

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Approximation numérique et contrôle optimal d'un
problème de contact électro-élastique.**

Option : A.N.E.D.P

Par:

1. Faghmous Naima
2. Guettar Chaima

Encadré par: Kasri Abderrezak

MCA U. SKIKDA

Devant le jury :

Président: Slimani Kamel

MCB U. SKIKDA

Examineur: Lagraf Samira

MCB U. SKIKDA

Année: 2021/2022

Remerciements

Nous tenons à remercier **ALLAH** le tout puissant d'avoir nous donner la volonté et la patience de mener à bien ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur **Mr : Kasri Abderrezak** pour nous avoir un sujet de mémoire Master aussi intéressant et pour son soutien durant l'élaboration de notre travail.

Nos remerciements vont également aux

- Président de jury : Slimani Kamel M.C.B U. SKIKDA
 - Examineur : Lagraf Samira M.C.B U. SKIKDA
- d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail.

Enfin, nous tenons à remercier nos famille, nos collègues, nos enseignants et tous qui ont contribué à nos parcours académiques.

Dédicace

Nous dédions *ce travail* :

A nos chers parents, de leurs sacrifices et leurs encouragements.

A nos chers frères et nos chères soeurs sources de joie et de bonheur.

A nos famille, sources d'espoir et de motivation pour leur soutien au long de nos parcours universitaires.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة مشكلة التلامس مع الاحتكاك لجسم مرن كهربائياً. في البداية ، نركز على التحكم الأمثل في النموذج. نقدم بعد ذلك مخططاً منفصلاً للنموذج وتحت افتراضات السلاسة المناسبة ، نشتق تقديرات الخطأ.

الكلمات المفتاحية: المواد المرنة كهربائياً ، الاحتكاك ، التحكم الأمثل ، حل ضعيف ، مخطط منفصل ، تفاوت متغير

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier un problème de contact avec frottement pour un corps électro-élastique. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur le contrôle optimal du modèle. Nous introduisons ensuite un schéma discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous dérivons des estimations d'erreur.

Mots clés : matériaux électro-élastiques, contact avec frottement, contrôle optimal, une solution faible, un schéma discret, inéquation variationnelle.

Abstract

The aim of this work is to study a frictional contact problem for an electro-elastic body. Firstly, we focus on the optimal control of the model. We then introduce a discrete scheme for the model and under appropriate smoothness assumptions we derive error estimates.

Keywords: electro-elastic materials, contact with friction, optimal control, a weak solution, discrete scheme, variational inequality.

TABLE DES MATIÈRES

1	Modélisation	1
1.1	Lois de comportement	1
1.1.1	Loi de comportement élastique	2
1.1.2	Loi de comportement des matériaux piézoélectriques	2
1.2	Equations de mouvement et d'équilibre	3
1.3	Conditions aux limites	3
1.3.1	Les conditions aux limites des déplacements et des trac-	
	tions	4
1.3.2	Condition de contact bilatéral	5
1.3.3	Condition de contact avec la loi de frottement de Cou-	
	lomb dépendant du glissement	5
1.3.4	Conditions aux limites électriques	5
2	Rappels et préliminaires	6
2.1	Quelques resultats dans les espaces de Banach	6
2.2	Quelques resultats dans les espaces de Hilbert	8
2.3	Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact	10
2.4	Approximation par éléments finis	11

3 Problème de contact avec frottement pour un matériau électro-	
élastique	15
3.1 Énoncé du problème	15
3.2 Hypothèses et Formulation variationnelle	17
3.3 Existence et unicité de la solution faible	24
3.4 Le problème du contrôle optimal	26
3.4.1 Existence de la solution	28
3.4.2 Une technique de régularisation	30
3.5 Approximation numérique	37

Introduction

Les inéquations variationnelles modélisent de nombreux problèmes non linéaires en science des matériaux et en mécanique des solides. En raison de l'importance du sujet, elles ont pris une importance considérable ces dernières décennies dans la littérature mathématique. Cependant, leurs développements n'apparaissent qu'au début du 20ème siècle où le problème de Signorini a été posé dans [19] et a été résolu par Fichera dans [7] qui a utilisé le terme "inéquation variationnelle".

Des applications importantes ont été faites concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution dans l'étude de nombreux problèmes en mécanique des milieux continus : problèmes d'obstacle, problèmes de contact, problèmes d'optimisation, etc.

Le contrôle optimal des inéquations variationnelles a été considéré dans plusieurs publications voir par exemple [15, 16]. Le contrôle optimal des problèmes de contact avec frottement a été étudié dans de nombreux articles voir [1, 10, 14, 23].

Dans ce mémoire, nous considérons un problème de contact statique qui décrit le contact de frottement entre un corps piézoélectrique et une fondation. Nous supposons que le contact est bilatéral, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de contact au cours du processus et, de plus, nous utilisons la loi de frottement sec de Coulomb dans laquelle la borne de frottement dépend du glissement. Dans la modélisation du comportement du corps piézoélectrique, nous utilisons une loi de comportement électro-élastique linéaire.

L'effet piézoélectrique résulte de l'interaction entre les propriétés mécaniques et électriques dans laquelle le corps a la capacité de produire un champ électrique lorsqu'il est soumis à une contrainte mécanique et inversement, le corps piézoélectrique présente des déformations importantes en réponse à un champ électrique appliqué. Pour cette raison, les matériaux piézoélectriques sont utilisés de manière intensive dans diverses applications.

En particulier, ils sont utilisés comme capteurs et actionneurs dans divers équipements de mesure. Modélisation et analyse récentes des problèmes

de contact prenant en compte de l'interaction entre les champs électriques et mécaniques peut être trouvé dans [2, 3, 11, 22].

Le plan de ce travail, composé de trois chapitres, est le suivant. Le Chapitre 1 comprend la description classique des équations, des relations constitutives des matériaux électro-élastiques et des conditions aux limites. Dans le Chapitre 2, on rappelle des notations mathématiques nécessaires à la compréhension de ce travail. Le Chapitre 3 est consacré à l'étude d'un problème de contact avec frottement statique pour un matériau électro-élastique. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur le contrôle optimal du modèle. Nous introduisons ensuite un schéma discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous dérivons des estimations d'erreur.

- \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels ;
- \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ;
- \mathbb{R}^+ l'ensemble des nombres non négatifs ;
- $\mathbb{R}^{+,*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs ;
- \emptyset l'ensemble vide ;
- $[0, T]$ représente l'intervalle de temps, où $T > 0$;
- \mathbb{R}^d l'espace euclidien d -dimensionnel, ($d=2, 3$) ;
- \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d , ($d=2, 3$) ;
- I représente l'application d'identité ;
- I_d représente l'application d'identité dans \mathbb{S}^d ;
- c représente une constante positive générique dont la valeur change au cours de ce mémoire ;
- $p.p.$ signifie presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ représentent les dérivées par rapport au temps ;
- Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$) à frontière Lipschitzienne Γ ;
- $\overline{\Omega}$ est la fermeture (adhérence) de Ω ;
- $C^m(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont continus jusqu'à la frontière Γ ;
- $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue des fonctions p -intégrables sur Ω , avec la

modification usuelle si $p = \infty$;

CHAPITRE 1

Modélisation

Dans ce Chapitre, nous présentons une description générale de la modélisation de contact entre corps déformables, pour plus des détails voir [4, 8, 20, 21, 22]. Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$) représentant la configuration de référence d'un corps déformable pouvant entrer en contact avec un obstacle. Soit $x \in \bar{\Omega}$ la variable spatiale. On note \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur \mathbb{R}^d . On définit les produits scalaires et les normes correspondantes sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^d u_i v_i, \quad |u| = \sqrt[2]{u \cdot u}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d;$$
$$\sigma \cdot \xi = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \sigma_{ij} \xi_{ij}, \quad |\sigma| = \sqrt[2]{\sigma \cdot \sigma}, \quad \forall \sigma, \xi \in \mathbb{S}^d.$$

1.1 Lois de comportement

La loi de comportement caractérise le comportement du corps, elle est donnée par une relation entre le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ et le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$, où u est le champ des déplacements. Les composantes du tenseur de déformation, dans le cadre de petites déformations,

sont données par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.1)$$

1.1.1 Loi de comportement élastique

L'élasticité est la capacité d'un corps à résister à la force de déformation et à retrouver sa taille et sa forme d'origine lorsque cette force est supprimée. Une loi de comportement élastique linéaire est donnée par

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u),$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$, $1 \leq i, j, k, l \leq d$, est un tenseur d'élasticité du quatrième ordre. Sous la forme de composantes, cette équation constitutive est donnée par

$$\sigma_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq d} \mathcal{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u),$$

où \mathcal{E}_{ijkl} sont les coefficients d'élasticité.

1.1.2 Loi de comportement des matériaux piézoélectriques

L'effet piézoélectrique résulte du couplage entre les propriétés électriques et mécaniques dans lesquelles le corps a la capacité à produire un champ électrique lorsqu'une contrainte mécanique est présente et, à l'inverse, sous l'action d'un champ électrique le corps subit une contrainte mécanique. La loi de comportement serait utilisée est de la forme

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{E}^* \nabla(\varphi) \text{ dans } \Omega, \\ D &= \mathcal{C}E(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où \mathcal{A} et \mathcal{E} sont des fonctions constitutives. \mathcal{A} représente l'opérateur d'élasticité. D est le champ des déplacements électriques, \mathcal{E} est le tenseur piézoélectrique, \mathcal{E}^* est sa transposée, \mathcal{C} dénote le champ de la permittivité électrique,

∇ est l'opérateur gradient, $E = -\nabla\varphi$ est le champ électrique, φ est le champ de potentiel électrique.

1.2 Equations de mouvement et d'équilibre

Soit $[0, T]$ un intervalle de temps, soit $t \in [0, T]$ la variable du temps. Les équations dynamiques de mouvement, représentant la conservation de la quantité de mouvement et qui régissent l'évolution de l'état du corps sont

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{Div} \sigma + f_0 \text{ dans } \Omega \times [0, T],$$

où ρ est la densité du matériau et f_0 est la densité des forces appliquées. Dans des situations, où $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ nous obtenons les équations d'équilibre statiques

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où 'Div' est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire

$$\text{Div} \sigma = ((\text{Div} \sigma)_i)_{1 \leq i \leq d}, \quad (\text{Div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

1.3 Conditions aux limites

Passons maintenant aux conditions aux limites. À cette fin, nous supposons que Ω est un domaine, borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$), à frontière Lipschitzienne Γ . Ainsi, le vecteur normal d'unité extérieure $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ est défini presque par tous sur Γ . Si v est un champ vectoriel défini sur Γ , alors nous notons v_ν et v_τ les composantes normales et tangentielles de v sur la frontière Γ

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu \text{ sur } \Gamma.$$

De même, la composante normale σ_ν et la composante tangentielle σ_τ d'un tenseur σ sont données par

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu \text{ sur } \Gamma.$$

Tout au long de ce mémoire, nous supposons que la surface Γ est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telle que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$.

1.3.1 Les conditions aux limites des déplacements et des tractions

Le corps est supposé fixé sur la partie Γ_1 et donc nous utilisons la condition de Dirichlet homogène

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

tandis que des tractions surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 . Alors, le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Nous passons maintenant à la description des conditions aux limites sur Γ_3 , que nous utiliserons dans ce mémoire.

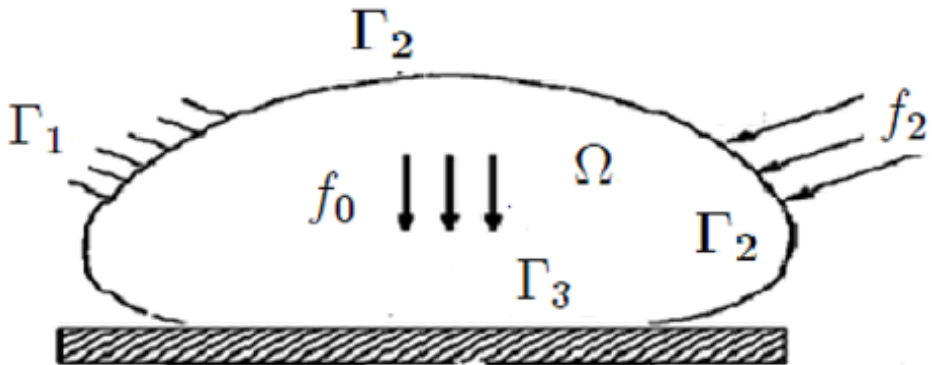


Fig 1: un corps déformable en contact avec une fondation

1.3.2 Condition de contact bilatéral

Cela signifie que le contact entre le corps et la fondation est maintenu à tout moment et il est modélisé par l'équation

$$u_\nu = 0, \text{ on } \Gamma_3.$$

Cette condition peut être trouvée dans de nombreuses machines et dans les pièces mobiles et les composants des équipements mécaniques.

1.3.3 Condition de contact avec la loi de frottement de Coulomb dépendant du glissement

La loi de frottement de Coulomb statique se lit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu (|u_\tau|), \\ \sigma_\tau = -\mu (|u_\tau|) \frac{u_\tau}{|u_\tau|} \text{ si } u_\tau \neq 0 \end{array} \right. \text{ on } \Gamma_3,$$

ce qui stipule que, s'il y a contact, la traction tangentielle σ_τ est bornée par la valeur du coefficient de frottement $\mu (|u_\tau|)$. Si l'inégalité stricte est satisfaite, le glissement ne se produit pas, et lorsque l'égalité est satisfaite, la contrainte de frottement est opposée au taux de glissement.

1.3.4 Conditions aux limites électriques

Pour un corps piézoélectrique, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est divisée en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b telles que $mes(\Gamma_a) > 0$. Nous supposons que la charge électrique surfacique de densité q_2 impose sur Γ_b telle que :

$$D \cdot v = q_2 \text{ sur } \Gamma_b.$$

En outre, nous supposons que le champ potentiel électrique satisfait

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a.$$

CHAPITRE 2

Rappels et préliminaires

Dans ce Chapitre on va présenter quelques rappels d'analyse fonctionnelle et donner des notations principales seront utilisées dans ce mémoire, pour plus des détails voir [4, 5, 6, 8, 12, 18, 20, 21].

2.1 Quelques resultats dans les espaces de Banach

Pour chaque espace de Banach réel X , on note par X^* , $\|\cdot\|_X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ et $\mathcal{L}(X, X^*)$ le dual topologique de X , la norme sur X , le produit de dualité entre X et X^* , l'espace vectoriel des toutes les applications linéaires continues entre X et X^* , respectivement. Dans cette Section, X est un espace de Banach réel.

Définition 2.1 *On dit qu'une suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$ et on écrit*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } X \text{ si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v, u_n \rangle_{X^* \times X} = \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \forall v \in X^*.$$

Définition 2.2 *Un espace de Banach X est dit réflexif si $i^*(X) = (X^*)^*$ où*

i^* est l'application canonique définie par

$$i^* : X \rightarrow (X^*)^* ; i^*(u) = f_u \in X^{**}, \forall u \in X ; f_u(v) = \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \forall v \in X^*.$$

Proposition 2.1 *Soit X un espace de Banach réflexif, si $\{u_n\} \subset X$ est une suite bornée dans X alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans X .*

Définition 2.3 *Soit $\Phi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, une fonction, le domaine effectif de Φ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur ∞ ,*

$$D(\Phi) = \{u \in X : \Phi(u) < \infty\},$$

et on dit que Φ est propre si $D(\Phi) \neq \emptyset$. Le sous-différentiel de Φ en $u \in X$ est l'ensemble

$$\partial\Phi(u) = \{l \in X : \langle l, v - u \rangle_X < \Phi(v) - \Phi(u), \forall v \in X\}.$$

Définition 2.4 *Une fonction $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe ssi*

$$\Phi((1 - \alpha)u + \alpha v) \leq (1 - \alpha)\Phi(u) + \alpha\Phi(v), \forall u, v \in X, \forall \alpha \in (0, 1).$$

Φ est strictement convexe si,

$$\Phi((1 - \alpha)u + \alpha v) < (1 - \alpha)\Phi(u) + \alpha\Phi(v), \forall u, v \in X, \forall \alpha \in (0, 1).$$

On dit que Φ est semi-continu inférieurement en $u \in X$ si, pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_X = 0,$$

on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(u).$$

On dit que Φ est faiblement semi-continu inférieurement en $u \in X$, si pour

chaque suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$ on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(u).$$

Proposition 2.2 Soit $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, Φ est faiblement semi-continu inférieurement ssi Φ est semi-continu inférieurement.

Définition 2.5 Soit $F : X \rightarrow X$ une application. On dit que F admet un point fixe ssi $\exists u \in X$, tel que $F(u) = u$ et on dit que F est contractante ssi il existe une constante $L_F \in [0, 1)$, telle que

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq L_F \|u - v\|_X, \forall u, v \in X.$$

Proposition 2.3 Soit X un espace de Banach et soit $F : X \rightarrow X$ une application contractante, Alors, F admet un unique point fixe .

2.2 Quelques resultats dans les espaces de Hilbert

Pour tout espace de Hilbert réel X , nous notons par $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et $\|\cdot\|_X$ le produit scalaire et la norme associée sur X , respectivement. Dans cette section, X est un espace de Hilbert.

Proposition 2.4 (Théorème de représentation de Riesz). Pour tout $\eta \in X^*$, il existe un unique élément $f \in X$ tel que

$$(\eta, v)_{X^* \times X} = (f, v)_X, \forall v \in X.$$

De plus, on a

$$\|\eta\|_{X^*} = \|f\|_X.$$

Alors, on peut identifier l'espace de Hilbert X avec son dual X^* et on désigne encore par f l'élément de X qui représente uniquement la forme linéaire et continue η .

Définition 2.6 Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. 1) a est continue sur X s'il existe une constante réelle $L_a > 0$, telle que

$$|a(w_1, w_2)| \leq L_a \|w_1\|_X \|w_2\|_X, \forall w_1, w_2 \in X. \quad (2.1)$$

2) a est coercive (X -elliptique) s'il existe une constante réelle $m_a > 0$, telle que

$$m_a \|w\|_X^2 \leq a(w, w), \forall w \in X. \quad (2.2)$$

3) a est positive si

$$0 \leq a(w, w), \forall w \in X.$$

4) a est symétrique si

$$a(w_1, w_2) = a(w_2, w_1), \forall w_1, w_2 \in X.$$

Proposition 2.5 (Théorème de Lax-Milgram). Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, coercive et continue. Alors, pour tout $f \in X$, le problème suivant : Trouver un élément $u \in X$, tel que

$$a(u, v) = (f, v)_X, \forall v \in X,$$

admet une unique solution.

Proposition 2.6 Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive et soit $\Phi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ une fonction propre, convexe et semi-continu inférieurement sur X . Alors, pour tout $\eta \in X^*$, le problème suivant : Trouver un élément $u \in X$, tel que

$$a(u, w - u) + \Phi(w) - \Phi(u) \geq \langle \eta, w - u \rangle_{X^* \times X}, \forall w \in X.$$

admet une unique solution.

Proposition 2.7 Soient X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive et $\{u_n\} \subset X$ une suite qui converge

faiblement vers $u \in X$. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf a(u_n, u_n) \geq a(u, u).$$

2.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact

Soit Ω un domaine borné dans l'espace numérique \mathbb{R}^d , ($d=2, 3$), de variable $x = (x_1, \dots, x_d)$, avec une frontière de Lipschitz Γ . Nous introduisons les espaces

$$H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad \mathcal{Q} = L^2(\Omega; \mathbb{S}^d),$$

$$H_1 = \{u \in H; \varepsilon(u) \in \mathcal{Q}\}, \quad \mathcal{Q}_1 = \{\sigma \in \mathcal{Q}; \text{Div}\sigma \in H\}.$$

$$\mathcal{Z} = \{D \in H; \text{div} D \in L^2(\Omega)\}.$$

H , \mathcal{Q} , H_1 , \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Z} sont des espaces de Hilbert munis respectivement par des produits scalaires canoniques

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u \cdot v dx, \quad \forall u, v \in H, \quad (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}} = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q},$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall u, v \in H_1,$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}_1} = (\text{Div}\sigma, \text{Div}\tau)_H + (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q}_1,$$

$$(D, B)_{\mathcal{Z}} = (\text{div} D, \text{div} B)_{L^2(\Omega)} + (D, B)_H,$$

où les normes associées sont notées respectivement par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. Nous pouvons définir l'application de la trace $\tilde{\gamma} : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma; \mathbb{R}^d)$ qui est un opérateur linéaire continu tel que $\tilde{\gamma}(v) = v|_{\Gamma}$ si $v \in H_1 \cap [C(\bar{\Omega})]^d$. Soit $H_{\Gamma} = H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{\gamma} : H_1 \rightarrow H_{\Gamma}$ est linéaire, continu et surjectif.

On rappelle que $\tilde{\gamma}$ est un opérateur compact, c'est-à-dire que pour toute suite bornée $\{v_n\}$ dans H_1 , il existe une sous-suite de $\{v_n\}$ qui est convergente dans $L^2(\Gamma)^d$. Pour chaque élément $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour notée la trace $\tilde{\gamma}(v)$ de v sur Γ . De plus, si $\sigma \in \mathcal{Q}_1$ est régulière, alors on a la formule de Green suivante

$$(\text{Div}\sigma, v)_H + (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v ds, \quad \forall v \in H_1, \quad (2.3)$$

où ds est l'élément de mesure de la surface. Aussi, on note φ la trace d'un élément $\varphi \in H^1(\Omega)$ sur Γ et on rappelle que lorsque $D \in \mathcal{Z}$ est une fonction régulière, la formule de Green suivante est vraie :

$$(\text{div } D, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (D, \nabla \varphi)_H = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \varphi da, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (2.4)$$

où $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est l'opérateur gradient défini par

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq d}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

2.4 Approximation par éléments finis

Notons que l'on peut étendre cette discussion à des domaines de dimensions autres que deux et par souci de simplicité, on suppose que $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ est polygonal et partitionné en un nombre fini de triangles $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h$, tel que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h} \mathcal{T}$ et pour $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T}^h$, alors $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ soit vide, soit un sommet commun, soit un côté commun. Pour un élément quelconque $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h$, on note

$$h_{\mathcal{T}} = \max \{ \|x - y\| ; x, y \in \mathcal{T} \},$$

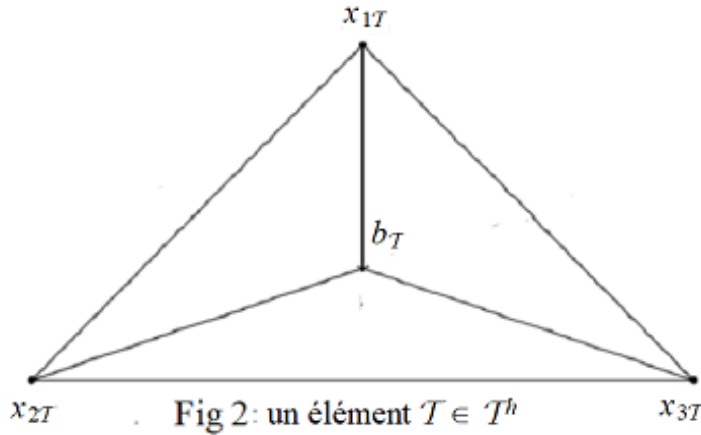
alors le paramètre de discrétisation est défini comme $h = \max \{ h_{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h \}$. Soit $\rho_{\mathcal{T}}$ le diamètre de la plus grande sphère inscrite dans \mathcal{T} .

Définition 2.7 Une famille de triangulation $\{\mathcal{T}^h\}_h$ de $\bar{\Omega}$ est dite régulière

ssi h tend vers zéro et qu'il existe une constante $\rho^* \geq 1$ telle que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \rho^*, \quad \forall T \in \mathcal{T}^h, \quad \forall h.$$

Ici, x_{1T} , x_{2T} , x_{3T} sont les sommets et b_T est le barycentre de T voir Figure 2.



Maintenant, si l'espace $X = H^1(\Omega)$ est à approximer, notons $\{x_i\}_{i=1}^{N_h} \subset \bar{\Omega}$ l'ensemble des sommets des éléments et soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ les fonctions de base d'éléments finis correspondantes qui sont linéaires sur chaque élément T et satisfont

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq N_h. \quad (2.5)$$

Alors l'espace de fonction linéaire par morceaux correspondant est

$$X^h = \text{span} \{\varphi_i, 1 \leq i \leq N_h\}.$$

L'interpolation par éléments finis d'une fonction continue $v \in C(\bar{\Omega})$ est donnée par

$$\Pi^h(v) = \sum_{i=1}^{N_h} v(x_i) \varphi_i.$$

Dans les approximations numériques, nous supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d=2, 3$), est un domaine polygonal/polyédrique et sa frontière Γ est divisée en trois sous-ensembles relativement fermés Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , avec mutuellement intérieurs disjoints. Pour $1 \leq j \leq 3$, on écrit $\Gamma_j = \bigcup_{i=1}^{i_j} \Gamma_j^i$ tel que sur chaque Γ_j^i , le vecteur normal extérieur unitaire soit constant. Soit \mathcal{T}^h une famille régulière de partitions éléments finis de $\bar{\Omega}$ supposée compatible avec la décomposition de Γ , c'est-à-dire si S est un côté tel que pour certains j et i , $S \cap \Gamma_j^i$ contient un point intérieur de S , alors $S \subset \Gamma_j^i$. Notons $\mathcal{T}_{\Gamma_3}^h$ la partition de Γ_3 induite par la triangulation \mathcal{T}^h . Considérons l'espace

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}.$$

Alors l'espace des éléments finis à utiliser est

$$W^h = \left\{ \psi^h \in C(\bar{\Omega}), \psi^h|_{\mathcal{T}} \in P_1(\mathcal{T}), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h, \psi^h = 0 \text{ sur } \Gamma_a \right\}, \quad (2.6)$$

où $P_1(\mathcal{T})$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré global inférieur ou égal à 1 dans \mathcal{T} . Considérons l'espace

$$V = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), u = 0 \text{ on } \Gamma_1, u_\nu = 0 \text{ on } \Gamma_3\}.$$

Alors l'espace des éléments finis à utiliser est

$$V^h = \left\{ \begin{array}{l} w^h \in [C(\bar{\Omega})]^d, w^h|_K \in [P_1(K)]^d, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h, w^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ w_\nu^h|_\Sigma = 0, \forall \Sigma \in \mathcal{T}_{\Gamma_3}^h \end{array} \right\}, \quad (2.7)$$

Nous avons les estimations d'erreur suivantes

$$\left\| v - \Pi^h(v) \right\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad (2.8)$$

$$\left\| v - \Pi^h(v) \right\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq ch \|v\|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad (2.9)$$

$$\left\| v - \Pi^h(\varphi) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq ch \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega), \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| v - \Pi^h(v) \right\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq ch^2 \sum_{i=1}^{i_0} \|v\|_{H^2(\Gamma_i; \mathbb{R}^d)}, \\ \forall v \in L^2(\Gamma), v|_{\Gamma_i} \in H^2(\Gamma_i; \mathbb{R}^d), 1 \leq i \leq i_0. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

CHAPITRE 3

Problème de contact avec frottement pour un matériau électro-élastique

Dans ce Chapitre on va étudier un problème de contact statique avec frottement pour un matériau électro-élastique. Nous nous concentrons sur le contrôle optimal du problème qui consiste à amener le tenseur de contraintes au plus près d'une cible donnée. Pour cela on va appliquer un contrôle sur une portion de la frontière du corps. Enfin, nous proposons un schéma numérique discret pour résoudre le problème.

3.1 Énoncé du problème

Le cadre physique est le suivant. Un corps déformable occupe la configuration de référence $\Omega \subset \mathbb{R}^{d=2,3}$ qui est un domaine borné à frontière Lipschitzienne Γ . Le corps est supposé avoir une loi élastique et le processus est statique. On suppose une partition de Γ en trois parties ouvertes disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , d'une part, et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes disjointes Γ_a et Γ_b d'autre part, telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$. Le corps est serré sur Γ_1 et donc le champ de déplacement s'y annule, tandis que des tractions surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 . Nous supposons

que des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques volumiques de densité q_0 agissent dans Ω . De plus, la condition aux limites de Dirichlet homogène du potentiel électrique est considérée sur Γ_a , tandis que des charges électriques libres de densité q_2 agissent sur Γ_b . Sur Γ_3 le corps est en contact avec une fondation. Le contact est supposé bilatéral et régi par une version de la loi de frottement sec de Coulomb dans laquelle la borne de frottement dépend du glissement. Pour simplifier la notation, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions vis-à-vis de la variable spatiale $x \in \Omega \cup \Gamma$. Sous les hypothèses ci-dessus, la formulation classique de notre problème est la suivante.

Problème 3.1 *Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ des déplacements électriques $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{E}^*\nabla(\varphi) \text{ dans } \Omega, \quad (3.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - \mathcal{C}\nabla(\varphi) \text{ dans } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (3.3)$$

$$\text{div} D - q_0 = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (3.4)$$

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma_1, \quad (3.5)$$

$$\sigma\nu = f_2, \text{ sur } \Gamma_2, \quad (3.6)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a, \quad (3.7)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \text{ sur } \Gamma_b, \quad (3.8)$$

$$D \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad (3.9)$$

$$u_\nu = 0, \text{ sur } \Gamma_3, \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu(|u_\tau|), \\ \sigma_\tau = -\mu(|u_\tau|) \frac{u_\tau}{|u_\tau|} \text{ si } u_\tau \neq 0 \end{cases} \text{ on } \Gamma_3. \quad (3.11)$$

Les équations (3.1)-(3.2) représentent la électro-élasticité. Ici \mathcal{A} est l'opérateur d'élasticité, \mathcal{E} désigne l'opérateur piézoélectrique, \mathcal{E}^* est la transposée de

\mathcal{E} , $-\nabla\varphi$ est le champ électrique, \mathcal{C} représente l'opérateur de permittivité électrique. Les équations (3.3)-(3.4) représentent les équations d'équilibre pour les champs des contraintes et des déplacements électriques, respectivement. Les conditions (3.5)-(3.6) sont les conditions aux limites de déplacement-traction où $\sigma\nu$ représente le vecteur de contrainte de Cauchy. (3.7)-(3.8) représentent les conditions aux limites électriques sur $\Gamma_a \cup \Gamma_b$. Les conditions (3.9)-(3.11) caractérisent les conditions aux limites de contact. La condition (3.9) signifie que la fondation est supposée isolée. L'équation (3.10) représente la condition bilatérale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de contact pendant le processus. On considère ici la loi de frottement sec de Coulomb statique dépendant du glissement. La condition (3.11) stipule que s'il y a de contact, σ_τ ne peut pas dépasser la valeur du coefficient de frottement $\mu(|u_\tau|)$. Si l'inégalité stricte est satisfaite, le glissement ne se produit pas, et lorsque l'égalité est satisfaite, la contrainte de frottement s'oppose au glissement.

3.2 Hypothèses et Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique (3.1)-(3.11), nous avons besoin des notations supplémentaires. On considère l'espace des champs de tenseurs du quatrième ordre

$$\mathbf{Q}_\infty = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, d\}\},$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.12)$$

Soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{w \in H_1; w = 0 \text{ sur } \Gamma_1; w_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\},$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vraie

$$C_K \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{Q}}, \quad \forall v \in V, \quad (3.13)$$

où $C_K > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_1 . Une preuve de l'inégalité de Korn peut être trouvée, par exemple, dans [17, page 79]. Sur l'espace V , on considère le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall u, v \in V,$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée. Il découle de l'inégalité de Korn (3.13) que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V . Donc $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ est un véritable espace de Hilbert. De plus, nous introduisons l'espace fonctionnel

$$W = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\},$$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Puisque $meas(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré suivante est vraie :

$$C_F \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla \varphi\|_H, \quad \forall \varphi \in W, \quad (3.14)$$

où $C_F > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_a . Sur l'espace W , on considère le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \psi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \psi)_H, \quad \forall \varphi, \psi \in W,$$

où la norme associée est notée $\|\cdot\|_W$. Il découle de (3.14) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W . Donc $(W, (\cdot, \cdot)_W)$ est un espace de Hilbert réel. De plus, d'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe deux constantes positives c_0 et \tilde{c}_0 dépendant uniquement du domaine Ω , Γ_1 et Γ_3 telles que

$$(i) \quad \|v\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq c_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V; \quad (3.15)$$

$$(ii) \quad \|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\psi\|_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.16)$$

Dans l'étude du problème mécanique (3.1)-(3.11), on suppose que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{A}\varepsilon \cdot \varepsilon \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(ii) } \mathcal{A} \in \mathbf{Q}_{\infty}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \mathcal{C}(x, w)_i = \sum_{1 \leq j \leq d} \mathcal{C}_{ij}(x) w_j, \\ 1 \leq i \leq d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall w = (w_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(ii) } \mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{ji} \in L^{\infty}(\Omega), 1 \leq i, j \leq d; \\ \text{(iii) Il existe } m_{\mathcal{C}} > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{C}(x, w) \cdot w \geq m_{\mathcal{C}} |w|^2, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall w \in \mathbb{R}^d. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On suppose que la fonction $\mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \mathcal{E}(x, \varepsilon)_i = \sum_{1 \leq j, k \leq d} e_{ijk}(x) \varepsilon_{jk}, \\ 1 \leq i \leq d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \text{(ii) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^{\infty}(\Omega), 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

L'opérateur $\mathcal{E}^* : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est défini par

$$\varepsilon \cdot \mathcal{E}^*(x, w) = \mathcal{E}(x, \varepsilon) \cdot w, \forall w \in \mathbb{R}^d, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.20)$$

On suppose que le coefficient de frottement $\mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\mu > 0 \text{ tel que} \\ |\mu(x, r_1) - \mu(x, r_2)| \leq L_\mu |r_1 - r_2|, \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+, p.p.x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) l'application } x \rightarrow \mu(x, r) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \forall r \in \mathbb{R}^+; \\ \text{(c) l'application } x \rightarrow \mu(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Les densités de forces satisfont

$$(i) f_0 \in H, (ii) f_2 \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d). \quad (3.22)$$

Nous supposons que les densités de charges électriques satisfont

$$(i) q_0 \in L^2(\Omega), (ii) q_2 \in L^2(\Gamma_b). \quad (3.23)$$

On suppose que

$$L_\mu < \frac{m_A}{c_0^2}. \quad (3.24)$$

On va utiliser la fonctionnelle $j_\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_\tau(w, v) = \int_{\Gamma_3} \mu(|w_\tau|) |v_\tau| ds, \quad \forall w, v \in V. \quad (3.25)$$

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'élément $f \in V$ par

$$(f, w)_V = \int_{\Omega} f_0 \cdot w dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot w ds, \quad \forall w \in V. \quad (3.26)$$

Enfin, de (3.23) il existe une fonction $q \in W$ tel que

$$(q, \varphi)_W = \int_{\Omega} q_0 \varphi dx - \int_{\Gamma_b} q_2 \varphi ds, \quad \forall \varphi \in W, \quad (3.27)$$

Aussi, de (3.19)-(3.20), on déduit qu'il existe $L_{\mathcal{E}} > 0$ tel que

$$\|\mathcal{E}\varepsilon\|_H \leq L_{\mathcal{E}} \|\varepsilon\|_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{Q}. \quad (3.28)$$

$$\|\mathcal{E}^*w\|_{\mathcal{Q}} \leq L_{\mathcal{E}} \|w\|_H, \quad \forall w \in H. \quad (3.29)$$

Maintenant, supposons que u et σ sont des fonctions assez régulières satisfaisant (3.1)-(3.11). Soit $w \in V$. En utilisant la formule de Green (2.3) et (3.1), on trouve

$$(\sigma, \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} - \int_{\Omega} f_0 \cdot w dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot w ds, \quad (3.30)$$

et par (3.5) on obtient

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot w ds = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot w ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} \cdot w_{\tau} ds, \quad \forall w \in V. \quad (3.31)$$

De (3.30), (3.31) et (3.26) on déduit que

$$(\sigma, \varepsilon(w) - \varepsilon(u))_{\mathcal{Q}} - \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} \cdot (w_{\tau} - u_{\tau}) ds = (f, w - u)_V. \quad (3.32)$$

D'autre part, nous avons

$$- \int_{\Gamma_3} \sigma_{\tau} \cdot w_{\tau} ds \leq \int_{\Gamma_3} |\sigma_{\tau}| |w_{\tau}| ds,$$

et en tenant compte de la condition (3.11), on conclut que

$$-\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot w_\tau ds \leq \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |w_\tau| ds \leq \int_{\Gamma_3} \mu (|u_\tau|) |w_\tau| ds,$$

et

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot u_\tau ds = - \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |u_\tau| ds = - \int_{\Gamma_3} \mu (|u_\tau|) |u_\tau| ds,$$

ce qui avec (3.25), nous donne

$$-\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (w_\tau - u_\tau) ds \leq j_\tau(w, u) - j_\tau(u, u). \quad (3.33)$$

Alors, de (3.32) et (3.33), on trouve que

$$(\sigma, \varepsilon(w - u))_{\mathcal{Q}} + j_\tau(w, u) - j_\tau(u, u) \geq (f, w - u)_V, \quad \forall w \in V, \quad (3.34)$$

D'autre part, soit $\psi \in W$. En utilisant la formule de Green (2.4) et (3.4), on trouve que

$$(q_0, \psi)_{L^2(\Omega)} + (D, \nabla \psi)_H = \int_{\Gamma_b} q_2 \psi ds,$$

ce qui donne

$$(D, \nabla \psi)_H + (q, \psi)_W = 0, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.35)$$

Finalement, en utilisant (3.1), (3.2), (3.34) et (3.35), on obtient la formulation variationnelle suivante en terme de champ des déplacements et de potentiel électrique uniquement.

Problème 3.2 (PV) *Trouver un champ des déplacements $u \in V$ et un champ de potentiel électrique $\varphi \in W$ tels que*

$$\begin{cases} (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(w - u))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi), \varepsilon(w - u))_{\mathcal{Q}} \\ + j_\tau(w, u) - j_\tau(u, u) \geq (f, w - u)_V, \quad \forall w \in V, \end{cases} \quad (3.36)$$

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\psi)_H + (q, \psi)_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.37)$$

Une solution $\{u, \varphi\}$ qui satisfait (3.35)-(3.37) s'appelle solution faible du problème (3.1)-(3.11).

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons introduire les opérateurs linéaires et continus $\mathcal{S} : W \rightarrow W$, $\mathcal{N} : V \rightarrow W$, $\mathcal{F} : W \rightarrow V$ définis par

$$(\mathcal{S}\varphi, \psi)_W = (\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H, \quad \forall \varphi, \psi \in W, \quad (3.38)$$

$$(\mathcal{N}w, \psi)_W = (\mathcal{E}\varepsilon(w), \nabla\psi)_H, \quad \forall w \in V, \forall \psi \in W, \quad (3.39)$$

$$(\mathcal{F}\psi, w)_V = (\mathcal{E}^*\nabla\psi, \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall w \in V, \forall \psi \in W, \quad (3.40)$$

Après un calcul simple, on trouve que \mathcal{S} est une application linéaire sur W et qui satisfait

$$m_{\mathcal{C}} \|\varphi\|_W^2 \leq (\mathcal{S}\varphi, \varphi)_W, \quad \forall \varphi \in W. \quad (3.41)$$

$$\|\mathcal{S}\varphi\|_W \leq L_{\mathcal{C}} \|\varphi\|_W, \quad \forall \varphi \in W. \quad (3.42)$$

Par conséquent, \mathcal{S} est une bijection dont l'inverse linéaire \mathcal{S}^{-1} satisfait

$$\|\mathcal{S}^{-1}\psi\|_W \leq \frac{1}{m_{\mathcal{C}}} \|\psi\|_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.43)$$

$$m_{\mathcal{C}} \|\mathcal{S}^{-1}\psi\|_W^2 \leq (\mathcal{S}^{-1}\psi, \psi)_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.44)$$

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie par

$$a(w, v) = (\mathcal{A}\varepsilon(w), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{F}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, v)_V, \quad \forall w, v \in V. \quad (3.45)$$

Dans la suite, on utilise la notation suivante

$$\tilde{f} = f - \mathcal{F}\mathcal{S}^{-1}q \quad (3.46)$$

En utilisant les relations (3.38)-(3.40) et (3.45), il s'ensuit que le problème (3.36)-(3.37) est formellement équivalent au problème suivant.

Problème 3.3 *Trouver un champ des déplacements $u \in V$ et un champ de potentiel électrique $\varphi \in W$ tels que*

$$a(u, w - u) + j_\tau(w, u) - j_\tau(u, u) \geq (\tilde{f}, w - u)_V, \quad \forall w \in V, \quad (3.47)$$

$$\varphi = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}u + \mathcal{S}^{-1}q. \quad (3.48)$$

3.3 Existence et unicité de la solution faible

Notre résultat principal d'existence et d'unicité dans cette Section est le suivant.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (3.17)-(3.24), le problème (3.36)-(3.37) a une unique solution.*

Preuve. On utilise (3.38)-(3.40), (3.20) et (3.44), on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, w)_V &= (\mathcal{E}^*\nabla\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} \\ &= (\nabla\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, \mathcal{E}\varepsilon(w))_H \\ &= (\mathcal{E}\varepsilon(w), \nabla\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w)_H \\ &= (\mathcal{N}w, \mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w)_W \\ &= (\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, \mathcal{N}w)_W \geq m_C \|\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w\|_W \end{aligned}$$

ce qui avec (3.45) et (3.17) montre que a satisfait

$$m_{\mathcal{A}} \|w\|_V^2 \leq a(w, w)_V, \quad \forall w \in V. \quad (3.49)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, v)_V &= (\mathcal{E}^*\nabla\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} \\
 &= (\nabla\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, \mathcal{E}\varepsilon(v))_H \\
 &= (\mathcal{E}\varepsilon(v), \nabla\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w)_H \\
 &= (\mathcal{N}v, \mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w)_W \\
 &= (\mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}w, \mathcal{N}v)_W \\
 &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{C}}} \|\mathcal{N}w\|_W \|\mathcal{N}v\|_W
 \end{aligned}$$

ce qui avec (3.45) et (3.17) montre qu'il existe $L_a > 0$ tel que

$$|a(w_1, w_2)| \leq L_a \|w_1\|_V \|w_2\|_V, \quad \forall w_1, w_2 \in V. \quad (3.50)$$

Ainsi, a une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $\eta \in V$, il résulte que la fonctionnelle $\Theta_\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Theta_\eta(v) = j_\tau(\eta, v), \quad \forall v \in V,$$

est proprement convexe et continue. On considère le problème suivant.

Trouver $u_\eta \in V$ tel que

$$a(u_\eta, v - u_\eta) + \Theta_\eta(v) - \Theta_\eta(u_\eta) \geq \left(\tilde{f}, v - u_\eta \right)_V, \quad \text{for all } v \in V. \quad (3.51)$$

Ainsi, à partir d'un résultat standard sur les inéquations variationnelles elliptiques de seconde espèce, voir Proposition 2.6, on en déduit que le problème (3.51) a une unique solution $u_\eta \in V$. Pour continuer, on définit l'opérateur $\Lambda : V \rightarrow V$ par

$$\Lambda(\eta) = u_\eta. \quad (3.52)$$

Soit $\eta_1, \eta_2 \in V$, en utilisant la notation $u_1 = u_{\eta_1}$ et $u_2 = u_{\eta_2}$, alors de (3.51), on obtient

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq j_\tau(\eta_1, u_2) - j_\tau(\eta_1, u_1) + j_\tau(\eta_2, u_1) - j_\tau(\eta_2, u_2),$$

et en gardant à l'esprit (3.45) et (3.49), on obtient

$$m_{\mathcal{A}} \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq c_0^2 L_{\mu} \|\eta_1 - \eta_2\|_V \|u_1 - u_2\|_V,$$

ce qui, avec (3.52) donne

$$\|\Lambda\eta_2 - \Lambda\eta_1\|_V \leq \frac{c_0^2 L_{\mu}}{m_{\mathcal{A}}} \|\eta_1 - \eta_2\|_V.$$

et comme

$$\frac{c_0^2 L_{\mu}}{m_{\mathcal{A}}} = L_0 < 1,$$

on en déduit que Λ est une contraction dans l'espace de Banach V . Il existe donc un unique $\eta^* \in V$, tel que $\eta^* = \Lambda\eta^* = u_{\eta^*}$. Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Théorème 3.1. Soit η^* l'unique point fixe de Λ , soit u_{η^*} l'unique solution du problème (3.51) pour $\eta = \eta^*$ et soit φ_{η^*} tel que

$$\varphi_{\eta^*} = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{N} u_{\eta^*} + \mathcal{S}^{-1} q, \quad (3.53)$$

alors $\{u_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}\}$ est une solution du problème (3.47)-(3.48). L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , l'unicité de la solution du Problème (3.51) et de la définition (3.53). Donc, on en déduit que $\{u_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}\}$ est une solution unique du problème (3.36)-(3.37). Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1. ■

3.4 Le problème du contrôle optimal

Maintenant, on voudrait exercer un contrôle donné f_2 sur Γ_2 pour que la contrainte résultante

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{E}^* \nabla(\varphi), \quad (3.54)$$

soit la plus proche possible d'une cible donnée

$$\sigma_c = \mathcal{A}\varepsilon(u_c) + \mathcal{E}^* \nabla(\varphi_c). \quad (3.55)$$

Ici dans (3.55) (u_c, φ_c) est un élément donné dans $V \times W$.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on en déduit qu'il existe un élément unique $l \in V$ qui satisfait

$$(l, w)_V = \int_{\Omega} f_0 \cdot w dx - (\mathcal{F}\mathcal{S}^{-1}q, w)_V, \forall w \in V. \quad (3.56)$$

Aussi, on peut introduire la fonction $F : L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \rightarrow V$ définie par

$$(F(g), w)_V = \int_{\Gamma_2} g \cdot w da, \forall (g, w) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V. \quad (3.57)$$

Considérons maintenant le problème d'état suivant.

Problème 3.4 (\mathcal{P}_S) Soit $f_2 \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$ un contrôle donné. Trouver un élément $(u, \varphi) \in V \times W$ tel que

$$\begin{cases} a(u, w - u) + j_{\tau}(u, w) - j_{\tau}(u, u) \\ \geq (l + F(f_2), w - u)_V, \forall w \in V, \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\varphi = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{N}u + \mathcal{S}^{-1}q. \quad (3.59)$$

En utilisant le théorème 3.1, on en déduit que pour tout $f_2 \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$ le Problème \mathcal{P}_S a une unique solution $(u, \varphi) \in V \times W$. Ensuite, nous introduisons une fonctionnelle coût $\mathcal{L} : L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \mathcal{L}(g, w, \psi) = \frac{\gamma}{2} \|w - u_c\|_V^2 + \frac{\beta}{2} \|\psi - \varphi_c\|_V^2 + \frac{\delta}{2} \|g\|_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)}^2, \\ \forall (g, w, \psi) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \times W, \end{cases} \quad (3.60)$$

où $\gamma, \beta, \delta > 0$ sont deux constantes positives.

On considère le problème de contrôle optimal suivant.

Problème 3.5 (\mathcal{P}_{OC}) Trouver $(g^*, u^*, \varphi^*) \in \mathcal{W}$ tel que

$$\mathcal{L}(g^*, u^*, \varphi^*) = \min_{(g, u, \varphi) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(g, u, \varphi) \}, \quad (3.61)$$

où

$$\mathcal{W} = \left\{ (f_2, u, \varphi) / (f_2, u, \varphi) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \times W, \text{ tel que } \boxed{3.59} \text{ soit vrai} \right\}.$$

3.4.1 Existence de la solution

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Le problème \mathcal{P}_{OC} a au moins une solution $(g^*, u^*, \varphi^*) \in \mathcal{W}$.*

Preuve. De $\boxed{3.60}$, on déduit qu'il existe une suite $\{(g_n, u_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{W}$ telle que

$$0 \leq \inf_{(g, u, \varphi) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(g, u, \varphi) \} \leq \mathcal{L}(g_n, u_n, \varphi_n) \leq \inf_{(g, u, \varphi) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(g, u, \varphi) \} + \frac{1}{n},$$

ce qui implique que $\{(g_n, u_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \times W$. De plus, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(g_n, u_n, \varphi_n) = \inf_{(g, u, \varphi) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(g, u, \varphi) \}. \quad (3.62)$$

Ainsi, par des arguments de compacité standard, voir Proposition 2.1 et la définition de l'application de trace page 10-11, il s'ensuit qu'il existe $(g^*, u^*, \varphi^*) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \times W$ et une sous-suite de $\{(g_n, u_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, à nouveau notée

par $\{(g_n, u_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que les convergences suivantes soient vérifiées

$$u_n \rightharpoonup u^* \text{ faiblement dans } V \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.63)$$

$$u_n \rightarrow u^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.64)$$

$$u_n \rightarrow u^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.65)$$

$$g_n \rightarrow g^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.66)$$

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi^* \text{ faiblement dans } V \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (3.67)$$

En utilisant (3.58), (3.63), (3.66) et (3.67) nous obtenons

$$\mathcal{L}(g^*, u^*, \varphi^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(g_n, u_n, \varphi_n), \quad (3.68)$$

ce qui, avec (3.62) donne

$$\mathcal{L}(g^*, u^*, \varphi^*) \leq \inf_{(g, u, \varphi) \in \mathcal{W}} \{\mathcal{L}(g, u, \varphi)\}. \quad (3.69)$$

De plus, en utilisant des arguments de semi-continuité standard, voir Proposition 2.7, nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a(u_n, u_n - w) \geq a(u^*, u^* - w)_V. \quad (3.70)$$

En revanche, de (3.21), (3.25) et (3.65), on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [j_\tau(u_n, w) - j_\tau(u_n, u_n)] = j_\tau(u^*, w) - j_\tau(u^*, u^*). \quad (3.71)$$

En utilisant (3.56)-(3.57), (3.63)-(3.64) et (3.66) on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (l + F(g_n), w - u_n)_V = (l + F(g^*), w - u^*)_V. \quad (3.72)$$

De plus, en utilisant (3.59), (3.63) et (3.67), on obtient

$$\varphi^* = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{N} u^* + \mathcal{S}^{-1} q. \quad (3.73)$$

Maintenant, puisque $\{(g_n, u_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{W}$ nous avons

$$\begin{cases} a(u_n, w - u_n)_V + j_\tau(u_n, w) - j_\tau(u_n, u_n) \\ \geq (l + F(g_n), w - u_n)_V, \forall w \in V. \end{cases} \quad (3.74)$$

Passant au limsup lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans (3.74) et en utilisant (3.73), on en déduit que (g^*, u^*, φ^*) est une solution du problème \mathcal{P}_{OC} . ■

3.4.2 Une technique de régularisation

Nous voulons appliquer une technique de régularisation aux problèmes \mathcal{P}_S et \mathcal{P}_{OC} afin d'obtenir des problèmes lisses. Ces problèmes ont un certain intérêt en eux-mêmes et fournissent une approximation de la solution du problème initial. Fixons $\alpha > 0$, on introduit la fonctionnelle régularisée $j_\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z, w \in V$,

$$j_\alpha(z, w) = \int_{\Gamma_3} \mu \left(x, \sqrt[2]{|z_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) \times \left(\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) da. \quad (3.75)$$

Nous avons

$$\begin{cases} \left| \mu \left(x, \sqrt[2]{|z_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) \times \left(\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) - \mu(x, |z_\tau|) |w_\tau| \right| \\ \leq \left| \mu \left(x, \sqrt[2]{|z_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) - \mu(x, |z_\tau|) \right| \left(\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) \\ \quad + \left| \sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha - |w_\tau| \right| \mu(x, |z_\tau|), \end{cases}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \mu \left(x, \sqrt[2]{|z_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) \times \left(\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) - \mu(x, |z_\tau|) |w_\tau| \right| \\ \leq L_\mu \left(\left(\sqrt[2]{|z_\tau|^2 + \alpha^2} - |z_\tau| \right) + \alpha \right) \left(\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) \\ + \left(\left(\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - |w_\tau| \right) + \alpha \right) (L_\mu |z_\tau| + \mu(x, 0)), \end{array} \right.$$

et en utilisant le fait que

$$\sqrt[2]{|w_\tau|^2 + \alpha^2} \leq |w_\tau| + \alpha, \forall w \in V,$$

on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$|j_\alpha(z, w) - j_\tau(z, w)| \leq c\alpha \left[\|w\|_V + \|z\|_V + 1 \right], \forall z, w \in V. \quad (3.76)$$

Maintenant, nous énonçons le problème d'état régularisé suivant.

Problème 3.6 (\mathcal{P}_S^α) Soit $\alpha > 0$. Soit $f_2 \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$ un contrôle donné. Trouver un élément dans $(u, \varphi) \in V \times W$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, w - u) + j_\alpha(u, w) - j_\alpha(u, u) \\ \geq (l + F(f_2), w - u)_V, \text{ for all } w \in V. \end{array} \right. \quad (3.77)$$

$$\varphi = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{N}u + \mathcal{S}^{-1}q. \quad (3.78)$$

Théorème 3.3 Le problème \mathcal{P}_S^α admet une unique solution dans $V \times W$.

Preuve. La preuve peut être obtenue par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.1. ■

Maintenant, nous introduisons un problème de contrôle optimal régularisé comme suit

Problème 3.7 (\mathcal{P}_{OC}^α) Soit $\alpha > 0$. Trouver $(\bar{g}, \bar{u}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{W}^\alpha$ tel que

$$\mathcal{L}(\bar{g}, \bar{u}, \bar{\varphi}) = \min_{(g, u, \varphi) \in \mathcal{W}^\alpha} \{\mathcal{L}(g, u, \varphi)\}, \quad (3.79)$$

où

$$\mathcal{W}^\alpha = \left\{ (f_2, u, \varphi) / (f_2, u, \varphi) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \times W \text{ telque (3.77) soit vrai} \right\}.$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.4 Soit $\alpha > 0$. Le problème \mathcal{P}_{OC}^α a au moins une solution $(\bar{g}, \bar{u}, \bar{\varphi})$.

Preuve. La preuve peut être obtenue par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Théorème 3.2. ■

Nous étudions maintenant la relation entre les solutions du problème \mathcal{P}_S^α et du problème \mathcal{P}_S lorsque α tend vers zéro. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.5 Soit $(f_2^\alpha, u^\alpha, \varphi^\alpha) \in \mathcal{W}^\alpha$ et soit $(f_2, u, \varphi) \in \mathcal{W}$. Si

$$f_2^\alpha \rightharpoonup f_2 \text{ faiblement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0, \quad (3.80)$$

alors,

$$u^\alpha \rightarrow u \text{ fortement dans } V \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.81)$$

$$\varphi^\alpha \rightarrow \varphi \text{ fortement dans } W \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.82)$$

Preuve. En choisissant en (3.77) $w = 0_V$, on en déduit que

$$\|u^\alpha\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} (\|l\|_V + \|F(f_2^\alpha)\|_V), \quad (3.83)$$

qui, avec (3.80) et (3.57) implique que $\{u^\alpha\}_\alpha$ est une suite bornée dans V . Ainsi, en utilisant des arguments de compacité standard, voir Proposition 2.1 et la définition de l'application de trace page 10-11, on en déduit qu'il

existe $u^* \in V$ et une sous-suite de $\{u^\alpha\}_\alpha$, encore notée $\{u^\alpha\}_\alpha$, telles que les convergences suivantes soient vraies

$$u^\alpha \rightharpoonup u^* \text{ faiblement dans } V \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.84)$$

$$u^\alpha \rightarrow u^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.85)$$

$$u^\alpha \rightarrow u^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.86)$$

Puisque (f_2^α, u^α) satisfait

$$\begin{cases} a(u^\alpha, w - u^\alpha) + j_\alpha(u^\alpha, w) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \\ \geq (l + F(f_2^\alpha), w - u^\alpha)_V, \text{ for all } w \in V, \end{cases} \quad (3.87)$$

puis, à partir de (3.80), (3.84)-(3.86) et en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans (3.70)-(3.72), il s'ensuit que (f_2, u^*) satisfait (3.58), ce qui implique que $u^* = u$. Pour continuer, en utilisant (3.59) et (3.87), on obtient

$$\begin{cases} a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \leq j_\alpha(u^\alpha, u) - j_\tau(u, u) \\ + j_\tau(u, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + (F(f_2^\alpha - f_2), u^\alpha - u)_V, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \leq j_\tau(u, u^\alpha) - j_\tau(u, u) \\ + j_\tau(u^\alpha, u) - j_\tau(u^\alpha, u^\alpha) + j_\alpha(u^\alpha, u) - j_\tau(u^\alpha, u) \\ + j_\tau(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) + (F(f_2^\alpha - f_2), u^\alpha - u)_V. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\mathcal{A}} \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq c_0^2 L_\mu \|u^\alpha - u\|_V^2 + \\ j_\alpha(u^\alpha, u) - j_\tau(u^\alpha, u) + j_\tau(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \\ + (F(f_2^\alpha - f_2), u^\alpha - u)_V, \end{array} \right.$$

d'où on obtient

$$(m_{\mathcal{A}} - c_0^2 L_\mu) \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq |j_\alpha(u^\alpha, u) - j_\tau(u^\alpha, u)| + |j_\tau(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha)| \\ + (F(f_2^\alpha - f_2), u^\alpha - u)_V.$$

En gardant à l'esprit (3.76), (3.57), (3.80) et en passant à la limite comme $\alpha \rightarrow 0$ dans la dernière inégalité on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u^\alpha - u\|_V = 0. \quad (3.88)$$

Enfin, puisque le problème \mathcal{P}_S a une solution unique, les arguments ci-dessus appliqués à toutes les sous-séquences de $\{u^\alpha\}_\alpha$ nous amènent à nouveau à la même limite u . Ainsi, on en déduit que la suite entière $\{u^\alpha\}_\alpha$ satisfait (3.81). Enfin, (3.82) est une conséquence de (3.78) et (3.81). ■

Ensuite, nous prouvons des résultats de convergence impliquant les solutions des problèmes \mathcal{P}_{OC}^α et \mathcal{P}_{OC} .

Remarque 3.1 Soit (g^*, u^*, φ^*) une solution du problème \mathcal{P}_{OC} . Alors, g^* minimise la fonctionnelle $\mathcal{J} : L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{J}(g) = \frac{\gamma}{2} \|w - u_{ci}\|_V^2 + \frac{\beta}{2} \|\varphi - \varphi_{ci}\|_V^2 + \frac{\delta}{2} \|g\|_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)}^2, \quad \forall (g, u, \varphi) \in \mathcal{W}. \quad (3.89)$$

Aussi, soit $\alpha > 0$ et soit $(\bar{\varphi}, \bar{u})$ une solution du problème \mathcal{P}_{OC}^α . Alors, \bar{g} mini-

mise la fonctionnelle $\mathcal{J}_\alpha : L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{J}_\alpha(g) = \frac{\gamma}{2} \|w - u_{ci}\|_V^2 + \frac{\beta}{2} \|\varphi - \varphi_{ci}\|_V^2 + \frac{\delta}{2} \|g\|_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)}^2, \quad \forall (g, u, \varphi) \in \mathcal{W}^\alpha. \quad (3.90)$$

Théorème 3.6 *Pour chaque $\alpha > 0$, soit $(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha)$ une solution du problème \mathcal{P}_{OC}^α . Alors, il existe une sous-suite de $\left\{ \left(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha \right) \right\}_{\alpha > 0}$, à nouveau notée $\left\{ \left(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha \right) \right\}_{\alpha > 0}$, et il existe, $(\bar{f}_2, \bar{u}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{W}$ une solution du Problème \mathcal{P}_{OC} , telle que les convergences suivantes soient vérifiées*

$$\bar{u}^\alpha \rightarrow \bar{u} \text{ fortement dans } V \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0, \quad (3.91)$$

$$\bar{\varphi}^\alpha \rightarrow \bar{\varphi} \text{ fortement dans } W \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0$$

$$\bar{f}_2^\alpha \rightharpoonup \bar{f}_2 \text{ faiblement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.92)$$

Preuve. En effet, soit $(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha)$ une solution du problème \mathcal{P}_{OC}^α et soit $(g_2, u^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha) \in \mathcal{W}^\alpha$, alors, de Remarque 3.1, on obtient

$$\mathcal{J}_\alpha(\bar{f}_2^\alpha) \leq \mathcal{J}_\alpha(g_2). \quad (3.93)$$

De plus, en choisissant en (3.77) $w = 0_V$, on en déduit que

$$\|u^\alpha\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} (\|l\|_V + \|F(g_2)\|_V),$$

qui, avec (3.93) et (3.90) implique que $\left\{ \mathcal{J}_\alpha(\bar{f}_2^\alpha) \right\}_\alpha$ est une suite bornée. Par conséquent, $\left\{ \bar{f}_2^\alpha \right\}_\alpha$ et $\left\{ \bar{u}^\alpha \right\}_\alpha$ sont des suites bornées dans $L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)$ et V , respectivement. Ainsi, à partir des arguments de compacité standard, il s'en suit qu'il existe $(\bar{f}_2, \bar{u}) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V$ et une sous-suite de $\left\{ \left(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha \right) \right\}_\alpha$, à nouveau noté $\left\{ \left(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha \right) \right\}_\alpha$, tel que les convergences suivantes soient véri-

fiées

$$\bar{u}^\alpha \rightharpoonup \bar{u} \text{ weakly in } V \text{ as } \alpha \rightarrow 0,$$

$$\bar{f}_2^\alpha \rightharpoonup \bar{f}_2 \text{ weakly in } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ as } \alpha \rightarrow 0.$$

Nous utilisons maintenant des arguments similaires à ceux utilisés dans (3.70)-(3.72) pour voir que (\bar{f}_2, \bar{u}) satisfait (3.58). De plus, en utilisant le théorème 6.6, on a

$$\bar{u}^\alpha \rightarrow \bar{u} \text{ fortement dans } W \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0 \quad (3.94)$$

$$\bar{\varphi}^\alpha \rightarrow \bar{\varphi} \text{ fortement dans } W \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0 \quad (3.95)$$

D'autre part, soit $(\bar{g}_2, \bar{w}, \bar{\psi})$ une solution du problème \mathcal{P}_{OC} , alors

$$\mathcal{L}(\bar{g}_2, \bar{w}, \bar{\psi}) \leq \mathcal{L}(\bar{f}_2, \bar{u}, \bar{\varphi}), \quad (3.96)$$

Maintenant, en utilisant des arguments de convexité, nous obtenons

$$\mathcal{L}(\bar{f}_2, \bar{u}, \bar{\varphi}) \leq \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{L}(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha). \quad (3.97)$$

et considérons la suite $\{(\bar{g}_2, u^\alpha, \varphi^\alpha)\}_\alpha \subset \mathcal{W}^\alpha$, puis, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés en (3.70)-(3.72), on en déduit que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u^\alpha - \bar{w}\|_V = 0.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\varphi^\alpha - \bar{\psi}\|_W = 0.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{L}(\bar{f}_2^\alpha, \bar{u}^\alpha, \varphi^\alpha) &\leq \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{L}(\bar{g}_2, u^\alpha, \varphi^\alpha) \\ &\leq \mathcal{L}(\bar{\varphi}_2, \bar{w}, \bar{\psi}). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Ainsi, de (3.96)-(3.98), il s'ensuit que

$$\mathcal{L}(\bar{\varphi}_2, \bar{w}, \bar{\psi}) = \mathcal{L}(\bar{f}_2, \bar{u}, \bar{\varphi}).$$

On en déduit que $(\bar{f}_2, \bar{u}, \bar{\varphi})$ est une solution du problème \mathcal{P}_{OC} . ■

3.5 Approximation numérique

Nous allons donner une estimation de l'erreur pour le problème (3.36)-(3.37) dans le cadre des éléments finis. Nous supposons que $\{\mathcal{T}^h\}_h$ est une famille de triangulation régulière de $\bar{\Omega}$ voir Section 2.4. Nous allons approcher l'espace V par la famille $\{V_h\}$ des sous-espaces de V donnés par (2.7) et l'espace W par la famille $\{W_h\}$ des sous-espaces de W donnés par (2.6).

Partout dans la suite c désignera une constante générique strictement positive dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre et qui ne dépend pas de h . On considère le problème discret suivant

Problème 3.8 *Trouver un élément $u_h \in V_h$ et un élément $\varphi_h \in W_h$ tels que*

$$\begin{cases} (\mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(w_h - u_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_h), \varepsilon(w_h - u_h))_{\mathcal{Q}} \\ + j_{\tau}(w_h, u_h) - j_{\tau}(u_h, u_h) \geq (f, w_h - u_h)_V, \forall w_h \in V_h, \end{cases} \quad (3.99)$$

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi_h, \nabla\psi_h)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_h), \nabla\psi_h)_H + (q, \psi_h)_W, \forall \psi_h \in W_h. \quad (3.100)$$

Sous les hypothèses du théorème 3.1, le système (3.99)-(3.100) admet une solution unique $(u_h, \varphi_h) \in V_h \times W_h$. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, pour une constante*

$c > 0$ on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_V + \|\varphi - \varphi_h\|_W \leq c \inf_{(w_h, \psi_h) \in V_h \times W_h} (\|u - w_h\|_V + \|\varphi - \psi_h\|_V \\ \quad + \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \left(\|u\|_V^{1/2} + \|\varphi\|_W^{1/2} \right) \|u - w_h\|_V^{1/2} \\ \quad + \|\mu(u_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.101)$$

Preuve. On prend $\psi = \psi_h$ dans (3.37) et on utilise (3.100), on a

$$(\mathcal{C}\nabla(\varphi - \varphi_h), \nabla\psi_h)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u - u_h), \nabla(\psi_h))_H, \quad \forall \psi_h \in W_h,$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{C}\nabla(\varphi - \varphi_h), \nabla(\varphi - \varphi_h))_H - (\mathcal{C}\nabla(\varphi - \varphi_h), \nabla(\varphi - \psi_h))_H \\ \quad = \\ (\mathcal{E}\varepsilon(u - u_h), \nabla(\varphi - \psi_h))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u - u_h), \nabla(\varphi - \varphi_h))_H, \quad \forall \psi_h \in W_h, \end{array} \right. \quad (3.102)$$

D'autre part, on utilise alors (3.36) avec $v = u_h$ et (3.99) pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - u_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi - \varphi_h), \varepsilon(u - u_h))_{\mathcal{Q}} \\ \leq (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - w_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} \\ \quad + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_h), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} + j_\tau(u, u_h) - j_\tau(u, u) \\ \quad + j_\tau(u_h, w_h) - j_\tau(u_h, u_h) + (f, w_h - u_h)_V, \quad \forall w_h \in V_h, \end{array} \right.$$

ce qui avec (3.102), nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - u_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{C}\nabla(\varphi - \varphi_h), \nabla(\varphi - \varphi_h))_H \\ \leq (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - w_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} \\ (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi - \varphi_h), \varepsilon(u - u_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}\varepsilon(u - u_h), \nabla(\varphi - \psi_h))_H \\ \quad - (\mathcal{E}\varepsilon(u - u_h), \nabla(\varphi - \varphi_h))_H \\ \quad + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_h), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} + j_{\tau}(u, u_h) - j_{\tau}(u, u) \\ \quad + (\mathcal{C}\nabla(\varphi - \varphi_h), \nabla(\varphi - \psi_h))_H \\ + j_{\tau}(u_h, w_h) - j_{\tau}(u_h, u_h) + (f, w_h - u)_V, \forall w_h \in V_h, \forall \psi_h \in W_h, \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u - u_h)\|_V^2 + m_{\mathcal{C}} \|\varphi - \psi_h\|_W^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4, \quad (3.103)$$

où

$$R_1 = (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - w_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{C}\nabla(\varphi - \varphi_h), \nabla(\varphi - \psi_h))_H \\ + (\mathcal{E}\varepsilon(u - u_h), \nabla(\varphi - \psi_h))_H,$$

$$R_2 = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_h), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} + j_{\tau}(u, u_h) - j_{\tau}(u, u) - (f, w_h - u)_V,$$

$$R_3 = j_{\tau}(u, u_h) - j_{\tau}(u_h, u_h) + j_{\tau}(u_h, u) - j_{\tau}(u, u),$$

$$R_4 = j_{\tau}(u_h, w_h) - j_{\tau}(u, w_h) + j_{\tau}(u, u) - j_{\tau}(u_h, u).$$

Estimons chacun des quatre termes. Pour le premier terme, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} |R_1| \leq M_1 \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V \\ \quad + M_1 \|\varphi - \varphi_h\|_W \|\varphi - \psi_h\|_W \\ \quad + M_1 \|u - u_h\|_V \|\varphi - \psi_h\|_W. \end{array} \right. \quad (3.104)$$

Le second terme R_2 par une simple estimation, nous avons

$$\begin{aligned} |R_2| \leq & \| \mathcal{A}\varepsilon(u) \|_{\mathcal{Q}} \| u - w_h \|_V + \| \mathcal{E}^* \nabla(\varphi_h) \|_{\mathcal{Q}} \| u - w_h \|_V \\ + & \| \mu(u_\tau) \|_{L^2(\Gamma_3)} \| u - w_h \|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Comme

$$R_3 = \int_{\Gamma_3} [(\mu(u_\tau) - \mu(u_{h\tau})) (|u_{h\tau}| - |u_\tau|)] ds,$$

on a

$$|R_3| \leq \int_{\Gamma_3} L_\mu |u_\tau - u_{h\tau}| |u_\tau - u_{h\tau}| ds.$$

Et ainsi

$$|R_3| \leq c \|u - u_h\|_V^2. \quad (3.106)$$

De la même manière, on a

$$|R_4| \leq c \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.107)$$

En utilisant les bornes (3.104)-(3.107) dans (3.103) et en appliquant l'inégalité élémentaire

$$\lambda_1 \lambda_2 \leq \lambda_3 \lambda_1^2 + \frac{1}{4\lambda_3} \lambda_2^2, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0,$$

on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 + \|\varphi - \varphi_h\|_W^2 &\leq c(\|u - w_h\|_V^2 + \|\varphi - \psi_h\|_V^2 \\ + \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^2 + (\|u\|_V + \|\varphi\|_W) \|u - w_h\|_V \\ + \|\mu(u_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}). \end{aligned} \right.$$

donc l'inégalité (3.101) est vérifiée. ■

L'inégalité (3.101) est la base de l'analyse de convergence. On peut amé-

liorer l'estimation (3.101) sous l'hypothèse de régularité

$$\sigma_\tau \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d). \quad (3.108)$$

Dans ce cas, on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir

$$R_2 = \int_{\Gamma_3} [\sigma_\tau \cdot (v_{h\tau} - u_\tau) + \mu(u_\tau)(|v_{h\tau}| - |u_\tau|)] da. \quad (3.109)$$

Nous pouvons donc utiliser

$$|R_2| \leq \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|\mu(u_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|u_\tau - v_{h\tau}\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \quad (3.110)$$

Il en résulte le théorème suivant.

Théorème 3.8 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, supposons en plus $\sigma_\tau \in (L^2(\Gamma_3))^d$. Alors pour une constante $c > 0$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_V + \|\varphi - \varphi_h\|_W \leq c \inf_{(w_h, \psi_h) \in V_h \times W_h} (\|u - w_h\|_V \\ \quad + \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|\varphi - \psi_h\|_W \\ \quad + \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2} + \|\mu(u_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} \right) \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2} \end{array} \right. \quad (3.111)$$

Pour dériver une estimation d'erreur, nous devons faire des hypothèses supplémentaires sur la régularité de la solution. Nous présentons un exemple de résultat. On suppose que

$$u \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \varphi \in H^2(\Omega), u|_{\Gamma_3} \in H^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d). \quad (3.112)$$

Nous utilisons des éléments linéaires pour l'espace des éléments finis V_h . Soit $\Pi^h u \in V_h$ l'interpolant éléments finis de la solution u et soit $\Pi^h \varphi \in W_h$ l'interpolant éléments finis de la solution φ . Alors de (3.111), on obtient

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V + \|\varphi - \varphi_h\|_W &\leq c \left\| u - \Pi^h u \right\|_V + \left\| u - \Pi^h u \right\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \left\| \varphi - \Pi^h \varphi \right\|_W \\ &\quad + c \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|\mu(u_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} \right)^{1/2} \left\| u - \Pi^h u \right\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{aligned}$$

La théorie standard de l'interpolation par éléments finis, voir Section 2.4, nous donne

$$\begin{aligned} \left\| u - \Pi^h u \right\|_V &\leq ch |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \quad \left\| \varphi - \Pi^h \varphi \right\|_W \leq ch |\varphi|_{H^2(\Omega)}, \\ \left\| u - \Pi^h u \right\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} &\leq ch^2 |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, sous l'hypothèse de régularité [\(3.112\)](#), nous avons l'estimation d'erreur suivante

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_V + \|\varphi - \varphi_h\|_W \leq ch(|u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} + |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} + |\varphi| \\ \quad + \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|\mu(u_\tau)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right)^{1/2} |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{cases}$$

Conclusion et Perspectives

Conclusion : Dans ce mémoire nous avons étudié un problème de contact bilatéral avec une version statique de la loi de frottement de Coulomb pour un corps electro-élastique. Nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution faible. Le contrôle optimal de ce problème a été étudié et l'approximation numérique a été réalisée dans le cadre des éléments finis.

Perspectives :

1. On pourrait considérer la loi de comportement électro-thermoélastique ou thermo-élastique dans les travaux future, ce qui représente une continuité naturelle de ce mémoire.
2. On pourrait aussi considérer le cas dynamique ou le cas quasistatique avec d'autres lois de contact.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis*, 48(2002), 1107-1135.
- [2] M. Barboteu, M. Sofonea, Analysis and numerical approach of a piezoelectric contact problem, *Ann. AOSR, Ser. Math. Appl.* 1 (2009) 7–30.
- [3] R.C. Batra and J.S. Yang, Saint-Venant’s principle in linear piezoelectricity, *Journal of Elasticity*, 38, (1995) 209-218.
- [4] K. Atkinson, endall, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, DOI : 10.1007/978-1-4419-0458-4.
- [5] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [7] Fichera G (1964), Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *mem. Accas. Naz. Lincei, S. N VIII, Vol. VII, Sez. I*, 5, 91–140.
- [8] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity* (American Mathematical Society–International

- Press 2002).
- [9] W. Han and M. Sofonea, Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance, *Applicationes Mathematicae* 26, 415-435, (1999).
 - [10] Abderrezak Kasri and Arezki Touzaline, Optimal control of a contact problem with slip dependent friction, *Annals of West University of Timisoara Mathematics and Computer Science* 58, 1, (2022), 18– 38.
 - [11] M. Kabbadj and El H. Essoufi. Frictional contact problem in dynamic electroelasticity. *Glasnik Matemati2c7cki*, 43(63) :137–158, 2008.
 - [12] J. L. Lions, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.
 - [13] J. L. Lions (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod et Gauthier-Villars.
 - [14] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for a frictional contact problem with normal compliance, *Applied Mathematics and Optimization* (2017).
 - [15] R. Mignot, Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques, *J. Fun. Anal.*, 22 (1976), 130-185.
 - [16] R. Mignot and J.-P. Puel, Optimal control in some variational inequalities, *SIAM, J. Control Optim.*, 22 (1984) 466-476.
 - [17] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
 - [18] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
 - [19] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, *Atti della Societ'a Italiana per il Progresso delle Scienze* (1933).
 - [20] M. Shillor, M. Sofonea, and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasi-static Contact*, Springer, Berlin, 2004.
 - [21] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, *Pure Appl. Math.*, vol. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

- [22] M. Sofonea, K. Kazmi, M. Barbotou, W. Han, Analysis and numerical solution of a piezoelectric frictional contact problem, *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 4483–4501.
- [23] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, vol. 31. No. 4 (2015), 1-10, DOI : 10. 1007/s10255-015-0519-8.