Faculté des Sciences	Université 20 Août 55 SKIKDA	كلــــــية العلـــــوم

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Sur les équations différentielles Stochastiques avec retard

Option : Commande Optimale et Système Dynamique

Par :
ABOUBOU Fatima

Encadré par : CHALABI . El-Hacène. M.C.A. U. CONSTANTINE

Devant le jury :

PRESIDENT : OUAOUA. Amar M. C.A. U. SKIKDA

EXAMINATEUR : LALLOUCHE. Abd Allah M.C.B.U. SKIKDA

Année : 2021/2022

dédicace

A celui qui la préféré à moi, elle n’a ménagé aucun effort sauf pour mon bonheur toujours : ma mère bien-aimée

A celui qui a un bon cœur et de bonnes actions : cher père

A mes chers frères et sœurs.

A ma grand-mère, que Dieu la préserve, ma famille et mes amis.

A tous ceux qui se sont tenus à mes côtés, à tous ceux qui m’ont aidé, je leur dédie mes notes de fin d’études.

Priant le Tout-Puissant de prolonger leur vie et de leur accorder des primes.

Remerciements

Le premier à le remercier et à le louer est le vase de la nuit et des extrémités du jour. Ll est le Très-Haut, le dominateur, le premier, le dernier, l'Extérieur et l'intérieur, Qui nous a inondés de Ses innombrables bénédictions et a illuminé nos chemins, à lui beaucoup de louanges et de grandes louange.

Louange à Dieu tout-puissant, qui m'a donné la fermeté et m'a aidé à terminer cette recherche scientifique après avoir voyagé pour mette des points sur des lettres et révéler ce qui se cache derrière le rideau de la science et de la connaissance et voici les fruits de la science qui ont muri et il est temps de les cueillir Ces mots épars les murmurent à tous ceux qui ouvriront ce carnet.

Je remercie très chaleureusement mon encadreur Chalabi EL-Hcene pour vas échanges scientifique, vas conseils et votre rigueur.

Je remercie Ouaoua Amar, pour avoir accepté de présider ce jury, pour son aide scientifique et ses conseils.

Je remercie Alouche Abd Allah, pour d'avoir accepté d'être membre de ce jury en tant qu'examinateur de ce mémoire.

Qui m'a aidé à accomplir mes recherches, et je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, et nous formons tous les professeurs du Département de Mathématiques.

ملخص

في هذه المذكرة أعتبرنا معادلة دالية تفاضلية في الفضاء $\left((-\infty,0];\mathbb{R}^d\right)$. لقد قمنا ببرهان وجود ووحدانية حل هذه المعادلات مع الشرط الخطي التزايدي و الشرط المنتظم لليبشتز.

الكلمات المفتاحية: الحساب العشوائي - المعادلات التفاضلية العشوائية - الحركة البراونية - قانون إيطو.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous avons considéré une équation de fonctionnelles différentielles stochastiques avec retard dans l'espace de phase $\left((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}^d\right)$. Nous avons démontré l'existence et d'unicité de solution EFDS sous les conditions de croissance linéaire et la condition uniforme de Lipschitz.

Mots-clés : Calcul Stochastique - équations différentielles stochastiques - Mouvement Brownien - Formule d'Itô.

ABSTRACT

In this memory, we consider a stochastic functional differential equation with delay at phase space $\left((-\infty, 0]\,; \mathbb{R}^d\right)$. We prove the existence and uniqueness of the solutions to SFDEs with the coefficients satisfying the linear growth condition and the classical Lipschitz condition.

Key words : Stochastic Calcul - Stochastic differential equation - Brownian motion - ITô's formula. res

Introduction

Avec le développement rapide de la théorie de l'analyse stochastique, les équations différentielles stochastiques (EDS) sont largement utilisées en science des systèmes, la science de l'ingénieur, la science écologique et d'autres domaines. L'état de tels systèmes ne dépend pas seulement de l'état présent mais aussi sur son historique (retard), ce qui conduit à étudier les EDS avec retard plutôt que les EDS. Beaucoup de mathématiciens ont étudié ce type d'équations. Prenons comme exemple :[?]. Le développement de la théorie des équations de fonctionnelles différentielles à retards infini dpendent du choix d'un espaces de phase. En fait, différents espaces de phase ont été considérés, et chaque espace de phase différent a nécessité un développement séparé de la théorie. Suivant cette voie, Wei et wang [11] ont introduit les équations de fonctionnelles différentielles stochastiques à retard infini (EFDSRI) dans l'espace des phases $C_B\left((-\infty,0]\,.\mathbb{R}^d\right)$, qui désigne la famille de fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs φ dans $(-\infty,0]$ de norme $||\varphi|| = \sup\limits_{\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|$. lls ont obtenu l'existence et l'unicité des solutions de EFDSRI avec les conditions de Lipschitz uniformes et la condition de croissance linéaire. En outre, Ren et all. [10] ont généralisé l' existence et l'unicité des solutions aux EFDSRI sous des condition non Lipschitziennes avec la condition de Lipschitz étant considéré comme un cas particulier, et la solution est construite par approximation successive.

Dans ce mémoire nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution d'équations différentielles stochastiques de la forme suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dB(s),$$

En présence de conditions sur retard.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre nous avons rappelé quelques notions et définitions de probabilités utilisées dans la suite de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on donnera les résultats et les propriétés de calcul stochastique (martingales, mouvement brownien, intégrale stochastique, et formule d'Itô).

Dans le troisième chapitre, On présente les équations différentielles stochastiques. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique avec retard.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions de probabiliés utilisées dans la suite de ce mémoire.

1.1 Espace mesurable

Définition 1.1 (Tribu) Soit un ensemble E non vide et $T \subset P(E)$. T est dite tribu sur E ssi.

1. $E \in \mathcal{T}$,
2. $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{T},$ *alors* $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$,
3. *si* $A \in \mathcal{T}$, *alors* $A^c \in \mathcal{T}$.

Définition 1.2 (Sous-tribu) Une sous-tribu $\mathcal{F}$ d'une tribu $\mathcal{T}$ est une tribu telle que $\mathcal{F} \in \mathcal{T}$, si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$.

Définition 1.3 La tribu engendrée par la famille des ouverts d'une topologie est la tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\Omega)$. Les éléments de la tribu borélienne. $\mathcal{B}(\Omega)$ s'appellent les ensembles boréliens de Ω.

Définition 1.4 (Espace mesurable) Un ensemble muni d'une tribu $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé un espace mesurable.

Définition 1.5 (**Filtration**) On appelle filtration toute famille de sou-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante (i.e $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$).

1.2 Loi normale

La loi normale est une loi trés importante en probabilités et en statistique.
– Elle apparaît dans de nombreux problèmes courants (pour les modéliser).
– On peut approcher plusieurs lois par une loi normale.
– On dispose de la table de ses valeurs à laquelle on se réfère pour des calculs approchés.

Définition 1.6 On dit que la variable aléatoire $(v.a)$ X suit une loi normale (ou loi de Gauss) de paramètres μ et σ et on écrit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si sa fonction de densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Son espérance est $\mathbb{E}[X] = \mu$ et sa variance est $Var(X) = \sigma^2$.

Définition 1.7 On dit que la variable aléatoire $(v.a)$ Y suit une loi normale centrée et réduite (standard) si son espérane est nulle est sa variance gale à 1 et on écrit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Alors sa fonction de densité est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Remarque 1.1 Cette loi est fondamentale en théorie des probabilités et en statistique. : C'est la loi limite de la moyenne dans une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. En pratique elle sert à modéliser les effets additifs de petits phénomènes aléatoires indépendants répétés souvent.

Propriétés de la loi normale.

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $aX \sim \mathcal{N}(a\mu, |a|\,\sigma)$.

Soient $X_1,\ X_2$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Alors

$$(X_1 + X_2) \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Théorème 1.1 *(T.C.L) Soient $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{n})$$

Notez encore qu'on peut facilement passer d'une loi normale quelconque à la loi normale centrée réduite.

Proposition 1.1 *Si la v.a.*$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$*, alors la v.a* $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. *En effait, pour faire des calculs effectifs de probabilité, grace à ce résultat, on commencera systématiquement par se ramener d'une loi normale quelconque* $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ *à la loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$. *On pourra alors utiliser la table des valeurs pour cette loi.*

CHAPITRE 2

Processus stochastiques

Un système est à évolution aléatoire s'il peut prendre au cours du temps une série d'état successif, sans qu'il soit possible d'en prévoir sa configuration exacte à un instant futur, son évolution au cours du temps dépend donc du hasard. En d'autres termes, ces situations ne peuvent pas être étudiées en utilisant simplement le calcul des probabilités qui décrit des événements où le résultat possible de chaque épreuve est un nombre. L'étude de ces systèmes évoluant d'une manière aléatoire avec le temps et présentant parfois un caractère périodique est un vaste sujet. Ces systèmes ont été étudiés par Markov (1906), qui a fait l'hypothèse que le passé et le futur étaient indépendants étant donné le présent [2]. Puis les bases théoriques et mathématiques ont été formulées par Paul Lévy (1931), Doob (1933) après que Kolmogorov a élaboré la théorie mathématique du calcul des probabilités, résultant elle-même de la théorie de l'intégration. Ils ont des applications dans de nombreux domaines, en économie, en recherche opérationnelle, et peuvent intervenir dans l'étude de problèmes plus spécifiquement physiques.

- L'état de la fortune d'un joueur dans un jeu de hasard.
- Le débit journalier d'une rivière.
- En recherche opérationnelle, les problèmes de file d'attente, les arrivées de clients dans un service, le stock de pièces détachées dans un atelier.
- L'évolution démographique d'une population.
- La propagation d'une épidémie, ...etc.

Définition 2.1 Un processus stochastique est une collection de variable aléatoires indexées par le temps, i.e $\mathbb{R}_+$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$.

Définition 2.2 Un processus stochastiques $(X(t))_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires si la loi de $X(t_1+s)-X(t_1)$ ne dépend que de s, i.e

$$\forall t_1,\ t_2,\ s \geq 0,\ X(t_1+s)-X(t_1) \overset{\mathcal{L}}{=} X(t_2+s)-X(t_2).$$

$(X(t))_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, la famille de variables aléatoires $(X(t_1)-X(t_0),\ ...,\ X(t_n)-X(t_{n-1}))$ indépendante.
$(X(t))_{t\geq 0}$ est un processus gaussien (ou normale) si pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$, le vecteur $(X(t_0), ..., X(t_n))$ est gaussien.

2.1 Espérance conditionnelle

Dans cette section, nous fixons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une sous-tribu $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. $\mathcal{F}_1$ représente une information partielle sur l'espace, obtenue par exemple en observant une variable aléatoire X_1. L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X par rapport à $\mathcal{F}_1$ représente la meilleure estimation que l'on puisse faire de la valeur de X à l'aide de l'information contenue dans $\mathcal{F}_1$.

Définition 2.3 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}_1$ et on note $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$, toute variable aléatoire Y satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. $Y \subseteq \mathcal{F}_1$, *i.e* Y *est* $\mathcal{F}_1$ *-mesurable ;*
2. *pour tout* $A \in \mathcal{F}_1$, *on a*
$$\int_A X\, d\mathbb{P} = \int_A Y\, d\mathbb{P}$$
Si Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous abrégeons $\mathbb{E}(X|\sigma(Z))$ par $\mathbb{E}(X|Z)$. En effait, toute variable aléatoire Y satisfaisant la définition est appelée une version de $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$.

Le résultat suivant tranche la question de l'existence et de l'unicité de l'espérance conditionnelle.

Définition 2.4 1. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$ existe

2. L'espérance conditionnelle est unique dans le sens que si Y et Y' sont deux versions de $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$, alors $Y = Y'$ presque surement.
3. On a $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X)$..

2.1.1 Propriétés

Proposition 2.1 *L'espérance conditionnelle a les propriétés suivantes :*

1. *Linéarité :*
$$\mathbb{E}(aX+Y|\mathcal{F}_1) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_1).$$
2. *Monotonie : Si $X \leq Y$, alors*
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_1).$$
3. *Convergence monotone : Si $X_n \geq 0$ est une suite croissante telle que $X_n \uparrow X$ avec $\mathbb{E}(X) < \infty$ alors*
$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_1) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$$
4. *Inégalité de Jensen : Si φ est convexe et $\mathbb{E}(|X|)$ et $\mathbb{E}(|\varphi(X)|)$ sont finies alors*
$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F}_1)$$
5. *Contraction dans L^ppour $p > 1$:*
$$\mathbb{E}(\,|\mathbb{E}(X\,|\mathcal{F}_1\,)|^p) \leq \mathbb{E}(|X|^p)$$
6. *Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, alors*

– $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$;
– $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)$;
– $X \subseteq \mathcal{F}_1$ *et* $\mathbb{E}(|Y|), \mathbb{E}(|XY|) < \infty$, *alors*
$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}_1) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_1).$$

2.2 Martingales

Cas discret On se donne une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. La tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 2.5 La suite de v-a-r $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une $\mathcal{F}_n$ martingale si
X_n est intégrable, $\forall n \in \mathbb{N}$
X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{E}\left(X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) = X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Cas continu

On se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

Définition 2.6 Une famille de variables aléatoires $(X(t), t \in [0; \infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_S)$ si

$X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable et intégrable pour tout t.
$\mathbb{E}(X(t)/\mathcal{F}_s) = X(s) \ , \forall s \leq t$.

Propriétés :

- Si X est une martingale $\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X(0)), \forall t$.
- Si $(X(t))_{t \leq T}$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X(t) = \mathbb{E}(X(T)/\mathcal{F}_t)$.

Définition 2.7 Le processus $X(t)$ est une :

1. $\mathcal{F}$ martingale si les trois conditions suivantes sont vérifies
   (a) Le processus X est $\mathcal{F}$ adapté (i.e :X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable)
   (b) X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i.e : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}[X_n] < +\infty$)
   (c) $\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout n
2. $\mathcal{F}$ sous martingale si elle vérifie a et b et $\mathbb{E}[X_{n+1}/\mathcal{F}_n] \geq X_n$.
3. $\mathcal{F}$ sur martingale si elle vérifie a et b et $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n$

Définition 2.8 (martingale locale) :Soit X un procussus $\mathcal{F}_n$ adapté continu. Supposons qu il existe une suite non décroissante τ_n de temps d arrêt,

$$X^n = \{X_{t\Lambda\tau_n}; \ t \geq 0\}$$

est une martingale, pour tout n, et si $P\left(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty\right) = 1$, alors X est appelé martingale locale continue.

Proposition 2.2 – *Toute martingale continue est une martingale locale.*
- *Toute martingale locale positive est une sur martingale.*
- *Une martingale locale borneé est une martingale.*

2.3 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est un processus stochastique (fonction aléatoire de temps). Initialement introduit par le botaniste R.Brown au XIXéme siècle pour modéliser les mouvements de grains de pollen en suspension, il représente de nos jours un processus gaussien incontournable notamment en calcul stochastique.

Définition 2.9 Un mouvement Brownien standard est un processus stochastique défini comme suit :

1. $B(0) = 0$, (issue de 0),
2. pour tout $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ est une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, t-s)$ indépendant de la tribu F_s engendrée par $\{B(u), u \leq s\}$.

Remarque 2.1 On dit que le mouvement Brownien B est un mouvement Brownien par rapport à x si $B(0) = x$.

Proposition 2.3 *Un processus B est un mouvement Brownien si et seulement si :*
- $B(0) = 0$
- B *est continu.*
- *pour* $t, s > 0$, $\mathbb{E}(B(t)) = 0$ *et* $\mathbb{E}(B^{tr}(s)) = (t \wedge s)$.

2.4 Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré, et soit $B = (B(t), t \geq 0)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien standard. Nous donnons un sens à $\int_0^t H_s dB_s$ pour une classe de processus adaptés H.

Définition 2.10 Un processus $H = (H_t, t \geq 0)$ est élémentaire si

$$H(t, \omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(\omega) \, 1_{[t_j, t_{j+1}[}(t)$$

où $N \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$ et pour tout $0 \leq j \leq N-1$, ψ_j est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_{t_j}-$mesurables.
Si H est un processus élémentaire, on peut définir

$$\int_0^T H_S dB_S = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)$$

2.4.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Soient $f \in L^2$, $t \in [0, T]$, alors le processus $\left(f_s 1_{[0,t]}(s)\right)_{0 \leq s \leq t} \in L^2([0,\ T])$ et son intégrale stochastique est définie par

$$\int_0^T f_s 1_{[0,t]}(s) \, dB_s = \int_0^t f_s dB_s,$$

et on définit le processus stochastique $\left(\int f_s 1_{[0,t]}(s)\, dB_s,\ t \in [0,T]\right)$ appelé intégrale stochastique indéfinie de f par rapport à B.

Soient h et g deux éléments de $L^2([0,T])$, soit $0 \leq s \leq r \leq t$. Alors

1. $\int_s^t f_u dB_u = \int_s^r f_u dB_u + \int_r^t f_u dB_u$;
2. $\int_0^t (af_s + bg_s)\, dB_s = a \int_0^t f_s dB_s + b \int_0^t g_s dB_s$ où a et b sont des constantes.

2.4.2 Variation quadratique de mouvement Brownien

Soit $t > 0$ et $\{0 = t_0 < t_1 < .... < t_p = t\}$ une subdivision de $[0,t]$. Nontons $V_B(t_0, t_1, .., t_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} (B(t_j) - B(t_{j-1}))^2$ alors

$V_B(t_0, t_1, ..., t_p)$ converge dans L^2 vers t lorsque le pas de la subdivision $\delta = \max\limits_{i \leq j \leq p} (t_j - t_{j-1})$ tend vers 0, de plus si la subdivision est uniforme, la convergence est preque sure.

La variation quadratique du mouvement brownien sur $[0,t]$ est donc t.

2.5 Formule d'Itô

Soit $X(t)$ un processus stochastique et soit

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(X(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} b(X(s))dB(s)$$

Ou sous forme différentielle

$$dX(t) = a(X(t))\, dt + b(X(t))\, dB(s)$$

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale d'un changement de variables sur différentielle stochastique. Si $F(t,x)$ une fonction de classe C^2 alors $Y(t) = F(t; X(t))$ est aussi un processus d'Itô et il admet une intégrale stochastique par rapport au même processus de Wiener donnée par la formule d'Itô.

$$dY(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, X(t)) + a\frac{\partial F}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X(t))\right) dt + b\frac{\partial F}{\partial x}(t; X(t))\, dB(t)$$

2.6 Inégalités de BDG, Doob, Hölder et Gronwall

L'inégalité de Bulkholder, Davis et Gundy et l'inégalité de Doob martingale jouent un rôle très important en calcul stochastique et sont très utilisées pour la démonstration de théorème d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles stochastiques.

Lemme 2.1 (*Inégalité de Doob martingale*). *Soient $M(t)_{t\geq 0}$ une martingale à valeur dans R^d, $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}_+$. Si p un entier strictement supérieur à 1 et si $M(t)\in L^P\left(\Omega,R^d\right)$, alors on a*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{a\leq t\leq b}|M(t)|^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\left(M(b)\right)^p.$$

Lemme 2.2 *(inégalité de BDG). Soient $p\geq 2$, $\eta\in L^p\left(\Omega,R^d\right)$ et $0\leq s\leq t\leq T$, alors on a*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u\eta(s)\,dB(s)\right|^p\right]\leq C_p(t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t\mathbb{E}\left[|\eta(u)|^p\right]du,$$

tel que C_P est une constante positive arbitraire.

Lemme 2.3 *(Inégalité de Hölder).Soit p et q des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si les variables $|X|^p$ et $|Y|^q$sont intégrables, on a*

$$\mathbb{E}|XY|\leq\left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}|Y|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Lemme 2.4 *(Inégalité de Gronwall). Soient $T>0$, $C\geq 0$, φ, ψ deux fonctions continues à valeurs positives sur $[0,T]$ et vérifiant*

$$\forall t>t_0;\quad\varphi(t)\leq K+\int_{t_0}^t\psi(s)\varphi(s)\,ds$$

où K est une constante positive, alors

$$\forall t>t_0\ ;\ \varphi(t)\leq K\exp\left(\int_{t_0}^t\psi(s)\,ds\right),\quad\forall\ 0<t<T.$$

En particulier, si $K=0$, alors $\varphi=0$.

Lemme 2.5 *(Inégalité de moment)*

pour tout entier $p\geq 2$, $g\in L^2\left([0,T];\mathbb{R}^{d\times m}\right)$ tel que $\mathbb{E}\int_0^T\left(|g(s)|^p\right)ds<\infty$, alors

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T g(s)\,dB(s)\right|^p\leq\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}}T^{\frac{p-2}{2}}\mathbb{E}\int_0^T|g(s)|^p\,ds.$$

En particulier pour $p=2$, on a

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T g(s)\,dB(s)\right|^2\leq\mathbb{E}\int_0^T|g(s)|^2\,ds$$

CHAPITRE 3

Équations différentielles stochastiques

L'équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :

$$X(t) = x + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dB(s), \tag{3.1}$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t); \quad t \geq 0 \\ X(0) = x \end{cases} \tag{3.2}$$

L'inconnue est le processus $X(t)$, le problème est comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution ll est utile de préciser les donnée.

Définition 3.1 Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}; \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de l'équation (3.2) est un processus $X(t)$ continu $(\mathcal{F}_t)$ adapté tel que les intégrales $\int_0^t f(s, X(s))ds$ et $\int_0^t g(s, X(s))dB(s)$ ont un sens et l'égalité.

$$X(t) = x + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dB(s),$$

est satisfaite pour tout t.

Définition 3.2 Soient d et m deux entiers naturels tels que $d \geq 1$ et $m \geq 1$, $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times m}$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mesurables et localement bornées. On écrit g

$= (g_{ij})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$ et $f = (f_i)$. On considère l'EDS suivante : :

$$\begin{cases} dX_t = g(t, X_t)dB(t) + f(t, X_t)dt, \quad t \geq 0 \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.3}$$

On dit que (3.3) admet une solution s'il existe :

– un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t); \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles ;

– sur cet espace, un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien $B = (B^1, ..., B^m)$;

– un processus $X = (X^1, ..., X^d)$ qui est $(\mathcal{F}_t)-$adapté et continu, tel que :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(s, X(s))\, dB(s) + \int_0^t f(s, X(s))ds;$$

i.e, pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$X_i(t) = X_i(0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t g_{i,j}(s, X(s))\, dB_j(s) + \int_0^t f_i(s, X_s)ds;$$

Lorsque de plus $X(0) = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B, X)$ est une solution de (3.3).

Supposons $B(t)$ est un mouvement Brownien à m dimensions défini sur l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i.e, $B(t) = (B_1(t), B_2(t), ..., B_m(t))^T$ avec la filtration $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions usuelles. Soit $f : [0, T] \times BC\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}^d$ et $g : [0, T] \times BC\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}^{d\times m}$ Borel mesurable.considérez l'EFDS, d-dimensionnels suivante :

$$dX(t) = f(t, X(t))\, dt + g(t, X(t))\, dB(t), \tag{3.4}$$

ou $t \in [0, T]$, la condition initiale $\xi(0) \in \mathbb{R}^d$ est donnée et f et g sont des fonctions satisfaisant $f(., x)$, $g(., x) \in L^2\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^d\right)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^d$. Ensuite, nous donnons les données initiales de (3.4) comme suit :

$$\begin{aligned} X(t_0) &= \xi = \{\xi(\theta) : -\infty < \theta \leq 0\} \ \mathcal{F}_0\text{-mesurable } C_B\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^d\right) \\ \text{tel que} \quad \xi &\in L^2\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^d\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ainsi, (3.4) avec la valeur initiale (3.5) peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))\, ds \ + \ \int_0^t g(s, X(s))\, dB_s$$

Définition 3.3 Le processus stochastique $X(t)$ défini sur $-\infty < t \leq T$,est dite solution de (3.4)avec les données initiales (3.5), si

Lemme 3.1 *1. $X(t)$ est continue et pour tout $0 \leq t \leq T$, $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ adapté.*

2. $\{f(t, X(t))\} \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^d)$ et $\{g(t, X(t))\} \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^{d\times m})$

3. $X_0 = \xi$, pour chaque $0 \leq t \leq T$.

$$dX(t) = f(t, X(t))\, dt + g(t, X(t))\, dB(t),$$

3.1 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, on démontre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))\, ds \; + \; \int_0^t g(s, X(s))\, dB(s)$$

3.1.1 Hypothèses

On suppose l'existence de deux constantes positives K_1 et K_2 tells que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites

H1 :(Condition de la croissance linéaire) : pour tout $t \in [0, T]$, on à :

$$|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \leq K_1 \left(1 + |x|^2\right)$$

H2 : (Condition de Lipschitz) : pour tout $(x, y) \in C_B\left((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d\right) \times C_B\left((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d\right)$ et pour tout $t \in [0, T]$, on à :

$$|f(t,x)|^2 + |g(t,y)| \leq K_2 |x-y|^2.$$

3.1.2 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses $H1$ et $H2$, l' E.D.S $(3,1)$ admet une solution unique $X(t) \in \; L^2\left((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d\right)$.*

Pour démontrer le théorème précédent, nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2 *(estimation de la solution). Soit $X(t)$ une solution de l'EDS $(1,2)$, alors sous les hypothèses $H1$ et $H2$, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty<s\leq t} |X(s)|^2\right) \leq \mathbb{E}\,||\xi||^2 + \left[3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 6K_2(T+C)\right] \exp\left[6K_2 T(T+C)\right],$$

avec C est une constante positive arbitraire.

Preuve. Supposons que pour tout $0 \leq t \leq T$, $X(t)$ satisfait l' EDS suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))\, ds + \int_0^t g(s, X(s))\, dB(s).$$

Alors d'après l'inégalité $|a+b+c|^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ on a :

$$|X(t)|^2 \leq 3\left(|X(0)|^2\right) + 3\left|\int_0^t f(s, X(s))\, ds\right|^2 + 3\left|\int_0^t g(s, X(s))\, dB(s)\right|^2,$$

prenons l'esperaince $\mathbb{E}$ de deux cotés;

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 \leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 3\mathbb{E}\left|\int_0^t f(s, X(s))\, ds\right|^2 + 3\mathbb{E}\left|\int_0^t g(s, X(s))\, dB(s)\right|^2.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique et de l'espérance, le lemme $(2, 10)$ et l'inégalité de Hölder on trouve

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^2\right) \leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 3t\mathbb{E}\left|\int_0^t f(s, X(s))\, ds\right|^2 + 3C\mathbb{E}\left|\int_0^t g(s, X(s))\, dB(s)\right|^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 3t\mathbb{E}\int_0^t |f(s, X(s)) - f(s,0) + f(s,0)|^2\, ds \\
&\quad + 3C\mathbb{E}\int_0^t |g(s, X(s)) - g(s,0) + g(s,0)|^2\, ds,
\end{aligned}$$

et par l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 3t\mathbb{E}\int_0^t \left[2|f(s, X(s)) - f(s,0)|^2 + 2|f(s,0)|^2\right] ds \\
&\quad + 3C\mathbb{E}\int_0^t \left|2|g(s, X(s)) - g(s,0)| + 2|g(s,0)|^2\right| ds,
\end{aligned}$$

et sous les hypothèses $H1$ et $H2$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 6K_2 t\int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\, ds \\
&\quad + 6K_1 t\int_0^t \left(1 + 0^2\right) ds + 6cK_2\int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\, ds + 6K_1\mathbb{E}\int_0^t 1 ds \\
&\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 6K_1 t^2 + 6K_2 t\int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\, ds \\
&\quad + 6cK_2\int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\, ds + 6K_1 t^2 \\
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right) + 6K_1 T\int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\, ds + 6K_2 T\int_0^t \left(1 + 0^2\right) ds \\
&\quad + 6K_1 c\int_0^t \mathbb{E}|X(s)|^2\, ds + 6K_2 c\int_0^t \left(1 + 0^2\right) ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2\right)\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right)+6K_1(T+C)\int_0^t\mathbb{E}|X(s)|^2ds+6K_2(T+C)\int_0^t ds.$$

En fin

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2\right)\leq 3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right)+6K_2T(T+C)+6K_2(T+C)\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s}|X(u)|^2\right)ds,$$

et par l'inégalité de Gronwall, on trouve :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2\right)\leq\left[3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right)+6K_2(T+C)\right]\exp\left(6K_2T(T+C)\right),0\leq t\leq T,$$

pour $t=T$, on trouve

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right)\leq\left[3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right)+6K_2(T+C)\right]\exp\left(6K_2T(T+C)\right),0\leq t\leq T.$$

Notons que

$$\sup_{-\infty<s\leq t}|X(s)|^2\leq||\xi||^2+\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2,$$

donc on a :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty<s\leq t}|X(s)|^2\right)\leq\mathbb{E}\,||\xi||^2+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2\right),$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(\sup_{-\infty<s\leq t}|X(s)|^2\right)\leq\mathbb{E}\,||\xi||^2+\left[3\mathbb{E}\left(|X(0)|^2\right)+6K_2(T+C)\right]\exp\left(6K_2T(T+C)\right).$$

La preuve est achevée ■

Preuve. (de théorème 3.2)

1) Existence : Soient $X_0(0)=\xi,\ X_0(t)=\xi(0)$, pour $0\leq t\leq T$. Posons $X_n(0)=\xi\ ,n\in\mathbb{N}^*$, on définit la suite de Picard par l'équation suivante :

$$X_n(t)=X(0)+\int_0^t f(s,X_{n-1}(s))\,ds+\int_0^t g(s,X_{n-1}(s))\,dB(s).$$

En utilisant le raisonnement par récurrence pour démontrer que $X_n(t)\in L_G^2\left((-\infty,0],\mathbb{R}^d\right)$. On a $X_0(t)\in L_G^2\left((-\infty,T].\mathbb{R}^d\right)$. Supposons que $X_{n-1}(t)\in L_G^2\left((-\infty,T].\mathbb{R}^d\right)$ et montrons que $X_n(t)$ l'est aussi. On à pour tous entier n

$$|X_n(t)|^2\leq 3|X(0)|^2+3\left|\int_0^t f(s,X_{n-1}(s))\,ds\right|^2+3\left|\int_0^t g(s,X_{n-1}(s))\,dB(s)\right|^2.$$

Par les mêmes méthodes précédentes on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left|X(0)\right|^2 + 3t\mathbb{E}\int_0^t \left|f(s,X_{n-1}(s)) - f(s,0) + f(s,0)\right|^2 ds \\ &\quad +3C\mathbb{E}\int_0^t \left|g(s,X_{n-1}(s)) - g(s,0) + g(s,0)\right|^2 ds,\end{aligned}$$

et d'aprés le lemme de BDG et les hypothèses H1, H2, on arrive à

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) \\ \leq\ & 3\mathbb{E}\left|X(0)\right|^2 + 3t\mathbb{E}\int_0^t \left|f(s,X_{n-1}(s)) - f(s,0)\right|^2 ds + 6t\mathbb{E}\int_0^t \left|f(s,0)\right|^2 ds \\ & +6C\mathbb{E}\int_0^t \left|g(s,X_{n-1}(s)) - g(s,0)\right|^2 ds + 6c\mathbb{E}\int_0^t \left|g(s,0)\right|^2 ds \\ \leq\ & 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6(T+C)k_2\mathbb{E}\int_0^t \left|X_{n-1}(s)\right|^2 ds + 6(t+C)K_1\int_0^t \left(1+0^2\right) ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6(T+C)\mathbb{E}\int_0^t \left|X_{n-1}(s)\right|^2 ds + 6T(T+C)K_1 \\ \mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6(T+C)\mathbb{E}\int_0^t \left(\sup_{0\leq u\leq s}\left|X_{n-1}(u)\right|^2\right) ds + 6(T+C)K_1,\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Doob martingale on a

$$\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) \leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6(T+C)\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}\left|X_{n-1}(s)\right|^2 ds + 6(T+C)K_1.$$

Donc pour tout entier $p \geq 1$, on à :

$$\max_{1\leq n\leq p}\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) \leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6(T+C)\mathbb{E}\int_0^t \max_{1\leq n\leq p}\mathbb{E}\left|X_{n-1}(s)\right|^2 ds + 6(T+C)K_1.$$

Notons que :

$$\begin{aligned}\max_{1\leq n\leq p}\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) &\leq \max\left\{\mathbb{E}\left|\left|\xi\right|\right|^2, \max_{1\leq n\leq p}\left(\mathbb{E}\left|X_n(s)\right|^2\right)\right\} \\ &\leq \mathbb{E}\left|\xi\right|^2 + \max_{1\leq n\leq p}\left(\mathbb{E}\left|X_n(s)\right|^2\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\max_{1\leq n\leq p}\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6K_1(T+C) \\ &\quad +6(T+C)\mathbb{E}K_2\int_0^t \left(\mathbb{E}\left|\xi\right|^2 + \max_{1\leq n\leq p}\left(\mathbb{E}\left|X_n(s)\right|^2\right)\right) ds \\ \max_{1\leq n\leq p}\mathbb{E}\left(\left|X_n(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_0\right|^2\right) + 6k_1(T+C) \\ &\quad +6(T+C)K_2\mathbb{E}\left|\xi\right|^2 + 6K_2(T+C)\int_0^t \max_{1\leq n\leq p}\left(\mathbb{E}\left|X_n(s)\right|^2\right) ds,\end{aligned}$$

et en fint par le lemme de Gronwall on arrive à

$$\max_{1\leq n\leq p}\mathbb{E}\left(|X_n(t)|^2\right)\leq\left[3\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right)+6K_1(T+C)+6(T+C)K_2\mathbb{E}\,||\xi||^2\right]\exp\left[6K_2(T+C)\right],$$

comme p est arbitraire, alors on a

$$\mathbb{E}\left(|X_n(t)|^2\right)\leq\left[3\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right)+6K_1(T+C)+6(T+C)K_2\mathbb{E}\,||\xi||^2\right]\exp\left[6K_2(T+C)\right],\tag{3.6}$$

ceci implique que $X^n(t)\in L^2\left((-\infty,0],\mathbb{R}^d\right)$.

Maintenant on démontre que la suite $(X_n(t))$ est une suite de Cauchy. Toujours par récurrence : En utilisant les inégalités de Cauchy, Doob martingale et les hypothèses H1 et H2 on à :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|X_1(t)-X_0(t)|^2\right) &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t f(s,X_0(s))\,ds\right|^2+2\mathbb{E}\left|\int_0^t g(s,X_0(s))\,dB_S\right|^2\\ &\leq 2\mathbb{E}\int_0^t|f(s,X_0(s))|^2\,ds+2\mathbb{E}\int_0^t|g(s,X_0(s))|^2\,dB_S\end{aligned}$$

avec la même methéde, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_1(t)-X_0(t)|^2\right) &\leq 4tK_2\mathbb{E}\int_0^t|X_0(s)|^2\,ds+4CK_2\mathbb{E}\int_0^t|X_0(s)|^2\,ds\\ &\quad+4tk_1\mathbb{E}\int_0^t\left(1+0^2\right)ds+4CK_1\mathbb{E}\int_0^t\left(1+0^2\right)ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_1(t)-X_0(t)|^2\right) &\leq 4K_2(C+T)\,\mathbb{E}\int_0^t|X_0(s)|^2\,ds+4CK_1T(C+T)\\ &\leq 4k_1(C+T)\,T\mathbb{E}\,||\xi||^2+4K_1T(C+T)=\widetilde{C}.\end{aligned}$$

Même chose :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|X_2(t)-X_1(t)|^2\right) &\leq 2t\mathbb{E}\int_0^t|f(s,X_1(s))-f(s,X_0(s))|^2\,ds\\ &\quad+2c\mathbb{E}\int_0^t|g(s,X_1(s))-g(s,X_0(s))|^2\,ds\\ &\leq 2tK_2\mathbb{E}\int_0^t|X_1(s)-X_0(0)|^2\,ds+2Ck_2\mathbb{E}\int_0^t|X_1(s)-X_0(0)|^2\,ds,\end{aligned}$$

d'après $\mathbb{E}\,|X_1(t)-X_0(t)|^2\leq\widetilde{C}$

$$\mathbb{E}\left(|X_2(t)-X_1(t)|^2\right)\leq 2k_2(t+C)\,\mathbb{E}\int_0^t\check{C}dt=2k_2(T+C)\,\widetilde{C}t.$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|X_3(t)-X_2(t)\right|^2\right) &\leq 2k_2(T+C)\widetilde{C}\mathbb{E}\int_0^t \left|X_2(s)-X_1(0)\right|^2 ds \\ &\leq 2k_2(T+C)\int_0^t 2k_2(T+C)\widetilde{C}ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_3(t)-X_2(t)\right|^2\right) \leq \left(2K_2(C+T)\right)^3\widetilde{C}\frac{t^2}{2},$$

de même

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_4(t)-X_3(t)\right|^2\right) \leq \left(2K_2(C+T)\right)^3\widetilde{C}\frac{t^2}{2*3} = \left(2K_2(C+T)\right)^3\widetilde{C}\frac{t^3}{3!},$$

on arrive à l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_n(t)-X_{n-1}(t)\right|^2\right) \leq \left(2K_2(C+T)\right)^{n-1}\widetilde{C}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{3.7}$$

Supposons que (3.7) est vraie alors :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2\right) \leq 2K_2(C+T)\,\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_n(t)-X_{n-1}(t)\right|^2\right),$$

par la supposition (3.7) :

$$\begin{aligned}&\leq \left(2K_2(C+T)\right)^{n-1}\int_0^t \left(2k_2(C+T)\right)^{n-1}\widetilde{C}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}ds \\ &= \left(2K_2(C+T)\right)^n\widetilde{C}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \left(2K_2(C+T)\right)^n\widetilde{C}\frac{t^n}{n!},\end{aligned}$$

donc (3.7) est vraie pour tout entier n.

Vérifions maintenant que $(X_n(t))$ est une suite de Cauchy. Posons dans (3.7) $t=T$, alors on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right|^2\right) \leq \widetilde{C}\frac{(K_3t)^n}{n!},$$

avec $K_3 = 2K_2(T+C)$ et par l'inégalité de Chebychev on a

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_{n+1}(t)-X_n(t)\right| > \frac{1}{2^n}\right) \leq \widetilde{C}\frac{(4k_3)^n}{n!},$$

et comme $\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{C}\frac{(k_3t)^n}{n!} < \infty$,et par le lemme de Borel-contelli, pour tout $w \in \Omega$, il existe un entier $n_0 = n_0(w)$ tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X^{n+1}(t)-X^n(t)\right| \leq \frac{1}{2^n} \quad p.s \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Soit

$$S_n(t) = X_0(t) + \sum_{j=1}^{n} [X_j(t) - X_{j-1}(t)] = X_n(t),$$

est la somme partielle de le série

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \ ... \ + (X_n(t) - X_{n+1}(t)) + ...,$$

donc d'après (3.7) , on à :

$$\begin{aligned} & X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \ ... \ + (X_n(t) - X_{n+1}(t)) + (3.8) \\ \leq \ & X_0(t) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ ... \ + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + ... \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Comme la série (3.9) est une série géométrique convergente sur $(-\infty, T]$; alors par la critère de Meistres elle est uniformément convergente sur $(-\infty, T]$ d'où $(X_n(t))$ est une suite de Cauchy.

Nous montrons maintenant que la limite de $(X_n(t))$ dans L^2 est égale à $X(t)$ au sens que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n(t) - X(t)) = 0.$$

Nous avons d' après (3.6)

$$\mathbb{E}\left|(X_n(t))\right|^2 \leq C_1 \exp(6K_2(T + C)),$$

avec

$$C_1 = 3\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right) + 6k_1(T + C) + 6(T + C)k_2\mathbb{E}\left||\xi|\right|^2,$$

prenons la limite dans (3.6) quand n tend vers ∞,

on trouve

$$\mathbb{E}\left(|X(t)|^2\right) \leq C_1 \exp(6K_1(T + C)) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Comme $\xi \in L^2\left((-\infty, T]; \mathbb{R}^d\right)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\int_{-\infty}^{t} |X(t)|^2 ds \ & \leq \ \mathbb{E}\int_{-\infty}^{0} |X_0(s)|^2 ds + \int_{-\infty}^{T} C_1 \exp(6K_1(T + C\ )) ds \\ & \leq \ \int_{-\infty}^{0} \mathbb{E}\left(|X_0(s)|^2\right) ds + TC_1 \exp(6K_1(T + C\ )), \end{aligned}$$

ce qui nous donne que $X \in L^2\left((-\infty, T], \mathbb{R}^d\right)$.

Soit $X(t)$ solution de (3.1)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|X_n(t)-X(t)|^2\right) &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t f(s,X_n(s))-f(s,X(s))\right|^2 ds \\ &\quad +2\mathbb{E}\left|\int_0^t g(s,X_n(s))-g(s,X(s))\right|^2 ds \\ &\leq 2K_2(T+C)\,\mathbb{E}\int_0^t |X_n(t)-X(t)|^2\,ds\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_n(s)-X(s)|^2\right)\leq 2K_2(T+C)\,\mathbb{E}\int_0^t \sup_{0\leq s\leq t}|X_n(t)-X(t)|^2\,ds,$$

et d'après l'inégalité de Gronwall et pour $t=T$ on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_n(t)-X(t)|^2\right)\leq \exp\left(2K_2T(T+C)\right).$$

Notons que dans L^2

$$\int_0^t f(s,X_n(s))\,ds \to \int_0^t f(s,X(s))\,ds,$$

et

$$\int_0^t g(s,X_n(s))\,dB(s) \to \int_0^t g(s,X(s))\,dB(s),$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}X(t) &= X(0)+\lim_{n\to\infty}\int_0^t f(s,X_n(s))\,ds + \lim_{n\to\infty}\int_0^t g(s,X_n(s))\,dB(s) \\ &= X(0)+\lim_{n\to\infty}\int_0^t f(s,X(s))\,ds + \lim_{n\to\infty}\int_0^t g(s,X(s))\,dB(s)=X(t),\end{aligned}$$

donc l'existence de la solution de l'EDS (3.1)

2) Unicité :

Supposons que l'EDS (3.1) admet deux solutions $X(t), Y(t)$, alors

$$\begin{aligned}X(t)-Y(t) &\leq \int_0^t \left(f(s,X(s))-f(s,Y(s))\right)ds \\ &\quad +\int_0^t \left(g(s,X(s))-g(s,Y(s))\right)dB(s) \\ |X(t)-Y(t)|^2 &\leq 2\left|\int_0^t \left(f(s,X_n(s))-f(s,Y(s))\right)ds\right|^2 ds \\ &\quad +2\left|\int_0^t \left(g(s,X_n(s))-g(s,Y(s))\right)dB(s)\right|^2.\end{aligned}$$

Prenons l'espérance $\mathbb{E}$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, les propriétés de l'intégrale stochastique on arrive à

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^{2}\right)\leq 2K_{2}\left(T+C\right)\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|X\left(t\right)-Y\left(t\right)\right|^{2}\right)ds,$$

et finalement par l'inégalité de Gronwall on obtient pour tout $t\in[0,\ T]$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X\left(t\right)-Y\left(t\right)\right|^{2}\right)\leq \exp\left(2C_{2}T\left(T+C\right)\right),$$

d'où on a pour $0<t<T,\ X\left(t\right)=Y\left(t\right)$ et de même on a aussi pour tout $-\infty\leq t\leq T$, $X\left(t\right)=Y\left(t\right).$ ■

Conclusion générale et perspectives

Le but de ce travail est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions de quelques types équations différentielles stochastiques avec retard par apport au mouvement Brownien, Toute d'abord, Nous avons rappelé quelques définitions et concepts sur les probabilités, Ensuite, Nous avons donné des résultats sur les processus stochastiques, mouvement brownien, martingale, formule d'Itô et quelques inégalités stochastiques.

Enfin, Nous avons montré que les équations différentielles stochastiques avec retard sous certains conditions admettent de solution unique.

Ce travail nous ouvre de grandets perspectives dans l'étude des équations différentielles stochastiques avec retard, nous espérons étendre cette étude au système d'équations différentielles stochastiques avec élargissement des conditions des coefficients.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Abdiche " Les équations différentielles stochastiques en dimenion finie " 2017-2018.

[2] Z, Bira et,N, Boubetta "les équations différentielles stochastique dans les dimensions finis et infinis" Mémoire da master soutenue en 2019 univ-skikda..

[3] M. Deaconu " Équations différentielles stochastiques Résolution numérique et applications " 2020-2021.

[4] A, Djenien "les équations différentielles stochastique rétrogrades avec retard" juin 2019 univ-biskra.

[5] Ch. Gubass " Solution approximative de Caratheodory pour les équations différentielles stochastiques" Mémoire de master soutenue en 2021 univ-Skikda.

[6] S, Houbad "estimation d'une retard d'une équation différenielle stochastique" 27 septembre 2017.

[7] Mao Stochastic Differential Equations and Applications. Horwood publication : Chichester, 1997.

[8] X. Mao Exponential stability of stochastic Differentail Equations. Marcel Dekker : New York, 1994.

[9] J. Monique. "cours de calcul stochastique" septembre 2006.

[10] Y Ren, Q Bi, R Sakthivel,"stochastic functional differential equations with infinite delay driven by G-Brownian motion" 26 july 2012.

[11] F. Wei, K. Wang. The existence and uniqueness of the solution for stochastic functional differential equations with infinite delay. Journal of Mathematical analysis and Applications 2007.