République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de 20 Aout Skikda

Faculté de Technologie

Département de Sciences et Technolgies

"Polycopié de cours"

Introduction à la Topologie

Domaine : Maths-Infos Spécialité: Mathématiques

Réalisé par: Dr. Abdelkader BOUADI

Année universitaire 2021-2022

Table des matières

Introduction

Le mots topologie se compose de deux parties, Topo qui signifie lieux et Loigie qui signifie science, c'est donc la science du lieux. Ce mots a été introduit en 1836 par le savant almand Listing, puis c'est le savant Weistrass qui a continu le chemin en introduisant en 1860 la notion de limite. Ces travaux ont été exploités par Cantor (1845-1966) qui a inventé la notion de distance entre deux points et Frechet qui a donné pour la première fois, en 1906, la définition des espaces métriques. Enfin c'est le savant Filix Hausdorff en 1914 qui fixera définitivement les trois axioms définissants une topologie sur un ensemble donné.

Contrairemnt à la géométrie, la topologie ne donne pas importance au formes des ensembles (carré, rectangle,$\cdots$) ou à leurs dimensions (longuer, largeur,$\cdots$) mais surtout à la position des singletons par rapport à ces ensembles, est ce qu'ils sont dans l'intérieure, la frantière, l'adhérence ou dans le complémentaire ? Elle s'intéresse aussi à leur répartition dans l'ensemble lui même, (compacité ou connexité de l'ensemble). Remarquons que tout ces conceptes sont basés sur la logique du lieux.

Motivation : Pour une bonne formation universitaire en mathématiques, l'enseignement d'un cours de topologie est indispensable afin de généraliser les consepts connues dans l'analyse des fonctions à une variable réelle et traiter ainsi des problèmes définies sur des espaces vectoriels de dimension $n > 1$ ou plus encore sur des espaces qui ne bénificie pas d'une structure vectoriel. Plus précisament une structure t**opologique** est plus que nécessaire pour étudier la continuité d'une fonction, la convergence d'une suite et plus précisament toute notion basée sur le concepte limite, comme dans l'algébre, une structure vectoriel est indispensable pour parler de la linéarité d'une fonction ou la convexité d'un ensemble,

Rappelons qu'un petit bagage sur la théorie des ensembles en générale et les structures algébriques en particulier fournit au lecteur un bon avantage et il lui ouvre plus l'axé au concepts topologiques abstraits. Plus exactement le fait de comprendre que les propriété algébriques d'un objet ne sont pas absolues mais elles sont relatives á une sructure algébrique fixiée d'avance, permet au lecteur de s'adapter à la relativité et l'abstraction des notions introduite dans la topologie générale.

Le lecteur de ce cours est supposé aussi familiariser avec les notions d'analyse réelle de 1ère année mathématiques où il devrait remarquer qu'elles sont touts patiquement basées sur la notion de limite et convergence.

Pour une variable réelle l'expression de limites et convergence utilisait la notion de valeur absolue définie sur l'espace vectoriel $(\mathbb{R}, +, .)$, caractérisé son origine $0_{\mathbb{R}}$. Par exemple : $(\lim_{n \to +\infty}(x_n) = x \iff |x_n - x| \to 0)$. En effet $|x| = d(x, 0)$ (c'est la distance entre x et 0), et $(|x_n - x| = d(x_n, x))$, où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}$ agit sur l'écriture précédente de la convergence, en même temps il est important de savoir q'elle n'est plus une condition nécessaire pour traiter cette notion. En revanche une **structure topologique** est le cadre naturel, générale et **indispensable** pour définir tout concepts basés sur les notions de limite et convergence. On verra plus loins qu'il existe une infinité de topologies définies sur un ensemble donnée. Dans l'exemple précédent il sagit de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, définie par la distance usuelle, en particulier cette structure est compatible avec la structure vectoriel de $\mathbb{R}$.

De la même manière et comme généralisation de la valeurs absolue sur $\mathbb{R}$, on va définir au chapitre 5 de ce cours et sur un espace vectoriel de dimension finie E, la norme Euclidienne, par $(\|x\| = d(x, 0_E))$. Plus généralement, on va appeller norme sur un espace vectoriel quelconque E, toute application de E dans $\mathbb{R}$, vérifiant les trois propriétés connues pour la valeur absolue. Comme la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, toute norme va engendrer une distance d, sur E, définie par : $\forall x, y \in E, \ \ d(x, y) = \|x - y\|$, cette distance va donner á son tours la naissance d'une topolgie compatible avec la structure vectoriel et nous permettre ainsi de manipuler des limite, convergence et continuité dans tel espace.

Quetion : Comment définir les notions de convergence et continuité dans un espace abstrait qui n'est pas nécessairement un espace vectoriel ?

La réponse à cette question est le sujet du chapitre 1, on commence par montrer comment définir d'une façon intrinséque une **topologie** sur un ensemble non vide E (**une topologie est une sous ensemble de l'ensemble des parties de E vérifiants trois axioms**), on passe ensuite à définir **les topologie des espaces métrique** (E, d) où d une distance définie sur E.

Rappelons au passage que contrairemnt à d'autre cours, on va introduire les définitions de nos objets mathématiques : ouverts, voisinages,adhérence,$\cdots$ etc, d'une façon sumiltané, dans les espaces toplogiques abstraits et les espaces métriques.

Enfin et pour donner un sens au théorèmes d'analyse connus dans $\mathbb{R}$, on va généraliser la notion d'intervalles voir définir, dans le chapitre 3, les sous **ensembles connexes**, et aussi généraliser la notion de parties femées bornées de $\mathbb{R}$ en introduisant ainsi la notion toplogique **parties compactes**, dans le chapitre 4, et comme on a dit précédament, le chapitre 5 sera consacré à la topologie des **espace vectoriel normés**.

CHAPITRE 1

Espaces métriques. Espaces topologiques.

1.1 Introduction du chapitre

Puisqu'on a plus l'habitude de manipuler des quantités réelles, On a préféré commencer ce chapitre par introduire la notion de ***distance*** sur un ensemble non vide X, cette distance a en particulier l'ensemble $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivé, ceci donne plus de possibilités au lecteur d'assumiler les consepts définis sur les ***espaces métriques*** (X, d) (une structure liée à la distance d). On introduit après le cas le plus générale des ***espaces topologiques***. On rappel au passage que tout espace métrique est un espace topologique particulier. La suite du chapitre sera alors comme suit :
On définie à chaque fois des objets topologiques (ouvert, voisinages, points adhérents, points d'accumulations, suites convergentes, fonctions continues...) dans le cas général des espaces topologiques abstraits, en donnant, simultanément, leurs définitions équivalntes pour la topologie spéciale des espaces métriques.

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Distances

Définition 1.1. *Soit X un ensemble, on appelle* ***distance sur*** *X toute application*

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array},$$

qui vérifie, $\forall x,\ y,\ z \in X$:

i) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Définition 1.2. ***Un espace métrique*** *est le couple (X,d), où X est un ensemble et d une distance.*

Exemples

1. Pour $X = \mathbb{R}$. L'application d définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ \ d(x,y) = |x-y|,$$

est une distance sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $X = \mathbb{R}^n$, les applications $d_1,\ d_2,\ d_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$, pour touts $x = (x_1, x_2 \dots x_n),\ y = (y_1, y_2 \dots y_n)$ dans $\mathbb{R}^n, r$ par

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{i \in \{1,2,\dots n\}} |x_i - y_i|,$$

sont des distances sur $\mathbb{R}^n$, en particulier

• d_2 est appelée ***la distance euclidienne***.

•• d_∞ est appelée ***la distance de convergence uniforme***.

Proposition 1.1. *Soit d une distance sur X. Alors*

$$\forall x, y \in X, \quad d(x,y) \geq 0.$$

Démonstration
D'après i), on a $d(x,x) = 0$. En utilisant iii), on obtient

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x),$$

et d'après ii), $d(x,y) = d(y,x)$, alors

$$0 \leq 2d(x,y).$$

D'où

$$d(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X.$$

Définition 1.3. *Soit (X,d) un espace métrique et soit $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

1. *L'ensemble*
$$B(x_0, r) = \{y \in X;\ \ d(x_0, y) < r\},$$
*s'appelle **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r.*
2. *L'ensemble*
$$B_f(x_0, r) = \{y \in X;\ \ d(x_0, y) \leq r\},$$
*s'appelle **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r.*
3. *L'ensemble*
$$S(x_0, r) = \{y \in X;\ \ d(x_0, y) = r\},$$
*s'appelle **sphère** de centre x_0 et de rayon r.*

Exemple

1. Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$, avec

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; d(x, y) = |x - y|.$$

On a

- $B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}, \quad -1 + a < x < 1 + a\} =]a - 1, a + 1[$, est l'intervalle ouvert de centre a et de rayon 1.

•• $B_f(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}, \quad -1 + a \leq x \leq 1 + a\} = [a - 1, a + 1]$, est l'intervalle fermè de centre a et de rayon 1.

••• $S(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}, \;\; x = a + 1 \;\text{ ou }\; x = a - 1\} = \{a - 1, \; a + 1\}$, est l'ensemble des deux éxtrémités de l'intervalle $[a - 1, a + 1]$.

2. Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, avec d_2 la distance euclidienne définie par

$$\forall X = (x_1, \; x_2) \in \mathbb{R}^2, \; \forall Y = (y_1, \; y_2) \in \mathbb{R}^2 : \; d_2(X, Y) = (\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a

- ***Le disque fermé*** de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est

$$B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{X \in \mathbb{R}^2, \;\; d(0_{\mathbb{R}^2}, X) \leq 1\} = \{X \in \mathbb{R}^2, \;\; |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1\}.$$

•• ***Le cercle*** de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est

$$S(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}, \;\; |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\},$$

est

1.2.2 Parties bornées. Fonctions bornées

Définition 1.4. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit q'une partie A de X est* ***bornée****, si elle est contenue dans une boule fermée*

$$A \text{ est borne } \iff \exists \mathrm{x_0} \in \mathrm{A}, \; \exists \mathrm{r} > 0 : \quad \mathrm{A} \subset \mathrm{B_f(x_0, r)}.$$

Remarque 1.1. *Il est possible de prendre une boule ouverte dans la définition précédente.*

Définition 1.5. *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Soit f une application de X vers Y. On dit que l'application f est* ***bornée*** *si son image est une partie bornée de Y, c'est à dire $f(X)$ est bornée dans Y.*

Remarque 1.2. *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Soit l'ensemble*

$$\mathcal{F}_b(X, Y) = \{f : X \to Y; \quad f \text{ est bornée}\}.$$

L'application φ définie de $\mathcal{F}_b(X, Y) \times \mathcal{F}_b(X, Y)$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}_b(X, Y) \times \mathcal{F}_b(X, Y), \qquad \varphi(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

est une distance sur $\mathcal{F}_b(X, Y)$, appellée la distance de la convergence uniforme.

Exemple
Soit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lapplication f n'est pas bornée, puisque $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ n'est pas bornée, en effet

$$]0, +\infty[\not\subseteq [a - r, a + r], \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{et } \forall \text{r} > 0$$

1.2.3 Distance entre deux parties. Diamétre d'un ensemble

Définition 1.6. *Soit A et B deux parties d'un espace métrique (X, d). On appelle **distance entre** A **et** B, la quantité*

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y), \;\; x \in A \textit{ et } y \in B\}$$

Remarque 1.3. *Il est util de noter que la distance entre deux ensembles disjoints n'est pas forcément nulle, comme le montre le contre-exemple suivant, donc la distance entre deux ensembles n'est pas une distance.*

Contre-Exemple
Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pour $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2[$, on a

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y), \;\; x \in A \text{ et } y \in B\}$$

$$= \inf\{d(x, 1) : \;\; x \in [0, 1[\} = \lim_{x \to 1} d(x, 1) = d(1, 1) = 0,$$

en particulier

$$d(A, B) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = B.$$

Définition 1.7. *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). On appelle* ***diamétre de*** *A, la quantité*

$$Diam(A) = \sup\{d(x,y),\ \ x,\ y \in A\}$$

Exemple Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ où d est la distance usuelle, soit $A =]1,4]$ et $B = [0,+\infty[$, On a

$$Diam(A) = \sup\{d(x,y),\ \ x,\ y \in]1,4]\} = \lim_{x\to 1} |4-x| = |4-1| = 3,$$

et

$$Diam(B) = \sup\{d(x,y),\ \ x,\ y \in [0,+\infty[\} = \lim_{y\to+\infty} |y-0| = +\infty.$$

1.3 Espaces topologiques

Définition 1.8. *On appelle* ***espace topologique*** *le couple (X, T) avec X est un ensemble et T est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ (l'ensemble de toute les parties de X), où les éléments de T sont appelés* **ouverts**, *et vérifiants*

1. *Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
2. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
3. *$\emptyset$ et X sont des ouverts.*

Exemple Pour $X = \{a\ ,b,\ c\}$.

$$P(X) = \{\Phi,\ \{a\}, \{b\},\ \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}.$$

Soit

$$T = \{\emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}.$$

T n'est pas une topologie puisque elle n'est pas stable par intersection, en effet $(\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\} \notin T)$.

1.3.1 Topologie des espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique alors E est un espace toplogique et les ouverts de X sont définies par

Définition 1.9. *Une partie A d'un espace métrique (X, d) est* ***un ouvert*** *si $A = \Phi$, ou*

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset A.$$

Exemple
Pour l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, les boules ouvertes $B(x_0, r)$, sont les intervalles $]x_0 - r, x_0 + r[$, et par suite $A =]1, 2]$ n'est pas un ouvert puisque

$$\exists 2 \in]1, 2], \quad \text{tel que} \quad \forall \mathrm{r} > 0, \quad \text{on a} \quad]2 - \mathrm{r}, 2 + \mathrm{r}[\not\subseteq]1, 2].$$

Proposition 1.2. *Toute boule ouverte d'un espace métrique (X, d) est un ouvert pour la topologie associée à d.*

Démonstration Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de X , il suffit de montrer que

$$\forall x \in B(a, r), \ \exists r_1 > 0 \quad B(x, r_1) \subset B(a, r).$$

Soit $x \in B(a, r)$ on a $d(a, x) < r$, d'où

$$r - d(a, x) > 0.$$

Posant alors

$$r_1 = \frac{r - d(a, x)}{2}.$$

Il reste à montrer que $B(x, r_1) \subset B(a, r)$.
Soit $y \in B(x, r_1)$ alors

$$d(x, y) < r_1 = \frac{r - d(a, x)}{2}.$$

Or

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \frac{r - d(a, x)}{2},$$

d'où

$$d(a, y) < \frac{d(a, x) + r}{2} < r,$$

donc $y \in B(a, r)$, et par suite $B(x, r_1) \subset B(a, r)$.

Corollaire 1.1. *Tout ouvert dans un espace métrique (X, d) est une union de boules ouvertes.*

Démonsration Il suffit de montrer que

$$A \text{ un ouvert} \iff A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

1. A un ouvert $\implies A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$:
   En supposant que A est ouvert, on va montrer l'inclusion dans les deux sens de A et $\bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$.

a) On a A un ouvert, donc

$$\forall y \in A,\ \exists r > 0 \text{ tels que } \mathrm{B(y,r) \subset A},$$

donc

$$y \in B(y,r) \subset \bigcup_{x\in A} B(x,r_x),$$

d'où

$$y \in \bigcup_{x\in A} B(x,r_x).$$

On obtient alors

$$A \subset \bigcup_{x\in A} B(x,r_x).$$

b) Soit $y \in \bigcup_{x\in A} B(x,r_x)$, alors

$$\exists x_0 \in A;\ \ y \in B(x_0,r_{x_0}) \subset A,$$

d'où

$$y \in A,\ \text{et} \ \bigcup_{\mathrm{x\in A}} \mathrm{B(x,r_x) \subset A}.$$

2. $A = \bigcup_{x\in A} B(x,r_x) \implies A$ un ouvert :
   si $A = \bigcup_{x\in A} B(x,r_x)$, et comme toute boule ouverte est un ouvert (d'après la proposition 1.2), alors A est une union d'ouverts, donc A est un ouvert.

Définition 1.10. *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X,d). A est dit **fermé** si $C_X(A)$ est un ouvert.*

Proposition 1.3. *Toute boule fermée est un fermé.*

Démonstration Il suffit de montrer que le complémentaire de la boule fermée est un ouvert de X (En suivant les même étapes de la proposition 1.2).

Exemple
$E = \{1,2,3,4\}$ et $T = \{\Phi,\ E,\ \{2,1\},\ \{2,3\},\{2\},\{1,2,3\}\}$. T est une topologie sur E.
On a $\{2,3\}$ est un ouvert mais il n'est pas fermé, car

$$C_E\{2,3\} = \{1,4\} \notin T,$$

autrement dit, $\{1,4\}$ n'est pas un ouvert.
On a aussi $\{3\}$ n'est pas un ouvert, puisque $\{3\} \notin T$ et aussi,il n'est pas fermé car

$$C_E\{3\} = \{1,2,4\} \notin T.$$

Remarque 1.4. *D'après le corollaire 1.1, tout espace métrique est un espace topologique. L'inverse est en générale faut.*

Définition 1.11. *Un espace topologique est dit **métrisable**, s'il existe une distance d qui définie sa topologie.*

Exemples Soit (X,T) un espace topologique.

1. **La topologie discrète** $T = P(X)$:
   $P(X)$ est l'ensemble de toute les parties ouvert de X. Pour $T = P(X)$, toute partie de X est ouverte et fermée, à la fois.
   $(X, P(X))$ est métrisable car la topologie $P(x)$ peut être définie par la distance d, définie de $X \times X$ vers $\mathbb{R}$ par

   $$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si} ;\ x \neq y \\ 0, & \text{si.}\ x = y \end{cases}$$

   d s'appelle la distance discrète sur X
2. **La topologie grossière ;** $T = \{X, \Phi\}$:
   L'espace topologique (X,T) n'est pas métrisable.

1.3.2 Voisinages

Définition 1.12. *Soit (X,T) un espace topologique et $x \in X$. On appelle **voisinage** de x toute partie V de X contenant un ouvert qui contient x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

$$V \in \mathcal{V}(x) \iff \exists W \in T : \ \ x \in W \subset V.$$

Proposition 1.4. *(***Caractérisation des ouverts par les voisinages***)*
Soit A une partie d'un espace topologique, (X,T). On a

A est un ouvert de $X \iff A$ est un voisinage de chacun de ces points.

Démonstration

— A est un ouvert $\Longrightarrow A$ est un voisinage de chacun de ces points?

Soit $x \in A$, est ce que $A \in \mathcal{V}(x)$? (c'est à dire, exite-t-il un ouvert W tel que $x \in W \subset A$?
Posant $W = A$, donc $x \in A \subset A$.

— A est un voisinage de chacun de ces points $\Longrightarrow$ A est un ouvert?
Soit $x \in A$, comme A est voisinage de chacun de ces point, il existe alors un ouvert W_x tel que
$$x \in W_x \subset A,$$
d'ou
$$A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subset \bigcup_{x\in A} W_x \subset A.$$
et par suite
$$A \subset \bigcup_{x\in A} W_x \subset A,$$
on obtient alors
$$A = \bigcup_{x\in A} W_x.$$
A est une réunion d'ouverts, il est donc ouvert.

Proposition 1.5 (***Propriétés des voisinages***). *Soit (X,T) un espace topologique. On a*

1. *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $x \in V$*
2. *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset A$ alors $A \in \mathcal{V}(x)$.*
3. *Toute intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x.*

Démonstration de la propriété 3)

Soit $(V_i)_{i\in\{1,2,\ldots n\}} \in \mathcal{V}(x)$, alors $\exists W_i$ ouvert tel que
$$x \in W_i \subset V_i, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots n\}.$$
D'où
$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i,$$
avec
$$W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i, \quad \text{est un ouvert,}$$
d'ou $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i \in \mathcal{V}(x)$.

Exemples

1. $]-1,1[\in \mathcal{V}(0)$, car $0 \in]-1,1[$ et $]-1,1[$ est un ouvert (voisinage de chacun de ces points).

2. $]0,+\infty[\notin \mathcal{V}(0)$, car $0 \notin]0,+\infty[$.
3. $[0,+\infty[\notin \mathcal{V}(0)$, car $\forall r > 0 \ ]0-r, 0+r[\not\subseteq [0,+\infty[$.
4. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \in \mathcal{V}(0)$ car $\exists r = \frac{1}{3}$ telle que $]0-\frac{1}{3}, 0+\frac{1}{3}[\not\subseteq [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

1.3.3 Voisinage dans un espace métrique.

Proposition 1.6. *Si (X,d) est un espace métrique et $x_0 \in X$, alors*

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \Longleftrightarrow \exists r > 0, \ \ B(x_0,r) \subset V.$$

Démonstration

- $V \in \mathcal{V}(x_0) \Longrightarrow \exists r > 0, \ \ B(x_0,r) \subset V$?
  Soit $V \in \mathcal{V}(x_0)$; alors $\exists W$ un ouvert tel que $x_0 \in W \subset V$. Comme W est un ouvert dans (X,d) et $x_0 \in W$, donc

  $$\exists r > 0, \quad B(x_0,r) \subset W \subset V,$$

  alors

  $$\exists r > 0, \quad B(x_0,r) \subset V.$$

•• Inversement

On suppose que $x_0 \in V$ tel q'il existe r>0, $B(x_0,r) \subset V$,
et comme ($B(x_0,r)$ est un ouvert), donc
en posant $W = B(x_0,r)$, il existe alors un ouvert W tel que

$$x_0 \in W \subset V,$$

d'ou $V \in \mathcal{V}(x_0)$.

Définition 1.13. *Soit (X,T) un espace topologique et soit $x \in X$. On dit que $\mathcal{BV}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ est un **système fondamental de voisinages** de x si tout voisinage V de x contient un élément W de $\mathcal{BV}(x)$.*

Remarque 1.5. *La proposition 1.6 signifie que tout point x d'un espace métrique (E,d), admet un **système fondamental de voisinages** constitue de boules ouvertes. On peut montrer plus, que ce système est dénombrable. En effet*

$$\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}(x), \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^\star : \ B(x,\frac{1}{n}) \subset V$$

1.3.4 Sous-espaces topologiques

Soit (X, T) un espace topologique.

Définition 1.14. *Soit $A \subset X$. On appelle **topologie induite** par T sur A,*

$$T_A = \{A \cap O,\ O \text{ ouvert de } T\}.$$

Le couple (A, T_A) s'appelle sous-espace topologique

Exemples

1. Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = ([0, +\infty[, |\cdot|)$ et $O =]-2, 4[$. On a
$$W = O \cap A = [0, 4[,$$
est un ouvert de
$$(A, T_A) = ([0, +\infty[, |\cdot|)$$
mais $[0, 4[$ n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(Les ouverts de la topologie induite sur $A \subset X$ ne sont pas forcément des ouverts pour la topologie de X.)

2. La topologie induite sur $\mathbb{N}$, par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie discrète.

Proposition 1.7. *Soit $A \subset X$, et $x \in A$.*

1. *La famille des fermés de A est dfinie comme suit*
$$\mathcal{F}_A = \{F \cap A, \quad F \text{ est fermé sur } X.\}$$
2. *V est un voisinage de x dans A si et seulement si $V = W \cap A$, où W est un voisinage de x dans X.*

Exemples

1. On a $F = [3, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car
$$C_{\mathbb{R}}F =]-\infty, -3[\quad \text{est un ouvert},$$
donc pour $A = [2, 5[$, on a
$$F \cap A = [3, +\infty[\cap [2, 5[= [3, 5[$$
est un fermé pour la topologie induite sur A.
2. Soit $A = [0, 4[$. On a
$$V = [-1, 3[\in \mathcal{V}(\frac{5}{2}), \text{ dans } \mathbb{R},$$
donc
$$V \cap A = [0, 3[\in \mathcal{V}(\frac{5}{2}), \text{ dans A}.$$

1.3.5 Points adhérents, intérieurs d'un ensemble

Soit (X, T) un espace topologique, $x \in X$ et A une partie de X

Définition 1.15. *On dit que x est un point **adhérent** à A si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap A \neq \phi.$$

On note par $\overline{A}$ l'ensemble de tout les points adhérents à A.

Définition 1.16. *On dit que x est **un point d'accumulation** de A, si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad V - \{x\} \cap A \neq \Phi.$$

L'ensemble des points d'accumulations de A est noté $A^{`}$, il est appelé l'ensemble dérévé de A.

Définition 1.17. *On dit que x est **un point isolé** de A, si*

$$\exists V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap A = \{x\}.$$

Propriétés 1.1. *Soit A et B deux parties de X. On a*

1. $A \subset \overline{A}$.
2. $A' \subset \overline{A}$.
3. *x point isolé alors $x \in A$*
4. $\overline{A} = A \cup A'$.
5. *$\overline{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.*
6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
7. $\overline{A \cup B} = \overline{B} \cup \overline{A}$.
8. $\overline{A \cap B} \subset \overline{B} \cap \overline{A}$.

Démonstration

1. Soit $x \in A$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V \cap A$ et donc $V \cap A \neq \Phi$. D'où $x \in \bar{A}$, et on obtient
$$A \subset \bar{A}.$$
2. En utilisant les définitions 1.15 et 1.16, on obtient directement l'inclusion.
3. x point isolé alors
$$\exists V \in \mathcal{V}(x), \ \ V \cap A = \{x\},$$
d'où $x \in V$ et $x \in A$.

4. D'après 1) et 2), on a
$$A \cup A' \subset \overline{A}.$$
Il reste à montrer que $\overline{A} \subset A \cup A'$. Supposons que
$$x \notin A \cup A'$$
alors
$$x \notin A \ \text{ et } \ \mathrm{x} \notin \mathrm{A}',$$
donc
$$x \in C_X A \text{ et } \ \exists \mathrm{V} \in \mathcal{V}(\mathrm{x}), \ \ (\mathrm{V} - \{\mathrm{x}\}) \cap \mathrm{A} = \Phi,$$
et pr suite
$$x \in C_X A \ \ et \ \ V - \{x\} \subset C_X A,$$
donc
$$x \in C_X A \ \text{ et } \ \mathrm{V} - \{\mathrm{x}\} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{C_X A},$$
d'ou
$$\exists V \in \mathcal{V}(x), \ \ V \cap A = \Phi,$$
et par suite $x \notin \overline{A}$.

5. • Montrons que $\overline{A}$ est un fermé. Soit $x \in C_X(\overline{A})$, donc
$$\exists V(ouvert) \in \mathcal{V}(x), \ \ V \cap A = \Phi,$$
ainsi
$$x \in V(ouvert) \subset C_X(\overline{A}),$$
alors $C_X(\overline{A})$ est voisinage de chacun de ces points, il est donc ouvert et par suite $\overline{A}$ est fermé.

•• Montrons $\bigcap\limits_{A \subset F} F \subset \overline{A}$

On a $x \notin \overline{A} \Longleftrightarrow x \in C_X\overline{A} \Longleftrightarrow \exists W$ (ouvert) $\in \mathcal{V}(x)$: $\quad W \cap A = \Phi$
$\Longleftrightarrow A \subset C_X W$, et $C_X W$ est un fermé
$\Longleftrightarrow \exists F_0 = C_X W$ un fermé avec $A \subset F_0$ et $x \notin F_0$
$\Longleftrightarrow x \notin \bigcap\limits_{A \subset F} F$.

• • • Inversement

$\overline{A}$ est un fermé qui contient A, donc $\overline{A} \subset \bigcap\limits_{A \subset F} F$,

d'ou $\overline{A} = \bigcap\limits_{A \subset F} F$, il est donc le plus petit fermé contenant A.

6. La propriété est évidente.
7. On a $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Comme $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé qui contient $A \cup B$, on aura $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Inversement : On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, d'ou $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

8. On a $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cap B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   L'inverse est faux. En effet :
   Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, posons $A = [0, 1[$ et $B = [1, 2[$, on a $A \cap B = \phi$, d'ou $\overline{A \cap B} = \phi$, mais $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$, et par suite $\overline{A \cap B}$ ne contient pas $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Proposition 1.8. (Définition métrique de $\overline{A}, A'$ et points ésolés) *(E, d) un espace métrique. A une partie de E et $x \in E$.*

1. $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \Phi.$
2. $x \in A' \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x, r) - \{x\} \cap A \neq \Phi.$
3. *x est un point isolé de A* $\Longleftrightarrow \exists r > 0,\ B(x, r) \cap A = \{x\}.$

Exemple Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Pour la distance

$$d(x, y) = |x - y|,$$

une boule ouvert est donnée par,

$$B(x, r) =]x - r, x + r[.$$

Soit la partie $A =]1, 2] \cup \{3\} \cup [5, 6[$. On a

$$\bar{A} = [1, 2] \cup \{3\} \cup [5, 6]$$

et le point $x = 3$ est un point isolé puisque

$$\exists r = \frac{1}{2} > 0, \quad]3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}[\cap A = \{3\}.$$

Les points de $]1, 2] \cup [5, 6[$ sont les points d'accumulations de A.

Définition 1.18. *Soit A une partie de X. On dit que A **est dense dans** X si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.19. *On dit que (X, T) est **un espace topologique séparable,** s'il existe une partie A de X telle que A est dénombrable et $\overline{A} = X$.*

Exemple L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est séparable.

Définition 1.20. *Soit A une partie de X. On dit que le point $x \in X$ est* ***un point intérieur*** *de A, si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs de A est noté $\overset{\circ}{A}$. On a*

$$x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(x)$$

Définition 1.21. *Soit A une partie de X. On appelle frontière de A l'ensemble*

$$F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_X A}.$$

Propriétés 1.2. *Soient A et B deux parties de X.*

1. *L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{W \text{ } ouvert \subset A} W.$$

2. *A est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.*
3. *$C_X \overset{\circ}{A} = \overline{C_X A}$. $\quad C_X \overline{A} = \overset{\circ}{C_X A}$.*
4. *$\overset{\circ}{A} \subset A$ et l'intérieur de $\overset{\circ}{A}$ est $\overset{\circ}{A}$.*
5. *$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$*
6. *$F_r(A) = \overline{A} / \overset{\circ}{A}$.*

Démonstration

1. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors $A \in \mathcal{V}(x)$ et

$$\exists W \text{ (ouvert) tel que } \mathrm{x \in W \subset A},$$

d'où

$$x \in \bigcup_{W \text{ ouvert } \subset A} W.$$

Inversement.

$$x \in \bigcup_{W \text{ ouverts } \subset A} W,$$

alors

$$\exists W' \ tel\ que\ \ x \in W' \subset A,$$

donc

$$A \in \mathcal{V}(x) \ et\ \ x \in \overset{\circ}{A}.$$

2. Supposons que A est ouvert, donc A est le plus grand ouvert inclu dans A , d'ou $A = \overset{\circ}{A}$

Inversement : Si $A = \overset{\circ}{A}$, donc A est ouvert.

5. Donnons un contre-exemple pour la réunion des intérieurs, le reste est évident.

contre-exemple

Dans l'espace métrique usuel $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, prenons

$A = [2,3[$ et $B = [3,4[$, on a $A \cup B = [2,4[$, d'ou

$\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} =]2,4[$, mais $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]2,3[\cup]3,4[$, et par suite

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ ne contient pas $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$.

1.4 Limites

1.4.1 Limite d'une suite

Définition 1.22. *(E,T) un espace topologique, $\ell \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que ℓ est une **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \longrightarrow +\infty$, si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists n_V \in \mathbb{N} :\quad \forall n \geq n_V,\ \ x_n \in V.$$

On note

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

Proposition 1.9. ***(Définition métrique)***
Soit (X,d) un espace métrique, (x_n) une suite de X et $\ell \in X$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \ d(x_n,\ell) < \varepsilon.$$

Définition 1.23. *Un espace topologique (E,T) est **séparé** si*

$$\forall x,\ y \in E,\ x \neq y,\ \ \exists V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{V}(y),\ \textit{tels que}\ V \cap W = \phi.$$

(Deux points distincts de E se sépparent par deux voisinages disjoints.)

Proposition 1.10. *Un espace métrique (E,d) est toplogiquement séparé.*

Démonstration Soit $x \in E$ et $y \in E$, avec $x \neq y$. On a

$$d(x,y) > 0,$$

de plus il existe $r = \dfrac{d(x,y)}{3}$, tel que

$$B(x,r) \in \mathcal{V}(x),\ \text{et}\ B(y,r) \in \mathcal{V}(y) :\ B(x,r) \cap B(y,r) = \phi.$$

Proposition 1.11. *Dans un espace topologique séparé, si limite d'une suite existe, elle est* **unique**.

Démonstration Soit (E, T) un espace séparé. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_2 : \quad \ell_1 \neq \ell_2$$

Donc

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell_1), \ \ \exists n_V \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_V, \ \ x_n \in V,$$

et

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell_2), \ \ \exists n_W \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_W, \ \ x_n \in W.$$

Soit $M = \max(n_V, n_W)$, donc pour $\ell_1 \neq \ell_2$

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell_1) \ \ \forall W \in \mathcal{V}(\ell_2) \ \ \text{et} \ \ \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{M}, \ \mathrm{x_n} \in \mathrm{V} \cap \mathrm{W},$$

d'où

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell_1) \ \ \forall W \in \mathcal{V}(\ell_2), \ \ V \cap W \neq \phi.$$

Contradiction avec (E, T) séparé.

1.4.2 Limite d'une suite et adhérence

Proposition 1.12. *Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et A une partie de X.*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \subset A \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Démonstration
$(\Rightarrow)$. On a

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \phi.$$

En particulier, et d'après la remarque 1.5

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \phi,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A,$$

d'ou

$$x_n \in B(x, \frac{1}{n}),$$

de plus

$$x_n \longrightarrow x \text{ pour } \ \mathrm{n} \longrightarrow +\infty.$$

($\Leftarrow$). Soit $x \in E$, supposons qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_\varepsilon,\ x_n \in B(x, \epsilon),$$

et par suite $\forall \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \cap A \neq \phi$. Ce qui signifie que $x \in \overline{A}$.

Remarque 1.6. *La proposition 1.12 est généralement fausse dans le cadre générale des espaces topologiques*

1.5 Limite d'une fonction

Définition 1.24. *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et f une fonction de X dans X'. On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in X'$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \ \exists W \in \mathcal{V}(x_0),\ \ f(W) \subset V,$$

et on note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Proposition 1.13. ***(Définition métrique)***
Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et f une fonction de E dans E'. On a alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon,\quad d(x, x_0) \leq \alpha_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x), \ell) \leq \varepsilon,$$

ce qui s'écrit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon,\quad x \in B(x_0, \alpha_\varepsilon) \Longrightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon).$$

1.5.1 Continuité locale

Définition 1.25. *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques, soit f une fonction de X dans X'. On dit que f* ***est continue en*** *$x_0 \in X$ si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)),\ \ \exists W \in \mathcal{V}(x_0),\ \ f(W) \subset V.$$

Proposition 1.14. ***(Définition métrique)***
Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et f une fonction de E dans E', alors f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon,\ \forall x \in E\quad d(x, x_0) \leq \alpha_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.26. *Soit E et F deux espaces métriques. On dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ est séquentiellement continue en $x_0 \in E$, si l'image de toute suite convergente dans E, est une suite convergente dans F. Soit*

$$\forall (x_n) \subset E, \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Proposition 1.15. *Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et f une fonction de E dans E'. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *f est continue en un point $x_0 \in E$.*

(ii) *f est séquentiellement continue en x_0 :*

1.5.2 Continuité globale

Définition 1.27. *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques et f une fonction de X dans X'. On dit que f* **est continue sur** *X, ou (f est globalement continue), si f est continue en tout point x de X.*

Proposition 1.16. *Soient (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques et f une fonction de X dans X'. f est continue sur X si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert de X' est un ouvert de X. On écrit*

$$f \text{ continue sur X} \Longleftrightarrow \forall \mathrm{U} \in \mathrm{T}', \quad \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{U}) \in \mathrm{T}.$$

Démonstration

- ($\Longrightarrow$).
  Soit $u \in T'$, montrons que $f^{-1}(u) \in T$. Soit $x \in f^{-1}(U)$, alors $f(x) \in U$, donc U est un voisinage de $f(x)$, (car u est un ouvert.) Par continuité de f en tout point x, de X, on aura $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$. $f^{-1}(U)$ est donc voisinage de chacun de ces points, d'ou $f^{-1}(U)$ est un ouvert($f^{-1}(u) \in T$.).

•• ($\Longleftarrow$) Supposons que pour tout ouvert u de X', $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Soit $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}(f(x))$, donc $\exists U$ ouvert de X', tel que $U \subset V$. On a $x \in f^{-1}(U)$, et par hypothèse $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, d'ou $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$. En posant $W = f^{-1}(U)$, on a $f(W) = f(f^{-1}(U)) = U \subset V$, et donc

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), \;\; \exists W \in \mathcal{V}(x) : \; f(W) \subset V$$

.

Proposition 1.17. ***(Définition métrique)***
Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et f une fonction de E dans E', alors f est continue sur E si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists \alpha > 0,\ \forall y \in E,\ \ d(x, y) \leq \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.7. *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques et f une fonction continue de X dans X', alors l'image directe d'un ouvert de X n'est pas forécement un ouvert de X'.*

Définition 1.28. *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques et f une fonction de X dans X'. On dit que f est* ***ouverte*** *si l'image directe d'un ouvert de X est un ouvert de X'.*

Définition 1.29. *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques, et f une fonction de X vers X'. On dit que f* ***est un homéomorphisme*** *si*

1. *f est bijective.*
2. *f continue sur X.*
3. *f^{-1} continue sur X'.*

On dit que X et X' sont ***homéomorphes.***

Exemple Soit la fonction définie de $[0, 1[\cup[2, 3]$ vers $[0, 2]$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. f continue sur $[0, 1[\cup[2, 3]$.
2. f est bijective
3. f^{-1} n'est pas continue sur $[0, 2]$, car

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \to 1} f^{-1}(x) = 1 \neq f^{-1}(1),$$

d'où f n'est pas un homéomorphisme.

1.6 Comparaison de topologies et de distances

Proposition 1.18. *Soient T et T' deux topologies sur le même ensemble X. On a $T = T'$ si, et seulement si l'application Identité*

$$Id_X : X \to X \text{ est un homéomorphisme.}$$

Définition 1.30. *Soit T et T' deux topologies sur un ensemble X. On dit que T **est plus fine** que T' , si T a plus d'ouverts que T', c'est-à-dire $T' \subset T$. Dans ce cas, (T' est moins fine que T)*

Exemple Pour $X = \{a, b\}$, la topologie discrète

$$T_d = \mathcal{P}(X) = \{\Phi,\ \{a, b\},\ \{a\},\ \{b\}\}$$

est plus fine que la topologie grossière

$$T_g = \{\Phi,\ \{a, b\}\}$$

.

Proposition 1.19. *Soit X un ensemble, T et T' deux topologies sur X. T est plus fine que T' si, et seulement si l'application identité Id_X de (X, T) vers $(X, T'))$ est continue.*

Définition 1.31. *On dit que deux distances d et d', sur le même ensemble X, sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie sur X.*

Proposition 1.20. *Deux distances d et d', définies sur le même ensemble X sont toplogiquement équivalentes si et seulement si pour tout x de X, $d'(x, y)$ tend vers 0 quand $d(x, y)$ tend vers 0, et inversement $d(x, y)$ tend vers 0 quand $d'(x, y)$ tend vers 0.*

Dèmonstration
Il suffit d'écrire la continuité de l'application Id entre (X,d) et (X,d'), dans les deux sens.

Définition 1.32. *On dit que deux distances d et d', définies sur le même ensemble X. sont **métriquemnt équivalentes** si*

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \beta > 0 :\ \ \forall x,\ y \in E\ \alpha d(x, y) \leq d(x, y) \leq \beta d(x, y).$$

Proposition 1.21. *Si deux distances d et d', définies sur le même ensemble X, sont métriquemnt équivalentes alors elles sont toplogiquement équivalentes.*

Exemple Donnant sur $\mathbb{R}^2$, les trois distances $d_1,\ d_2,\ d_\infty$ définies pour tout $x = (x_1,\ x_2)$ et $y = (y_1,\ y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, par

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2},$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le 2} |x_i - y_i|,$$

alors les trois distances $d_1,\ d_2,\ d_\infty$ sont métriquement équivalentes.

1.7 Continuité uniforme et fonctions Lipschitziennes

La structure d'espace métrique est très riche, en particulier elle permet d'introduire des notions qui n'auraient pas de sens dans des espaces topologiques non métrisables. On introduit dans cette section deux types de fonctions continues, à savoir les fonctions uniformément continues et les fonctions Lipschitziennes. Restreints au espaces métriques, ces nouveaux types de continuités sont en générale plus fort que la continuité au sens toplogiques.

Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et f une fonction définie de E dans E'.

Définition 1.33. *On dit que f **est uniformément continue** sur E si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tau_\varepsilon > 0,\ \forall x,\ y \in E, \quad d(x,y) \le \tau_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) \le \varepsilon.$$

Définition 1.34. *On dit que f **est Lipshtzienne** de rapport $k > 0$ si*

$$\exists k > 0 :\ \forall x,\ y \in E,\ \ d'(f(x), f(y)) \le k \cdot d(x,y).$$

Proposition 1.22.

$$f \text{ est Lipschitzienne} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue} \Longrightarrow f \text{ continue.}$$

Démonstration
Montrons seulement que (f Lipschitzienne $\Longrightarrow f$ uniformément continue)
Si f est Lipschitzienne alors $\exists k > 0$ telle que

$$\forall x,\ y \in E,\ \ d'(f(x), f(y)) \le k \cdot d(x,y).$$

Si on pose $\tau_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{k}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tau_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} > 0,\ \forall x,\ y \in E, \quad d(x,y) \leq= \frac{\varepsilon}{k} \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) \leq k = \frac{\varepsilon}{k} \leq \varepsilon,$$

d'où f uniformément continue.

Exemple La fonction f de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, définie par

$$f(x) = \arctan(x).$$

f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, car elle est Lipschitzienne.
En effet : $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur $]x, y[$, continue sur $[x, y]$ alors d'après le théorème des acroissements finies

$$\exists c \in]x, y[, \quad |f(y) - f(x)| \leq f'(c)|x - y|.$$

Remarquons que

$$f'(c) = \frac{1}{1 + c^2} < 1,$$

d'où

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ \ |f(y) - f(x)| \leq f'(c)|x - y| < 1.|x - y|,$$

donc

$$\exists k = 1 \text{ tel que } \ \forall x,\ y \in \mathbb{R},\ |f(y) - f(x)| < k|x - y|,$$

et par suite la fonction f est Lipschitzienne de rapport $k = 1$, elle est donc unifomément continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.8. *On verra plus loins que si l'espace métrique E est de plus compact alors la réciproque de la proposition 1.22 est vraie, soit*

$$f \text{ est continue sur } E \Longrightarrow f \text{est uniformément continue sur } E.$$

Définition 1.35. *On dit que f* ***est un isométrie*** *si*

$$\forall x,\ y \in E,\ \ d(x,y) = d'(f(x), f(y)).$$

1.8 Exercices

Exercice 1.1. *Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$. On définit sur T la topologie*

$$T = \{X; \phi; \{a\}; \{a, b\}; \{a, c, d\}; \{a, b, c, d\}; \{a, b, e\}\}.$$

1. *Vérifier que T est bien une topologie sur X.*
2. *Donnez les fermés de cette topologie puis l'adhérence de $A = \{a, b, c\}$. Que peut-on déduire*
3. *Calculer l'intérieur de A. En déduire la frontiére de A.*

Exercice 1.2. *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Pour tout point x de X, montrer que*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de } A : \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Exercice 1.3. *Soit (E, d) un espace métrique.*

1. *Montrer directement qu'une suite convergente a une limite unique.*
2. *Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x équivaut à $d(x_n, x)$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x alors l'ensemble $B = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \cup \{x\}$ est borné.*

Exercice 1.4. *Soit la fonction f définie entre les deux espaces topologiques X et Y. Montrer que*

$$f \;\text{ est }\; \text{continue} \Longleftrightarrow \forall A \subset X, \;\; f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

Exercice 1.5. *Soient f et g deux applications continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique séparé Y.*

1. *Montrer que l'ensemble $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.*
2. *Déduire que si F est un sous espace dense de X, alors : $[\forall x \in F, f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) = g(x).]$*

Exercice 1.6. *Soient f et g deux applications continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique séparé Y.*

1. *Montrer que les singletons $\{y\}$ de Y, sont des ensembles fermés.*
2. *En déduire que l'ensemble $F = \{x \in X : f(x) = y\}$ est un fermé dans X.*

Exercice 1.7. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ une partie non vide, et $y_0 \in E$, un élément fixé de E. On définie deux applications :*

$$\begin{array}{rccl} f_{y_0}: & E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & f_{y_0}(x) = d(x, y_0) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccl} g_A: & E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & g_A(x) = d(x, A) \end{array} .$$

1. *Montrer que f_{y_0} et g_A sont continues sur E.*
2. *On pose pour tout $n \geq 1$, $A_n = \{x \in E : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$.*
   (a) *Montrer que $\forall n \geq 1$, A_n est ouvert.*
   (b) *Montrer que $\overline{A} = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$.*

Exercice 1.8. *Soient X et Y deux espaces topologiques tel que Y est séparé. Soit G_f le graphe de la fonction f. Montrer que si f est continue alors G_f es fermé dans $X \times Y$.*

Exercice 1.9. *Soit (X, T) un espace topologique. Montrer que :*

1. *Si T est la topologie grossière alors toute suite converge vers tout point de X.*
2. *Si T la topologie discrète alors les suites convergentes sont les suites stationnaires (i.e $\exists n_0 : \forall n \geq n_0, x_n = x_{n_0}$).*

Exercice 1.10. *Si (E, d) est un espace métrique discret et*

$$d' = \left\{ \begin{array}{lll} 1, & si & x = y, \\ 0, & si & x \neq y. \end{array} \right. .$$

1− *Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes.*

2− *Montrer que si les espaces (E, d_1) et (F, d_2) sont isométriques alors les espaces E et F sont homéomorphes*

3− *En utilisant 1), montrer que la réciproque de 2) est fausse.*

Exercice 1.11.

1− *Soit (E, d) un espace métrique, montrer que les deux distances suivantes sont équivalentes :*

$$\lambda(x, y) = \min(1, d(x, y)), \quad \beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

1.9 Espaces métriques complets

On va introduire dans ce chapitre une condition nécessaire pour la convergence d'une suite dans un espace métrique, à savoir la ***condition de Cauchy***, elle peut eventuellement être suffisante, dans ce cas l'espace métrique est **complet**. Ce type d'espaces représente le cadre naturel pour beaucoup de théorème d'existence dans l'analyse.

Définition 1.36. *Soit (X,d) un espace métrique et (x_n) une suite de E. On dit que (x_n) est **une suite de Cauchy** si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon > 0,\ \ \forall p,\ q \geq n_\varepsilon, \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Proposition 1.23. *Soit (X,d) un espace métrique, alors toute suite convergente dans E est une suite de Cauchy de (E,d).*

Démonstration
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $x \in E$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > 0; d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q > n_0$, on aura alors

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad d(x_p, x) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et }\ \mathrm{d(x_p, x)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \ \forall p, q \geq n_0,\ d(x_p, x_q) < d(x_p, x) + d(x, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Remarque 1.9. *L'inverse n'est pas toujours vrais, en particulier une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente.*

Contre-exemple. Soit $F =]0,1]$ et (x_n) une suite définie comme suit

$$x_n = \frac{1}{n}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. $(x_n) \subset F$
2. (x_n) de Cauchy. En effet

$$d(x_p, x_q) = |x_p - x_q| = |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}| \leq \frac{1}{p}.$$

Remarquons que

$$p > [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \Longrightarrow |x_p - x_q| < \frac{1}{p} < \varepsilon,$$

donc en posant $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, on aura

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall p, q > n_\varepsilon, \ \ |x_p - x_q| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. En revanche

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin F,$$

donc (x_n) n'est pas convergente dans F.

Définition Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et x un élément de X. Alors x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Proposition 1.24. *Soit (X, d) un espace métrique. Si une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette valeur.*

Démonstration Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on aura alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon > 0, \ \ \forall p, \ q \geq N_\varepsilon, \ \ \ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Soit l la valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe alors une sous-suite de $(x_{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M_\varepsilon > 0; \ \ \forall n > M_\varepsilon, \ \ d((x_{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}, l) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $M = Max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$, il existe $n_1 > M$ tel que

$$d(x_{n_1}, l) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de plus

$$\forall n > M, \ \ d(x_n, l) < \underbrace{d(x_n, x_{n_1})}_{1} + \underbrace{d(x_{n_1}, l))}_{2} < \varepsilon,$$

car

$$d(x_n, x_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'après la propriété de Cauchy,}$$

et

$$d(x_{n_1}, l)) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'après la convergence de la suite extraire.}$$

Par suite la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Définition 1.37. *On dit qu'un espace métrique* (E, d) ***est complet*** *si toute suite de Cauchy est convergente dans* E.

Remarque 1.10. *Dans les espaces métriques complets, la convergence d'une suite est complétement caractérisées par la propriété de cauchy. Ce résultat est particuliérement important car dans beaucoup de théorèmes d'existance, on s'intéresse par l'existance de la lamite sans l'expliciter.*

Exemple

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique complet.
2. L'exemple précédent montre que $(]0,1], |\cdot|)$, comme sous-espace métrique de $\mathbb{R}$, n'est pas complet.

Proposition 1.25. *Soit* (E, d) *un espace métrique complet, soit* A *un ensemble de* E. *Alors on a*

$$A \text{ est fermé} \Longleftrightarrow A \text{ est complet.}$$

Démonstration

- $(\Longrightarrow)$.
  Si (x_n) une suite de Cauchy dans A, donc (x_n) une suite de Cauchy dans E,. Comme E est complet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E, et puisque A est fermé donc $\overline{A} = A$, et donc $x \in \overline{A} = A$ ((d'après la proposition 1.12)), d'où A est complet.

•• $(\Longleftarrow)$.
  Soit $x \in \overline{A}$, d'aprés la proposition 1.12

$$\exists (x_n) \in A, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

  d'ou (x_n) est convergente dans E, elle est donc de cauchy dans E, donc dans A. Comme A est complet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A. Par unicité de la limite dans un espace métrique, $x \in A$ et donc $\overline{A} \subset A$, et par suite A est fermé.

1.10 Exercices

Exercice 1.12. *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de E. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Montrer que :*

$(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$.

Exercice 1.13. 1− *Décrire les suites de Cauchy d'un espace métrique discret (E, d) et montrer qu'il est complet.*

2− *Montrer que l'espace $(\mathbb{Z}, d)$ où d est la distance induite de $\mathbb{R}$, est complet.*

Exercice 1.14. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f\, continue\}$

1− *Montrer que l'espace (E, d) est complet où d est la distance définie par :*

$$d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

2− *Montrer que E n'est pas complet pour la distance d' où $d'(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$*

<u>Indication :</u> On peut considérer la suite de fonctions : $f_n(t) = \min\{n, \frac{1}{\sqrt{t}}\}$, et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, d(f_n, f_{n+1}) < \frac{1}{n}$.

Exercice 1.15. *(Théorème de Point fixe).*

1− *(E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow F$ une application contractante i.e : $\exists k \in]0,1[, \forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ (f est k-Lipschitzienne avec $k \in]0,1[$).*

a) *On pose $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$. Montrer que $d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq k^n d(x_1, x_0)$.*

b) *En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

c) *Si a est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que a est un point fixe de f ($f(a) = a$).*

d) *Montrer que a est l'unique point fixe de f et que :*

$$\forall x \in E, \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = a$$

2− *<u>Application :</u>*

Soit $E = [\frac{2}{3}, +\infty[$, sous espace métrique de $\mathbb{R}, |\cdot|$, et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$.

1− *Montrer que* E *est espace métrique complet et que* $E \subseteq f(E)$.

2− *Montrer que* f *est contractante et calculer l'unique point fixe de* f.

3− *En prenant* $x_0 = \dfrac{2}{3}$ *calculer* x_1, x_2, x_3, x_4 *et è valuer l'approximation obtenue de* a .

CHAPITRE 2

Espaces compact

Définition 2.1 (Borél-Lebesgue). *On dit qu'un espace topologique séparé* (X, T) *est* ***compact*** *si de tout recouverement ouvert de* X*, on peut extraire un recouverement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts* $(O_i)_{i\in I}$*, on a*

$$X = \bigcup_{i\in I} O_i \Longrightarrow \exists J = \{1, \ldots, n\} \subset I \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} O_i.$$

Par passage au complémentaire, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Un espace topologique séparé* (X, T) *est compact si et seulement si de toute famille fermés* $(F_i)_{i\in I}$ *de* X*,, d'intersection vide, on peut extraire une famille finie d'intersection vide. Soit*

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \phi \Longrightarrow \exists J = \{1, \ldots, n\} \subset I : \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \phi.$$

Définition 2.2. *Soit* (X, T) *un espace topologique séparé et* A *sous-ensemble de* X*. On dit que* A ***est compact*** *si* (A, T_A) *est compact. C'est-à-dire* A *est compact pour la topologie induite par* X*.*

Exemples

1. L'ensemble vide est compact.
2. Un ensemble finie est compact pour tout topologie séparée.

3. $\mathbb{R}$ n'est pas compact car

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, n[=]-1,1[\cup]-2,2[\cup \ldots]-n,n[.$$

On ne peut pas extraite un nombre finie d'ouverts qui recouvrent $\mathbb{R}$.

2.1 Partes Compactes dans les espaces métriques

Théorème 2.1. *Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E. Les assertions suivantes sont equivalentes*

1. *A compact*
2. *Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation.*
3. *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A (non nécessairement convergente), on peut extraire une sous-suite convergente.*

Corollaire 2.1. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration Soit (E, d) un espace métrique compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\bigcup_{x\in E} B(x, \dfrac{1}{n+1})$, est un recouvrement de E. Puisque E est compact alors on peut extraire un recouverement fini, c'est-à-dire

$$E = \bigcup_{k=0}^{N_n} B(x_{k,n}, \frac{1}{n+1}).$$

Donc l'ensemble

$$A = \{x_{k,n}, \;\; k \in \{0, \ldots N_n\}, \; n \in \mathbb{N}\},$$

est dénombrable et dense dans E.

Théorème 2.2 (Théorème de Hein-Borel-Lebesgue)**.** *Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration Comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique. Pour montrer que $A = [a, b]$ est compact, il suffit de montrer, d'aprés le théorème 2.1, que de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergente. Soit alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A, On considère le couple $(a_k, b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[a, b] \times [a, b]$, et on pose $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Soit $a = a_0, \; b = b_0, \; c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

— **Premier cas** : Il existe une infinité de termes de (x_n) dans $[a_k, c_k]$, on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$, $c_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} + c_{k+1}}{2}$.
— **Deuxième cas :** S'il existe une infinité de termes de (x_n) dans $[c_k, b_k]$, on pose $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$, $c_{k+1} = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$.

On a forme ainsi deux suites adjacentes (a_k), (b_k), telles pour $\forall k \in \mathbb{N}$ il existe $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ et
$$\lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \ell.$$

2.2 Propriétés des compacts

Proposition 2.2. *Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E. Alors*
$$A \text{ est compact} \Longrightarrow A \text{ est fermé.}$$

Démonstration Il suffit de montrer que $C_E A$ est ouvert. Soit $y \in C_E A$, alors $\forall x \in A,\ \ x \neq y$. Puisque E est séparé
$$\exists V(\text{ouvert}) \in \mathcal{V}(x),\ \ \exists W(\text{ouvert}) \in \mathcal{V}(y),\ \ V \cap W = \phi.$$
Comme $A \subset \bigcup_{x\in A} V_x$ et A est compact, alors
$$\Big[A \subset \bigcup_{i=1}^{n\ (\text{fini})} V_{x_i} \text{ et } \Big(\bigcup_{i=1}^{n\ (\text{fini})} V_{x_i}\Big) \cap W = \phi\Big] \Longrightarrow W \subset C_E A.$$
D'où
$$\forall y \in C_E A,\ \ \exists W \text{ ouvert } y \in W \subset C_E A,$$
alors $C_E A$ est un ouvert et donc A est un fermé.

La réciproque de la proposition 2.2 est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.3. *Soit (E, d) un espace métrique compact et soit A une partie de E. Alors*
$$A \text{ est fermé} \Longrightarrow A \text{ est compact.}$$

Démonstration Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de A, tels que $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$, on montre qu'il existe une famille finie de fermés (F_j) de A tels que $\bigcap_{j=1}^{n} F_j = \phi$.

Puisque $\forall i \in I,\ F_i$ est un fermé de A, alors $F_i = A_i \bigcap A$ où A_i est fermé de E et on a

$$\phi = \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I}(A_i \bigcap A) = (\bigcap_{i\in I} A_i) \bigcap A,$$

d'où $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \phi$. Donc puisque $(A_i)_{i\in I}$ est fermé de E et E un compact alors

$$\exists (A_j)_{j=1}^n,\ \ \bigcap_{j=1}^n A_j = \phi,$$

donc

$$\phi = (\bigcap_{j=1}^n A_j) \bigcap A = \bigcap_{j=1}^n (A_j \bigcap A) = \bigcap_{j=1}^n F_j.$$

Corollaire 2.2. *Pour toue partie A de $\mathbb{R}$, on a*

$$A \textit{ est compact} \iff A \textit{ est fermée et bornée.}$$

Démonstration

— $(\Longrightarrow)$
Supposons que A bornée, alors

$$\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ \ |x| \leq M,$$

d'où $A \subset [-M, M]$. Comme A est fermée dans un compact $[-M, M]$, alors d'aprés le théorème 2.3 A est un compact.

— Inversement :
Supposons que A est un compact de $\mathbb{R}$, comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est separé, donc d'aprés la proposition 2.2 A est fermée. Il reste à montrer que A est bornée. Supposons que A n'est pas bornée donc

$$\forall M > 0,\ \ \exists x_M \in A,\ \ |x_M| > M,$$

en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists x_n \in A,\ \ |x_n| > n.$$

Comme A est compact, on peut alors extraire une sous-suite x_{y_n} qui converge vers $a \in A$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 > \ \exists n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\quad |x_{y_n} - a| < \varepsilon,$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0 > \ \exists n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\quad x_{y_n} \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

contradiction avec $x_{y_n} > n$.

2.3 Union, intersection, produit des compacts

Proposition 2.3. *Dans un espace topologique séparé, l'union fini de compacts est un compact.*

Démonstration Soit $(A_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie de compacts. Montrons que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ reste compact.
Supposons que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{k\in I} O_k,$$

existe-il $(O_k)_{k\in\{1,\dots m\}}$ tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{k=1}^{m} O_k?$$

Comme $\forall i \in \{1,\dots n\}$, $A_i \subset \bigcup_{k\in I} O_k$ et A_i compact, alors

$$\forall i \in \{1,\dots n\},\ A_i \subset \bigcup_{k=1}^{m} O_k \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{k=1}^{m} O_k),$$

on ait arrivé donc à extraire un recouvrement finie d'ouverts pour $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, qui est donc un compact.

Proposition 2.4. *Dans un espace topologique séparé, l'intersection quelconque de compacts est un compact.*

Démonstration Si $(K_i)_{i\in I}$ des compacts d'un espace topologique séparé alors, d'aprés la proposition 2.2, $(K_i)_{i\in I}$ sont des fermés, d'ou $\bigcap_{i\in I}(K_i)$ est un fermé. D'aprés le théorème 2.3 et puisque $\bigcap_{i\in I}(K_i) \subset K_i$ compact, on a $\bigcap_{i\in I}(K_i)$ est un compact.

Théorème 2.4 (De Tychonoff). *Le produit d'espaces topologiques compacts est un compact.*

Corollaire 2.3. *Les pavés,* $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, *sont des compacts de* $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2.4. *Les compacts de* $\mathbb{R}^n$ *sont les parties fermées et bornées.*

2.4 Fonctions continues et compacité

Théorème 2.5. *Soient* (X, T) *et* (Y, T') *deux espaces topologique séparés et* f *une fonction continue de* X *vers* Y. *Si* A *est une partie compacte de* X, *alors* $f(A)$ *est une partie compacte de* Y.

Démonstration Soit $\bigcup_{i \in I} B_i$ un recouvrement ouvert de $f(A)$,

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in I} B_i \Longrightarrow A \subset f^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} B_i\big) \Longrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Comme A est compact, il existe un recouvrement fini de A, c'est-à-dire

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\big) \Longrightarrow f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

d'où $f(A)$ est compact.

Corollaire 2.5. *Soit* (X, T) *un espace topologique compact et* f *une fonction de* X *vers* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$f \text{ continue sur } X \Longrightarrow f \text{ est bornée.}$$

Démonstration On a X est compact et f est continue, alors d'aprés le théorème 2.5, $f(X)$ est un compact dans $\mathbb{R}$. D'aprés le corollaire 2.2, les partie compact de $\mathbb{R}, |\cdot|$ sont les parties fermées et bornées, d'où $f(X)$ est fermée et bornée. En particulier f est bornée.

Remarque 2.1. *Soient* (X, T) *et* (Y, T') *deux espaces topologique, avec* Y *est compact et soit* f *une fonction continue de* X *dans* Y. *Cela n'implique pas nécessairement que* $f^{-1}(Y)$ *est un sous-ensemble compact de* X.

Exemple Soit P la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des abscisses, donc

$$P([-1, 1] \times [0, +\infty[) = [-1, 1].$$

On a P est continue et $[-1, 1]$ est un compcat de $\mathbb{R}$, mais
$P^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1] \times [0, +\infty[$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $[0, +\infty[$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$.

Définition 2.3. *Soient* (X, T) *et* (Y, T') *deux espaces topologique et* f *une fonction continue de* X *dans* Y. *On dit que* f *est une fonction propre, si pour tout compact* K *de* Y *on a* $f^{-1}(K)$ *est un compact de* X.

2.5 Fonctions uniformément continues et compacité

Théorème 2.6 (Théorème de Heine)**.** *Soient* (X, T) *et* (Y, T') *deux espaces topologique et* f *une fonction de* X *vers* Y*, si* X *est compact alors*

$$f \text{ est continue} \iff f \text{ est uniformément continue.}$$

2.6 Exercices

Exercice 2.1.

1. *Soit (E, θ) un espace topologique tel que card θ est fini. Montrer que E est compact. En déduire que tout espace topologique fini est compact.*
2. *Soit $\mathbb{N}$ muni de la topologie discréte.*
   a) *Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas compact.*
   b) *Montrer qu'un espace discret est compact si et seulement si il est fini.*

Exercice 2.2. *E un espace vectoriel normé. A et B deux parties de E,*

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

1. *Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé.*
2. *Donner deux fermés de $\mathbb{R}^n$ dont la somme n'est pas fermé.*

Exercice 2.3. *Soient K et L deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé E.*

Montrer que : $d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|x - y\| > 0$

Exercice 2.4. *Soit E un compact d'un espace métrique (F, d) et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application localement bornée, c'est à dire :*

$$\forall y \in E, \exists v_y \in \mathcal{V} : f \text{ est bornée sur } v_y.$$

Montrer que f est bornée sur E.

Exercice 2.5. *Soit K un compact d'un espace topologique séparé E et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au plus une valeurs d'adhérence dans K si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans K.*

CHAPITRE 3

Espaces connexes

Un espace connexe c'est un espace fait d'un seul morceau.

Définition 3.1. *On dit qu'un espace topologique* (X, T) ***est connexe****, s'il n'admet pas de partition non triviale en deux ouverts ou en deux fermés. Autrement dit les seuls parties ouvertes et fermées à la fois sont* X *et* ϕ.

ou aussi (X, T) n'est pas connexe si, et seulement si $\exists A_1$ ouvert $\exists A_2$ ouvert tels que $A_1 \neq \Phi$ et $A_2 \neq \phi$ et

$$E = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \phi.$$

Définition 3.2. *Soit* (X, T) *un espace topologique et* A *une partie de* X*. On dit que* A *est connexe dans* X *si* (A, T_A) *est connexe, où* T_A *est la topologie induite sur* A.

Exemple L'espace $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, puisque

$$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= V_1 \cup V_2,$$

où V_1, V_2 deux ouverts dans $\mathbb{R}$ et $V_1 \cap V_2 = \Phi$.

Proposition 3.1. *Soit* (X, T) *un espace topologique et* A *une partie de* X*. Alors* A *est convexe si, et seulement si l'existence de* V_1*,* V_2 *deux ouverts de* (X, T) *disjoints tels que* $A \subset V_1 \cup V_2$ *implique* $A \subset V_1$ *ou* $A \subset V_2$.

Démonstration
On a
$$A \subset V_1 \cup V_2 \Rightarrow A \cap [V_1 \cup V_2] = (A \cap V_1) \cup (A \cap V_2) = A.$$
De plus $V_1 \cap V_2 = \phi$, alors
$$(A \cap V_1) \cap (A \cap V_2) = A \cap (V_1 \cap V_2) = \phi,$$
et A est connexe, donc soit
$$A \cap V_1 = A \Rightarrow A \subset V_1,$$
ou
$$A \cap V_2 = A \Rightarrow A \subset V_2.$$

Cas particulier : Les partie connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Corollaire 3.1. *Un ensemble dénombrable n'est pas connexe.*

3.1 Fonctions continues et connexité

Théorème 3.1. *Soit (X, T_1) et (Y, T_2) deux espaces topologiques et soit f une fonction de X vers Y, alors l'image d'un connexe de X par la fonction f est un de Y.*

Démonstration Supposons que A est un connexe mais $f(A)$ n'est pas un connexe, donc il existe V_1 et V_2 deux ouverts tels que
$$f(A) = V_1 \cup V_2, \text{ et } V_1 \cap V_2 = \Phi,$$
donc
$$A \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2).$$
Puisque f est continue alors
$$f^{-1}(V_1) \text{ et } \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{V}_2) \text{ sont des ouverts de X.}$$
De plus
$$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \Phi,$$
Contradiction avec A connexe. Donc $f(A)$ est connexe.

Corollaire 3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit (X, T) un espace topologique connexe et f une fonction continue de X vers $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration Puisque X est un connexe et f continue alors $f(X)$ est un connexe dans $\mathbb{R}$ et puisque les parties connexes dans $\mathbb{R}$ sont les intervalles, alors $f(X)$ est un intervalle.

Proposition 3.2. *Un espace topologique (X, T) est connexe si, et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration

— $(\Rightarrow)$.

Soit f une fonction de X vers $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. La topologie de $\{0, 1\}$ est induite de $\mathbb{R}$ et on

$$T_{\{0,1\}} = \{\{0, 1\},\ \Phi,\ \{0\},\ \{1\}\}.$$

Dire que f est continue de X dans $\{0, 1\}$ signifie que

$$\forall u \in T_{\{0,1\}},\ f^{-1}(u) \in T$$

Puisque $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$, donc

$X = f^{-1}(\{0, 1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \Phi$.

On a

$$\{0\} \text{ et } \{1\} \ \in \ \mathrm{T}_{\{0,1\}} \Longrightarrow \mathrm{f}^{-1}(\{0\}) \text{ et } \mathrm{f}^{-1}(\{1\}) \ \in \mathrm{T},$$

car f es continue sur X. D'autre part X est connexe, donc

$$X = f^{-1}(\{0\}) \ \text{ et donc } \ \mathrm{f(x)} = 0, \ \ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}$$

ou

$$X = f^{-1}(\{1\}) \ \text{ et donc } \ \mathrm{f(x)} = 1, \ \ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X},$$

ce qui signifie que f est constante sur

— Inversement.
Supposons que $X = A \cup C_X A$, où A un ouvert de X et soit la fonction χ_A telle que

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Puisque χ_A est continue donc, d'aprés les hypothèses, elle est constante. Donc, soit

$$\chi_A(x) = 0, \ \ \forall x \in X \ \text{ alors } \ X = C_X A \text{ et } A = \Phi$$

ou

$$\chi_A(x) = 1, \ \ \forall x \in X \ \text{ alors } \ X = A \text{ et } C_X A = \Phi,$$

d'où X est connexe.

3.2 Union des connexes

Théorème 3.2. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes telles que $A_i \bigcap A_i \neq \phi$ pour tout $i \neq j \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Démonstration Supposons que

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset V_1 \cup V_2,$$

où V_1 et V_2 deux ouverts disjoints. Soit $i_0 \in I$ tel que

$$A_{i_0} \subset V_1 \cup V_2 \text{ et } V_1 \cap V_2 = \phi.$$

Comme A_{i_0} est convexe, on a

$$A_{i_0} \subset V_1 \text{ où } A_{i_0} \subset V_2.$$

Supposons que $A_{i_0} \subset V_2$, puisque $A_{i_0} \cap A_j \neq \phi$, pour tout $j \neq i_0$, donc

$$A_j \nsubseteq V_2$$

d'où

$$A_j \subset V_1 \ \ \forall j \neq i_0 \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subset V_1.$$

Même chose avec $A_{i_0} \subset V_2$, on obtient

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset V_2.$$

d'ou $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Remarque 3.1. *Soit $(A_i)_{i\in 1,\dots,n}$ une famille de connexes. Si $(A_i \cap A_{i+1} \neq \Phi)$ alors $\cup_{i=1}^n A_i$ est connexe.*

Définition 3.3. *Soit (X, T) un espace topologique, et $x \in X$. On appelle **la composante connexe** de x, le plus grand connexe qui contient x. C'est-à-dire*

$$C(x) = \bigcup_{x\in A_x} A_x, \quad \text{où } A_x \text{ connexe contient } x.$$

Exemple Soit $X = [2, 4] \cup [16, 20] = A_1 \cup A_2$

1. X n'est pas connexe.
2. La composante connexe qui contient $x = 2,5$ est $A_1 = [2, 4]$.

Proposition 3.3. *Les composantes connexes forment une partition de X.*

3.3 Adhérence d'un connexe

Théorème 3.3. *Soit (X, T) un espace topologique et soit A une partie de X. Si A est connexe alors $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration Soit f une fonction continue de $\overline{A}$ vers $\{0, 1\}$, il suffit de montrer que f est constante pour avoir $\overline{A}$ connexe. On a

$$A \subset \overline{A} \Rightarrow f(A) \subset f(\overline{A}) \subset \{0, 1\},$$

alors

$$A \subset f^{-1}(\{0, 1\}) \subset f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) \text{ et } f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \Phi,$$

mais A est connexe alors

$$A \subset f^{-1}(\{0\}) \text{ ou } A \subset f^{-1}(\{1\}),$$

d'où

$$\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(\{0\})} = f^{-1}(\{0\}) \text{ ou } \overline{A} \subset \overline{f^{-1}(\{1\})} = f^{-1}(\{1\}),$$

d'ou

$$\overline{A} \subset f^{-1}(\{0\}) \text{ et } f^{-1}(\{0\}) \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = f^{-1}(\{0\}),$$

ou

$$\overline{A} \subset f^{-1}(\{1\}) \text{ et } f^{-1}(\{1\}) \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = f^{-1}(\{1\}),$$

et par suite

$$\forall x \in \overline{A}, \ \ f(x) = 0 \text{ ou } \forall x \in \overline{A}, \ \ f(x) = 1,$$

on obtient donc f est constante sur $\overline{A}$. D'aprés la proposition 3.2, $\overline{A}$ est connexe.

Théorème 3.4. *Le produit des espaces connexes est toujours un connexe*

Corollaire 3.3. *Les pavés de $\mathbb{R}^n$ (produits de n intervalles de $\mathbb{R}$) sont des connexes.*

3.4 Connexité par arcs

Définition 3.4. *Soit (X, T) un espace topologique. On dit que X est* ***connexe par arcs*** *si on a $\forall x, \ y \in X$, il existe un chemin γ de $[0, 1]$ vers X (une application continue) telle que $\gamma(0) = x, \ \ \gamma(1) = y$.*

Théorème 3.5. *Soit (X, T) un espace topologique. Si X est connexe par arcs alors X est connexe.*

Démonstration
Soit X connexe par arcs. Supposons que X n'est pas connexe, donc

$$\exists \text{ deux ouverts } \mathrm{V}_1 \text{ et } \mathrm{V}_2 \text{ tel que } \mathrm{X} \subset \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2.$$

Soit

$$x \in V_1 \text{ et } \mathrm{y} \in \mathrm{V}_2.$$

Comme X est connexe par arcs, il existe alors un chemin γ de $[0,1]$ vers X continue et

$$\gamma(0) = x, \;\; \gamma(1) = y.$$

On pose $K = \gamma[0,1]$. Puisque $[0,1]$ est connexe et γ est continue, donc, d'aprés le théorème 3.1, K est connexe. De plus

$$K \subset X \subset K \cap (V_1 \cup V_2) \text{ et } \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 = \Phi.$$

Contradiction.

3.5 Exercices

Exercice 3.1. *Soit* $E = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $\theta = \{E; \phi; \{a\}; \{c, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d, e\}\}$.

1− E *est-il connexe ? les sous-espace* $\{a, e\}, \{b, c, d\}$ *sont ils-connexes ?*

2− *Démontrer qu'un espace discret est connexe si et seulement s'il est réduit à un point, et qu'un espace grossier est connexe.*

Exercice 3.2. *Soit* E *un espace topologique et* A *une partie connexe de* E. *Soit* B *une partie de* E.

1− *Montrer que si* $A \cup B \neq \phi$ *et* $A \cup C_E B \neq \phi$ *alors* $A \cup Fr(B) \neq \phi$. *(Théorème de passage de douanes)*

2− ***Cas particulier :***
<u>Théorème des valeurs intermédiaires :</u> Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, avec* E *connexe. Montrer que si* $f(x) = a < b = f(y)$ *alors* F *prend toutes les valeurs entre* a *et* b.

3− *Si* A *est une partie connexe, montrer que si* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ *alors* B *est connexe. En déduire que* $\overline{A}$ *est connexe.*

Exercice 3.3. *Soit* (E, T) *un espace topologique.*

1− *Pour tout* x *de* E *montrer que* $C(x)$ *est fermé dans* E.

2− *Montrer que si* E *a un nombre finie de composantes connexes alors : Pour tout* x *dans* E, $C(x)$ *est fermée et ouverte dans* E.

Exercice 3.4. *Un espace topologique* (E, T) *est localement connexes si tout point admet un system de voisinages connexes.*

1− *Montrer qu'un espace topologique discret ayant plus de deux points est localement connexe et non connexe.*

2− *Montrer que si un espace est localement connexe alors la composante connexe de chaque* $x \in E$ *est un fermé et ouverte de* E.

Exercice 3.5. *Soit* $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x > 1\} \subseteq \mathbb{R}^+$.

1− *Montrer que* A *et connexe. Calculer* $\overline{A}$.

2− *Montrer que* $\overline{A}$ *n'est pas localement connexe.*

3− *Montrer que* $\overline{A}$ *n'est pas connexe par arcs.*

CHAPITRE 4

Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *On appelle* ***une norme sur*** E*, toute application de* E *vers* $\mathbb{R}^+$*, noté* $\|\cdot\|$*, vérifiant* $\forall x,\ y \in E$,

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Définition 4.2. *On appelle* ***espace vectoriel normé****, le couple* $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 4.1. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé, alors*

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

est une distance sur E*. De plus la topologie associée a cette distance est compatible avec la structure vectoriel. C'est-à-dire*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} \varphi: & K \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array},$$

sont continues.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$. $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|,$$

définie une norme sur $\mathbb{R}^n$, où

$$\|x\| = d(x, 0) = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

2. Sur l'espace suivant

$$A = \{f : [a, b] \to \mathbb{R},\ \int_a^b f(x)dx < +\infty\},$$

l'application

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$$

n'est pas une norme. En effet :

Contre-exemples

Soit $E = [a, b] = [-2, 2]$ et f une fonction définie sur $E = [-2, 2]$, par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a
$\|f\| = \int_{-2}^{2} |f(t)|dt = 0$ mais f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$
car
$0 \in [-2, 2]$ et $f(0) = 1$.

3. Sur l'espace

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R},\ \ f \text{ est continue}\},$$

les applications suivantes

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt,\ \ \|f\|_2 = \big(\int_a^b |f(t)|^2 dt\big)^{\frac{1}{2}},\ \ \|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

sont des norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

4.1 Equivalence des normes

Définition 4.3. *On dit que les normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ ***sont équivalentes****, s'il existe* $\alpha,\ \beta > 0$ *telles que*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Corollaire 4.1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute les normes sont équivalentes.*

Définition 4.4. *On appelle* ***boule ouverte*** *de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E,\ \ \|x-a\| < r\}.$$

Définition 4.5. *On appelle* ***boule fermée*** *de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble*

$$B_F(a,r) = \{x \in E,\ \ \|x-a\| \leq r\}.$$

Définition 4.6. *On appelle* ***sphère*** *de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble*

$$S(a,r) = \{x \in E,\ \ \|x-a\| = r\}.$$

Proposition 4.2. *Pour les boules* $B(a,r)$*,* $B_F(a,r)$ *et la sphère* $S(a,r)$*, on a*

1. $B(a,r) = \overset{\circ}{B}_F(a,r)$.
2. $\overline{B(a,r)} = B_F(a,r)$.
3. $S(a,r) = F_r B_F(a,r)$.

4.2 Espaces de Banach

Définition 4.7. *On dit qu'un espace vectoriel normé* $(E,\|\cdot\|)$ *est un espace de Banach, s'il est complet pour la distance* d *associée à sa norme. C'est-à-dire que toute suite de Cauchy de* E *est convergente dans* E*, pour la distance* d*.*

Remarque 4.1. *La notion de Banach est importante, en particulier pour les espaces vectoriels normés de dimension infinie.*

Exemples

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.
2. Pour $E = (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, avec $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Proposition 4.3. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach*

Démonstration Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension finie, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} i: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & (x_1, ..., x_n), \end{array}$$

avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i$, et $(a_i)_{i\in 1,\dots,n}$ une base de E
i esr évidament un isomorphisme topologique, et de plus

$$\|x\|_E = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|i(x)\|_{\mathbb{K}^n},$$

d'où i est une isométrie, donc $i(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^n$, donc convergente, car $\mathbb{K}^n$ est complet, d'où la convergence de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans E (par continuité de i^{-1}), et par suite E est complet.

Remarque 4.2. *Le fait que l'application $i : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (définie dans la preuve précédente), soit un isomorphisme topologique et aussi une isométrie d'espaces normés, signifie qu'un espace vectoriel de dimension finie hérite toute les propriétés topologiques, métriques et algébriques de $\mathbb{R}^n$. En particulier la boule unité est compacte, ce qui donne que tout fermé borné est compact, c'est même une condition nécessaire et suffussante pour qu'un espace voctoriel normé soit de dimension fine.*

.

Proposition 4.4. *un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.*

4.2.1 Applications linéaires continues

Théorème 4.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *A est continue sur E*

2) *A est continue en 0_E*

3) *l'image par A de tout borné de E est un borné de F*

4) $\exists c > 0$ *tel que :* $\forall x \in E, \|A(x)\|_F \leq c\|x\|_E$

Exemple
$E = C([0,1],\mathbb{C})$, $\|f\|_E = \sup\limits_{[0,1]} |f(t)|$
Soit $t_0 \in [0,1]$, on définit A par

$$A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & Af = f(t_0), \end{array}$$

On a A est continue sur E, car

$$\forall f \in E, \quad \|Af\| = \|f(t_0)\| = |f(t_0)| \leq \sup_{[0,1]} |f(t)| = \|f\|_E.$$

Définition 4.8. *On note par $L(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéres de E dans F et par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des application linéaires et continues.*
$\forall A \in \mathcal{L}(E,F), \|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ *est une norme.*

Proposition 4.5. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\in E \ et\, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Théorème 4.2. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés, si F est un space de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 4.2. *Soit le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, alors $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est un espace de Banach*

4.3 Exercices

Exercice 4.1. *(***Normes et distances associées***)*

1. *Montrer que sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{C}^n$ *les applications suivantes sont des normes et déterminer les distances associées :*

$$\|x\|_\infty = max(|x_i|, i = 1, \cdots, n), \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

2. *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$*. On pose*

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Montrer que $(E, \|.\|_1)$ *est un espace normé et déterminer la distance associée.*

3. *Pour* $f \in E$*, on définit* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$*. Montrer que* $(E, \|.\|_\infty)$ *est un espace normé et déterminer la distance associée.*

Exercice 4.2. *Pour* $1 \leq p < +\infty$*, on définit l'espace*

$$l^p = \{x = (x_n)_{n\geq 0}, (x_n \in \mathbb{C}) : \sum_{n\geq 0} |x_n|^p < +\infty\}.$$

1. *Montrer que* l^p *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$*.*
2. *Pour* $x = (x_n)_{n\geq 0} \in l^p$*, soit*

$$\|x\|_p = (\sum_{n\geq 0} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $(l^p, \|.\|_p)$ *est un espace normé.*

3. *On note* l^∞ *l'essemble des suites* $x = (x_n)_{n\geq 0}$ *de nombres complexes qui sont bornées,c'est à dire*

$$\exists M > 0, \forall n \geq 0, \|x_n\| \leq M.$$

Montrer que $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ *tel que* $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$ *est un espace vectoriel normé.*

4. *Les espaces* l^1 *et* l^2 *sont-ils des sous espaces normés de* l^∞ *?*

Exercice 4.3. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé, et* d *la distance associée.*

1. *Démontrer que* d *satisfait les axiomes de compatibilité suivante :*

$$\begin{array}{lll} \forall x, y, t \in E & d(x+t, y+t) = d(x, y) & \textit{(invariance par translation)} \\ \forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, & d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) & \end{array}$$

2. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel munit d'une distance* d *vérifiant les axiomes précédentes. Montrer que*

$$\| \cdot \| \colon E \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \|x\| = d(x, 0)$$

   définit bien une norme sur E*, dont la distance associée est* d*. Conclusion ?*

3. *Soit* E *un espace vectoriel muni de la distance discrète. Peut-on en faire un espace normé ?*

Bibliographie

[1] K.ALLAB,*Fonctions d'une variable réelle*, Vuibert, France, 1980

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle ; théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques, Topologie générale, chapitres 5 à 10*, Hermann, Paris, 1974.

[4] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse, tome 1, fondements de l'analyse moderne*, édition française, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[5] A.Faisant,*TP et TD de topologie générale*, Méthodes, Hermann, Paris,1977.

[6] M.HAZI, *Topologie au delà des travaux dirigés* ,OPU, Alger, 2015

[7] A.N. Kolmogorov & S.V. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, traduit du russe, MIR, Moscow, 1974.

[8] S. Lang, *Real and functional analysis*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 1993.

[9] F. Riesz & B. Sz. Nagy, *Analyse fonctionnelle*, 6-ème édition française, Gauthier-Villars, Paris, 1975.

[10] V.A. Rokhlin & D.B. Fuchs, *Premier cours de topologie ; chapitres géométriques*, traduit du russe, MIR, Moscow, 1981.

[11] W. Rudin, édition française, *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience International, Paris, 1995.

[12] L. Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1976.