الجمهوريةالجزائرية الديمقراطيةالشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارةالتعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse fonctionnelle appliquée

Thème

ETUDES DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES AVEC RETARDS

Présenté par :

M/Melle HAMZAOUI WAFA

Soutenu publiquement le : ……01/…07……./2025

Devant le jury composé de :

OUAOUA AMMAR	Prof	Université de Skikda	Président
LOUNES AMEUR	M.C.A	Université de Skikda	Encadrant
M.Benhadri	M.A.A	Université de Skikda	Examinateur

Année universitaire : 2024/2025

Contents

List of Figures

List of Tables

Foreword

Introduction Générale

Les équations différentielles à retard (EDR) représentent une généralisation essentielle des équations différentielles ordinaires (EDO), permettant de modéliser les phénomènes où l'évolution présente dépend explicitement des états passés du système. Ce mémoire, intitulé **Étude des solutions des équations différentielles ordinaires avec retards**, se propose d'explorer systématiquement cette classe d'équations à travers une triple approche : théorique, numérique et appliquée.

Contexte scientifique et motivation

Les EDR émergent naturellement dans de nombreux domaines scientifiques et techniques :

- En **biologie mathématique** pour modéliser les retards de gestation (équation de Hutchinson)
- En **automatique** pour prendre en compte les délais de transmission dans les systèmes de contrôle
- En **épidémiologie** pour décrire les périodes d'incubation
- En **économie** pour représenter les effets retardés des politiques monétaires

Contrairement aux EDO classiques où $y'(t) = f(t, y(t))$, les EDR de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) \tag{0.1}$$

introduisent des propriétés mathématiques remarquables :

- Conditions initiales fonctionnelles sur un intervalle
- Espace de phase de dimension infinie
- Comportements dynamiques enrichis (oscillations, bifurcations, chaos)

Objectifs et méthodologie

Ce travail poursuit trois ambitions complémentaires :

1. **Fonder** un cadre théorique rigoureux pour les EDR (existence, unicité, stabilité)

2. **Développer** des méthodes de résolution analytiques et numériques adaptées

3. **Illustrer** par des applications concrètes dans divers domaines scientifiques

Notre approche combine :

- Une analyse fonctionnelle rigoureuse (espaces de Banach, théorèmes de point fixe)

- Des schémas numériques spécialisés (Euler retardé, Runge-Kutta adapté)

- Des études de cas détaillées (systèmes de contrôle, dynamiques de population)

Structure du mémoire

L'ouvrage s'articule en cinq chapitres complémentaires :

- **Chapitre 1 : Notions Préliminaires** - Rappels sur les EDO et introduction aux EDR à travers des exemples pédagogiques.

- **Chapitre 2 : Théorie Générale** - Cadre mathématique rigoureux pour les EDR (existence, unicité, analyse de stabilité).

- **Chapitre 3 : Résolution et Analyse** - Méthodes analytiques (méthode des pas) et numériques (schémas adaptés) pour les EDR.

- **Chapitre 4 : Applications** - Études de cas en biologie, automatique et économie.

- **Chapitre 5 : Étude de Cas** - Analyses approfondies de systèmes à retard spécifiques.

Originalité et contributions

Ce travail se distingue par :

- Une **approche pédagogique** unifiant théorie et pratique
- Des **implémentations numériques** commentées (Python/Matlab)
- Une **analyse comparative** systématique EDO/EDR
- Des **études de cas** originales dans divers domaines

Perspectives

Les EDR constituent un champ de recherche actif, avec des applications émergentes en :

- Neurosciences (modélisation des synapses)
- Réseaux complexes (délais de transmission)
- Intelligence artificielle (systèmes à mémoire)

Cette introduction ouvre la voie à une exploration approfondie des équations différentielles à retard, dont la richesse mathématique n'a d'égale que la diversité de leurs applications.

CHAPTER 1

Chapitre 1 : Notions Préliminaires

1 Rappel sur les équations différentielles

L'INTÉGRATION des ***Équations Différentielles Ordinaires*** (EDO) joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Une EDO est une équation qui relie une fonction inconnue d'une seule variable **indépendante** à ses **dérivées**. Elles modélisent l'évolution de nombreux phénomènes naturels et physiques, tels que le mouvement des particules, la croissance des populations, les circuits électriques, etc. Dans ce chapitre, nous présentons des rappels essentiels sur les différentes formes d'équations différentielles ordinaires et les méthodes classiques de résolution.

2 Équations Différentielles Séparables

Considérons l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = f(x, y)$$

Si $f(x, y)$ peut s'écrire sous forme d'un produit $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, l'équation est dite **séparable**.

Méthode de Résolution

En partant de :

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

À condition que $f_2(y) \neq 0$, on peut réécrire :

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

En intégrant chaque membre :

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\,dy = \int f_1(x)\,dx + C$$

Résoudre :

$$y' = (1-y)y$$

Solution :

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$
$$\frac{dy}{1-y} + \frac{dy}{y} = dx$$

En intégrant :

$$\int \frac{1}{1-y}\,dy + \int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

On obtient :

$$-\ln|1-y| + \ln|y| = x + C$$

soit :

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C$$

donc :

$$\frac{y}{1-y} = ke^x \quad \text{où } k = e^C$$

En isolant y :

$$y = \frac{ke^x}{1+ke^x}$$

3 Équations à Variables Séparables

Une équation de la forme :

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0$$

est appelée **équation à variables séparables**.

Méthode de Résolution

En divisant par $N_1(y)M_2(x)$, on obtient une équation aux variables séparées.

Résoudre :

$$y' = e^{-y}$$

Solution :

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}$$
$$e^y dy = dx$$

En intégrant :

$$\int e^y\,dy = \int dx$$

on obtient :

$$e^y = x + C$$

soit :

$$y = \ln(x + C)$$

4 Équations Différentielles Linéaires

Une **équation linéaire du premier ordre** s'écrit :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

avec $a(x)$ et $b(x)$ continues sur un intervalle I.

Méthode de Résolution

La solution générale est $y_g = y_h + y_p$, où :

- y_h est la solution de l'équation homogène,
- y_p est une solution particulière.

En utilisant la **variation des constantes** : On pose $y_h = k \cdot F(x)$ avec $F(x) = e^{-\int a(x)dx}$.

On remplace k par $k(x)$:

$$y_p = k(x)F(x)$$

Substituer donne :

$$k'(x)F(x) = b(x)$$

donc :

$$k(x) = \int \frac{b(x)}{F(x)}\,dx$$

Résoudre :

$$xy' - y = x^2\cos(x)$$

Solution homogène :

$$xy' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

En intégrant :

$$\ln(y) = \ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad y_h = Cx$$

Solution particulière : Posons $y_p = k(x)x$. Alors :

$$y_p' = k'(x)x + k(x)$$
$$x(k'(x)x + k(x)) - k(x)x = x^2\cos(x)$$

soit :

$$x^2k'(x) = x^2\cos(x) \quad \Rightarrow \quad k'(x) = \cos(x)$$
$$k(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad y_p = x\sin(x)$$

La solution générale est :

$$y_g = Cx + x\sin(x)$$

5 Équations de Bernoulli

La forme générale est :

$$y' + p(x)y = q(x)y^m$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

Si $m = 0$ ou $m = 1$, on retrouve une équation linéaire.

Méthode de Résolution

On pose :

$$z = y^{1-m} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-m)y^{-m}y'$$

Substitution dans l'équation initiale donne :

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$$

Résoudre :

$$y' + 2xy = xy^3$$

Solution :

$$y^{-3}y' + 2xy^{-2} = x$$
$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3}y'$$

En substituant :

$$z' - 4xz = -2x$$

6 Équations de Riccati

Une **équation de Riccati** est de la forme :

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

avec $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ continues.

Méthode de Résolution

Connaissant une solution particulière y_p, on pose :

$$y = y_p + z$$

Substitution donne une équation de Bernoulli pour z :

$$z' + (a(x) + 2b(x)y_p(x))z = -b(x)z^2$$

Résoudre :

$$y' = (y - x)^2$$

Posons $y = y_p + z$, alors :

$$z' - 2z = z^2$$

7 Problème de Cauchy

Soient $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, et $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Le **problème de Cauchy** consiste à trouver une fonction $y \in C^1(I)$ telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), \quad \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Résoudre un problème de Cauchy signifie trouver toutes les fonctions y définies sur I qui satisfont à l'équation et à la condition initiale.

7.1 Forme Intégrale

Une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(u, y(u))\, du \quad \forall t \in I$$

7.2 Courbes Intégrales

Si $t = x$, le problème de Cauchy peut se réécrire :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Trouver la solution revient alors à trouver la **courbe intégrale** passant par le point (x_0, y_0).

8 Introduction aux Équations Différentielles avec Retard

8.1 Définitions et Exemples

Une **équation différentielle avec retard** (EDR) est une *équation dont l'évolution à un instant donné dépend non seulement de l'état actuel du système, mais aussi de son état passé.* Elle prend typiquement la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \tag{1.1}$$

où $r > 0$ est le retard.

Exemple simple : $\dot{x}(t) = -x(t-1)$.

Les équations différentielles à retard diffèrent des équations ordinaires car le **taux de changement actuel ($x'(t)$) dépend de la valeur de la fonction dans le passé ($x(t-1)$)**. Pour les résoudre, on utilise une technique appelée la "**Méthode des Pas**" (Method of Steps), qui construit la solution période par période.

1. La Fonction Initiale (L'Historique)

Nous avons besoin de connaître le comportement de la fonction $x(t)$ avant que l'équation ne commence. Supposons que :

$$x(t) = 1 \quad \text{pour } -1 \leq t \leq 0$$

2. Construction de la Solution Étape par Étape

Étape 1 : Pour l'intervalle $0 \leq t \leq 1$

- Dans cet intervalle, la valeur de $t-1$ se situe entre -1 et 0. Basé sur la fonction initiale, nous savons que $x(t-1) = 1$.
- L'équation originale devient : $x'(t) = -1$.
- En intégrant les deux côtés, on obtient $x(t) = -t + C_1$.
- Pour trouver C_1, nous utilisons la valeur à $t = 0$. De la fonction initiale, nous savons que $x(0) = 1$.
- Donc, $1 = -0 + C_1 \implies C_1 = 1$.
- **La solution pour l'intervalle $0 \leq t \leq 1$ est :**

$$x(t) = -t + 1$$

Étape 2 : Pour l'intervalle $1 \leq t \leq 2$

- Maintenant, la valeur de $t-1$ se situe entre 0 et 1. Nous utilisons donc la solution que nous venons de trouver à l'Étape 1 pour $x(t-1)$:

$$x(t-1) = -(t-1) + 1 = -t + 2$$

- L'équation originale devient : $x'(t) = -(-t+2) = t-2$.
- En intégrant les deux côtés, on obtient $x(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + C_2$.
- Pour trouver C_2, la solution doit se raccorder avec celle de l'étape précédente. À $t = 1$: $x(1) = -1 + 1 = 0$ (d'après l'Étape 1).
- Donc, $0 = \frac{1^2}{2} - 2(1) + C_2 \implies C_2 = \frac{3}{2}$.
- **La solution pour l'intervalle** $1 \leq t \leq 2$ **est :**

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}$$

Étape 3 : Pour l'intervalle $2 \leq t \leq 3$

- Maintenant, la valeur de $t-1$ se situe entre 1 et 2. Nous utilisons donc la solution de l'Étape 2 pour $x(t-1)$:

$$x(t-1) = \frac{(t-1)^2}{2} - 2(t-1) + \frac{3}{2} = \frac{t^2}{2} - 3t + 4$$

- L'équation originale devient : $x'(t) = -(\frac{t^2}{2} - 3t + 4) = -\frac{t^2}{2} + 3t - 4$.
- En intégrant les deux côtés, on obtient $x(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + C_3$.
- Pour trouver C_3, à $t = 2$: $x(2) = -\frac{1}{2}$ (d'après l'Étape 2).
- Donc, $C_3 = \frac{17}{6}$.
- **La solution pour l'intervalle** $2 \leq t \leq 3$ **est :**

$$x(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6}$$

—

Résumé de la Solution

La solution complète de l'équation est une **fonction définie par morceaux**. Chaque morceau est un polynôme dont la complexité (le degré) augmente à chaque nouvelle période de temps. Cela montre bien comment le comportement de l'équation différentielle à retard est influencé par son "passé".

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 4t + \frac{17}{6} & \text{pour } 2 \leq t \leq 3 \\ \dots & \text{et le processus continue} \end{cases}$$

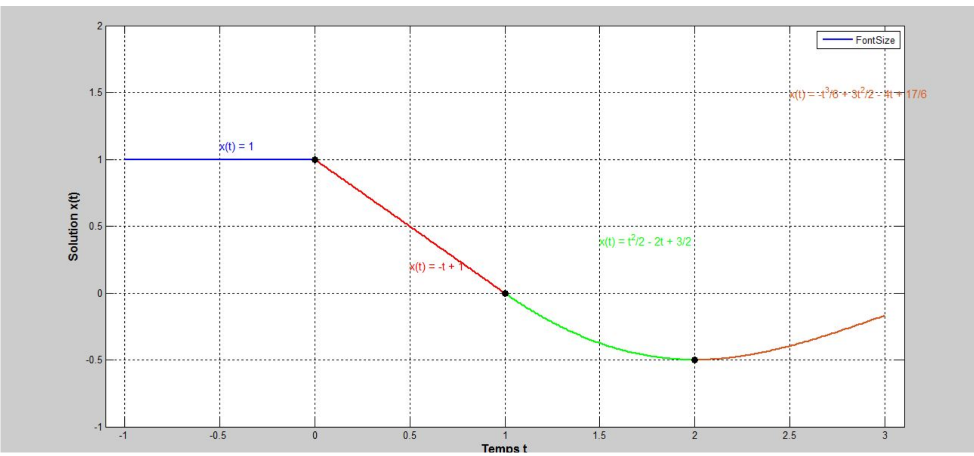

Figure 1.1: Méthode des pas appliquée à $\dot{x}(t) = -x(t-1)$: solution multi-intervalles montrant l'évolution de linéaire (ordre 1) à cubique (ordre 3) sur les intervalles successifs $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,3]$. La condition initiale constante $x(t) = 1$ sur $[-1,0]$ est représentée en bleu.

8.2 Différence entre EDO Classiques et EDO avec Retard

- **EDO classiques :** la dérivée dépend uniquement de l'état instantané.
- **EDO avec retard :** la dérivée dépend aussi d'un *état antérieur* $x(t-r)$.
- **Conséquence :** la condition initiale doit être une fonction sur un intervalle $[-r, 0]$, et non un simple point.

8.3 Applications Typiques

- Modèles biologiques avec maturation ou gestation (ex: *modèle de Hutchinson*).
- Modèles économiques avec délai d'information ou réaction.
- Contrôle automatique et circuits électriques avec mémoires ou retards de transmission.

9 Notions Mathématiques Nécessaires

9.1 Espace des Fonctions Continues

On note $\mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues de $[-r,0]$ vers $\mathbb{R}^n$. C'est un espace vectoriel normé important pour l'étude des EDR.

9.2 Normes et Topologies Adaptées

- **Norme uniforme :** $\|\phi\| = \sup_{\theta\in[-r,0]} |\phi(\theta)|$.
- Cette norme induit une topologie naturelle sur $\mathcal{C}$, le transformant en un **espace de Banach**.
- **Conséquence :** toute suite de Cauchy dans cet espace converge vers une fonction continue.

9.3 Théorèmes Fondamentaux Utilisés

- **Théorème de Banach** (point fixe) : essentiel pour prouver existence et unicité.
- **Théorème d'Arzelà-Ascoli** : pour compacité des familles de fonctions.
- **Inégalité de Gronwall** : pour estimer les solutions et garantir leur stabilité.

10 Formulation Mathématique

10.1 Forme Générale

Les équations différentielles avec retard (EDR) prennent la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.2}$$

où $x_t \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ est la fonction historique définie par :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-r,0]$$

CHAPTER 2

Théorie Générale des Équations Différentielles avec Retard

1 Formulation Mathématique

1.1 Forme Générale

Les équations différentielles avec retard (EDR) prennent la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{2.1}$$

où $x_t \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ est la fonction historique définie par :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0]$$

1.2 Hypothèses sur la Fonction f

Pour garantir l'existence et l'unicité des solutions, on impose les conditions suivantes :

- $f : [t_0, T] \times \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ est continue.
- f est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, c'est-à-dire :
$$\exists L > 0, \forall \phi, \psi \in \mathcal{C}, \quad \|f(t, \phi) - f(t, \psi)\| \leq L\|\phi - \psi\|.$$

2 Théorème d'Existence et d'Unicité des Solutions

2.1 Énoncé du Théorème

[Existence et Unicité] Soit f une fonction continue et lipschitzienne sur $[t_0, T] \times \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, et soit une condition initiale $\phi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Alors il existe une unique solution $x(t)$ sur un intervalle $[t_0, t_0 + \delta]$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \\ &x(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0]. \end{aligned}$$

2.2 Démonstration Simplifiée

On utilise le théorème de Banach pour montrer que l'opérateur Γ :

$$(\Gamma x)(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) ds$$

est un contractant sur un espace de Banach muni de la norme uniforme.

2.3 Dépendance Continue vis-à-vis des Conditions Initiales

Si $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, alors les solutions x_n associées convergent uniformément vers la solution x associée à ϕ.

3 Stabilité des Solutions

3.1 Types de Stabilité

Stabilité asymptotique : une solution $x = 0$ est asymptotiquement stable si elle est stable, et $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Stabilité exponentielle : $\exists \delta, K, \lambda > 0$ tels que $\|x(t)\| \leq K e^{-\lambda(t - t_0)} \|\phi\|$.

3.2 Étude par la Méthode de Lyapunov

- On construit une fonctionnelle de Lyapunov $V : \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$
- V est positive définie : $V(\phi) > 0$ si $\phi \neq 0$, et $V(0) = 0$
- $\dot{V}(x_t) \leq -W(x(0))$ pour une fonction W positive définie

3.3 Linéarisation

Considérons :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - r)$$

On linéarise autour de l'équilibre et on analyse la solution fondamentale à l'aide de la transformée de Laplace, des valeurs propres du système, ou du critère de stabilité de Hale.

3.4 Exemples Numériques et Interprétation Graphique

- Étude du système $\dot{x}(t) = -x(t) + 2x(t - 1)$ avec différentes conditions initiales
- Représentation de phase avec retards

Conclusion

Ce chapitre a détaillé les fondements mathématiques des équations différentielles avec retard, allant de leur formulation à l'analyse de la stabilité des solutions. Ces outils sont indispensables pour modéliser des phénomènes où l'effet du passé influe sur la dynamique présente.

CHAPTER 3

Résolution et analyse qualitative

1 Résolution analytique des EDO avec retard

Les équations différentielles avec retard présentent des défis particuliers pour leur résolution analytique. Contrairement aux EDO classiques, peu de méthodes générales existent, mais certains cas particuliers peuvent être résolus exactement.

1.1 Cas particuliers résolubles analytiquement

[Équation à retard constant] Considérons l'équation simple :

$$y'(t) = ay(t - \tau)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\tau > 0$ est le retard constant.

Pour $\tau = 0$, on retrouve une EDO linéaire classique. Pour $\tau > 0$, on cherche des solutions de la forme $y(t) = e^{\lambda t}$. En substituant, on obtient l'équation caractéristique :

$$\lambda = ae^{-\lambda\tau}$$

Cette équation transcendante admet une infinité de solutions complexes λ_k, donnant la solution générale :

$$y(t) = \sum_k C_k e^{\lambda_k t}$$

[Équation de Hutchinson] L'équation logistique avec retard :

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K}\right)$$

admet des solutions analytiques pour des conditions initiales particulières, notamment la solution d'équilibre $y(t) = K$.

1.2 Méthodes spécifiques

1. **Séparation des variables** : Applicable lorsque l'équation peut être réécrite sous la forme :

$$f(y(t))y'(t) = g(y(t-\tau))$$

2. **Méthode des étapes** : Pour les équations à retard discret, on résout séquentiellement sur des intervalles $[n\tau, (n+1)\tau]$.

3. **Transformée de Laplace** : Utile pour les équations linéaires à coefficients constants, permettant de convertir l'équation différentielle retardée en une équation algébrique.

4. **Développement en série** : Recherche de solutions sous forme de séries entières ou de séries de Fourier pour des problèmes périodiques.

2 Résolution numérique

La résolution numérique des EDO avec retard pose des défis supplémentaires par rapport aux EDO classiques, principalement dus à la nécessité de stocker l'historique de la solution.

2.1 Algorithmes adaptés

Méthode d'Euler retardée

Pour l'équation $y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau))$, avec un pas h tel que $\tau = mh$ $(m \in \mathbb{N})$:

[H] Méthode d'Euler retardée [1] Initialiser $y(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$ $n = 0$ à $N - 1$ $t_n = nh$ $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n, y_{n-m})$

Méthode de Runge-Kutta avec retard

Une adaptation de la méthode classique :

[H] Runge-Kutta d'ordre 4 avec retard [1] Initialiser $y(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$ $n = 0$ à $N-1$ $t_n = nh$ $k_1 = f(t_n, y_n, y_{n-m})$ $k_2 = f(t_n+h/2, y_n+hk_1/2, y_{n-m+\lfloor m/2 \rfloor})$ $k_3 = f(t_n + h/2, y_n + hk_2/2, y_{n-m+\lfloor m/2 \rfloor})$ $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3, y_{n-m+m})$ $y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

3 Analyse qualitative des solutions

L'analyse qualitative des EDO avec retard révèle des comportements riches et complexes, souvent plus variés que dans le cas sans retard.

3.1 Étude des points d'équilibre

[Point d'équilibre] Une solution constante $y(t) \equiv y^*$ est un point d'équilibre si elle satisfait :

$$f(y^*, y^*) = 0$$

[Stabilité linéaire] Pour l'équation linéarisée autour de y^* :

$$y'(t) = ay(t) + by(t-\tau)$$

la stabilité dépend des racines de :

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$$

- Si toutes les racines ont $\Re(\lambda) < 0$, l'équilibre est asymptotiquement stable
- Si au moins une racine a $\Re(\lambda) > 0$, l'équilibre est instable

3.2 Oscillations, périodicité et chaos

Les retards peuvent induire des comportements oscillatoires même dans des systèmes simples :

[Oscillations dans l'équation de Hutchinson] L'équation :

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t-1)}{K}\right)$$

présente des solutions oscillatoires pour $r\tau > \pi/2$. Ces oscillations peuvent converger vers un cycle limite ou, pour des retards plus grands, devenir chaotiques.

Les systèmes à retard peuvent exhiber :

- **Oscillations soutenues** : Solutions périodiques stables
- **Bifurcations de Hopf** : Apparition de cycles limites lorsque le retard dépasse une valeur critique
- **Comportement chaotique** : Sensibilité extrême aux conditions initiales

CHAPTER 4

Applications pratiques

Les équations différentielles à retard trouvent des applications dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Ce chapitre présente quelques-unes des applications les plus significatives.

1 Modèles biologiques

1.1 Équation de Hutchinson pour la dynamique des populations

[Modèle logistique avec retard] L'équation de Hutchinson modélise la croissance d'une population avec effet de retard :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

où :

- $N(t)$ est la taille de la population au temps t
- r est le taux de croissance intrinsèque
- K est la capacité de charge de l'environnement
- τ est le retard (temps de gestation)

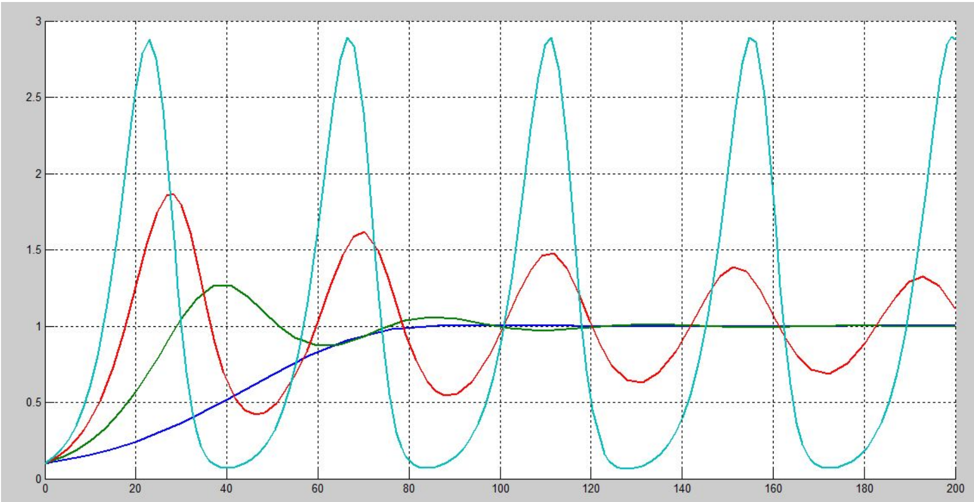

Figure 4.1: Solution de l'équation de Hutchinson pour différentes valeurs de $r\tau$.

1.2 Analyse des retards dans les cycles de vie biologiques

- **Modèle de Nicholson** pour les mouches à viande :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\delta N(t) + pN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)}$$

- **Modèles épidémiologiques** avec période d'incubation :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t-\tau) - \gamma I(t)$$

- **Systèmes prédateur-proie** avec retard de maturation :

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = aP(t) - bP(t)C(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = -cC(t) + dP(t-\tau)C(t-\tau) \end{cases}$$

2 Modèles en ingénierie

2.1 Systèmes de contrôle avec retard

[Système de premier ordre avec retard] Pour un système de contrôle avec retard de transport :

$$\tau_c y'(t) + y(t) = Ku(t-\theta)$$

Table 4.1: Comparaison des temps caractéristiques en biologie

Phénomène	Retard typique	Importance
Gestation	9 mois (humains)	Démographie
Incubation	2-14 jours (COVID)	Épidémiologie
Maturation	Variable	Dynamique populations

où θ est le retard pur, la stabilité dépend de la solution de :

$$\tau_c \lambda + 1 + K e^{-\lambda\theta} = 0$$

2.2 Stabilisation et comportement dynamique

- **Critère de stabilité** pour les systèmes à retard :

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i$$

  où λ_i sont les racines de l'équation caractéristique.

- **Méthodes de compensation** :
  - Contrôleur PID avec compensation de retard
  - Prédicteur de Smith
  - Approches basées sur Lyapunov-Krasovskii

3 Autres domaines d'application

3.1 Économie (modélisation avec retard dans les investissements)

[Modèle d'investissement avec retard]

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t-\tau) - \delta K(t)$$

où :

- $K(t)$ est le stock de capital
- $I(t)$ est l'investissement
- τ est le retard de mise en IJuvre
- δ est le taux de dépréciation

3.2 Chimie (réactions retardées)

- **Réactions enzymatiques** avec délai de conformation :

$$\frac{dP(t)}{dt} = k[S]E(t - \tau)$$

- **Oscillations de Belousov-Zhabotinsky** : Les retards influencent les périodes d'oscillation dans les réactions chimiques oscillantes.

- **Polymérisation** : Certaines réactions de polymérisation présentent des effets de mémoire dépendant de l'histoire de la réaction.

[Modèle de réaction retardée] Pour une réaction A ? B avec retard :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A](t - \tau)$$

La solution montre un comportement oscillant pour certains valeurs de $k\tau$.

Table 4.2: Applications des EDR dans différents domaines

Domaine	Application	Retard typique
Biologie	Dynamique des populations	Jours à années
Ingénierie	Systèmes de contrôle	Millisecondes à secondes
Économie	Modèles d'investissement	Mois à années
Chimie	Cinétique réactionnelle	Microsecondes à heures
Neuroscience	Transmission synaptique	Millisecondes

CHAPTER 5

Étude de cas

1 Étude de cas

[Système de contrôle avec retard pur] Considérons le système de contrôle décrit par :

$$y'(t) = -ay(t) + bu(t - \tau)$$

où :

- $y(t)$ est la sortie du système
- $u(t)$ est la commande d'entrée
- $\tau > 0$ est le retard pur
- $a, b > 0$ sont des paramètres constants

1.1 Résolution analytique

Pour une commande échelon $u(t) = H(t)$ (fonction de Heaviside), la solution s'obtient par la méthode des étapes :

1. Pour $t \in [0, \tau]$:

$$y(t) = y(0)e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

2. Pour $t \in [\tau, 2\tau]$:

$$y(t) = y(\tau)e^{-a(t-\tau)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-\tau)})$$

et ainsi de suite pour les intervalles suivants.

1.2 Résolution numérique par méthode d'Euler retardée

La méthode d'Euler retardée est particulièrement adaptée aux équations différentielles à retard de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) \tag{5.1}$$

Implémentation Python

L'algorithme se décompose en trois étapes claires :

1. **Initialisation** des paramètres temporels et du tableau de solution
2. **Assignation** de la condition historique
3. **Itération** selon le schéma d'Euler retardé

[language=Python, caption=Implémentation de la méthode d'Euler retardée, label=code:euler$_retarde]importnumpyasnp$

def euler$_retarde(a, b, tau, y0, T, n_steps)$: """$Rsouty'(t) = -a * y(t) + b * u(t-tau)avecu(t) = heaviside(t-tau)$

Paramètres: a, b : coefficients de l'équation tau : retard (positif) y0 : valeur initiale constante sur [-tau, 0] T : temps final n$_steps : nombredepasdediscrtisation$

Retourne: t : array des temps y : solution numérique """ Initialisation h = T / n$_stepsm = int(tau/h)Nombredepaspourcouvrirleretardt = np.linspace(0, T, n_steps + 1)y = np.zeros(n_steps + 1)u = np.heaviside(t - tau, 1)FonctiondeHeaviside$

Condition historique y[:m+1] = y0

Itération for n in range(m, n$_steps) : y[n+1] = y[n]+h*(-a*y[n]+b*u[n-m])$

return t, y

Analyse de la méthode

Cette implémentation présente les caractéristiques suivantes :

- **Précision** : Erreur locale de $O(h^2)$, globale de $O(h)$

- **Stabilité** : Condition CFL implicite via le paramètre m
- **Complexité** : $O(n_{steps})$ opérations, mémoire $O(n_{steps})$

Pour des résultats optimaux :

- Choisir $h \ll \tau$ (typiquement $h \leq \tau/10$)
- Vérifier que $m = \tau/h$ est entier pour éviter les erreurs d'arrondi

1.3 Analyse comparative

Table 5.1: Comparaison solutions analytique/numérique

Méthode	Avantages	Limites
Analytique	Solution exacte	Limitée à cas simples
Numérique	Applicable à cas complexes	Erreur de discrétisation

[Modèle de population avec retard distribué] Considérons le modèle plus réaliste avec retard distribué :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{1}{K}\int_0^\infty N(t-s)g(s)ds\right)$$

où $g(s)$ est une fonction de distribution des retards.

Conclusion Générale

Ce mémoire a exploré de manière systématique la théorie, la résolution et les applications des équations différentielles à retard (EDR), révélant leur richesse mathématique et leur pertinence dans la modélisation des systèmes à mémoire. En confrontant les EDR aux équations différentielles ordinaires (EDO) classiques, ce travail a mis en lumière leurs spécificités structurelles et leurs comportements dynamiques singuliers.

Synthèse des apports

Les cinq chapitres ont permis d'établir une progression rigoureuse :

- **Fondations théoriques** (Chapitres 1-2) :
  - Cadrage des EDR dans l'analyse fonctionnelle (espaces de Banach, conditions initiales fonctionnelles)
  - Preuves d'existence/unicité via le théorème de point fixe
  - Critères de stabilité (Lyapunov, linéarisation)
- **Résolution pratique** (Chapitre 3) :
  - Méthode des pas pour les retards discrets
  - Algorithmes numériques adaptés (Euler retardé, Runge-Kutta)
  - Analyse des bifurcations et du chaos
- **Applications significatives** (Chapitres 4-5) :
  - Modèles biologiques (Hutchinson, Nicholson)
  - Systèmes de contrôle avec retard pur
  - Études de cas implémentées (Python/Matlab)

Contributions majeures

Ce travail a notamment démontré :

- La **nécessité des conditions initiales fonctionnelles**, contrastant avec le cadre ponctuel des EDO
- L'émergence de **comportements dynamiques complexes** (oscillations, cycles limites) même pour des EDR linéaires simples
- L'efficacité des **schémas numériques adaptés** malgré le surcoût computationnel

Limites et perspectives

Si ce mémoire a couvert les aspects fondamentaux des EDR, plusieurs voies restent à explorer :

- **Extensions théoriques** :
  - EDR stochastiques (bruit additif/multiplicatif)
  - Systèmes hybrides EDO-EDR
- **Améliorations numériques** :
  - Algorithmes parallèles pour retards distribués
  - Intégration de méthodes deep learning
- **Nouvelles applications** :
  - Neurosciences computationnelles (plasticité synaptique)
  - Réseaux intelligents à délais variables

Les équations différentielles à retard, loin d'être une simple curiosité mathématique, s'imposent comme un outil indispensable pour modéliser les systèmes où le passé influence durablement le présent. Leur maîtrise ouvre des perspectives fascinantes, tant en recherche fondamentale qu'en ingénierie appliquée. Ce mémoire, en balayant méthodiquement leur théorie, leurs méthodes de résolution et leurs applications, aspire à servir de tremplin pour de futures investigations dans ce domaine en pleine expansion.

"Le présent contient tout le passé.
Ce qui est arrivé dans le passé
ressemble à ce qui arrive au présent."
— Henri Bergson

Bibliography

[1] Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2002). *Calculus* (8th ed.). John Wiley & Sons.

[2] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (10th ed.). John Wiley & Sons.

[3] Kreyszig, E. (2010). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.

[4] Kreyszig, E. (2011). *Differential Equations: Theory, Technique, and Practice* (7th ed.). John Wiley & Sons.

[5] Stewart, J. (2007). *Calculus: Early Transcendentals* (6th ed.). Brooks/Cole.

[6] Smith, H. L. (2011). *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer.

[7] Kuang, Y. (1993). *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics* (Vol. 191). Academic Press.

[8] Niculescu, S.-I. (1996). *Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires à états retardés* [Thèse de doctorat, INP Grenoble].

[9] Volkmann, P. (1995). Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de Banach. In A. Granas (Ed.), *Topological Methods in Differential Equations and Inclusions* (pp. 501-520). Springer.

[10] Yahiaoui, S. (2014). *Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état* [Thèse de doctorat, Université non spécifiée].