

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية

العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2023/2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Modélisation et approximation par la méthode des
éléments finis de l'écoulement d'un fluide de verre**

Option : ANEDP

Par : Rania CHELIREM

Encadré par : Z. HAMDI

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : A. LALLOUCHE

MCB U. SKIKDA

Examineur: H. ATOUI

MCB U. SKIKDA

Année : 2023/2024

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :
à mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et
sacrifié pour que je sois contente, pour leurs conseils, leurs affections et leurs
encouragements pour tout leurs efforts fournis pour moi, qu'Allah les gardes et les
bénit toute la vie.

Et je le dédie à mon fiancé et mon soutien après mon père
Et je le dédie mes chers frères et mes amis qui j'ai partagé de très bons moments
tout le long de ces années.

à tous mes enseignements et les collègues de la promotion de la deuxième année
master 2023/2024

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord «Allah»de m'avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans de bonnes conditions.

J'adresse mes vifs remerciements

Au man encadreur Mr,Hamdi zakaria qui para ses conseils, ses recommandations, sa patience m'a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.

à tous les enseignants qui ont participé à la formation tout au long mon cycle

Universitaire jusqu'aux jours d'aujourd'hui.

Enfin, je ne voudrais pas non plus oublier toutes les personnes que j'ai rencontre tout long de ces années universitaire et tous ceux qui ont contribué de près de loin

à l'accomplissement de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Notions de base	4
1.1 Définitions (Espaces de Sobolev d'ordre 1 ($W^{1,p}(\Omega)$))	4
1.1.1 Espace de Banach	5
1.1.2 Espace Hilbert	6
1.1.3 Théorème (Prolongement)	6
1.1.4 Théorème (Inclusion de Sobolev)	7
1.1.5 Théorème (Rellich-Kondrachov)	8
1.2 Définition (Espaces de Sobolev d'ordre 1 ($W_0^{1,p}(\Omega)$))	9
1.2.1 Théorème inégalité de Poincaré	10
1.2.2 Théorème de Lax-Milgram	11
1.3 Définition Espaces $W^{m,p}(\Omega)$:	12
2 La méthode des éléments finis	14
2.1 La méthode de Galerkin	14

2.1.1	Principe de base d'une méthode de Galerkin	14
2.2	Principe de la méthode éléments finis : résolution d'un système matriciel	17
2.2.1	Définition des e_i	20
2.3	Résoudre l'équation de Navier Stokes par la méthode de éléments finies	22
2.3.1	Approximation en temps	23
2.3.2	Problème de Stokes	24
2.3.3	Approximation en espace du problème de Stokes	26
2.3.4	Résolution du problème de Stokes discret	28
3	Modélisation mathématique de l'écoulement du verre fondu dans un bassin de fusion d'un four	30
3.1	Modélisation de l'écoulement d'un four de fusion de verre bassin . . .	30
3.1.1	Géométrie d'un bassin de fusion industriel	31
3.1.2	Justification du modèle d'écoulement des fluides	32
3.2	Modèle mathématique	33
3.2.1	Conditions aux Limites	34
3.2.2	Modélisation par éléments finis	36
3.2.3	Résultats numériques et validation du modèle d'écoulement des fluides	38

Résumé

Ce travail porte sur la modélisation numérique de l'écoulement du verre liquide dans un bassin de fusion de four. Le modèle, qui inclut des équations aux dérivées partielles, est développé sur la base de la méthode des éléments finis. Cette méthode appliquée nous a permis d'étudier les problèmes de ce modèle et de fournir des résultats précis et simplifiés.

ملخص

يركز هذا العمل على النمذجة العددية لتدفق الزجاج السائل في حوض صهر الفرن. تم تطوير النموذج الذي يتضمن المعادلات التفاضلية الجزئية على أساس طريقة العناصر المنتهية. وقد أتاحت لنا هذه الطريقة التطبيقية دراسة مشاكل هذا النموذج وتقديم نتائج دقيقة ومبسطة.

Abstract

This work focuses on the numerical modeling of the flow of liquid glass in a furnace melting basin. The model which includes partial differential equations is developed based on the finite element method. This applied method allowed us to study the problems of this model and provide precise and simplified results.

Introduction

De nos jours, la méthode des éléments finis est reconnue comme l'une des principales méthodes d'approximation des problèmes aux limites elliptiques, mais aussi paraboliques et hyperboliques. Incontournable en mécanique (fluides, solides, interactions, structures), elle a de nombreuses applications dans tous les domaines qui impliquent des équations aux dérivées partielles posées sous forme variationnelle sur un espace V . Une approche bien connue pour approximer de tels problèmes est la méthode de Galerkin, qui consiste à définir des problèmes discrets sur des sous-espaces de dimension finie V_h de l'espace V . La méthode des éléments finis, dans sa forme la plus simple, est une méthode de Galerkin caractérisée par trois aspects fondamentaux dans la construction de l'espace V_h : Premièrement, une triangulation Γ_h est établie sur l'ensemble Ω . Deuxièmement, les fonctions V_h sont des polynômes par morceaux, au sens où, pour chaque K , les espaces $P_K = \{v_h/k : v_h \in V_h\}$ sont constitués de polynômes, troisièmement, il doit exister une base dans l'espace V_h dont les fonctions ont de petits supports.

Grâce au développement des méthodes numériques (notamment la méthode des éléments finis [2]), les simulations de l'écoulement d'un fluide de verre fondu dans un four ont fait l'objet de recherches intensives au cours des deux dernières décennies [2, 3]. Dans ce travail, le verre fondu est supposé être un fluide visqueux, chauffé de deux manières : par combustion de méthane et par chauffage électrique d'appoint. Les deux sources de chaleur seront modélisées différemment : d'une part, le flux de

chaleur dû à la flamme de combustion du méthane est incorporé dans l'énergie du système au moyen d'une condition aux limites. D'autre part, une équation aux dérivées partielles sera mise en place pour modéliser le chauffage électrique d'appoint, en considérant une équation de potentiel électrique. Ainsi, nous traitons un système (non linéaire) où la vitesse, la pression et la température du fluide sont couplées avec le potentiel électrique produit par les chauffages d'appoint. Nous considérons ici la méthode des éléments finis (MEF), car elle permet de traiter des géométries plus complexes et d'effectuer un raffinement local à proximité des régions d'intérêt spécifiques dans le domaine. Le modèle FEM ainsi obtenu sera ensuite validé par rapport à des mesures expérimentales, afin d'assurer la précision et la fiabilité des simulations.

Ce travail est organisé en trois chapitres. Voici un aperçu des points clés abordés :

Chapitre 1

- Définir les termes et concepts clés qui seront utilisés tout au long de l'étude, tels que les espaces de Sobolev $W^{m,p}$, H^1
- Présenter les principaux théorèmes et propositions indispensables à la compréhension des chapitres suivants.

Chapitre 2

- Exposer le principe de la méthode des éléments finis.
- Résoudre numériquement un problème de Navier-Stokes en utilisant la méthode des éléments finis.

chapitre3

- Présenter une modélisation mathématique de l'écoulement du fluide de verre fondu dans un bassin de fusion de four.
- Effectuer une simulation numérique par la méthode des éléments finis.

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre, nous présenterons les définitions et les principales propriétés des espaces de Sobolev en dimension n , ainsi que certains théorèmes nécessaires pour notre étude fonctionnelle.

1.1 Définitions (Espaces de Sobolev d'ordre 1 ($W^{1,p}(\Omega)$))

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Sobolev et on note espace de Sobolev d'ordre 1 si :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) \quad \exists g_1, g_2, g_3, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \text{tels que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i, 1 \leq i \leq N \end{array} \right. .$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{w^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} .$$

Ou parfois de la norme équivalente

$$\left[\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

si, $1 \leq p \leq \infty$. Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ et $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Si $p = 2$, alors on note :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Comme d'habitude, dans le cas où $p = 2$ on utilise la notation $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ et on définit sur l'espace $H^1(\Omega)$ le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = \left[\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Remarque

On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque. Si $k > 0$ est un entier, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dont les dérivées partielles prises au sens faible $D^\alpha u$ sont dans $L^p(\Omega)$, pour tout multi-indice $\alpha \in N$ vérifiant $|\alpha| \leq k$.

1.1.1 Espace de Banach

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{k} (dans la suite \mathbb{k} sera \mathbb{R} ou \mathbb{C}). On appelle norme sur E une application de E dans \mathbb{R} , notée $\|\cdot\|$ telle que :

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$ et $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) , $\forall x, y \in E$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité) $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall x \in E$

Un espace vectoriel normé (e.v.n.) est un $(E; \|\cdot\|)$. Il s'agit d'un cas particulier d'espace métrique muni de la distance :

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in E$$

1.1.2 Espace Hilbert

On dit qu'un espace préhilbertien H , muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est un espace de Hilbert, si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet.

Exemples

1. L'espace C^N , muni du produit hermitien $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^N x_j \bar{y}_j$ et un espace de Hilbert, et plus généralement, tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
2. Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est lui-même un espace de Hilbert (muni de la restriction du produit hermitien).

1.1.3 Théorème (Prolongement)

On suppose que Ω est de classe $C^{0,1}$. Alors il existe un opérateur de prolongement borné

$$P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

linéaire et une constante C , tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1. $Pu|_{\Omega} = u$;
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$

L'exemple suivant montre que si l'ouvert Ω n'est pas assez régulier il est alors impossible de prolonger de façon régulière des fonctions qui sont pourtant très régulières sur (Ω) .

Exemple

Soit Ω le rectangle $] -1, 2[\times] -1, 1[$ privé du segment $]0, 2[\times \{0\}$. On définit la fonction u sur Ω par

$$u(x_1, x_2) \begin{cases} e^{x_1^{\frac{-1}{2}}} & x_1 > 0 & x_2 > 0 \\ -e^{x_1^{\frac{-1}{2}}} & x_1 > 0 & x_2 < 0 \\ o & \text{Sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $u \in C^\infty(\Omega)$ et que $D^\alpha u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$.

Ceci entraîne par conséquent que $u \in H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cependant, il est impossible de prolonger u en une fonction régulière sur tout \mathbb{R}^2 .

Lorsque $\Omega = I$ est un intervalle borné dans \mathbb{R} , on a vu que

$$C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}), 1 \leq p \leq \infty.$$

Cette idée se généralise dans \mathbb{R}^n avec les résultats suivants :

1.1.4 Théorème (Inclusion de Sobolev)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert lipschitzien.

– Si $1 \leq p < n$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [1, p^*]$ où $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Plus précisément, pour tout $q \in [1, p^*]$ il existe $\gamma = \gamma(\Omega, p, q)$ tel que

$$\|u\|_{L^q} \leq \gamma \|u\|_{W^{1,p}}.$$

– Si $p = n$ alors

$$W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \text{ pour tout } q \in [1, \infty).$$

– Si $p > n$ alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1 - n/p].$$

Voici une généralisation du théorème de compacité dans la dimension n .

1.1.5 Théorème (Rellich-Kondrachov)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert lipschitzien

1. Si $1 \leq p < n$ alors l'inclusion de $W^{1,p}$ est compacte, pour tout $q \in [1, p^*]$.
2. Si $p = n$ alors l'inclusion de $W^{1,n}$ dans L^q est compacte, pour chaque nombre $q \in [1, \infty)$.
3. Si $p > n$ alors l'inclusion de $W^{1,p}$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est compacte, pour tout $0 \leq \alpha < 1 - n/p$.

Propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $p \in [1, \infty[$, et $k \geq 1$

1. $W^{k,p}(\Omega)$ muni de norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ est un espace de Banach, séparable si $p \in [1, \infty[$ et réflexif si $p \in]1, \infty[$.
2. $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsque il est muni de produit scalaire

$$\langle u; v \rangle_{W^{1,2}} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x); \nabla v(x) \rangle$$

3. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable

1.2 Définition (Espaces de Sobolev d'ordre 1 ($W_0^{1,p}(\Omega)$))

Soient p un réel, $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N .

On désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}$. On note :

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

- L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$.
- L'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induite par H^1 .
- L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable; il est aussi réflexif pour $p \in [1, \infty[$.
- L'espace H_0^1 est un espace Hilbert séparable

Proposition

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\phi \in W^{1,p'}(\Omega)$ Alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \quad i = 1, \dots, n.$$

Preuve. Démonstration. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Alors, puisque $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \left[+u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right] = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Soit $\phi \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. Par la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,p'}(\Omega)$, on peut trouver $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$\|\varphi - \phi\|_{L^{p'}} + \|\nabla \varphi - \nabla \phi\|_{L^{p'}} \leq \epsilon.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \phi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] dx \right| &\leq \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\phi - \varphi| + |u| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \right] dx \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}} \left[\|\varphi - \phi\|_{L^{p'}} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^{p'}} \right] \\ &\leq \epsilon \|u\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Puisque ϵ est arbitraire, on a bien

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, i = 1, \dots, n.$$

■

1.2.1 Théorème inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

1.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Cette section est consacrée au théorème de Lax-Milgram qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de la formulation variationnelle dans un espace de Hilbert.

On note V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|$. Nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

On se donne :

- $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} ; et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|L(v)| \leq C \|v\| \quad \forall v \in V.$$

- $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $u \rightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $u \in V$.

- $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$, c'est-à-dire, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

- $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique (coercive), c'est-à-dire, qu'il existe une constante strictement positive α telle que :

$$|a(u, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

1.3 Définition Espaces $W^{m,p}(\Omega)$:

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque, p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$ et m un entier naturel positif. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in w^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \alpha \in N^N; |\alpha| \leq m\}$$

où α est un multi-indice tel que $0 \leq \alpha \leq m$, $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible ou au sens des distributions) et L^p un espace de Lebesgue.

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{\alpha:|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On note : $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$) du sous espace $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Proposition

L'espace $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ est un espace de Hilbert. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier. Si $u \in \dot{S}(\mathbb{R}^N)$; on note \hat{u} sa transformée de Fourier et on a défini par :

$$H^m(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in \dot{S}(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

et la norme définie par équivalente à (on garde la même notation) :

$$\|u\|_{H^m} : \left(\int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette proposition permet de définir l'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ (et plus seulement $m \in \mathbb{N}^*$).

Chapitre 2

La méthode des éléments finis

Dans ce chapitre nous présentons la méthode des éléments finis comme une méthode de Galerkin particulière mais avec des propriétés spécifiques qui la rendent spécialement attractive dans la résolution des problèmes aux limites. Nous allons la présenter ici en cadre général abstrait permettant l'étude de la convergence de l'approximation.

2.1 La méthode de Galerkin

2.1.1 Principe de base d'une méthode de Galerkin

L'idée de base consiste à résoudre le problème variationnel dans un espace de dimension finie V_h inclus dans V , approchant l'espace V : c'est le principe de méthode de Galerkin. En outre, la construction de l'espace V_h repose sur la notion géométrique de maillage. Dans ce contexte, le paramètre h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage, il est strictement positif et destiné à tendre vers 0, l'espace V_h sera de plus en plus grand et approchera de mieux en mieux

l'espace V tout entier. Cherchons à résoudre le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } y \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V \quad a(y, v) = L(v) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Notre but est la résolution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } y_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h \quad a(y_h, v_h) = L(v_h) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Le problème (2,2) s'appelle le problème discret (approché) du problème continu (2, 1). Par l'application directe du théorème Lax-Milgram cité dans le chapitre précédent, ce problème approché admet une unique solution y_h dans V_h si L est une forme linéaire continue et a est une forme bilinéaire, continue et coercive. L'espace V_h est un espace de Hilbert, de dimension finie N_h et il admet une base formée des fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$. La solution y_h est donc de la forme :

$$y_h = \sum_{i=1}^{N_h} y_i \varphi_i,$$

où $(y_i); i = 1, \dots, N_h$ sont les inconnues du problème (2,2).

Pour que la relation ait lieu $\forall v_h \in V_h$, il suffit que cette relation (2,2) le soit pour chacune des fonctions de base de l'espace V_h : En utilisant la décomposition de y_h et la linéarité de α par rapport à son premier argument, cela donne :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N_h\}, \sum_{j=1}^{N_h} \alpha(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i).$$

La résolution du problème (2,2) revient donc à résoudre le système linéaire

:

$$AY = b, \tag{2.3}$$

où la matrice A est définie par les coefficients A_{ij} tels que :

$$A_{ij} = \alpha(\varphi_j, \varphi_i), \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N_h\},$$

et les vecteurs $b, Y \in \mathbb{R}^{N_h}$ définis par :

$$b_i = L(\varphi_i), \forall i \in \{1, 2, \dots, N_h\}, Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_h})^T.$$

Le système (2,3) a une unique solution car la matrice A est définie positive donc inversible.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} Y^T AY &= \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} A_{ij} Y_i Y_j = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha(\varphi_j, \varphi_i) Y_i Y_j \\ &= \sum_{i=1}^{N_h} \alpha \left(\sum_{j=1}^{N_h} Y_j \varphi_j, \varphi_i \right) Y_i = \alpha \left(\sum_{j=1}^{N_h} Y_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} Y_i \varphi_i \right) \\ &= \alpha(y, y) \geq \alpha \|y\|^2 \end{aligned}$$

Car α est V elliptique et on a $y = \sum_{j=1}^{N_h} Y_j \varphi_j$.

D'où la matrice A est définie positive $\left(\forall Y \in \mathbb{R}^{N_h}, Y^t AY \geq 0, Y^t AY = 0 \text{ implique } Y = 0 \right)$.

Finalement, la solution du système (2,1) est :

$$Y = A^{-1}b$$

2.2 Principe de la méthode éléments finis : résolution d'un système matriciel

Soit un domaine ouvert de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ou 3 en pratique), de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles muni de conditions aux limites.

Ce problème, mis sous forme variationnelle, est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \alpha(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V$$

où V est un espace de Hilbert. On supposera également que l'équation de départ a de bonnes propriétés, i.e. que l'on est dans les hypothèses vues précédemment permettant d'affirmer que le problème admet une solution unique u .

La méthode des éléments finis se propose de discrétiser le problème considéré. La discrétisation intervient à plusieurs niveaux :

discrétisation : Il est nécessaire de disposer d'une description du domaine Ω sur lequel on souhaite travailler, cette description va se faire en l'approchant par un maillage, qui sera constitué d'éléments.

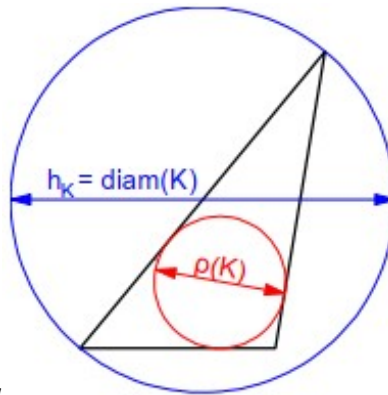
interpolation : Il est ensuite nécessaire de disposer d'une manière de représenter le ou les champs inconnus. Ce que se propose de faire la méthode des éléments finis, c'est d'approcher ces champs par des fonctions plus simples (disons polynomiales de degré un ou deux) définies sur chacun des éléments du maillage (le champ est approché par des bouts de fonctions qui, elles, ne sont définies chacune que sur un seul élément).

approximation : Selon le type d'approximation, on remplace non seulement l'espace V , de dimension infinie, par des approximations V_h de dimension finie, mais parfois également les formes bilinéaires et linéaires définissant le problème.

De manière classique, on notera T_h le maillage de Ω considéré. Il est caractérisé par les dimensions géométriques représentatives que sont le diamètre maximum des éléments, h et le facteur de forme du maillage, σ (qui caractérise l'aplatissement du maillage).

Le maillage est constitué d'éléments, généralement notés K . On note h_K le diamètre de l'élément K , le maximum des distances (euclidiennes) entre deux points de K , et ρ_K la rondeur de l'élément K . Le diamètre maximum des sphères incluses dans K . On a donc évidemment $h_K \leq h$, $\forall K \in T_h$ puisque par définition $h = \max_{K \in T_h} h_K$, et $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in T_h$

1



1.jpg

Figure 1 : Dimensions

géométriques

caractéristiques d'un élément

Toujours est-il que dans tous les cas, l'espace V est remplacé par un espace V_h , de dimension finie N_h , dont (e_1, \dots, e_{N_h}) en est une base. L'approximation u_h de u dans

cette base s'écrit :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} q_i e_i$$

Le problème de la méthode des éléments finis devient donc (on écrit ici en utilisant a_h , mais on pourrait utiliser α) :

Trouver q_1, \dots, q_{N_h} tels que

$$\sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, v_h) = f_h(v_h), \forall v_h \in V_h$$

soit, en exploitant les linéarités de $a_h(.,.)$ et $f_h(.)$ et en décomposant v_h :

Trouver q_1, \dots, q_{N_h} tels que

$$\sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, e_j) = f_h(e_j), \forall j = 1, \dots, N_h$$

Il s'agit donc de résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} a_h(e_1, e_1) & \dots & \dots & a_h(e_{N_h}, e_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_h(e_i, e_{N_h}) & \dots & \dots & a_h(e_{N_h}, e_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h(e_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_h(e_{N_h}) \end{pmatrix}$$

que l'on note (dans la tradition mécanicienne) :

$$Mq = F \text{ ou encore } [M](q) = (F)$$

Notons que la matrice M est appelée matrice de rigidité par analogie avec la mécanique des solides.

Si la forme bilinéaire a est coercive, alors M est symétrique, définie positive donc inversible.

On obtient donc l'existence et l'unicité de $q = M^{-1}F$, de nombreuses méthodes permettent de résoudre le système matriciel (d'inverser la matrice de rigidité) : mais également toutes sortes de décomposition de la matrice de rigidité comme (Choleski). Lorsque M est symétrique définie-positive, la méthode de Choleski est la meilleure. elle consiste à décomposer la matrice M en le produit $L^T L$, où la matrice est une matrice L triangulaire inférieure.

2.2.1 Définition des e_i

On définira les fonctions de base par $e_i = 1$ sur le $i^{\text{ème}}$ degré de liberté, et $e_i = 0$ sur les autres degrés de liberté. La manipulation des e_i sera alors simplifiée, et les e_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

Notons (a_1, \dots, a_{N_h}) les noeuds du du maillage ($T_h < T_e$). Le problème approché revient à déterminer les valeurs de u_h aux points a_i : ce sont les degrés de liberté du problème approché. On va construire une base de V_h en associant à chaque degré de liberté a_i un vecteur de la base. On définit ainsi les fonctions de base globales $\varphi_i (i = 1, \dots, N_h)$ par :

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_h$$

et l'espace d'approximation interne est $V_h = \text{vect} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_{N_h} \}$. On remarquera qu'une telle fonction e_i est nulle partout sauf sur les éléments dont a_i est un noeud

De plus, sur un élément K dont a_i est un noeud, φ_i vaut 1 en a_i et 0 aux autres noeuds de K .

Donc $\varphi_i|_{K_j}$ est une fonction de base locale de K . On voit donc que la fonction de base globale φ_i est

construite comme réunion des fonctions de base locales sur les éléments du maillage

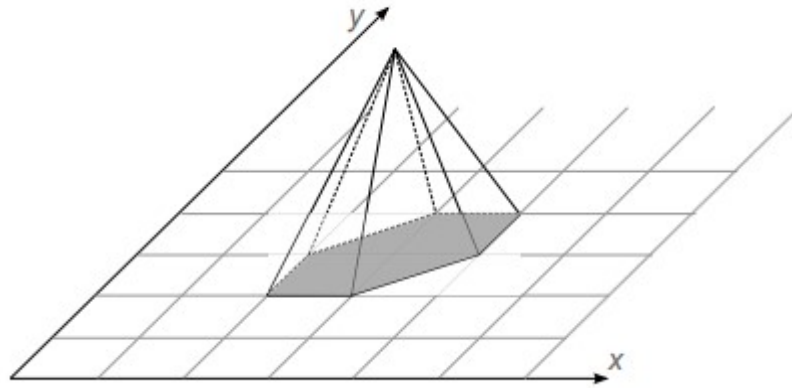
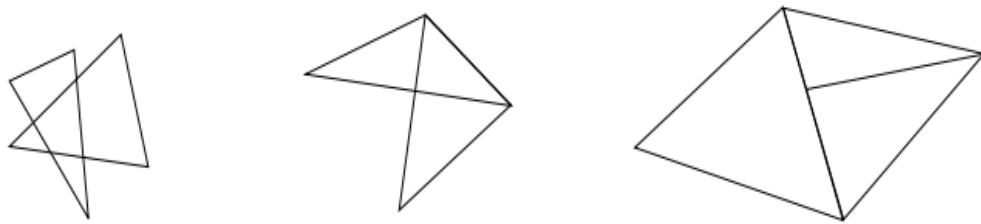


FIG. 2.1 – Un élément de la base

dont a_i est un nœud.

Remarque. Ce qui précède est vrai dans le cas d'un maillage conforme, si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un sommet ou une arête en dimension 2, ou à un sommet, une arête ou une face en dimension 3.



Maillage non conforme

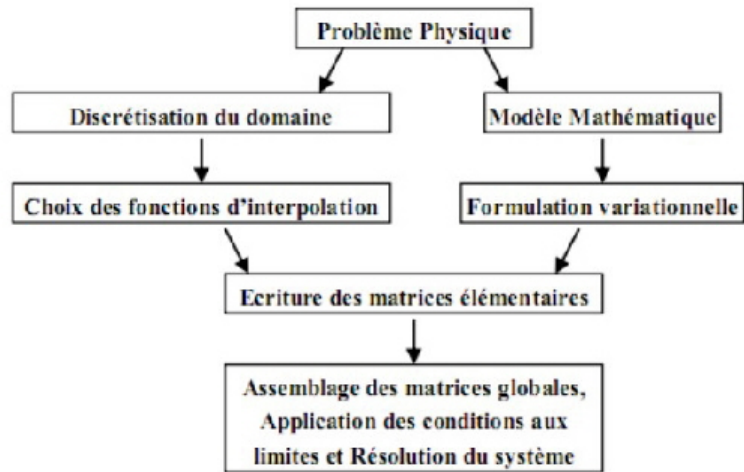


Figure2 :Transformation des équations d'un système physique

2.3 Résoudre l'équation de Navier Stokes par la méthode de éléments finies

L'équation de Navier Stokes c'est une équation qui permet de décrire le champ de vitesse d'un fluide en physique. Plus précisément, il s'agit d'une équation différentielle dont le champ de vitesse est l'inconnue en mathématique, Cette équation établie aux XIXème siècle, par le français Navier et le britannique Stokes.

Introduisons les notations suivantes :

$\rho(t, x)$ la densité au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ et à l'instant t .

$u(t, x) = (u_i(t, x))_{1 \leq i \leq 3}$ La vitesse au point x et à l'instant t .

p le champs depression.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine ouvert borné occupé par le fluide et $\mathcal{V} \subset \Omega$ un sous-domaine

ouvert régulier quelconque Le problème de Navier-Stokes s'énonce :

Trouver u et p tels que

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - \operatorname{div} (2\eta D(u)) + \nabla p = \rho g & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ - \operatorname{div} u = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_\Gamma & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3.1 Approximation en temps

L'intervalle $[0, T]$ est partitionné en N sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, où $t_n = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N$

et $\Delta t = T/N$ est le pas de temps. Utilisons un schéma d'Euler implicite d'ordre un pour approcher en temps, nous pouvons construire par récurrence une suite $(u^{(n)})_{0 \leq n \leq N}$, où $u^{(n)}(x) \approx u(x, t_n)$ est une approximation de la vitesse.

- $n = 0$: $u^{(0)} := u_0$ est donné
- $n \geq 0$: $u^{(n)}$ étant connu, trouver $u^{(n+1)}$ et $p^{(n+1)}$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta t} u^{(n+1)} - \operatorname{div} (2\eta D(u^{(n+1)})) + \nabla p^{(n+1)} &= \rho g + \frac{\rho}{\Delta t} u^{(n)} \circ X^{(n)} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} u^{(n+1)} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u^{(n+1)} &= u_\Gamma(t_{n+1}) \end{aligned}$$

où $X^{(n)}$ la position de la particule au temps t_n qui est à la position x au temps t_{n+1} .

2.3.2 Problème de Stokes

A chaque étape de l'algorithme précédent, nous avons à résoudre un système linéaire de type Stokes, de la forme :

$$\begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(2\eta D(u)) + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

où α et η sont des constantes positives, et f et u_Γ sont donnés. Remarquons tout de suite que si (u, p) est solution, alors $(u, p + c)$ est aussi solution, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Pour régler ce problème, introduisons l'espace des fonctions de L^2 de moyenne nulle :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}$$

Introduisons ensuite un espace pour les vitesses :

$$V(g) = \{v \in H^1(\Omega)^3; u_{\partial\Omega} = g\}$$

Remarquons que $V(0) = H_0^1(\Omega)^3$. Rappelons les formules de Green et de la divergence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(2D(u)) \cdot v dx + \int_{\Omega} 2D(u) : D(v) &= \int_{\partial\Omega} (D(u) \cdot n) \cdot v ds \\ \int_{\Omega} \nabla q \cdot v dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx &= \int_{\partial\Omega} q v \cdot n ds \end{aligned}$$

Multiplions la première équation par v et sommions sur Ω puis utilisons la formule de Green et la formule de la divergence :

$$\alpha \int_{\Omega} u \cdot v dx + 2\eta \int_{\Omega} D(u) : D(v) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} u dx = \int_{\Omega} f \cdot v ds$$

Les termes de bord sont nuls du fait que $H_0^1(\Omega)^3$ s'annule au bord. Introduisons également les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \alpha(u, v) + 2\eta(D(u), D(v)) \\ b(v, q) &= -(\operatorname{div} v, q) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où la notation (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de L^2 . La formulation variationnelle du problème s'énonce :

trouver $u \in V(u_\Gamma)$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, q) = (f, v) \\ b(u, q) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^3$ et $q \in L_0^2(\Omega)$. Pour des résultats d'existence et d'unicité, on pourra consulter [GR86].

Introduisons le noyau de la forme b :

$$K(g) = \{v \in V(g) ; b(v, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega)\}$$

Cet espace représente l'ensemble des vitesses à divergence nulle dans L^2 . La formulation variationnelle du problème s'énonce :

trouver $u \in K(u_\Gamma)$ tels que

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in K(0).$$

Sous cette forme, il s'agit d'un problème extrêmement standard : il ne reste plus qu'à construire une discrétisation de V par éléments finis en espace pour obtenir un

système

linéaire en dimension finie.

2.3.3 Approximation en espace du problème de Stokes

Nous revenons au problème 2.7 : il s'agit de discrétiser les espaces $H^1(\Omega)^3$ et L_0^2 . Pour ce qui est de la construction de bases discrètes de H^1 la méthode est très classique en éléments finis. La question est plus délicate pour L_0^2 , pour lequel nous ne connaissons pas explicitement de base discrète à moyenne nulle. Par contre nous savons travailler avec L^2 , aussi nous allons introduire la contrainte de moyenne nulle séparément, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, noté $\lambda \in \mathbb{R}$.

Introduisons le Lagrangien suivant :

$$L(u, p, \lambda) = \frac{1}{2}a(u, u) + b(u, p) + c(p, \lambda) - (f, p)$$

avec

$$c(p, \lambda) = \lambda \int_{\Omega} p(x) dx.$$

La solution du problème est caractérisée comme le point-de-selle de L , ce qui s'écrit

$$(u, p, \lambda) = \arg_{v \in V(u_{\Gamma})} \inf_{q \in L_0^2} \sup_{\mu \in \mathbb{R}} L(v, q, \mu).$$

Remarquons que nous avons deux contraintes à satisfaire : la divergence nulle pour la vitesse u et la moyenne nulle pour la pression p . La formulation variationnelle du problème s'énonce :

Trouver $u \in V(u_\Gamma), p \in L_0^2(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = (f, v) \\ b(u, q) + c(q, \lambda) = 0 \\ c(p, \mu) = 0 \end{cases}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^3$ et $q \in L^2(\Omega)$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Cette fois, nous savons construire concrètement des bases polynomiales par morceaux des espaces $X(0)$ et L^2 intervenant dans ce problème. Soient $X_h \subset H^1(\Omega)^3$ et $Q_h \subset L^2(\Omega)$ deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $u_{h,\Gamma}$ une approximation de u_Γ , par exemple l'interpolée de Lagrange des données aux bords.

Introduisons V_h , le sous espace de X_h incluant les conditions aux limites :

$$V_h(u_{h,\Gamma}) = \{v_h \in X_h; v_h|_{\partial\Omega} = u_{h,\Gamma}\}$$

L'approximation variationnelle du problème précédent s'écrit :

Trouver $u_h \in V_h(u_{h,\Gamma}), p_h \in Q_h$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f, v_h) \\ b(u_h, q_h) + c(q_h, \lambda) = 0 \\ c(p_h, \mu) = 0 \end{cases}$$

pour tout $v_h \in V_h(0)$ et $q_h \in Q_h$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un système linéaire de dimension finie. la construction par éléments finis de X_h et Q_h doit encore être faite avec soin pour que les approximations u_h et p_h convergent vers u et p . En effet, une condition nécessaire et suffisante pour que cette convergence ait lieu est que [BF91, P. 205] :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall h > 0, \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{H^1} \|q_h\|_{L^2}} \geq \beta.$$

Cette condition, dite condition inf-sup ou encore condition de Brezzi-Babuska exprime la nécessaire compatibilité entre les espaces de dimension finie X_h et Q_h . Ainsi l'approximation la plus simple possible, affines par morceaux (notée P_1) pour les vitesses et les pressions, ne satisfait pas cette condition, on pourra consulter [BF91] pour plus de détails. Autrement l'approximation proposée et largement utilisée : les vitesses sont approchées par des fonctions continues quadratiques par morceaux et les pressions par des fonctions continues affines par morceaux. Cette combinaison est notée $P_2 - P_1$, et est appelée élément de Hood-Taylor.

Soit τ_h une triangulation de Ω . Les espaces X_h et Q_h sont alors définis par

$$\begin{aligned} X_h &= \{v_h \in C^0(\Omega)^3; v_h|_K \in (P_2)^3, \forall K \in \tau_h\} \\ Q_h &= \{q_h \in C^0(\Omega)^3; q_h|_K \in P_1, \forall K \in \tau_h\} \end{aligned}$$

2.3.4 Résolution du problème de Stokes discret

Soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n_{tot}}$ la base nodale de X_h et $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq m}$ la base nodale de Q_h , nous supposons que les noeuds de 1 à n sont situés à l'intérieur du domaine et ceux de $n+1$ à n_{tot} sont situés sur le bord. Ainsi $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base nodale de $V_h(0)$. Décomposons u_h et p_h sur ces bases respectives :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(x) + \sum_{j=n+1}^{n_{tot}} \bar{u}_j \varphi_j(x)$$

$$p_h(x) = \sum_{j=1}^n q_j \zeta_j(x),$$

les valeurs $(\bar{u}_j)_{n \leq j \leq n_{tot}}$ sont donnés par $u_{h,\Gamma}$ au bord tandis que $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont inconnues.

Posons :

$$A_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\bar{A}_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad n+1 \leq j \leq n_{tot}$$

$$B_{i,j} = b(\varphi_j, \xi_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\bar{B}_{i,j} = b(\varphi_j, \xi_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad n+1 \leq j \leq n_{tot}$$

$$C_{1,j} = c(\xi_i, 1), \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\bar{f}_i = (f, \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

Remarquons que la matrice C a une ligne et m colonnes et que \bar{A} est rectangulaire. La matrice A est symétrique définie positive $n \times n$. Le problème de Stokes discret se ramène à résoudre le système linéaire suivant :

Trouver $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$, $p = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & 0 & C \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $f = \bar{f} - \bar{A}\bar{u}$ et $g = -\bar{B}\bar{u}$. Il s'agit d'un système linéaire symétrique de taille $n + m + 1$, de matrice notée \mathcal{A} , inversible.

Chapitre 3

Modélisation mathématique de l'écoulement du verre fondu dans un bassin de fusion d'un four

Dans ce chapitre nous présentons la modélisation et la simulation numérique de un écoulement de fluide de verre fondu dans un bassin de fusion de four. Nous dérivons d'abord a modèle pour un écoulement de fluide de verre fondu et simulations numériques actuelles basé sur la Méthode des éléments finis (FEM).

3.1 Modélisation de l'écoulement d'un four de fu- sion de verre bassin

Dans la présente section, nous discutons des aspects de modélisation du verre de récipient simulations de bassin de fusion de four effectuées dans ce travail, à savoir un fondu écoulement de verre fluide.

3.1.1 Géométrie d'un bassin de fusion industriel

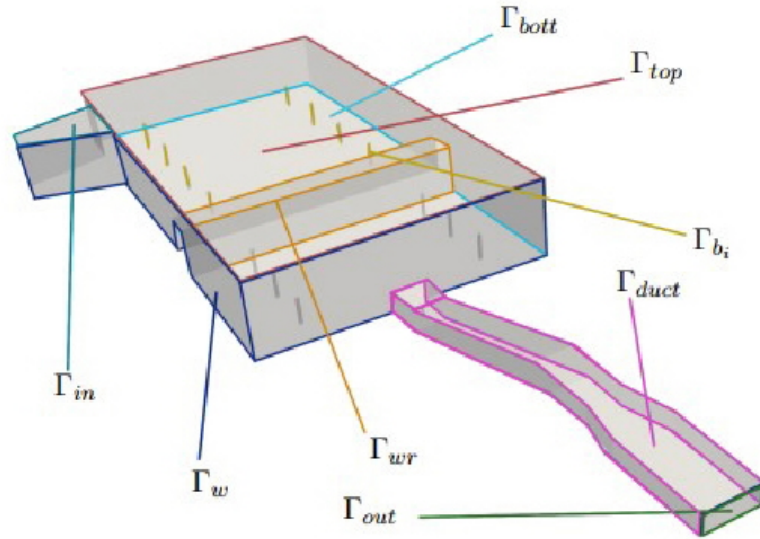


Figure 1 : Bassin de fusion industriel utilisé dans ce travail

Le bassin de fusion étudié ici est représenté sur la Figure (1), et sera désigné ci-après par le domaine spatial Ω . Le bassin de fusion a rapporté sur la figure est une géométrie légèrement simplifiée du bassin réel utilisé par nos partenaires industriels Bormioli Pharma Sr, l'afflux de matière première se produit à travers la section d'afflux désignée par Γ_{in} sur la figure (1), la section d'afflux se trouve au sommet d'une région, appelée la niche région en pratique industrielle, qui sur la figure (1) a la forme d'un trapèze prisme et dont le but est de collecter tout le matériel qui entre dans le bassin, le matériau se déplace ensuite vers le four réel, qui est modélisé sur la Figure(1) comme le parallélépipède délimité par Γ_w , Γ_{top} et Γ_{bott} , parois du bassin, placées respectivement à son fond et sur ses côtés verticaux.

Les différentes limites du domaine Ω identifiées sur la Figure 1 sont

résumé ci-dessous :

- Γ_{in} :Entrée de matériel.
- Γ_{top} :Dessus du four.
- Γ_{b_i} :Surface du propulseur i.
- Γ_w : Les murs du four.
- Γ_{bott} :Le fond du four.
- Γ_{wr} :Le mur pour la recirculation.
- Γ_{duct} :Les parois de la gorge.
- Γ_{out} :La sortie de la gorge.

3.1.2 Justification du modèle d'écoulement des fluides

L'objectif principal de l'outil de simulation développé ici est de modéliser les processus physiques se produisant dans le bassin de fusion afin d'évaluer comment les paramètres de conception du four affectent la qualité du verre fondu extrait du four à la fin du processus de fusion,le principal aspect de la qualité du verre généralement surveillé dans la pratique industrielle est la présence de bulles d'air et de gaz dans le verre fondu.

La présence de bulles dans le verre fluide en partie due à la fusion progressive des matières premières granulaires remplies d'air se trouvant à la surface du bassin dans la région de la niche, et en partie due aux réactions chimiques se produisant dans les produits gazeux de base et de libération.

La présence de parois et d'électrodes (ou boosters) qui introduisent de la chaleur par courant électrique fait partie des solutions mises en place pour créer et contrôler des écoulements convectifs et de recirculation qui augmentent le temps de séjour du verre sur le four.

Une fois le champ de vitesse du fluide obtenu, évaluera le mouvement des petites bulles d'air au moyen d'une étape de post-traitement, en supposant que leur présence n'affecte pas de manière significative le champ dynamique des fluides.

3.2 Modèle mathématique

Pour les raisons susmentionnées, et compte tenu du faible nombre de Reynolds de l'écoulement en question, l'équation directrice adoptée dans ce travail sont les équations de Navier-Stokes incompressibles tridimensionnelles transitoires, qui décrivent le mouvement d'un fluide Newtonien visqueux, pour inclure les effets de convection thermique même en présence d'un modèle de fluide incompressible, nous recourons à l'approximation de Boussinesq pour les termes de flottabilité.

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$ le domaine de calcul polyédrique borné introduit dans cet section , et $[0, T] \in \mathbb{R}$ l'intervalle de temps. le modèle mathématique proposé est régi par les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_t u + \rho (u \cdot \nabla u) - \nabla \cdot (\mu \nabla u) + \nabla p - \rho g \beta (\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \rho c_p \partial_t \theta + \rho c_p (u \cdot \nabla \theta) - \nabla \cdot (k_{eff} \nabla \theta) = \sigma |\nabla \phi|^2 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ -\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Les inconnues du modèle sont :

- la vitesse du fluide $u[m/s]$
- la pression du fluide $p[N]$
- la température du fluide $\theta[K]$
- le potentiel électrique $\phi[V]$

Les expressions des propriétés physiques apparaissant en (3,1) sont résumées dans le tableau(1), ρ où $c_p, \mu, \beta, k_{eff}, \sigma$

β	Dilatation thermique	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$[1/K]$
θ_0	Température de référence	1617	$[K]$
ρ	Densité	2250	$[kg/m^3]$
c_p	Chaleur spécifique	1381	$[J/(kgK)]$
μ	Viscosité	$\exp(\frac{10425}{\theta-500} - 6.0917)$	$[kg/(ms)]$
k_{eff}	Conductivité thermique	$1.73+2.5 \cdot 10^{-8}\theta^3$	$[W/(mK)]$
σ	Conductivité électrique	$\exp(7.605-7200/\theta)$	$[1/(\Omega m)]$

Tableau 1 : Propriétés physiques du modèle

3.2.1 Conditions aux Limites

Nous présentons ensuite les conditions aux limites accompagnant les équations aux dérivées partielles (1). Nous discutons séparément des conditions aux limites des équations vitesse/pression, température et électrique.

Conditions aux limites de vitesse et de pression

Pour les conditions aux limites associées à l'équation de moment de Navier-Stokes, nous considérons une vitesse d'entrée prescrite dans la direction normale à Γ_{in} .

En supposant la normale à Γ_{in} sur la figure 1 à aligner avec la verticale direction e_y , la vitesse à l'entrée est donnée par :

$$u = u_y e_y \quad sur \quad \Gamma_{in} \quad (3.2)$$

En ce qui concerne les parois latérales, le fond, la paroi pour la recirculation et les parois des boosters, la vitesse est mise à zéro (condition antidérapante), ainsi

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_w \cup \Gamma_{bott} \cup \Gamma_{wr} \cup \Gamma_{duct} \cup \Gamma_{bi}$$

Pour le sommet du four, puisqu'il n'y a pas de murs à la limite supérieure, nous avons considéré les conditions aux limites de glissement pour la vitesse, c'est-à-dire

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{top}$$

Enfin, à la sortie, on considère les conditions de sortie, données par

$$\partial_n u - pn = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{out}$$

Conditions aux limites thermiques

En ce qui concerne les conditions aux limites du champ de température, nous avons considéré une température constante à la limite d'entrée. Ainsi, nous considérons

$$\theta = \theta_{in} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{in}$$

Sur la limite supérieure, nous considérons une condition aux limites du flux de chaleur, donnée par

$$k_{eff} \partial_n \theta = q_{top} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{top}$$

où q_{top} est une fonction spatiale pour la condition aux limites thermiques sur la limite supérieure.

Ce flux vise à modéliser le flux de chaleur de deux flammes différentes provenant de la combustion du méthane.

Enfin, tant sur le débit sortant que sur les boosters, nous avons considéré les conditions aux limite adiabatiques, c'est-à-dire

$$\partial_n \theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{out} \cup \Gamma_{bi}$$

Conditions aux limites électriques

En ce qui concerne les conditions aux limites électriques, nous considérons un potentiel fixe dans chaque électrode, c'est-à-dire

$$\phi = \tilde{V}_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_{bi} \quad i = 1, \dots, 8$$

Ces \tilde{V}_i sont imposés de sorte que nous avons le même Δv à chaque paire d'électrodes. nous considérons la condition aux limites de Neumann homogène, sur le reste de la frontière, i.e.

$$\partial_n \phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_w \cup \Gamma_{bott} \cup \Gamma_{top} \cup \Gamma_{duct} \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_{wr}$$

3.2.2 Modélisation par éléments finis

Dans cette section, nous discrétisons le problème (3,1) au moyen de la Méthode des éléments finis, pour cela, nous commençons à définir la formulation variationnelle du problème (3,1).

Nous considérons l'espace des fonctions intégrables carrées $L^2(\Omega)$ et l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, équipés de la norme standard. Pour simplifier la notation, notons

$$\Gamma_{D_v} = \Gamma_{in} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_{bott} \cup \Gamma_{wr} \cup \Gamma_{duct} \cup \Gamma_{bi}.$$

Ainsi, nous considérons les espaces suivants pour la vitesse, la pression, la température et le potentiel électrique, respectivement

$$v = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{top}, v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{D_v}\},$$

$$M = L^2(\Omega), \quad \Theta = \{\theta \in H^1(\Omega) : \theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{in}\},$$

et

$$\Phi = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_{bi}\},$$

Nous considérons la forme variationnelle du problème (1) donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p, \theta, \phi) \in V \times M \times \Theta \times \Phi \text{ telle que} \\ (\rho \partial_t u, v) + (\rho (u \cdot \nabla u), v) + (\mu \nabla u, \nabla v) - (p, \nabla \cdot v) - (\rho g \beta (\theta - \theta_0), v) = 0 \quad \forall v \in V \\ (\nabla \cdot u, q) = 0 \quad \forall q \in M \\ (\rho c_p \partial_t \theta, z) + (\rho c_p (u \cdot \nabla \theta), z) + ((k_{eff} \nabla \theta), \nabla z) = (\sigma |\nabla \phi|^2, z) \quad \forall z \in \Theta \\ (\sigma \nabla \phi, \nabla w) = 0 \quad \forall w \in \Phi \end{array} \right. \quad (3.3)$$

à partir de cette formulation variationnelle, nous pouvons définir le problème des éléments finis. Considérons un maillage régulier T_h composé de tétraèdres. étant donné un entier $n \geq 0$ et un élément $K \in T_h$, on désigne par $P_n(K)$ l'espace des éléments Finis donné par les polynômes de Lagrange de degré inférieur ou égal à n définis sur chaque K de T_h . Ainsi, nous définissons

$$Y^n = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ telle que } v_{h \setminus k} \in P_n(K)\}.$$

De plus, nous définissons l'élément bulle, donné par

$$v_{h \setminus k} \in P_n(K) \cap H_0^1(K)\}$$

$$\text{Lasser } V_h = V \cap \left([Y^1]^3 \oplus [B^4]^3 \right), M_h = M \cap Y^1, \Theta_h = \Theta \cap Y^2, \Phi_h = \Phi \cap Y^1$$

Soit quatre sous-espaces de dimension finie de V, M, Θ et Φ , respectivement. Notez que nous considérons pour le couple vitesse-pression le soi-disant mini élément de P_1 +bulle pour la vitesse et P_1 pour la pression puisque ce couple de l'élément fini

est stable .

Pour la température, nous envisageons P_2 élément fini depuis est le champ d'intérêt, pour plus de simplicité dans la notation

$$X_h = V_h \times M_h \times \Theta_h \times \Phi_h$$

Pour les termes dérivés temporels de (3,4), nous considérons un terme entièrement implicite approximation de la formule standard de différenciation , ainsi, le schéma de résolution problème numérique (3,4) lit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Donné } (u^n, p^n, \theta^n, \phi^n) \in X_n, \\ \text{trouver } (u^{n+1}, p^{n+1}, \theta^{n+1}, \phi^{n+1}) \in X_n, \text{ telle que} \\ (\rho \frac{u^{n+1} - u^n}{dt}, v) + (\rho (u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1}), v) + (\mu (\theta^{n+1}) \nabla u^{n+1}, \nabla v) - \\ (p^{n+1}, \nabla \cdot v) - (\rho g \beta (\theta^{n+1} - \theta_0), v) = (f_v, v) \quad \forall v \in V \\ (\nabla u^{n+1}, q) = 0 \quad \forall q \in M \\ (\rho c_p \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{dt}, z) + (\rho c_p (u^{n+1} \cdot \nabla \theta^{n+1}), z) + ((k_{eff} \nabla \theta^{n+1}), \nabla z) = (f_\theta, z) \quad \forall z \in \Theta \\ (\sigma (\theta^{n+1}) \nabla \phi^{n+1}, \nabla w) = (f_\phi, w) \quad \forall w \in \Phi \end{array} \right. \quad (3.4)$$

à chaque itération, nous résolvons le système non linéaire tout au long de la méthode de Newton.

3.2.3 Résultats numériques et validation du modèle d'écoulement des fluides

Avec les paramètres physiques définis en coupe et les conditions aux limites , la solution atteint l'état stationnaire, qui nous définissons en mesurant la norme de la différence de la solution de température à deux pas de temps consécutifs étant inférieure à 10-5.

Ceci est attendu car l'écoulement est laminaire et les conditions aux limites sont indépendantes du temps pour les temps au-delà de 72h, ce qui a régi l'augmentation progressive initiale de la vitesse d'entrée.

Dans cette configuration, nous atteignons la solution stationnaire à $t = 188h$. et en suit, nous présentons quelques résultats pour la simulation.

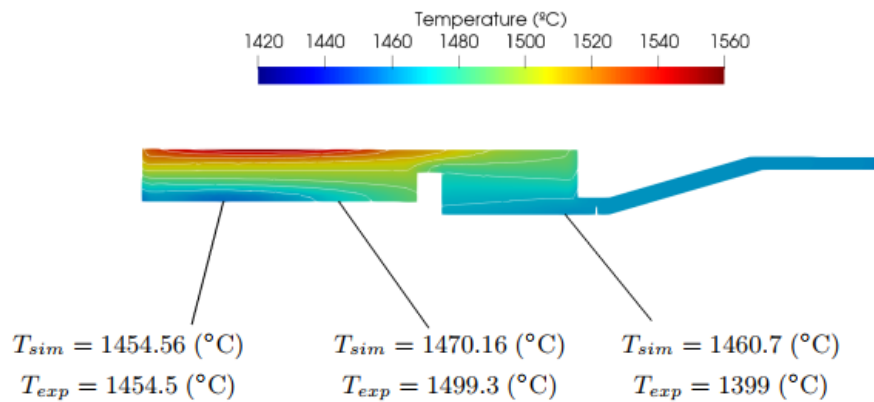


Figure 2 :Comparison of simulated and measured temperatures

Conclusion

En conclusion, nous avons exploré le principe fondamental de la méthode des éléments finis. En appliquant cette méthode, nous avons réussi à résoudre numériquement un problème de Navier-Stokes. Nous l'avons ensuite utilisée pour effectuer une simulation numérique d'un modèle mathématique de l'écoulement de verre fondu dans un bassin de fusion de four. Cette simulation a permis de capturer les dynamiques complexes de l'écoulement, offrant des renseignements précieux pour l'optimisation des processus industriels. En somme, cette étude souligne l'importance de la MEF pour améliorer les technologies et les processus industriels, ouvrant la voie à de nouvelles perspectives et innovations.

Bibliographie

- [1] A. Abbassi and K. Khoshmanesh, Numerical simulation and experimental analysis of an industrial glass melting furnace, *Applied Thermal Engineering*, 28 (2008), pp. 450–459.
- [2] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo*, 21 (1984), pp. 337–344
- [3] F. Ballarin, T. Chacón Rebollo, E. Delgado Ávila, M. Gómez Mármol, and G. Rozza, Certified reduced basis VMSsmagorinsky model for natural convection flow in a cavity with variable height, *Computers & Mathematics with Applications*, 80 (2020),pp. 973–989.
- [4] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A. T. Patera, An ‘empirical interpolation’ method : application to efficient reducedbasis discretization of partial differential equations, *Comptes Rendus Mathematique*, 339 (2004), pp. 667–672.
- [5] T. Chacón Rebollo, E. Delgado Ávila, M. Gómez Mármol, F. Ballarin, and G. Rozza, On a certified Smagorinsky reduced basis turbulence model, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55 (2017), pp. 3047–3067
- [6] S.-L. Chang, C. Zhou, and B. Golchert, A numerical investigation of electric heating impacts on solid/liquid glass flow patterns, in 8th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics, jun 2002.

- [7] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen, Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32 (2010), pp. 2737–2764.
- [8] W. Chen, Q. Wang, J. S. Hesthaven, and C. Zhang, Physicsinformed machine learning for reduced-order modeling of nonlinear problems, *Journal of Computational Physics*, 446 (2021), p. 110666.
- [9] M. Choudhary, Three-dimensional mathematical model for flow and heat transfer in electric glass furnaces, *Heat Transfer Engineering*, 6 (1985), pp. 55–65.
- [10] M. K. Choudhary, R. Venuturumilli, and M. R. Hyre, Mathematical modeling of flow and heat transfer phenomena in glass melting, delivery, and forming processes, *International Journal of Applied Glass Science*, 1 (2010), pp. 188–214.
- [11] R. L. Curran, Mathematical model of an electric glass furnace : Effects of glass color and resistivity, *IEEE Transactions on Industry Applications*, IA-9 (1973), pp. 348–357.
- [12] C. Giessler and A. Thess, Numerical simulation of electromagnetically controlled thermal convection of glass melt in a crucible, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52 (2009), pp. 3373–3389.
- [13] K. Kunisch and S. Volkwein, Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40 (2002), pp. 492–515
- [14] J. Hesthaven and S. Ubbiali, Non-intrusive reduced order modeling of nonlinear problems using neural networks, *Journal of Computational Physics*, 363 (2018), pp. 55–78.
- [15] Q. Ma, H. Fang, C. Shang, Z. Liu, and J. Wang, Analysis of melt flows in an electric heating furnace for quartz glass synthesis, in *Volume 7 : Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, nov 2018.

- [16] A. Manzoni, An efficient computational framework for reduced basis approximation and a posteriori error estimation of parametrized NavierStokes flows, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48 (2014), pp. 1199–1226.
- [17] J. Novo and S. Rubino, Error analysis of proper orthogonal decomposition stabilized methods for incompressible flows, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 59 (2021), pp. 334–369.
- [18] F. Pichi, F. Ballarin, G. Rozza, and J. S. Hesthaven, An artificial neural network approach to bifurcating phenomena in computational fluid dynamics, *Computers & Fluids*, 254 (2023), p. 105813.
- [19] L. Pilon, G. Zhao, and R. Viskanta, Three-dimensional flow and thermal structures in glass meltingfurnaces. part i. effects of the heat flux distribution, *Glass Science and Technology*, 75 (2006), pp. 115–124.
- [20] L. Pilon, G. Zhao, and R. Viskanta, Three-dimensional flow and thermal structures in glass meltingfurnaces. part ii. effects of the heat flux distribution, *Glass Science and Technology*, 75 (2006), pp. 55–68.
- [21] R. Pinnau, Model reduction via proper orthogonal decomposition, in *Mathematics in Industry*, W. Schilders, H. van der Vorst, and J. Rommes, eds., Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 95–109
- [22] A. Quarteroni, *Numerical Models for Differential Problems*, Springer Milan, 2014.
- [23] A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri, *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations : An Introduction*, Springer, 2015.
- [24] A. Quarteroni, A. Manzoni, and G. Rozza, Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations and applications, *Journal of Mathematics in Industry*, 1 (2011).

- [25] J. E. Shelby, Introduction to Glass Science and Technology, Royal Society of Chemistry, 2007
- [26] R. Viskanta, Review of three-dimensional mathematical modeling of glass melting, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 177 (1994), pp. 347– 362.
- [27] W. Xiqi and R. Viskanta, Modeling of heat transfer in the melting of a glass batch, *Journal of Non-Crystalline Solids*, 80 (1986), pp. 613–622.