

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم  
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2023/2024.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**Application de la théorie de semi groupes d'opérateurs  
pour étudier l'existence et l'unicité de quelques  
problèmes mathématiques**

Option : ANEDP

Par : Chétioui Sofia

Encadré par : Leulmi Soumya

M. C. A U. 20 Aout 1955, SKIKDA

Devant le jury :

Président : Bouakkaz Ahlème

M. C. B U. 20 Aout 1955, SKIKDA

Examineur: *Lalouch abdillahl*

M. A. A U. 20 Aout 1955, SKIKDA

Année : 2023/2024

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Notations générales</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Les espaces de Sobolev . . . . .	1
1.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ : . . . . .	1
1.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ : . . . . .	2
1.2 Quelques inégalités utiles . . . . .	3
1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	3
1.2.2 Inégalité de Young . . . . .	3
1.2.3 Inégalité de Holder . . . . .	4
1.2.4 Inégalité de Poincaré . . . . .	4
1.3 Rappel sur les opérateurs : . . . . .	4
1.3.1 Opérateurs $m$ -dissipatifs . . . . .	5
1.4 Semi groupe . . . . .	5
1.4.1 Définitions semi groupe fortement continue . . . . .	5

## Table des matières

---

1.4.2	Définitions Générateur infinitésimal d'un $C_0$ -semi groupe	6
1.4.3	Théorème de Hille-Yosida . . . . .	7
1.4.4	Théorème de Lumer-Phillips . . . . .	8
1.4.5	Le théorème de Lax-Milgram . . . . .	8
1.5	Problème de Cauchy abstrait . . . . .	9
1.5.1	Equation d'évolution . . . . .	9
1.5.2	L'existence de la solution . . . . .	9
1.5.3	L'unicité de la solution . . . . .	11
1.5.4	Régularité des solutions . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Existence et unicité de quelque problème mathématique par les semi groupe</b>	<b>13</b>
2.1	Système linéaire de Timoshenko avec un retard . . . . .	13
2.1.1	position du problème : . . . . .	14
2.1.2	Existence et unicité : . . . . .	15
2.1.3	la régularité de la solution . . . . .	30
	<b>Conclusion général</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

---

## Notations générales

$X$	Espace de Banach.
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires continues de $X$ à valeurs dans $Y$ .
$\ \cdot\ $	Norme de $X$ .
$I$	L'opérateur identité sur $X$ .
$D(A)$	Le domaine de définition de l'opérateur linéaire $A$ .
$H^1(R); H_0^1(R)$	Espaces de Sobolev.
$\langle \cdot \rangle$	Désigne le produit scalaire.
$ImA$	L'image de l'opérateur $A$ .
$m$ -dissipatif	Maximal dissipatif.
$A$	Opérateur.
$\partial$	L'opérateur de différentiation partielle.
$L^1(R)$	Espaces vectoriel des fonctions sommables sur l'ensemble $R$ .
$L^2(R)$	Espace vectoriel des fonctions de carré sommables sur l'ensemble $R$ .
$\Delta$	Le laplacien.
$\nabla$	Le gradient de la fonction $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T$ .
$C(I; E)$	La famille des fonctions holderiennes sur $I$ d'exposant $E$ .

**L** Beaucoup de phénomènes rencontrés en nature ont trouvé dans la théorie des équations ou des systèmes différentielles.

Dans notre mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de quelques problèmes de telles équations.

La théorie de semi groupe est l'un des outils mathématiques les plus importants qui donne une réponse à notre questions.

Cette théorie devient un moyen indispensable dans beaucoup de problèmes de l'analyse moderne telles ,équation de schrodinger, l'équation d'évolution et les système de Timoshenko.

La théorie des semi groupe d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach a commencé au début de 19<sup>ème</sup> siècle. Elle a connu ses premiers développements grâce aux travaux de Yosida en 1948 avant d'atteindre son sommet avec l'édition de "semigroups and functional analysis" de Carl Einar Hille et Ralph Saul Phillips en 1957.

Après ce bref historique sur les  $C_0$ -semi groupe, le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de l'équation

Dans les années (1970 – 1980) et grâce aux efforts de plusieurs écoles, la théorie a atteint un certain degré de perfection. Aujourd'hui les semi-

groupes sont présents dans la majorité des disciplines mathématique. On trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement au domaines classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques mais elles deviennent un outil très puissant dans la résolution des équation intégro-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie.

En utilisant la théorie de semi groupe plus précisément le théorème du lumer philips. On écrit les problèmes précédent sous forme d'un problème de Cauchy abstrait puis on utilise les semi groupes.

Dans ce esprit ce travail est composé de trois chapitre.

# CHAPITRE 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les espaces de Sobolev et les résultats de quelques inégalités, qu'on utilisera ultérieurement. Aussi, nous donnons brièvement, les définitions et quelques lemmes qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail.

## 1.1 Les espaces de Sobolev

### 1.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ :

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

**Définition 1.1** [3] L'espace de Sobolev, noté  $W^{1,p}(\Omega)$ , est constitué des fonctions de  $L^p(\Omega)$  dont la dérivée au sens des distributions, s'identifie à une fonc-

tion de  $L^p(\Omega)$ . La définition précédente s'écrit donc comme ceci :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_I u \dot{\varphi} = \int_I g \varphi, \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

Pour  $p = 2$ , il est d'usage de remplacer la notation  $W^{1,2}(\Omega)$  par  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 1.1** 1. L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme définie par :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

est un espace de Banach.

2. L'espace  $H^1(\Omega)$ , muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2},$$

est un espace de Hilbert.

**Corollaire 1.1** soient  $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$  Alors  $uv \in W^{1,p}(\Omega)$

et

$$(uv)' = u'v + u v'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_x^y u v', \forall x, y \in \bar{I}.$$

### 1.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ :

**Définition 1.2** [3] Etant donné  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . On note  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$  l'espace  $W_0^{1,p}$  est muni de la norme introduite par  $W^{1,p}$ ; l'espace  $H_0^1$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial I$ . Cette théorème explique le rôle important joué par l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . En effet, les équations aux dérivées partielles sont couplées avec des conditions aux limites, c'est à dire que la valeur de  $u$  est prescrite sur  $\partial I$ .*

## 1.2 Quelques inégalités utiles

### 1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Définition 1.3** [3] Soit  $H$  un espace vectoriel. Un produit scalaire  $(u, v)$  est une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, définie positive [i.e.  $(u, v) \geq 0, \forall u \in H$  et  $(u, u) > 0$  si  $u \neq 0$ ].

Donc, l'espace  $H$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.2** [3] *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :*

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

### 1.2.2 Inégalité de Young

**Proposition 1.3** [3] *Soient  $p$  et  $q$  deux réels vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors :*

$$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f^p| dx + \frac{1}{q \cdot \varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g^q| dx.$$

Si  $p = q = 2$ , on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f^2| dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g^2| dx.$$

### 1.2.3 Inégalité de Holder

**Proposition 1.4** [3] Soient  $p$  et  $q$  deux réels vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ , alors :

$$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) : \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \text{ et } f \cdot g \in L^1$$

### 1.2.4 Inégalité de Poincaré

**Proposition 1.5** [3] On suppose que  $\Omega$  est borné. Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $|\Omega|$ ) telle que :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \|u'\|_{L^p} \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la quantité  $\|u'\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme de  $W^{1,p}$ .

## 1.3 Rappel sur les opérateurs :

**Définition 1.4** Une application  $A : X \longrightarrow X$ ; où  $X$  espace vectorielle normé, est dit opérateur linéaire si et seulement si  $A$  satisfait les deux conditions suivantes :

1. Additivité :

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad \forall x, y \in H;$$

2. Homogénéité :

$$T(\lambda x) = \lambda \cdot Tx \quad \forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Définition 1.5** L'opérateur  $T$  défini sur un espace de Hilbert est dit borné s'il existe un  $C > 0$  tel que

$$\|Tx\|_H \leq C \|x\|_H \quad \forall x \in H.$$

On note par  $\mathcal{L}(H)$  l'espace des opérateurs linéaires bornés.

**Théorème 1.2** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  la norme de  $T$  est donnée par :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup \{ \|Tx\|_H, x \in H, \|x\|_H = 1 \}.$$

### 1.3.1 Opérateurs m-dissipatifs

**Définition 1.6** Un opérateurs linéaire non borné dans  $H$  est un couple  $(A, D(A))$  où  $D(A)$  un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $A$  est une application linéaire de  $D(A)$  dans  $H$ . Le sous-espace  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .

**Définition 1.7** Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné dans  $H$  est dissipatif si

$$\forall v \in D(A), (Av, v) \leq 0.$$

**Définition 1.8** Un opérateur  $(A, D(A))$ , linéaire non borné dans  $H$ , est m-dissipatif si :

1.  $A$  est dissipatif ,
2.  $\text{Im}(I - A) = H$  ; e

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u - Au = f.$$

## 1.4 Semi groupe

### 1.4.1 Définitions semi groupe fortement continue

Soit  $X$  un espace de Banach réel ou complexe muni d'une norme notée  $\|\cdot\|_x$ .

**Définition 1.9** Une famille d'opérateurs  $(T(t))_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{L}(X)$  est un semi-groupe fortement continu sur  $X$  lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $T(0) = I_X$ , où  $I_X$  est l'opérateur identique de  $X$  dans  $X$ ,
2.  $T(t+s) = T(t)T(s)$  pour tout  $t \geq 0$  et tout  $s \geq 0$ ,
3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$  pour tout  $x \in X$ .

**Proposition 1.6** Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi groupe fortement continue sur  $X$ , alors il existe des constantes  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $M \geq 1$  telles que :

$$\exists \omega \geq 0, \exists M \geq 1 \text{ tels que } \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \text{ pour } \forall t \geq 0.$$

**Définition 1.10** (Semi groupe de contraction) Si  $\omega = 0$  le semi-groupe est dit uniformément borné. Si de plus

$M = 1$  le semi-groupe est dit de contraction. Un semi-groupe de contraction  $(T(t))_{t \geq 0}$  vérifie :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0.$$

### 1.4.2 Définitions Générateur infinitésimal d'un $C_0$ -semi groupe

Soit  $X$  un espace de Banach.

**Définition 1.11** [6] Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi groupe sur  $X$ , on appelle générateur infinitésimale du semi groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  l'opérateur  $A$  définie par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$
$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}. \text{ pour tout } x \in D(A).$$

**Théorème 1.3** [6] Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi groupe sur  $X$  et  $A$  le générateur infinitésimal du  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Pour tout  $x \in X$ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x.$$

2) Pour tout  $x \in X$  et tout  $t > 0$  :

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A) \text{ et } A \left( \int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x.$$

3) Si  $x \in D(A)$  alors :

$$T(t)x \in D(A) \text{ et } \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4) Si  $x \in D(A)$  alors  $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\sigma)Ax \, d\sigma = \int_s^t AT(\sigma)x \, d\sigma.$

5) l'opérateur  $A$  est un opérateur fermé à domaine dense dans  $X$ .

6) soit  $B$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , Si  $A = B$  alors  $S(t) = T(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

### 1.4.3 Théorème de Hille-Yosida

On introduit maintenant un résultat très important concernant les semi-groupe, il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateur infinitésimal.

**Théorème 1.4** Un opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow X$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  si et seulement

---

si :

1)  $A$  est un opérateur fermé et  $\overline{D(A)} = X$ .

2) Il existe  $\omega \geq 0$  et  $M \geq 1$  telle que  $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$  et pour  $\lambda \in \Lambda_\omega$ , on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

#### 1.4.4 Théorème de Lumer-Phillips

**Théorème 1.5** Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur tel que  $\overline{D(A)} = H$  alors  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe de contraction si et seulement si

- $A$  est dissipatif
- 1. il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$ . ( $A$  est maximal)

#### 1.4.5 Le théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et dérivées partielles linéaires.

**Définition 1.12** soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire :

$$a(u, v) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$$

**Définition 1.13** soit  $a(u, v)$  continue s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H,$$

**Définition 1.14** soit  $a(u, v)$  coercive s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$a(u, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

**Théorème 1.6** soit  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $\varphi \in H$  il existe  $u \in H$  unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

## 1.5 Problème de Cauchy abstrait

Dans cette section, on étudie des résultats d'existence et d'unicité de solution du problème de Cauchy linéaire abstrait homogène et non homogène.

### 1.5.1 Equation d'évolution

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où  $u = u(t)$ ,  $A : X \rightarrow X$  est un opérateur d'un espace de Banach  $X$  vers  $X$ ,  $x$  est la donnée initiale et  $f$  est une application dans  $X$ .

**Définition 1.15** [6] Le problème  $(P_1)$  est appelé problème de Cauchy non homogène. Si  $f = 0$ , on a :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

C'est un problème de Cauchy homogène.

### 1.5.2 L'existence de la solution

**Théorème 1.7** [6] Soit  $A$  un opérateur linéaire sur un espace de Banach  $X$ . Si  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ , alors le problème  $(P_2)$  possède une solution unique  $u(t) = T(t)u_0$ .

**Définition 1.16** [6] (**solution forte**) une fonction  $u$  est appelée solution forte du problème  $(P_1)$  si :

- 1)  $u \in C([0, +\infty[, D(A))$  c-à-d  $u$  est une fonction continue à valeurs dans  $D(A)$  par rapport à la norme du graphe.
- 2)  $u \in C^1([0, +\infty[, X)$  c-à-d  $u$  est continument dérivable tant que fonction à valeurs de  $X$ .
- 3)  $\frac{du}{dt} = Au + f$  et  $u(0) = u_0$  c-à-d  $u$  vérifie l'équation et la condition initiale du problème  $(P_1)$ .

**Définition 1.17** [6] (**solution faible**) On dit que  $u$  est une solution faible du  $(P_1)$  si  $u \in C^0([0, +\infty[, X)$  il existe une suite  $(u_n)_n$  tel que :

$$(u_n)_n \subset C^0([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, X)$$

et

$$u_n \rightarrow u, \quad \frac{du_n}{dt} - Au_n \rightarrow f$$

et

$$u_n(0) \rightarrow u_0.$$

**Remarque 1.1** [6] Toute solution forte est une solution faible.

**Théorème 1.8** [6] Si  $f \in C^1([0, +\infty[, X)$  et  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$ . Alors, le problème  $(P_1)$  admet une solution forte s'écrit par :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

**Proposition 1.7** Soit  $(A, D(A))$  le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , alors pour tout  $x \in X$ , la fonction

$$u : t \mapsto u(t) = T(t)x$$

est l'unique solution généralisée du problème  $(P_2)$ .

---

**Théorème 1.9** Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ,

Soit  $f \in L^1(0, T, X)$  continue sur  $]0, T[$  et soit :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Le problème  $(P_1)$  admet une solution  $u$  sur  $[0, T[$  pour tout  $x \in D(A)$ , si l'une des condition suivante est satisfaite :

i)  $v(t)$  est continument différentiable sur  $]0, T[$ .

ii)  $v(t) \in D(A)$  pour  $0 < t < T$  et  $Av(t)$  est continue sur  $]0, T[$ .

Si le problème  $(P_1)$  admet une solution  $u$  sur  $[0, T[$  pour certains  $x \in D(A)$ , alors  $v$  satisfait à la fois (i) et (ii).

**Corollaire 1.2** Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .

Si  $f(s)$  est continument différentiable sur  $[0, T]$ , alors le problème  $(P_1)$  admet une solution  $u$  sur  $[0, T[$  pour tout  $x \in D(A)$ .

**Corollaire 1.3** Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ,

soit  $f \in L^1(0, T, X)$  une fonction continue sur  $]0, T[$ . Si  $f(t) \in D(A)$  pour  $0 < t < T$  et  $Af(t) \in L^1(0, T, X)$ , alors pour tout  $x \in D(A)$  le problème  $(P_1)$  admet une solution  $u$  sur  $[0, T[$ .

### 1.5.3 L'unicité de la solution

**Théorème 1.10** Si  $A$  est un générateur infinitésimale d'un  $C_0$ -semi groupe  $(s(t))_{t \geq 0}$  et si  $u$  une solution forte du problème  $(P_1)$ , alors :

$$u(t) = s(t)u_0 + \int_0^t s(t-s)f(s)ds.$$

### 1.5.4 Régularité des solutions

On constate que la régularité est étroitement liée au choix de la condition initiale ou fonction du domaine  $A$  de définition il est donc naturel de penser qu'en imposant plus de "régularité" à  $u_0$  on obtienne plus de régularité sur les solutions.

Plus précisément, on définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}), Av \in D(A^{k-1})\}, \quad k \text{ entier } \geq 2.$$

on peut vérifier aisément que  $D(A^k)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^k (A^j u, A^j v);$$

## CHAPITRE 2

# Existence et unicité de quelque problème mathématique par les semi groupe

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et unicité de quelques problèmes de mathématiques tel que le système de Timoshenko et le système de poreux-élastique amorti basé sur la théorie des semi groupes et l'étude du problème de Cauchy abstrait .

### **2.1 Système linéaire de Timoshenko avec un retard**

dans cette section nous considérons un système thermoélastique linéaire de dimension 1 de type timoshenko avec un amortissement par frottement linéaire et un retard distribué agissant sur l'équation de déplacement transversal où le flux thermique est donné par la loi de catteneo

### 2.1.1 position du problème :

considérons le système linéaire de timoshenko avec un retard suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - k(\varphi_x + \psi)_x(x, t) + \mu_1 \varphi_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \varphi_t(x, t - s) ds = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + k(\varphi_x + \psi)(x, t) + \delta \theta_x(x, t) = 0 \\ \rho_3 \theta_t(x, t) + q_x(x, t) + \delta \psi_{tx}(x, t) = 0 \\ \tau q_t(x, t) + \beta q(x, t) + \theta_x(x, t) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$ ;

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), q(x, 0) = q_0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

ou  $x \in (0, 1)$ .

et les conditions aux limites suivants

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0 \quad \text{où } t \in (0, \infty) \quad (2.3)$$

la fonction historique :

$$\varphi_t(x, -t) = f_0(x, t)$$

où  $\varphi(x, t)$  est le déplacement transversal de la poutre

$\psi(x, t)$  est l'angle de rotation

$\theta(x, t)$  est la différence de température

$q(x, t)$  est le flux de la chaleur

les coefficients  $\rho_1, \rho_2, b, k, \delta, \beta, \mu_1$  sont des constantes positives

et  $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}c$  est une fonction bornée où  $\tau_1, \tau_2$  sont deux nombres réels satisfaisants  $0 \preceq \tau_1 \prec \tau_2$

le parametre  $\tau$  est le temps de relaxation décrévants le décalage temporel dans la reponse du flux thermique à un gradient de temperature

### 2.1.2 Existence et unicité :

Tout d'abord; on va introduire une certaine transformation et annoncer l'hypothèse nécessaire dans notre travail , après on va utilisé la théorie du semi groupe pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème

– on introduire la nouvelle variable suivante :

$$z(x, \rho, s, t) = \varphi_t(x, t - \rho s) \quad \text{tq : } x \in (0, 1), \rho \in (0, 1), s \in (\tau_1, \tau_2), t \in (0, \infty) \quad (2.4)$$

on peut vérifier que  $z$  satisfait :

$$sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0, \text{ dans } (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty)$$

en effet soient  $x \in (0, 1), \rho \in (0, 1), s \in (\tau_1, \tau_2), t \in (0, \infty)$

$$z_t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial (t - \rho s)} \frac{\partial (t - \rho s)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial (t - \rho s)}$$

d'autre part , on a :

$$z_\rho = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial (t - \rho s)} \frac{\partial (t - \rho s)}{\partial \rho} = -s \frac{\partial \varphi_t}{\partial (t - \rho s)}$$

alors :

$$sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = s \frac{\partial \varphi_t}{\partial (t - \rho s)} - s \frac{\partial \varphi_t}{\partial (t - \rho s)} = 0$$

donc on à :

$$sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty)$$

on voit pour  $\rho = 1$

$$z(x, 1, s, t) = \varphi_t(x, t - \tau), \quad x \in (0, 1), \quad s \in (\tau_1, \tau_2), \quad t \in (0, \infty)$$

donc le problème(2.1) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \varphi_t(x, t - s) ds = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0 \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{tx} = 0 \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 \\ sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0 \\ z(x, 0, s, t) = \varphi_t \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où  $x \in (0, 1), \rho \in (0, 1), s \in (\tau_1, \tau_2), t \in (0, \infty)$

avec les condition initiale et les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, 1) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), q(x, 0) = q_0(x) \quad x \in (0, 1) \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0 \quad \text{ou } t \in (0, \infty) \\ z(x, \rho, s, 0) = f_0(x, \rho s) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

**hypothèse :**

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1 \quad (2.7)$$

pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème on utilise la théorie du semi-groupe ; on réécrit le problème sous la forme de cauchy abstrait c-à-d :

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

et on prouve que  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi groupe .pour cela, en utilisant le théorème de Lumer-Phillips, on montre que  $A$  est maximal et dissipatif.

Chapitre 2. Existence et unicité de quelque problème mathématique par les semi groupe

---

soit :  $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta, q, z)^t$

on pose :  $u = \varphi_t$  et  $v = \psi_t$

alors :  $u_t = \varphi_{tt}$  et  $v_t = \psi_{tt}$

donc :  $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^t$  représente la solution du problème (2.5)-  
(2.6)

telsque, d'après (2.5) on a :

$$\varphi_{tt} = u_t = \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}\varphi_t - \frac{1}{\rho_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\varphi_t(x, t - s)ds$$

et

$$\psi_{tt} = v_t = \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x$$

et

$$\theta_t = \frac{-1}{\rho_3}q_x - \frac{\delta}{\rho_3}\psi_{tx}$$

et

$$q_t = -\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x$$

et

$$z_t(x, \rho, s, t) = \frac{-1}{s}z_\rho(x, \rho, s, t)$$

alors le système (2.5) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_t = u \\ u_t = \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}u - \frac{1}{\rho_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)z(x, 1, s)ds \\ \psi_t = v \\ v_t = \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ \theta_t = \frac{-1}{\rho_3}q_x - \frac{\delta}{\rho_3}v_x \\ q_t = -\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x \\ z_t = \frac{-1}{s}z_\rho \end{array} \right. \quad (2.8)$$

on trouve :

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$$

telque :

$$A\Phi = \begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}u - \frac{1}{\rho_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)z(x, 1, s)ds \\ v \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ \frac{-1}{\rho_3}q_x - \frac{\delta}{\rho_3}v_x \\ -\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x \\ \frac{-1}{s}z_\rho \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

et on a  $\Phi(0) = (\varphi(0), u(0), \psi(0), v(0), \theta(0), q(0), z(0))^T = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0, f_0)^t$

on pose  $\phi(0) = \phi_0$

Donc , notre problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = A\phi \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

on considère les espaces suivants :

$$L_*^2(0, 1) = \left\{ w \in L^2(0, 1); \int_0^1 w(s)ds = 0 \right\}$$

$$H_*^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap L_*^2(0, 1)$$

$$H_*^2(0, 1) = \{ w \in H^2(0, 1); w_x(0) = w_x(1) = 0 \}$$

l'espace H est définie par :

$$H = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times L^2((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))$$

Chapitre 2. Existence et unicité de quelque problème mathématique par les semi groupe

---

il est facile de prouver que  $H$  est un espace de hilbert muni du produit scalaire suivant :

pour tout  $\Phi, \bar{\Phi} \in H$  telque :  $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta, q, z)^t$  et  $\bar{\Phi} = (\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_t, \bar{\psi}, \bar{\psi}_t, \bar{\theta}, \bar{q}, \bar{z})^T$  on a :

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \bar{\Phi} \rangle_H = & k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) dx + \rho_1 \int_0^1 u \bar{u} dx + b \int_0^1 \psi_x \bar{\psi}_x dx + \\ & + \rho_2 \int_0^1 v \bar{v} dx + \rho_3 \int_0^1 \theta \bar{\theta} dx + \tau \int_0^1 q \bar{q} dx + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z(x, \rho, s) \bar{z}(x, \rho, s) ds d\rho dx \end{aligned}$$

le domaine de définition de l'opérateur  $A$  est donné par :

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi \in H : \varphi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \psi \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1), u, \theta \in H_0^1(0,1), \\ v, q \in H_*^1(0,1), z, z_\rho \in L^2((0,1) \times (0,1) \times (\tau_1, \tau_2)) \end{array} \right\}$$

il est claire que  $D(A)$  est dense dans  $H$

**Théorème 2.1** soit  $\Phi \in H$ , alors il existe une unique solution  $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, H)$  du probleme (2.10)

**Preuve.** on va utiliser l'approche du semi groupe on va montrer que l'opérateur  $A$  est un générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi groupe. Pour cela , on prouve que  $A$  est un opérateur m-dissipatif ce qui veut dire qu'on montre que  $A$  est un opérateur dissipatif (i.e : pour tout  $\phi \in D(A) = \langle A\phi, \phi \rangle_H \leq 0$ ) maximal(i.e : l'opérateur  $I - A$  est surjectif) ■

– **premièrement** ,Montrer que  $A$  est dissipatif :

Soit  $\Phi \in D(A)$  ,on prouve que :  $\langle A\Phi, \Phi \rangle_H \leq 0$  on pose  $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta, q, z)^t \in D(A)$  ,ona :

$$\begin{aligned}
\langle A\Phi, \Phi \rangle_H &= k \int_0^1 (u_x + v) (\varphi_x + \psi) dx + b \int_0^1 \psi_x v_x dx \\
&+ \rho_1 \int_0^1 u \left( \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x - \frac{\mu_1}{\rho_1} u - \frac{1}{\rho_1} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds \right) dx \\
&+ \rho_2 \int_0^1 v \left( \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2} \theta_x \right) dx + \\
&+ \rho_3 \int_0^1 \theta \left( \frac{-1}{\rho_3} q_x - \frac{\delta}{\rho_3} v_x \right) dx + \tau \int_0^1 q \left( -\frac{\beta}{\tau} q - \frac{1}{\tau} \theta_x \right) dx \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z(x, \rho, s) \frac{-1}{s} z_\rho(x, \rho, s) ds d\rho dx
\end{aligned}$$

Après la simplification, on trouve :

$$\begin{aligned}
\langle A\Phi, \Phi \rangle_H &= k \int_0^1 u_x (\varphi_x + \psi) dx + k \int_0^1 u (\varphi_x + \psi)_x dx - \mu_1 \int_0^1 u^2 dx \\
&- \int_0^1 u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds dx + b \int_0^1 \psi_x v_x dx + b \int_0^1 v \psi_{xx} dx \\
&- k \int_0^1 v (\varphi_x + \psi) dx - \delta \int_0^1 v \theta_x dx - \int_0^1 \theta q_x dx - \delta \int_0^1 \theta v_x dx \\
&- \beta \int_0^1 q^2 dx - \int_0^1 q \theta_x dx - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, \rho, s) z_\rho(x, \rho, s) ds d\rho dx
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant l'intégration par partie et les condition aux bord, on obtient :

$$k \int_0^1 u_x (\varphi_x + \psi) dx = k [u (\varphi_x + \psi)]_0^1 - k \int_0^1 u (\varphi_x + \psi)_x dx = -k \int_0^1 u (\varphi_x + \psi)_x dx \tag{2.12}$$

$$b \int_0^1 v \psi_{xx} dx = b [v \psi_x]_0^1 - b \int_0^1 v_x \psi_x dx \tag{2.13}$$

$$-\delta \int_0^1 \theta v_x dx = -\delta [\theta v]_0^1 + \delta \int_0^1 \theta_x v dx \tag{2.14}$$

$$-\int_0^1 \theta q_x dx = -[\theta q]_0^1 + \int_0^1 \theta_x q dx \tag{2.15}$$

En substituant les équations(2.12),(2.13),(2.14),(2.15) dans (??)et après la simplification on trouve :

$$\begin{aligned}
\langle A\Phi, \Phi \rangle_H &= -\beta \int_0^1 q^2 dx - \mu_1 \int_0^1 u^2 dx - \int_0^1 u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds dx \\
&- \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, \rho, s) z_\rho(x, \rho, s) ds d\rho dx
\end{aligned}$$

mais on a :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, \rho, s) z_\rho(x, \rho, s) ds d\rho dx \\
 = & \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \int_0^1 z(x, \rho, s) \frac{\partial}{\partial \rho} z(x, \rho, s) d\rho ds dx \\
 = & \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left[ \frac{1}{2} z^2(x, \rho, s) \right]_0^1 ds dx \\
 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| (z^2(x, 1, s) - z^2(x, 0, s)) ds dx
 \end{aligned}$$

et comme  $z(x, 0, s) = \varphi_t = u$ , alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, \rho, s) z_\rho(x, \rho, s) ds d\rho dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s) ds dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \int_0^1 u^2 dx
 \end{aligned}$$

donc

$$\langle A\Phi, \Phi \rangle_H = -\beta \int_0^1 q^2 dx - \mu_1 \int_0^1 u^2 dx - \int_0^1 u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s) ds dx$$

après une simplification on trouve :

$$\begin{aligned}
 \langle A\Phi, \Phi \rangle_H &= -\beta \int_0^1 q^2 dx - \left( \mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_0^1 u^2 dx \quad (2.16) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s) ds dx - \int_0^1 u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds dx \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Maintenant, on applique l'inégalité de Young sur le dernier terme de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds dx &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \int_0^1 u z(x, 1, s) dx ds \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \int_0^1 u^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s) ds dx
 \end{aligned}$$

en substituant dans (2.16) obtient :

$$\begin{aligned}
 \langle A\Phi, \Phi \rangle_H &\leq -\beta \int_0^1 q^2 dx - \left( \mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_0^1 u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} |\mu_2(s)| ds \int_0^1 u^2 dx \\
 &\leq -\beta \int_0^1 q^2 dx - \left( \mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_0^1 u^2 dx \\
 &\leq - \left( \beta \int_0^1 q^2 dx + \left( \mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_0^1 u^2 dx \right)
 \end{aligned}$$

et comme :  $\beta \succ 0$

et  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \prec \mu_1$  alors  $\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \succ 0$

donc  $\beta \int_0^1 q^2 dx + \left( \mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_0^1 u^2 dx$  est positive

donc  $\langle A\Phi, \Phi \rangle_H \leq 0$

c-à-d. l'opérateur A est dissipatif.

– **deuxièmement**, on prouve que pour tout  $\lambda > 0$ , l'opérateur  $\lambda I - A$  est surjectif.

Soit  $\lambda = 1$ ; on prouve que l'opérateur  $I - A$  est surjectif c-à-d on montre que  $Im(I - A) = H$

Pour cela, soient  $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7)^t \in H$  et  $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^t \in D(A)$

satisfaisant :  $(I - A) \Phi = G$

alors

$$\Phi - A\Phi = G \tag{2.18}$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varphi - u = g_1 \\
 u - \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x + \frac{\mu_1}{\rho_1} u + \frac{1}{\rho_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds = g_2 \\
 \psi - v = g_3 \\
 v - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) + \frac{\delta}{\rho_2} \theta_x = g_4 \\
 \theta + \frac{1}{\rho_3} q_x + \frac{\delta}{\rho_3} v_x = g_5 \\
 q + \frac{\beta}{\tau} q + \frac{1}{\tau} \theta_x = g_6 \\
 z + \frac{1}{s} z_\rho = g_7
 \end{array} \right. \tag{2.19}$$

cà donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi - u = g_1 \\ -k(\varphi_x + \psi)_x + (\rho_1 + \mu_1) u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s) ds = \rho_1 g_2 \\ \psi - v = g_3 \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x + \rho_2 v = \rho_2 g_4 \\ q_x + \delta v_x + \rho_3 \theta = \rho_3 g_5 \\ (\beta + \tau) q + \theta_x = \tau g_6 \\ z_\rho(x, \rho, s) + sz(x, \rho, s) = sg_7(x, \rho, s) \end{array} \right. \quad (2.20)$$

On suppose qu' on a trouvé  $\varphi$  et  $\psi$  ;par conséquent la première et la troisième équation donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \varphi - g_1 \\ v = \psi - g_3 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

il est clair que  $u \in H_0^1(0, 1)$  et  $v \in H_*^1(0, 1)$

maintenant en va résoudre la dernière équation du système qui est :

$$z_\rho(x, \rho, s) + sz(x, \rho, s) = sg_7(x, \rho, s) \quad (2.22)$$

**premièrement** , on résout l'équation homogène :  $z_\rho(x, \rho, s) + sz(x, \rho, s) = 0$

donc  $z_\rho(x, \rho, s) = -sz(x, \rho, s)$

mais  $z_\rho = \frac{dz}{d\rho}$  ,alors :

$$\frac{dz}{d\rho} = -sz \quad (2.23)$$

on intègre les deux parties de l'équation (2.23) ; on trouve que :

$$z(x, \rho, s) = ce^{-s\rho}$$

**Deuxièmement**, on résout l'équation non-homogène, c-à-d on va calculer une solution particulière de l'équation(2.22), On a :  $z(x, \rho, s) = ce^{-s\rho}$

alors

$$z_\rho(x, \rho, s) = c_\rho e^{-s\rho} - s c e^{-s\rho}$$

en remplace  $z$  et  $z_\rho$  dans(2.22), ,on obtient

$$c_\rho e^{-s\rho} - s c e^{-s\rho} + c e^{-s\rho} = s g_\tau(x, \rho, s)$$

alors

$$c_\rho e^{-s\rho} = s g_\tau(x, \rho, s)$$

alors

$$c_\rho = s e^{s\rho} s g_\tau(x, \rho, s)$$

$$\frac{dc}{d\rho} = s e^{s\rho} s g_\tau(x, \rho, s)$$

en integrant sur l'intervalle  $[0, 1]$  ,en trouve :

$$c(\rho) - c(0) = s \int_0^\rho e^{s\tau} g_\tau(x, \tau, s) d\tau$$

donc

$$c(\rho) = c(0) + s \int_0^\rho e^{s\tau} g_\tau(x, \tau, s) d\tau$$

or  $c(0) = z(x, 0, s) = u$

alors

$$c(\rho) = u + s \int_0^\rho e^{s\tau} g_\tau(x, \tau, s) d\tau$$

donc

$$z(x, \rho, s) = c e^{-s\rho} = \left( u + s \int_0^\rho e^{s\tau} g_\tau(x, \tau, s) d\tau \right) e^{-s\rho}$$

cà donne :

$$z(x, \rho, s) = u e^{-s\rho} + s e^{-s\rho} \int_0^\rho e^{s\tau} g_\tau(x, \tau, s) d\tau \quad (2.24)$$

D'après la sixième équation de (2.20) ; on a :

$$(\beta + \tau) q + \theta_x = \tau g_6$$

alors

$$\theta_x = \tau g_6 - (\beta + \tau) q$$

donc

$$\frac{d\theta}{dx} = \tau g_6 - (\beta + \tau) q$$

en integrant sur l'intervalle  $[0, x]$  ,en trouve :

$$\theta(x) - \theta(0) = \tau \int_0^x g_6 dx - (\beta + \tau) \int_0^x q dx$$

alors

$$\theta = \tau \int_0^x g_6 dx - (\beta + \tau) \int_0^x q dx \quad (2.25)$$

D'après la deuxième équation de (2.20) ;et on substituant par  $u = \varphi - g_1$  et on trouve :

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + (\rho_1 + \mu_1) (\varphi - g_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \left( u e^{-s} + s e^{-s} \int_0^1 e^{s\tau} g_7(x, \tau, s) d\tau \right) ds = \rho_1 g_2$$

donc :

$$\begin{aligned} & -k(\varphi_x + \psi)_x + (\rho_1 + \mu_1) \varphi - (\rho_1 + \mu_1) g_1 + \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) (\varphi - g_1) e^{-s} ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) s e^{-s} \int_0^1 e^{s\tau} g_7(x, \tau, s) d\tau ds = \rho_1 g_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k(\varphi_x + \psi)_x + (\rho_1 + \mu_1) \varphi + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) e^{-s} ds &= (\rho_1 + \mu_1) g_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) e^{-s} ds g_1 + \\ & + \rho_1 g_2 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \mu_2(s) e^{-s} \int_0^1 e^{s\tau} g_7(x, \tau, s) d\tau ds \end{aligned}$$

alors on obtient :

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi = h_1 \quad (2.26)$$

tq :

$$\mu = \rho_1 + \mu_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)e^{-s} ds$$

et

$$h_1 = \mu g_1 + \rho_1 g_2 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \mu_2(s) e^{-s} \int_0^1 e^{s\tau} g_7(x, \tau, s) d\tau ds$$

D'après la quatrième équation de (2.20); et on substituant par  $v = \psi - g_3$  et on trouve :

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta(\tau g_6 - (\beta + \tau)q) + \rho_2(\psi - g_3) = \rho_2 g_4$$

donc :

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi - (\beta + \tau)\delta q = \rho_2(g_3 + g_4) - \delta\tau g_6$$

alors on obtient :

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi - (\beta + \tau)\delta q = h_2 \quad (2.27)$$

tq :

$$h_2 = \rho_2(g_3 + g_4) - \delta\tau g_6$$

D'après la cinquième équation de (2.20); et  $v = \psi - g_3$  qui donne  $v_x = \psi_x - g_{3x}$  et on trouve :

$$q_x + \delta(\psi_x - g_{3x}) + \rho_3 \left( \tau \int_0^x g_6(y) dy - (\beta + \tau) \int_0^x q(y) dy \right) = \rho_3 g_5$$

donc :

$$q_x - (\beta + \tau)\rho_3 \int_0^x q(y) dy + \delta\psi_x = \delta g_{3x} + \rho_3 g_5 - \rho_3 \tau \int_0^x g_6(y) dy$$

donc :

$$-q_x + (\beta + \tau) \rho_3 \int_0^x q(y) dy - \delta \psi_x = -\delta g_{3x} - \rho_3 g_5 + \rho_3 \tau \int_0^x g_6(y) dy$$

alors on obtient :

$$-q_x + (\beta + \tau) \rho_3 \int_0^x q(y) dy - \delta \psi_x = h_3 \quad (2.28)$$

tq :

$$h_3 = -\delta g_{3x} - \rho_3 g_5 + \rho_3 \tau \int_0^x g_6(y) dy$$

d'après (2.26),(2.27),(2.28) on :

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi = h_1 \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 \psi - (\beta + \tau) \delta q = h_2 \\ -q_x + (\beta + \tau) \rho_3 \int_0^x q(y) dy - \delta \psi_x = h_3 \end{cases} \quad (2.29)$$

on multiplie les équations du système respectivement par  $\bar{\varphi} \in H_0^1(0, 1)$  et  $\bar{\psi} \in H_*^1(0, 1)$  et  $\bar{q} \in L_*^1(0, 1)$  et on intègre sur  $[0, 1]$  on obtient :

$$\int_0^1 -k(\varphi_x + \psi)_x \bar{\varphi} dx + \mu \int_0^1 \varphi \bar{\varphi} dx = \int_0^1 h_1 \bar{\varphi} dx$$

$$\int_0^1 -b\psi_{xx} \bar{\psi} dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + \int_0^1 \rho_2 \psi \bar{\psi} dx - \int_0^1 (\beta + \tau) \delta q \bar{\psi} dx = \int_0^1 h_2 \bar{\psi} dx$$

$$-\int_0^1 q_x \bar{q} dx + \rho_3 (\beta + \tau) \int_0^1 \int_0^x q(y) dy \bar{q} dx - \delta \int_0^1 \psi_x \bar{q} dx = \int_0^1 h_3 \bar{q} dx$$

D'après l'intégration par parties avec les conditions aux bords, on trouve

$$k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi}_x dx + \mu \int_0^1 \varphi \bar{\varphi} dx = \int_0^1 h_1 \bar{\varphi} dx$$

$$b \int_0^1 \psi_x \bar{\psi}_x dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \bar{\psi} dx - \delta (\beta + \tau) \int_0^1 q \bar{\psi} dx = \int_0^1 h_2 \bar{\psi} dx$$

$$(\beta + \tau) \int_0^1 q \bar{q} dx + \delta (\beta + \tau) \int_0^1 \psi \bar{q} dx + \rho_3 (\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right) \left( \int_0^x \bar{q}(y) dy \right) dx = (\beta + \tau) \int_0^1 q \bar{q} dx$$

Puis en sommant les termes, on trouve la formulation variationnelle suivante :

$$B((\varphi, \psi, q), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q})) = F(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q}) \quad (2.30)$$

où B est une forme bilinéaire de  $[H_0^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{aligned} B((\varphi, \psi, q), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q})) = & k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) dx + \mu \int_0^1 \varphi \bar{\varphi} dx + b \int_0^1 \psi_x \bar{\psi}_x dx \\ & + \rho_2 \int_0^1 \psi \bar{\psi} dx - \delta (\beta + \tau) \int_0^1 q \bar{\psi} dx + (\beta + \tau) \int_0^1 q \bar{q} dx + \\ & \delta (\beta + \tau) \int_0^1 \psi \bar{q} dx + \rho_3 (\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right) \left( \int_0^x \bar{q}(y) dy \right) dx \end{aligned}$$

et F est une application linéaire de  $[H_0^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$F(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q}) = \int_0^1 h_1 \bar{\varphi} dx + \int_0^1 h_2 \bar{\psi} dx + (\beta + \tau) \int_0^1 h_3 \int_0^x \bar{q}(y) dy dx$$

on pose  $v = H_0^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$ , sa norme associé :

$$\|(\varphi, \psi, q)\|_v^2 = \|(\varphi_x + \psi)\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|q\|_2^2$$

Maintenant, en utilisant le fait suivante, on montre la continuité de B et F, et que B est coercive

$$\int_0^1 (\varphi_x^2 + \psi^2) dx \leq c \int_0^1 ((\varphi_x + \psi)^2 + \varphi^2 + \psi_x^2) dx \quad (2.31)$$

– B est continue :

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |B((\varphi, \psi, q), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q}))| &\leq k \|(\varphi_x + \psi)\|_2 \|(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi})\|_2 + \mu \|\varphi\|_2 \|\bar{\varphi}\|_2 \\
 &\quad + b \|\psi_x\|_2 \|\bar{\psi}_x\|_2 + \rho_2 \|\psi\|_2 \|\bar{\psi}\|_2 - \delta(\beta + \tau) \|q\|_2 \|\bar{\psi}\|_2 \\
 &\quad + (\beta + \tau) \|q\|_2 \|\bar{q}\|_2 + \delta(\beta + \tau) \|\psi\|_2 \|\bar{q}\|_2 \\
 &\quad + \rho_3 (\beta + \tau)^2 \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x \bar{q}(y) dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

En traite le terme comme suite :

$$\begin{aligned}
 \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x \bar{q}(y) dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x dy \right) \left( \int_0^x |q(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x dy \right) \left( \int_0^x |\bar{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 dy \right) \left( \int_0^x |q(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 dy \right) \left( \int_0^x |\bar{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \|q\|_2 \|\bar{q}\|_2
 \end{aligned}$$

Donc d'après les inégalités de Poincaré, Young et (2.31) on obtient :

$$|B((\varphi, \psi, q), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q}))| \leq (c (\|(\varphi_x + \psi)\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2) + \|q\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \left( c (\|(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi})\|_2^2 + \|\bar{\varphi}\|_2^2 + \|\bar{\psi}_x\|_2^2) + \|\bar{q}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

alors

$$|B((\varphi, \psi, q), (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q}))| \leq \|(\varphi, \psi, q)\|_v \|(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q})\|_v$$

– B est coercive :

pour certain  $c > 0$  on a :

$$\begin{aligned}
 B((\varphi, \psi, q), (\varphi, \psi, q)) &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)(\varphi_x + \psi) dx + \mu \int_0^1 \varphi \varphi dx + b \int_0^1 \psi_x \psi_x dx \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^1 \psi \psi dx - \delta(\beta + \tau) \int_0^1 q \psi dx + (\beta + \tau) \int_0^1 q q dx \\
 &\quad + \delta(\beta + \tau) \int_0^1 \psi q dx + \rho_3 (\beta + \tau)^2 \int_0^1 \left( \int_0^x q(y) dy \right)^2 dx \\
 &\geq k \|(\varphi_x + \psi)\|_2^2 + \mu \|\varphi\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + k_0 \|q\|_2^2 \\
 &\geq \min(k, k_0, b, \mu) (\|(\varphi_x + \psi)\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|q\|_2^2) \\
 &\geq \|(\varphi, \psi, q)\|_v^2
 \end{aligned}$$

– F est continue :

– D’après l’inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|F(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q})| = \|h_1\|_2 \|\bar{\varphi}\|_2 + \|h_2\|_2 \|\bar{\psi}\|_2 + (\beta + \tau) \left( \int_0^1 |h_3|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^x |\bar{q}(y) dy|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

– En traite le termes comme suite :

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 |h_3|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^x |\bar{q}(y) dy|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|h_3\|_2 \left[ \int_0^1 \left( \int_0^x dy \right) \left( \int_0^x |\bar{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|h_3\|_2 \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 dy \right) \left( \int_0^1 |\bar{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|h_3\|_2 \|\bar{q}\|_2 \end{aligned}$$

– Donc d’après les inégalités de Poincaré, Young et (2.31), on obtient

$$\begin{aligned} |F(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q})| &\leq c (\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|q\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{q})\|_v \end{aligned}$$

– Par conséquent, B est une forme bilinéaire continue et coercive sur V et F est forme linéaire continue sur V .D’après le théorème de Lax-Milgram, le système (2.29) admet une solution unique

$$\varphi \in H_0^1(0, 1), \quad \psi \in H_*^1(0, 1), \quad q \in L_*^2(0, 1)$$

### 2.1.3 la régularité de la solution

– – En remplaçant  $\varphi$  et  $\psi$  dans (2.19)<sub>1</sub>, (2.19)<sub>3</sub>, (2.19)<sub>6</sub> respectivement , on obtient

–

$$u \in H_0^1(0, 1), \quad v \in H_*^1(0, 1), \quad \theta \in L_*^2(0, 1)$$

– de la même manière ,en remplaçant u dans (2.24) et gardant l'esprit à (2.19) on obtient :

–

$$z, z_\rho \in L^2((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))$$

– maintenant,if  $(\bar{\varphi}, \bar{q}) = (0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$  et( 2.30) réduit a :

–

$$k \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi}_x dx + b \int_0^1 \psi_x \bar{\psi}_x dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \bar{\psi} dx - \delta (\beta + \tau) \int_0^1 q \bar{\psi} dx = \int_0^1 h_2 \bar{\psi} dx \quad \forall \bar{\psi} \in H_*^1(0, 1) \quad (2.32)$$

– ceci implique

–

$$-b\psi_{xx} = -(k + \rho_2)\psi - k\varphi_x + \delta(\beta + \tau)q + h_2 \in L^2(0, 1) \quad (2.33)$$

– Par conséquent, par la théorie de la régularité pour les equations linéaires elliptiques, il en

– résulte que

–

$$\psi \in H^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1)$$

– Par ailleurs, (2.32) est également vrai pour tout  $\phi \in C^1([0, 1]) \subset H_*^1(0, 1)$  vérifiant  $\phi(0) = 0$  : En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\psi_x(1)\phi(1) - \psi_x(0)\phi(0) = 0 \quad \forall \phi \in C^1([0, 1])$$

– vérifiant  $\psi_x(0) = \psi_x(1) = 0$

– alors on obtient  $\psi \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1)$

– de la même manière ,on obtient

$$\begin{aligned} -k\varphi_{xx} &= -\mu\varphi - k\psi_x + h_1 \in L^2(0,1) \\ -q_x &= \delta\psi_x - \rho_3(\beta + \tau) \int_0^x q(y) dy + h_3 \in L^2(0,1) \end{aligned}$$

– alors

$$\varphi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \quad ,q \in H_*^1(0,1)$$

- Enfin, l'application de la théorie de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'un unique  $\Phi \in D(A)$  tel que (2.18) est satisfaite. Par conséquent, l'opérateur A
- est maximal.

---

## Conclusion général

S'intéressant à l'analyse de problèmes aux limites régis par des équations différentielles et des systèmes différentielles.

A travers le troisième chapitre, on a exposé l'utilisations de la théorie des semi groupes pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des schrodinger, le système de Timoshenko , qui peuvent s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait.

Plus précisément, on a donné des conditions nécessaires pour que les problèmes précédents soit bien posé, en utilisant, la théorie des semi groupe.

On a montré aussi que les solutions des problèmes précédents définissent un semi groupe fortement continue.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Y.Abdelbadie**, La théorie de Semi-Groupes et les équations aux dérivées partielles à retard, MiMOIRE DE MASTER, UNIVERSIT ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN, 2019.
- [2] **O.Bouanane,A.Boukezzoula** Système d'évolution à base du problème de Cauchy abstarit dans le cas hyperbolique en théorie des semi-groupe, Centre Universitaire Abdelhafide Boussouf Mila.
- [3] **H.BREZIS**, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983, ISBN :2-225-77198-7.
- [4] **F.Dardalhon,FedericoVerga**, le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problème d'évolution semi-linéaires mémoire encadré par Florence Hubert 7 juin 2006, 43-59,8.
- [5] **B.S.Houari, Y.Laskri**, A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback, Applied Mathematics and Computation 217(2010) 2857-2869.
- [6] **S.Leulmi**, Semi-Groupe, Note de cours, Université 20 Aout 1955 de Skikda, 2020.

## Bibliographie

---

- [7] **L.D.LEMLE**, *Autour des propriétés des Semi-Groupe volume 31*, 99-145.
- [8] **I.Mazari**, EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Thierry Galay(cours) & Julien Vovelle (TD), Cours de MI-ENS de Lyon Année scolaire 2014-2015.
- [9] **A.Moumen,D.Ouachenane,K.Bouhali and Y.Altayeb** Well-Proposedness and Stability Results for a Damped Porous-Elastics System with Infinite Memory and Distributed Delay Terms Mathematicul Applications 2021.
- [10] **A.pazy**, Semi-Groupe of lineair operators and Applications to Partial Differential Equations,Grivat Ram 91904 jerusalem Israel,100-109.
- [11] **J.Pierre Raymond**, équation d'évolution, Université Paul Sabatier ,6-11.