_3 respectivement, et ε suffisamment petit.

Notre résultat principal est le suivant

Corollaire 2.2. *Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système (2.26) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est :*

$$\max \left\{ \left\lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor \right\}$$

cycle limite.

Preuve. Cette preuve est basée sur la théorie de moyennisation du premier ordre.

Supposons que

$$f_1(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} x^i y^j, g_1(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i, h_1(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i \text{ et } \ell_1(x) = \sum_{i=0}^m e_i x^i,$$

En coordonnées polaires (r, θ) , où

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ et } r > 0.$$

Le système (2.26) devient :

$$\begin{aligned} \dot{r} = -\varepsilon & \left[\sum_{i=0}^m e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right], \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -1 - \varepsilon \left[\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} r^{i+j-1} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta - \sum_{i=0}^m e_i r^i \cos^i \theta \sin^2 \theta \right].$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (2.26) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f(r, \theta) + o(\varepsilon^2),$$

où

$$f(r, \theta) = \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=0}^m e_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta.$$

On calcule maintenant la fonction moyennée d'ordre un suivante

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta.$$

Pour ce faire, on utilise les intégrales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin \theta d\theta = 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} \alpha_{ij} \pi & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^2 \theta d\theta = \begin{cases} \beta_i \pi & \text{si } i \text{ pair} \\ 0 & \text{si } i \text{ impair} \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^3 \theta d\theta = 0. \end{array} \right.$$

On obtient :

$$f^0(r) = \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair} \\ j \text{ impair}}}^{n_1} a_{ij} r^{i+j} \alpha_{ij} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n_2} b_i r^{i+1} \beta_i \right] = 0.$$

$f^0(r)$ a au plus $\max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right] \right\}$ racine positives.

Si ces racines positive vérifiée la condition ($\det(D_x f^0(r = r_0)) \neq 0$) du théorème 2.1 on conclut que le système (2.26) a au plus $max = \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right] \right\}$ cycles limites bifurquent

des orbites périodiques du centre linéaire $x' = y, y' = -x$. ■

On va maintenant donner un exemple d'un système à la même forme du système (2.26) et on montre que le nombre maximum de cycles limites de ce système qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Exemple 2.5. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2\varepsilon x^4 y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(3x - xy^2 + x^2 y - 2y + 4xy - 4x^2 y^2). \end{cases} \quad (2.27)$$

Donc, dans ce système les fonctions $\ell_1(x), f_1(x, y), g_1(x)$ et $h(x)$ sont de degré 4, 3, 2 et 1 respectivement.

D'après le résultat du corollaire 2.2 ce système admet un seul cycle limite.

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$ et $r > 0$, se système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = (-2r^5 \cos^5(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos(\theta)r \sin(\theta) - 4r^4 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ \quad + 4 \sin(\theta)r^4 \cos^2(\theta) + \sin(\theta)r^3 \cos(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + 2r \sin^2(\theta) - 4r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta))\varepsilon \\ \dot{\theta} = -1 + (-r^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 4r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + 4 \cos^3(\theta)r^3 \\ \quad + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos^2(\theta) - \cos^4(\theta)r^2 - 4 \cos^5(\theta)r^3 - 2 \cos^6(\theta)r^4 + 2r^4 \cos^4(\theta))\varepsilon, \end{cases}$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (2.27) devient

$$\begin{cases} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{cases} = \varepsilon F(r, \theta) + o(\varepsilon), \quad (2.28)$$

ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation d'ordre un en prenant :

$$x = r, t = \theta, T = 2\pi \text{ et}$$

$$\begin{aligned} F(r, \theta) = & 2r^5 \cos^5(\theta) \sin(\theta) + 3 \cos(\theta)r \sin(\theta) + 4r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ & - 4 \sin(\theta)r^4 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)r^3 \cos(\theta) + r^3 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2r \sin^2(\theta) + 4r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

La fonction moyennée du système (2.28) est

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = \frac{1}{8}r(-8 + r^2).$$

La seule racine de $f^0(r)$ est $r = 2\sqrt{2}$. Pour $|\varepsilon| = 0$, de plus cette racine est vérifiée la condition

$$Dr f^0(2\sqrt{2}) = 2 \neq 0.$$

Alors, d'après le corollaire 2.2, le système (2.27) a exactement un unique cycle limite instable d'amplitude $2\sqrt{2}$ qui bifurque des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. Voir la figure 2.4.

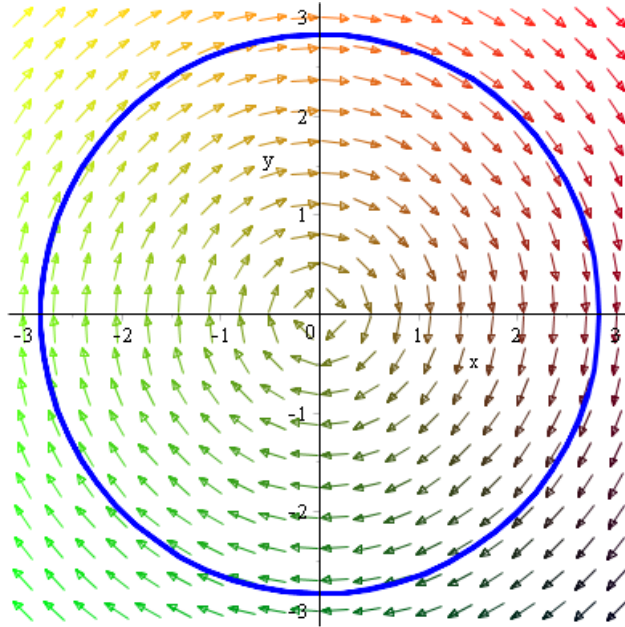


FIGURE 2.4 – Cycle limite instable du système (2.27) pour $\varepsilon = 0.0001$.

Appliquant maintenant la théorie de moyennisation du second ordre au système (2.23). Le deuxième résultat qui a trouvé dans [3] est le suivant :

Théorème 2.4. [3] Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites de la classe généralisée du système de Liénard (2.23) bifurquant des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, en utilisant la théorie de moyennisation du second ordre est

$$\widetilde{H}_2(m, n) = \max \left\{ n, \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m-1}{2} \right] + 1 \right\},$$

cycles limites.

Preuve. Voir [3] ■

Exemple 2.6. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - \varepsilon(y + xy) + \varepsilon^2(-y + 2xy) \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(2 - x - 5x^2 + xy + y^2 - x^2y^2) - \varepsilon^2(-x + x^2 + y - 2x^2y - y^2 - 2x^2y^2). \end{cases} \quad (2.29)$$

2.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DE LIÉNARD

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, le système (2.29) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = (2 \sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) + \sin(\theta)r^2 - 2 \sin(\theta) \cos^4(\theta)r^4 - r \sin^2(\theta) + 2r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta))\varepsilon^2 \\ \quad + (-2 \sin(\theta) - \sin(\theta) \cos^4(\theta)r^4 + \sin(\theta)r^4 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)r^2 - r^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ \quad + 5r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta))\varepsilon \\ \dot{\theta} = -1 + (2r^3 \cos^3(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) + 1 + 2r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - r \cos(\theta) - 2r^3 \cos^5(\theta))\varepsilon^2 \\ \quad + (-r \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 5r \cos^3(\theta) - \frac{2 \cos(\theta)}{r} + r^3 \cos^3(\theta) + 1 - r^3 \cos^5(\theta))\varepsilon. \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites nous résolvons l'équation

$$F_{(20)}(r) = r \left(\frac{1}{48}r^4 + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (2.30)$$

L'équation (2.29) possède une seule racine positive $r = \sqrt{-6 + 2\sqrt{15}}$. D'après le théorème 2.4, le système (2.30) a un cycle limite qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux. Voir la figure 2.5.

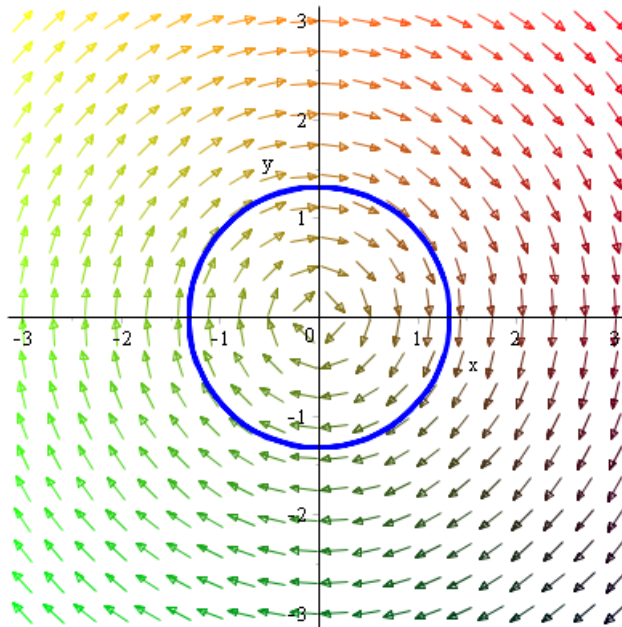


FIGURE 2.5 – Cycle limite instable du système(2.29) pour $\varepsilon = 0.001$.

Solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles du troisième ordre

3.1 Autre théorème de moyennisation du premier ordre

On considère le problème de la bifurcation des solutions T-périodique du système différentiel

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}, \varepsilon) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (3.1)$$

avec $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonction de classe \mathcal{C}^2 , T-périodique en t , et Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . L'une des principales hypothèses est que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}), \quad (3.2)$$

a une sous-variété de solutions périodiques. La solution de ce problème est donnée, en utilisant la théorie de moyennisation. Pour plus d'informations sur cette théorie voir les livres de Sanders and Verhulst [13], and Verhulst [14].

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ la solution du système non perturbé (3.2) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Nous écrivons le système linéarisé du système (3.2) perturbé en $x(t, z)$ comme suit :

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}))\mathbf{y}. \quad (3.3)$$

On note par $M_{\mathbf{z}}(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (3.3), et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées, c-à-d $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Théorème 3.1. [4] Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ensemble ouvert et borné, et soit $\beta_0 : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Nous supposons que

(i) $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \text{Cl}(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$, la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (3.2) est T -périodique.

(ii) Pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (3.3) telle que la matrice

$$M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T),$$

a dans le coin supérieur droit une matrice nulle de dimension $k \times (n-k)$, et dans le coin inférieur droit une matrice Δ_α de dimension $(n-k) \times (n-k)$ telle que $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt \right). \quad (3.4)$$

Si $\mathbf{a} \in V$ un point d'équilibre du système (3.4) c-à-d $\mathcal{F}(\mathbf{a}) = 0$ tel que $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(\mathbf{a})) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (3.1) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. Voir[4] ■

Le théorème suivant est donné une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques des systèmes différentielles périodiques.

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 g(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.5)$$

avec $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$. De plus nous supposons que $f(t, \mathbf{x})$ et $g(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodique en t . On considère dans D l'équation différentielle moyennée

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon f^0(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.6)$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \mathbf{y}) dt.$$

Théorème 3.2. [14] Considérons l'équation différentielle (3.5) et supposons que

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

(i) Les fonctions f, g, f_x, g_x et f_{xx} sont définies, continues et bornées par une constante indépendante de ε dans $[0, \infty) \times D$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

(ii) f et g sont T -périodiques en t (T indépendant de ε).

Si p est un point singulier de l'équation moyennée (3.6) et

$$\det \left(\frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{y}} \right) \Big|_{y=p} \neq 0,$$

alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ de l'équation (3.5) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. Voir les théorème 11.5 et 11.6 de Verhulst [14]. ■

3.2 Existence des solutions périodiques pour une équation différentielle du troisième ordre

Dans la théorie qualitative des équations différentielles, l'un des principaux problèmes est l'étude de l'existence et le nombre maximum des solutions périodiques des équations différentielles.

Dans cette section, nous allons utiliser la théorie de moyennisation pour étudier les solutions périodiques de l'équation différentielle du troisième ordre suivante

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x''), \quad (3.7)$$

où μ et ε sont réelles et ε est un paramètre suffisamment petit et $F \in C^2$ est une fonction 2π -périodique en t .

On va étudier l'existence des solutions périodiques de l'équation (3.7) dans deux cas différents pour $\mu \neq 0$ et pour $\mu = 0$. Le premier résultat obtenu pour $\mu \neq 0$ est le théorème suivant.

Théorème 3.3. [9] *Considérons $\mu \neq 0$ dans l'équation différentielle (3.7) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour chaque solution positive r_0^* de la fonction*

$$F(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta d\theta,$$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

où

$$\begin{aligned} A &= -\frac{r_0(\cos \theta + \mu \sin \theta)}{1 + \mu^2}, \\ B &= \frac{r_0(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{1 + \mu^2}, \\ C &= \frac{r_0(\cos \theta + \mu \sin \theta)}{1 + \mu^2}, \end{aligned}$$

l'équation différentielle (3.7) a une solution périodique $x_\varepsilon(t)$ tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2},$$

de $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. Si $y = x'$ et $z = x''$, alors on écrit l'équation différentiel du troisième ordre (3.7) comme système différentiel du premier ordre dans le sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ainsi, nous avons le système différentiel

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= z, \\ z' &= -y + \mu(x + z) + \varepsilon F(x, y, z). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le système (3.8) avec $\varepsilon = 0$ est appelé le système non perturbé. Le système non perturbé a un seul point d'équilibre qui est l'origine. Les valeurs propres à l'origine sont $i, -i, \mu$. En faisant le changement de variables $(X, Y, Z)^T = C(x, y, z)^T$ où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 1 \\ -\mu & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on transforme le système différentiel (3.8) en système différentiel suivant dont sa partie linéaire sous la forme normale de Jordan, c-à-d

$$\begin{aligned} X' &= -Y + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \\ Y' &= X, \\ Z' &= \mu Z - \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

où $\tilde{F}(X, Y, Z) = F(A, B, C)$, et

$$A = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2}, \quad B = \frac{Y - \mu(X + Z)}{1 + \mu^2}, \quad C = \frac{X + \mu(Y - \mu Z)}{1 + \mu^2}.$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, Z) de \mathbb{R}^3 , où $X = r \cos \theta, Y = r \sin \theta, Z = Z$, le système (3.9) peut s'écrire

$$\begin{aligned} r' &= \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta, \\ \theta' &= 1 - \varepsilon \frac{G(r, \theta, Z) \sin \theta}{r}, \\ Z' &= \mu Z - \varepsilon G(r, \theta, Z), \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $G(r, \theta, Z) = \tilde{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, Z)$.

Maintenant, considérons θ , comme une nouvelle variable indépendante, le système (3.10) devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ \dot{Z} &= \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z + \varepsilon \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

On considère $\mu \neq 0$, le système (3.11) peut s'écrire comme suit

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(\theta, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(\theta, \mathbf{x}, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \tag{3.12}$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \\ Z \end{pmatrix}, F_0(\theta, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu Z \end{pmatrix}, F_1(\theta, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) \end{pmatrix}.$$

Nous allons étudier les solutions périodiques du système (3.12) en utilisant la théorie de moyennisation. On cherche d'abord les solutions périodiques du système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(\theta, \mathbf{x}).$$

Notant que ces solutions périodiques sont

$$(r(\theta), Z(\theta)) = (r_0, 0),$$

pour toute $r_0 > 0$, c'est-à-dire que ces orbites périodiques sont des cercles dans le plan $Z = 0$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

pour le système (3.10). Bien sûr toutes ces solution périodiques aux coordonnées (r, Z) sont 2π -périodiques en θ .

Nous décrivons les différents éléments des hypothèses du théorème 3.1 dans le cas particulier du système différentiel (3.11). On a $k = 1$ et $n = 2$. Soit $r_1 > 0$ une valeur arbitrairement petite et $r_2 > 0$ une valeur arbitrairement grande. Alors, nous prenons le sous-ensemble ouvert borné V de \mathbb{R} tel que $V = (r_1, r_2)$, $\alpha = r_0 \in V$, $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\beta(r_0) = 0$. Soit Z une ensemble défini comme suit

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (r_0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}.$$

Il est que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer que la solution 2π -périodique $\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{z}_\alpha = (r_0, 0)$.

Calculant la matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(\theta)$ du système différentiel linéaire (3.3) associée à la solution 2π -périodique $\mathbf{z}_\alpha = (r_0, 0)$ telle que $M_{\mathbf{z}_\alpha}(0)$ est une matrice identité dans \mathbb{R}^2 , on obtient

$$M(\theta) = M_{\mathbf{z}_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

Notant que la matrice $M(\theta)$ ne dépend pas de l'orbite périodique particulière \mathbf{z}_α . Puisque la matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix}.$$

n'est pas identiquement nul car $\mu \neq 0$, et elle satisfait les hypothèses de (ii) du théorème 3.1, on peut appliquer ce théorème au système (3.11).

Maintenant, soit $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\xi(r, Z) = r$. On calcule la fonction (3.4)

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta d\theta,$$

où A, B et C sont définies dans l'énoncé du théorème 3.3. Alors par théorème 3.1 nous avons que pour tout zéro simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ on a une solution périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (3.11) telle que

$$(r_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(0)) \rightarrow (r_0^*, 0) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

En revenant au changement des coordonnées on obtient une solution périodique $(r_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ du système (3.10) telle que

$$(r_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0^*, t, 0) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent, on obtient une solution périodique $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ pour le système (3.9) telle que

$$(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0^* \cos t, r_0^* \sin t, 0) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Alors, puisque

$$x = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2}, \quad (3.13)$$

on a une solution périodique $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ du système (3.8) telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Notant que l'expression précédente prouve l'existence de la solution périodique de l'équation différentielle linéaire

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = 0.$$

Ceci complète la preuve du théorème 3.3. ■

Application

Considérons l'équation différentielle

$$x''' - 2x'' + x' - 2x = \varepsilon x(x^2 - 1). \quad (3.14)$$

D'après le théorème 3.3, pour trouver les solutions périodiques il faut chercher les solutions positives de l'équation

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos(\theta) d\theta,$$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{-r(\cos(\theta) + 2 \sin(\theta))}{5}, \\ B &= \frac{r(\sin(\theta) + 2 \cos(\theta))}{5}, \\ C &= \frac{r(\cos(\theta) + \mu \sin(\theta))}{5}. \end{aligned}$$

D'où

$$F(r) = r \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{200} r^2 \right) = 0.$$

L'équation $F(r) = 0$ admet une seule racine positive $r = \frac{2}{3}\sqrt{15}$ et

$$\det \left(\frac{dF}{dr} \left(\frac{2}{3}\sqrt{15} \right) \right) = -2 \neq 0.$$

Alors, l'équation (3.14) a une seule solution périodique tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{2}{15}\sqrt{15} \cos(t) - \frac{4}{15}\sqrt{15} \sin(t).$$

De $x''' - 2x'' + x' - 2x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On donne maintenant le deuxième résultat dans le cas $\mu = 0$. Pour ce faire, on considère les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(r_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) \cos \theta d\theta, \\ f_2(r_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) d\theta, \end{aligned}$$

où $\alpha = -z_0 - r_0 \cos \theta$, $\beta = r_0 \sin \theta$ et $\gamma = r_0 \cos \theta$.

Théorème 3.4. [9] *Considérons que $\mu = 0$ dans l'équation différentielle (3.7). S'il existe (r_0, z_0) telle que :*

$$f_1(r_0, z_0) = 0, f_2(r_0, z_0) = 0 \text{ et } \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, z)} \right) (r_0, z_0) \neq 0.$$

Alors l'équation différentielle (3.7) avec $\mu = 0$ a une solution périodique $x_\varepsilon(t)$ tend vers la solution périodique

$$x(t) = -r_0 \cos t - z_0,$$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

de $x''' + x' = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. Dans cette preuve, on considère $\mu = 0$ dans système (3.11) de la preuve du théorème 3.3.

Donc le système (3.11) avec $\mu = 0$ devient de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ \dot{Z} &= \frac{dZ}{d\theta} = -\varepsilon G(r, \theta, Z) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{3.15}$$

où $(r, Z) \in D \subset \mathbb{R}^2$ et D un sous ensemble ouvert dans \mathbb{R}^2 .

Le système (3.15) est s'écrit sous la forme standard de la théorie de moyennisation pour appliquer le théorème 3.2, Alors le système différentiel moyenné correspond au système (3.15) est :

$$(\dot{r}, \dot{Z}) = \varepsilon g^0(r, Z),\tag{3.16}$$

où

$$g^0(r, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(r, s, Z) \cos s, G(r, s, Z)) ds.\tag{3.17}$$

D'après le théorème 3.2, pour tout point singulier $p = (r_0, Z_0)$ du système (3.16) tel que

$$\det \left(\frac{\partial g^0}{\partial(r, Z)} \right) \Big|_{(r, Z)=p} \neq 0,\tag{3.18}$$

il existe une solution 2π -périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (3.15) telle que $(r_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(0)) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors (3.18) est équivalent à

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial(r, Z)} \right) (r_0, Z_0) \neq 0,$$

où les fonction f_1 et f_2 sont données avant le théorème 3.4.

En revenant au changement des coordonnées, la solution 2π -périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (3.15) prouve l'existence de la solution périodique $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ du système (3.8) où $\mu = 0$ telle que

$$(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0 \cos t, r_0 \sin t, Z_0) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent, d'après (3.13), le système (3.8) a une solution périodique $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$

3.2. EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE

telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow -r_0 \cos t - Z_0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ceci complète la preuve du théorème 3.4. ■

Conclusion

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire portait sur l'étude de la relation entre la théorie de moyennisation et l'étude de l'existence et le nombre maximum de cycles limites pour les systèmes différentiels non linéaires perturbés.

L'intérêt de la première partie concerne à donner un nouveau résultat sur le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire perturbé par une classe généralisée du système de Liénard. On a aussi supporté notre résultat principal par une application où on a pu prouver l'atteinte de la borne de cycles limites.

Nous avons consacré la seconde partie à l'étude des solutions périodiques d'une classe généralisée d'équations différentielles du troisième ordre. On a proposé dans cette étude une application permet de justifier le résultat trouvé.

On a utilisé la théorie de moyennisation pour prouver nos études, cette théorie a été utilisée largement ces dernières années dans la recherche des cycles limites pour les systèmes différentiels perturbés. Les calculs dans ce mémoire a été fait par le logiciel mathématique "Maple", on note que ce logiciel peut résoudre les problèmes de calculs en tous les domaines mathématiques.

Bibliographie

- [1] Bendib E. Thèse de Doctorat : *Sur Le nombre maximum de cycles des équations différentielles de Liénard et bifurcation de hopf*. Université Badji Mokhtar. Annaba. 2017.
- [2] Berrehail C. Thèse de Doctorat : *Cycles limites de trois classes d'équations différentielles ordinaires perturbées*. Université Badji Mokhtar. Annaba. 2014.
- [3] Boulfoul A and Mellahi N. *Limit cycles of Liénard polynomial systems type by averaging method*. Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA) Volume 6(1). 2020. 115.
- [4] Buică A and all. *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*. Communication on Pure and Applied Analysis. 6 (2007). 103-111.
- [5] Christopher C. J. Lloyd N. G. *On the paper of Jin and Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems*. Bull. London Math. Soc. 22 (1990). 5-12.
- [6] Hilbert D. *Mathematics problems*, lecture in : Second internat. Congr. math. Paris 1900. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.Phys. kl. 1900, 5. 253-297 ; English transl. Bull. Amer. Math. Soc. 437479, 1902.
- [7] Mahfoud Rahma. Mémoire de Master : *Existence et stabilité de cycles limites pour certaines classes de systèmes différentiels perturbés*. Université 20 Aout 1955 de Skikda. 2021.
- [8] Makhoulouf A and Debbabi D. *Periodic solutions of some classes of continuous third-order differential equations*. Chaos Solitons and Fractals. 94 (2017). 112-118.
- [9] Llibre J and all. *On the periodic orbits of the third-order differential equation $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x'')$* . Appl. Math. Lett. vol 26. 2013. 425-430.

- [10] Llibre J and Mereu A. C. *Limit cycles for a generalized kukles polynomial differential systems*. Nonlinear Analysis. 74(2011). 1261-1271.
- [11] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [12] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une equation différentielle*. Jacques gabay. Paris, 1993. Edit. Reprinted from the original papers published in the Journal de Mathématiques. 1881, 7, 375-422, 1882, 8, 251-2-96, 1885, 1, 167-244, and 1886, 2. 151-217.
- [13] Sanders JA, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag. 1985.
- [14] Verhulst F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext, Springer. 1991.