



Université du 20 Août 1955 Skikda
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique



Série : D012121011D

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES
Spécialité: Maintenance industrielle

Par:

MERABET AYECHÉ Chahra

THEME

**Ecoulement de couche limite d'un fluide Biomagnétique autour
d'un obstacle: Etude dynamique et thermique.**

Soutenue le :21/10/2021.

Devant le Jury composé de :

<i>Président :</i>	<i>BOUZAOUIT Azzedine</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Skikda</i>
<i>Rapporteur :</i>	<i>SARI Mohamed Rafik</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université d'Annaba</i>
<i>Examineur :</i>	<i>HADDAD Abdelkrim</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Guelma</i>
<i>Examineur :</i>	<i>GUERBAI Salah</i>	<i>M.C.A</i>	<i>Université de Biskra</i>
<i>Examineur :</i>	<i>DIB Ammar</i>	<i>M.C.A</i>	<i>Université d'Annaba</i>
<i>Examineur :</i>	<i>KLAIAlA Rida</i>	<i>Professeur</i>	<i>Université de Skikda</i>

Remerciements

Avant tout, je dois remercier, **ALLAH**, le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin et qui nous donne le courage et la patience pour réaliser ce long et dur travail malgré les difficiles circonstances.

Je remercie vivement mon directeur de thèse, Monsieur SARI Mohamed Rafik, Professeur à l'Université de Badji Mokhetar, Annaba. Je le remercie beaucoup pour son aide, son soutien, et ses conseils qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Un grand merci à Monsieur KEZZAR Mohamed, Maitre de Conférences à l'Université 20 Août 1955, Skikda, qui a guidé mes premiers pas dans cette recherche. Pour ce qu'il a fait pour moi, son aide, son encouragement, et ses conseils durant l'élaboration de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur BOUZAOUIT Azzedine, Professeur à l'université 20 Août 1955, Skikda, pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

J'exprime aussi mes remerciements aux membres de jury ; Monsieur HADDAD Abdelkrim, Professeur à l'Université 8 Mai 1945, Guelma, Monsieur GUERBAAI Salah, Maitre de Conférences à l'Université de Mohamed Khider, Biskra, DIB Ammar, Maitre de Conférences à l'Université de Badji Mokhetar, Annaba, et KLAIAIA Rida, Professeur à l'Université 20 Août 1955, Skikda, pour m'avoir fait l'honneur de juger et mettre en valeur ce travail.

Enfin, Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail

À mes parents, que Dieu me les gardes, pour leurs sacrifices tout au long de ma vie.

*À mon respectueux mari, pour tout ce qu'il m'a apporté, pour son soutien
et sa compréhension.*

À La lumière de mes yeux, Mes chers enfants : Yahia et Layene.

À mes frères et sœurs, et leurs enfants, chacun par son nom.

À mes amies et mes collègues, toutes sans exception.

Écoulement de couche limite d'un fluide biomagnétique autour d'un obstacle: Etude dynamique et thermique.

Résumé

Dans ce travail de recherche, nous considérons, d'une part, l'écoulement bidimensionnel instationnaire de couche limite laminaire hydromagnétique d'un bio-fluide au travers d'un dièdre. D'autre part, le modèle d'un fluide micro-polaire avec des conditions aux limites de surface convective a été pris en considération.

Dans cette contribution, on s'est principalement intéressé à une étude paramétrique visualisant l'effet de la variation de plusieurs paramètres physiques tels que : le paramètre d'instationarité K , le paramètre d'angle du dièdre β , le nombre de Reynolds Re , le paramètre du champ magnétique transversal M et le paramètre du champ magnétique induit h sur les champs dynamique et thermique, ainsi que l'évolution de la micro-rotation dans un écoulement de couche limite laminaire du sang humain. Par ailleurs, une étude paramétrique montrant l'effet de la variation du nombre de Prandtl sur le comportement du transfert thermique a été également réalisée.

Les équations différentielles aux dérivées partielles gouvernant la vitesse, la température, la micro-rotation et le champ magnétique induit sont transformées en équations ordinaires non linéaires par utilisation des fonctions de similitude appropriées. Ces équations sont traitées par la suite analytiquement par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et numériquement par la technique de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) couplée à la technique de Tir. Dans cette étude, une attention particulière a été réservée à l'étude du comportement du fluide biomagnétique caractérisant le sang humain et possédant un nombre de Prandtl, $Pr = 21$. La comparaison entre les données analytiques et numériques montre clairement l'efficacité de la technique analytique ADM adoptée.

Mots clés : *Bio-fluide, couche limite, champ magnétique, surface convective, solution numérique, méthode de décomposition d'Adomian (ADM).*

التدفق على مستوى الطبقة الحدية لمائع حيوي-مغناطيسي حول عائق: دراسة ديناميكية و حرارية

ملخص

في هذا العمل ندرس من جهة التدفق الهيدرومغناطيسي أصفائحي المتعلق بالزمن لمائع حيوي يتحرك حول عائق. من جهة أخرى نأخذ أيضا بعين الاعتبار نموذج مائع micropolaire في وجود شروط حدية تتمثل في السطح الناقل للحرارة بالحمل، مع تطبيق مجال مغناطيسي عموديا على مسار المائع.

ينصب اهتمامنا في هذا العمل أساسا على الدراسة الحدودية لتأثير عدة معاملات فيزيائية متمثلة في: معامل عدم الاستقرار، معامل شدة المجال المغناطيسي، معامل زاوية العائق، عدد Reynolds، ومعامل المجال المغناطيسي المستحث على التغير اللابيدي للحقلين الديناميكي و الحراري و كذا سرعة الدوران الزاوي لسريان المائع الهيدرومغناطيسي المتمثل في دم الإنسان. من جهة أخرى قمنا بدراسة تأثير عدد Prandtl على التوزيع الحراري للمائع.

المعادلات التفاضلية الجزئية المتعلقة بالسرعة، درجة الحرارة، سرعة الدوران و المجال المغناطيسي المستحث تم تحويلهم إلى معادلات دورية غير خطية باستخدام تحويلات التشابه. تم حل المعادلات الناتجة بالطريقة التحليلية باستخدام طريقة Adomian و رقميا بالاستعمال المزدوج لطريقة Kutta Fehlberg- Runge و طريقة Tir. في هذه الدراسة اهتمنا بشكل خاص بدراسة تصرف المائع البيومغناطيسي على طول الطبقة الحدية و المتمثل في دم الانسان الموافق لقيمة $(Prandtl=21)$. المقارنة بين النتائج المتحصل عليها بالطريقة التحليلية و الطريقة الرقمية أثبتت بوضوح فعالية الطريقة التحليلية المستخدمة Adomian في هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: مائع حيوي، طبقة حدية، مجال مغناطيسي، سطح ناقل للحرارة بالحمل، حل رقمي، حل تحليلي بطريقة Adomian (ADM).

Boundary layer flow of bio-magnetic fluid over a wedge: Dynamic and thermal study.

Abstract

In this research work, we consider the two-dimensional time-dependent laminar hydro-magnetic boundary-layer flow of a bio-fluid over a wedge. Furthermore, a micropolar fluid model with convective boundary conditions and the action of a transversely magnetic field was taking into account. In this contribution, we are mainly interested to the parametric study showing the effect of various physically parameters such as the unsteadiness parameter K , wedge angle parameter β , Reynolds number Re , transversal magnetic field parameter M and induced magnetic field h on the evolution of dimensionless velocity, temperature, and micro-rotation of the considered biomagnetic blood fluid flow throughout the boundary layer.

The partial differential equations that govern velocity, temperature, micro-rotation, and induced magnetic field are transformed into non-linear ordinary differential equations using appropriated similarity transformations. Thereafter, the obtained equations are solved analytically using Adomian decomposition method (ADM) and numerically with the help of the Runge-Kutta-Fehlberg method based shooting technique. In this study, a particular attention was dedicated to the behavior of the blood biomagnetic fluid flow through boundary layer. Finality, the ccomparison between analytical and numerical data clearly shows the effectiveness of the adopted analytical ADM technique.

Keywords: *Biofluid, Boundary-layer, Magnetic field, Convective surface, Numerical solution, Adomian decomposition method (ADM).*

Liste des notations

Classifications

A_n	Polynômes d'Adomian.
a_0, a_1, a_2, a_3	Constantes.
Bi	Nombre de Biot.
C_f	Coefficient de frottement superficiel.
C_p	Chaleur spécifique à pression constante ($J.Kg^{-1}. °K^{-1}$).
c_1, c_2, c_3	Constantes.
div	Divergence.
Ec	Nombre d'Eckert.
F	Opérateur différentiel ordinaire ou partiel non-linéaire.
f	Fonction de courant sans dimensions.
f'	Fonction de la vitesse sans dimension.
f''	Dérivée première de la fonction vitesse sans dimension.
f'''	Dérivée seconde de la fonction vitesse sans dimension.
$f_0, f_1, f_2 \dots, f_n$	Termes de la solution analytique de la fonction de courant.
g	Fonction connue.
H	Champ magnétique induit adimensionnel.
H'	Dérivée première du champ magnétique sans dimension.
H''	Dérivée seconde du champ magnétique sans dimension.
H_0	Intensité du champ magnétique transversal (Tesla).
H_w	Intensité du champ magnétique induit au niveau de la surface du dièdre (Tesla).
H^*	Intensité du champ magnétique induit (Tesla).
$H_0, H_1, H_2 \dots, H_n$	Termes de la solution analytique du champ magnétique induit.
h	Paramètre du champ magnétique induit et/ou « le pas »
h_c	Coefficient du transfert de chaleur ($W.m^{-2}. K^{-1}$).
j	Micro-inertie par unité de masse.
K	Paramètre d'instationarité.
k_1, k_2, \dots, k_6	Coefficients de Runge-Kutta.
L	Opérateur linéaire.
L^{-1}	Opérateur linéaire inverse.
M	Paramètre du champ magnétique local.
m	Exposant de vitesse (Paramètre de gradient de pression de Hartree).
N	Micro-rotation sans dimension et/ou opérateur non-linéaire
N'	Dérivée première de micro-rotation sans dimension.
N''	Dérivée seconde de micro-rotation sans dimension.
$N_0, N_1, N_2 \dots, N_n$	Termes de la solution analytique de la micro-rotation.
n^*	Paramètre de micro-rotation (vitesse angulaire).
p	Pression (Pa).
Pm	Nombre de Prandtl magnétique.
Pr	Nombre de Prandtl.
q_w	Densité de flux thermique ($W. m^{-2}$).
R	Résidu de l'opérateur linéaire.

Re	Nombre de Reynolds.
S	Coefficient de la viscosité de vortex.
T	Température du fluide dans la couche limite (K).
T_c	Température de la surface inférieure (K).
T_w	Température de la surface (K).
T_∞	Température du fluide ambiant (K).
t	Temps (s).
U	Vitesse potentielle (m. s ⁻¹).
U_0	Vitesse caractéristique (m. s ⁻¹).
U^*	Vitesse sans dimension.
u, v, w	Composantes de la vitesse suivant (x, y, z) (m. s ⁻¹).
$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$	Composantes de la solution.
\vec{v}	Vecteur vitesse.
X	Longueur caractéristique adimensionnelle.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes (m).
Δy	Variation de la solution.
∇	Laplacien.

Symboles Grecques

α	Constante.
γ	Constante.
β	Paramètre d'angle du dièdre.
δ	Balance de longueur (m).
η	Paramètre de similarité.
$\Delta\eta$	Taille d'étape.
θ	Température sans dimension.
$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$	Termes de la solution analytique de la température.
κ	Conductivité thermique (W. m ⁻¹ . K ⁻¹).
λ	Paramètre réel introduit par convenance.
μ	Viscosité dynamique (Pa. s).
μ_e	Perméabilité magnétique (N. A ⁻²).
ξ	Paramètre de viscosité du gradient de rotation local.
ρ	Masse volumique (Kg. m ⁻³).
σ	Conductivité électrique (Siemens. m ⁻¹).
τ_w	Contrainte de cisaillement.
ν	Viscosité cinématique (m ² . s ⁻¹).
ν_s	Viscosité du gradient de rotation.
ϕ	Constante d'intégration et/ou fonction de dissipation visqueuse.
ψ	Fonction de courant.
ω	Micro-rotation.
Δ	Paramètre de la viscosité de vortex.

Abréviations

<i>EDO</i>	Equations Différentielles Ordinaires.
<i>EDP</i>	Equations Différentielles Partielles.

<i>RK4</i>	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
<i>RKF45</i>	Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg 4 et 5.
<i>DFB</i>	Dynamique des Fluides Biomagnétiques.
<i>FHD</i>	Ferrohydrodynamique.
<i>MHD</i>	Magnétohydrodynamique.
<i>ADM</i>	Méthode d'Adomian standard.
<i>DTM</i>	Méthode de Transformation Différentielle.
<i>GDM</i>	Méthode d'Adomian Généralisée.
<i>HAM</i>	Méthode d'Homotopy.
<i>OHAM</i>	Méthode Optimale d'Homotopy.
<i>VIM</i>	Méthode de Variation des Itérations.
<i>SQLM</i>	Méthode de Quasi-Linéarisation Spectrale.

Liste des figures

Figure		page
Figure II.1	Configuration de l'écoulement et coordonnées du problème.	24
Figure III.1	Comparaison entre la solution ADM et la solution numérique de Runge-Kutta pour la fonction $f(\eta)$ [103].	39
Figure III.2	Comparaison entre la solution ADM et la solution numérique de Runge-Kutta pour le profil de vitesse $f'(\eta)$ [103].	39
Figure III.3	Schéma numérique de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.	40
Figure IV.1	Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre d'instationarité K avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ et $Re = 0.5$.	57
Figure IV.2	Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.	57
Figure IV.3	Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.	58
Figure IV.4	Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $M = 1$.	58
Figure IV.5	Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $\beta = 0.25$.	59
Figure IV.6	Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique induit h avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ et $M = 1$.	59
Figure IV.7	Profils de température pour différentes valeurs du nombres de Prandtl en fonction du paramètre d'instabilité K avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, et $M = 0.5$. (a) Pour $K = 0.1$ (b) Pour $K = 1.0$	61
Figure IV.8	Profils de température pour différentes valeurs du nombres de Prandtl en fonction du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, et $K = 0.05$. (a) Pour $M = 0.5$ (b) Pour $M = 1.5$	61
Figure IV.9	Profils de température pour différentes valeurs du nombres de Prandtl en fonction du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $K = 0.05$ et $M = 0.5$. (a) Pour $\beta = 0.5$ (b) Pour $\beta = 1.0$ (c) Pour $\beta = 1.2$	62
Figure IV.10	Profils de température pour différentes valeurs du paramètre d'instationarité K avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ et $Re = 0.5$.	64
Figure IV.11	Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.	65
Figure IV.12	Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.	65
Figure IV.13	Profils de température pour différentes valeurs du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $M = 1$.	66
Figure IV.14	Profils de température pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $\beta = 0.25$.	66

Liste des figures

Figure IV.15	Profils de température pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique induit h avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ et $M = 1$.	67
Figure IV.16	Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre d'instationarité K avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ et $Re = 0.5$.	69
Figure IV.17	Profils de microrotation pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.	69
Figure IV.18	Profils de microrotation pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.	70
Figure IV.19	Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $M = 1$.	70
Figure IV.20	Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $\beta = 0.25$.	71
Figure IV.21	Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique induit h avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ et $M = 1$.	71
Figure IV.22	Coefficient de frottement superficiel pour différentes valeurs des nombres de K et de β .	72
Figure IV.23	Coefficient de frottement superficiel pour différentes valeurs des nombres de Re et de β .	73
Figure IV.24	Coefficient de frottement superficiel pour différentes valeurs des nombres de Re et de K .	73
Figure IV.25	Comparaison entre la solution ADM, la solution numérique et les résultats disponible dans littérature [108].	74

Liste des tableaux

Tableau		Page
Tableau III.1	Comparaison de la solution numérique RK4 avec la solution exacte [105].	43
Tableau III.2	Comparaison de la solution numérique RKF45 avec la solution exacte [105].	44
Tableau III.3	Résultats de la solution numérique RK4 pour le calcul de $y(x)$ [106].	47
Tableau IV.1	Propriétés thermo-physiques du fluide biomagnétique (sang humain) [51].	55
Tableau IV.2	Comparaison entre la solution analytique ADM et les résultats numériques pour la vitesse du fluide biomagnétique lorsque: $Pr = 21$, $x = 1$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ et $Re = 0.1$.	75
Tableau IV.3	Comparaison entre la solution analytique ADM et les résultats numériques pour la température du fluide biomagnétique lorsque: $Pr = 21$, $x = 1$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ et $Re = 0.1$.	76
Tableau IV.4	Comparaison entre la solution analytique d'ADM et les résultats numériques pour la microrotation du fluide biomagnétique lorsque: $Pr = 21$, $x = 1$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ et $Re = 0.1$.	76
Tableau IV.5	Ordre des approximations ADM pour les solutions de la vitesse, de la température et de la microrotation du fluide biomagnétique.	77
Tableau IV.6a	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses nombre du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 1$.	78
Tableau IV.6b	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 7$.	78
Tableau IV.6c	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 12$.	79
Tableau IV.6d	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 16.6$.	79
Tableau IV.6f	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 21$.	80
Tableau IV.7a	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 1$.	80
Tableau IV.7b	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 7$.	81
Tableau IV.7c	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 12$.	81
Tableau IV.7d	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 16.6$.	82
Tableau IV.7f	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$,	82

Tableau IV.8a	$H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 21$. Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 1$.	83
Tableau IV.8b	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 7$.	83
Tableau IV.8c	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 12$.	84
Tableau IV.8d	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 16.6$.	84
Tableau IV.8f	Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 21$.	85

Sommaire

Remerciements

Dédicace

Résumé.....	I
ملخص	II
Abstract.....	III
Nomenclature	IV
Liste des figures.....	V
Liste des tableaux	VI
Sommaire	X
Introduction générale	1

Chapitre I

Généralités et Recherche Bibliographique

I.1 Introduction.....	4
I.2 Fluide	4
I.3 Mécanique des fluides	5
I.4 Dynamique des fluides.....	5
I.5 Dynamique des magnéto fluides ou hydromagnétique (magnétohydrodynamique MHD)	5
I.6 Dynamique des fluides biomagnétiques (DFB).....	6
I.7 Revue bibliographique.....	7
I.8 Conclusion	20

Chapitre II

Formulation mathématique

II.1 Introduction.....	21
II.2 Equations de base de la dynamique des fluides	21
II.2.1 Equation de continuité	21
II.2.2 Equation de quantité de mouvement.....	22
II.2.3 Equation d'énergie.....	23
II.3 Formulation mathématique du problème étudié.....	23
II.3.1 Configuration du problème	23
II.3.2 Hypothèses simplificatrices.....	24
II.3.3 Equations du problème	25
II.3.3.1 Equation de continuité.....	25
II.3.3.2 Equation de quantité de mouvement	25
II.2.3.3 Equation de l'énergie	25
II.2.3.4 Equation du moment angulaire	25

II.3.3.5 Equation d'induction magnétique	25
II.3.4 Conditions aux limites	25
II.3.5 Adimensionalisation	26
II.3.6 Equations sous forme adimensionnelle.....	27
II.3.7 Paramètres physiques importants	29
II.3.8 Conclusion.....	30

Chapitre III

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

III.1 Introduction	31
III.2 Méthode de décomposition d'Adomian	31
III.2.1 Principe de la méthode ADM.....	32
III.2.2 Polynômes d'Adomian	35
III.2.3 Exemple d'application de la méthode d'Adomian (ADM).....	36
Exemple 1 : Najafi et al [103].....	37
III.3 Méthode de Runge-Kutta	39
III.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 RK4.....	40
III.3.2 Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg RKF45.....	41
III.3.3 Comparaison entre les solutions de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) et Runge-Kutta- Fehlberg (RKF45)	43
III.4 Méthode de Tir	44
Exemple 2 : D. Ouidja [106]	46
III.5 Implémentation de la méthode de décomposition d'Adomian	48
III.6 Conclusion.....	53

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction	54
IV.2 Étude des champs dynamique, thermique et de micro-rotation	54
IV.2.1 Champ dynamique	55
IV. 2.1.1 Profils de la vitesse pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21).....	55
IV. 2.2 Champ thermique	60
IV.2.2.1 Cas particulier - Étude paramétrique de l'effet du nombre de Prandtl sur la température	60
IV.2.2.2 Profils de la température pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21).....	63
IV.2.3 Champ de microrotation	67
IV.2.3.1 Profils de la microrotation pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21)	67
IV.3 Coefficient de frottement superficiel pour le sang humain (Prandtl =21)	72
IV.4 Comparaison entre la solution analytique d'ADM et les résultats numériques	74
Conclusion générale	86

Sommaire

Perspectives	88
Références bibliographiques	89
Annexe : Production scientifique	96

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La théorie de la couche limite a été développée par **Ludwig Prandtl [1]** en **1904** dont l'objectif est de comprendre l'écoulement d'un fluide visqueux proche d'une surface solide. Dans cette investigation, Prandtl a essayé de présenter le concept de la couche limite de l'écoulement d'un fluide visqueux et d'un autre non visqueux. En effet, il a pu conclure que les forces visqueuses et d'inertie ont la même importance proche des frontières solides. **Blasius [2]**, pour sa part, a étudié la couche limite laminaire dans un écoulement à travers une plaque plane et les résultats obtenus étaient en excellent accord avec les données expérimentales. Plus tard, l'écoulement bidimensionnel de la couche limite laminaire autour d'un dièdre, généralement existant dans diverses applications industrielles, est premièrement présenté par **Falkner et Skan [3]** en **1931**. Par la suite, la solution des équations ordinaires réduites (ODE) issues de l'analyse de Falkner-Skan a été réalisée par **Hartree [4]**. En **1938**, les équations de la couche limite sont résolues numériquement pour la première fois par **Howarth [5]** par utilisation de la méthode de Runge-Kutta couplée à la méthode de Tir. Ensuite, plusieurs études ont été entreprises pour divers problèmes de l'écoulement de couche limite incorporant des modèles de fluides newtonien et non newtonien.

Les problèmes non linéaires dynamique et thermique de l'écoulement de couche limite à travers un dièdre sous l'effet d'un champ magnétique ont été intensivement étudiés par plusieurs chercheurs dans le cas d'un fluide incompressible. L'application d'un champ magnétique a un effet bénéfique certain dans la technologie, la médecine et la physique. En effet, plusieurs équipements industriels et domaines physiques à savoir : les pompes, les générateurs MHD, le contrôle de la couche limite en aérodynamique et les études de plasma sont influencées par la combinaison entre un fluide électriquement conducteur et un champ magnétique. L'étude de la magnétohydrodynamique (MHD) joue un rôle important dans l'agriculture, la technologie et l'industrie pétrolière. Cette branche de la science a gagnée donc des applications pratiques telles que le refroidissement des réacteurs nucléaires par le sodium liquide, la production de papier, la cristallogénèse du cristal, le tréfilage, les fibres de verre et la recherche de pétrole, ...etc. En effet, ce champ de recherche a une importance capitale et a attiré l'attention de plusieurs chercheurs du fait de ses nombreuses applications dans plusieurs domaines. Selon la littérature, plusieurs études qui traitent l'effet du champ magnétique sur le transfert de chaleur et l'écoulement de plusieurs types de fluides existent. Dans ces dernières années, les problèmes de couche limite MHD pour les écoulements des bio-fluides ont reçu un

intérêt croissant. Les fluides biomagnétiques sont couramment utilisés en sciences médicales et biologiques et il est bien connu qu'ils ont des applications importantes dans la technologie biomédicale. Ceux-ci incluent le développement de divers dispositifs magnétiques pour la séparation des cellules, la réduction de la saignée pendant la chirurgie, le transport des drogues en utilisant des particules magnétiques comme des porteurs de drogue, la formation d'une image de la résonance magnétique des parties spécifiques du corps en employant des forts champs magnétiques et le traitement du cancer/tumeur par utilisation de l'hyperthermie magnétique (25, 26). Il est à noter que **Ruuge et Rusteski [6]** ont présenté une intéressante recherche qui montre quelques applications biomédicales importantes de plusieurs systèmes porteurs de drogue par magnétisme commandés. Au cours d'une chirurgie, **Rashidi et al [7]** ont visualisé que, dans un écoulement de sang, la température du tissu peut être réduite en appliquant un champ magnétique externe.

Dans le présent travail de recherche, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude de l'écoulement MHD stationnaire et instationnaire de couche limite d'un bio-fluide autour d'un obstacle.

Contexte de l'étude

Ce travail de recherche a pour but d'étudier, d'une part, l'effet des paramètres physiques tels que le paramètre d'instationarité K , le paramètre d'angle du dièdre β , le nombre de Reynolds Re , le paramètre du champ magnétique M et le paramètre du champ magnétique induit h sur les champs dynamique et thermique, ainsi que l'évolution de la micro-rotation dans un écoulement de couche limite laminaire d'un fluide biomagnétique (écoulement du sang humain). Par ailleurs, une étude paramétrique montrant l'effet de la variation du nombre de Prandtl sur le comportement du transfert thermique a été également réalisée.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres organisée comme suit :

Dans **Le premier chapitre**, nous présentons les notions de base de la magnétohydrodynamique (MHD) et de la dynamique des fluides biomagnétiques (DFB). Ensuite, nous donnons une revue bibliographique sur les principaux travaux relatifs aux études expérimentales, numériques et analytiques des écoulements de couche limite avec et sans présence d'un champ magnétique.

La formulation mathématique des différentes équations mathématiques caractérisant la problématique étudiée avec les hypothèses simplificatrices appropriées ont fait l'objet du **deuxième chapitre**.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des outils mathématiques utilisés pour résoudre le système des équations différentielles ordinaires non linéaires. En effet, les méthodes numériques de Runge-Kutta-Fehlberg et de Tir, ainsi que la méthode semi-analytique de décomposition d'Adomian (ADM) sont largement présentées.

Au **quatrième chapitre**, les effets de variation des paramètres physiques tels que le paramètre d'instationarité K , le paramètre d'angle du dièdre β , le nombre de Reynolds Re , le paramètre du champ magnétique M et le paramètre du champ magnétique induit h sur l'évolution des champs dynamiques et thermiques, ainsi que la micro-rotation des cellules du sang humain sont visualisés et discutés. Par ailleurs, une étude particulière visualisant les effets de la variation du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur pour l'écoulement envisagé sont également étudiés. Ce chapitre se termine par une comparaison entre les résultats numérique et analytique.

Enfin, ce travail de recherche est couronné par une conclusion générale et quelques perspectives qui vont prolonger cette étude.

Chapitre I

GENERALITES ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire

I.1 Introduction.....	4
I.2 Fluide	4
I.3 Mécanique des fluides	5
I.4 Dynamique des fluides.....	5
I.5 Dynamique des magnéto fluides ou hydromagnétique (magnétohydrodynamique)	5
(MHD)	
I.6 Dynamique des fluides biomagnétiques (DFB).....	6
I.7 Revue bibliographique.....	7
I.8 Conclusion	20

Généralités et recherche bibliographique

I.1 Introduction

Les besoins de développer des mécanismes pour étudier le comportement des bio-fluides dans plusieurs domaines comme la physique, la biochimie, la biologie, la médecine et encore l'industrie biomédicale ont attiré l'attention de la communauté des chercheurs. En effet, selon la littérature scientifique, plusieurs études ont porté sur les phénomènes de transfert thermique et les caractéristiques des bio-fluides sous l'influence du champ magnétique dans les écoulements de couche limite.

I.2 Fluide

Un fluide est un ensemble de particules qui sont maintenues ensemble par des faibles forces de cohésion et par les parois d'un récipient. La propriété déterminante est que les fluides peuvent changer de forme sans récupérer celle d'origine.

Un fluide est un corps où les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment des unes des autres (gaz), de façon que le corps prend la forme du récipient qui le contient. Ainsi « un fluide est défini comme une substance déformable continuellement (des écoulements) sous un effort de cisaillement appliqué indépendamment de la façon de l'application de l'effort ». Les fluides sont un sous-ensemble des phases de la matière et incluent les liquides, les gaz, les plasmas et même quelques matériaux qui sont normalement considérés comme solides, tels que les solides en verre et en plastique. Essentiellement, les fluides sont des matériaux qui n'ont aucune structure cristalline répétée.

D'un point de vue mécanique, un fluide est une substance qui ne supporte pas de contrainte tangentielle; c'est pourquoi un fluide au repos a la forme de son récipient. Un fluide au repos n'a aucun effort de cisaillement.

Le liquide forme une surface libre (c'est-à-dire, une surface non créée par le récipient) alors que les gaz ne le font pas. La distinction entre les solides et les fluides n'est pas entièrement évidente, elle est faite en évaluant la viscosité de la substance. Le mastic idiot peut être considéré comme un solide ou un fluide, selon la période de temps pendant laquelle il est observé. Cependant, le mastic idiot est correctement qualifié de fluide viscoélastique.

I.3 Mécanique des fluides

La mécanique des fluides est un domaine de la physique consacré à l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz, et plasmas) et des forces internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues. Elle se divise en deux parties : la statique des fluides et la dynamique des fluides. Elle peut être classée par catégorie dans la statique des fluides, l'étude des fluides au repos ; et la dynamique des fluides, l'étude du fluide en mouvement. Ce sujet traite presque tous les champs de la science incluant donc l'astrophysique, la biologie, la météorologie, la physico-chimie, la physique des plasmas et la géophysique et a été prolongé à beaucoup de champs de technologie telle que la construction aéronautique, chimique et mécanique.

I.4 Dynamique des fluides

La dynamique des fluides, ou hydrodynamique est l'étude des mouvements des fluides, qu'ils soient liquides ou gazeux. La dynamique des fluides et ses sous-disciplines comme l'aérodynamique, l'hydrodynamique et l'hydraulique ont diverses applications. Par exemple, elles sont utilisées dans le calcul des forces et des moments dans l'aéronautique ou les prévisions météorologiques.

La résolution d'un problème de dynamique des fluides nécessite de calculer les diverses propriétés des fluides telle que la vitesse, la viscosité, la densité, la pression et la température en tant que fonctions espace/temps. Ce champ de recherche est actif avec beaucoup de problèmes réalistes non résolus ou partiellement résolus.

La recherche dans la dynamique des fluides a été prolongée aux régimes exotiques des vols d'hypervitesse et à l'écoulement des fluides de conductivité électrique.

I.5 Dynamique des magnétos fluides ou hydromagnétique (magnétohydrodynamique MHD)

Les phénomènes de la magnétohydrodynamique ont été étudiés intensivement pendant la deuxième et la troisième décennie du vingtième siècle par un certain nombre d'astrophysiciens, principalement **T.G Cowling** et **Vincent Ferraro**. **Hartmann et al [8]** l'a

Généralités et recherche bibliographique

appelé la dynamique de mercure, comme il a travaillé avec le mercure et certains l'ont appelé la magnétohydrodynamique.

La magnétohydrodynamique (dynamique des magnéto-fluides ou hydromagnétique) est l'étude de la dynamique des fluides conducteurs sous l'effet de champs magnétiques ou électriques. Les exemples de tels fluides incluent les plasmas, les métaux liquides, et l'eau salée ou les électrolytes. Le mot magnétohydrodynamique (MHD) est dérivé de la magnéto signifiant le champ magnétique, hydro signifiant le fluide et dynamique signifiant le mouvement. La première utilisation du mot magnétohydrodynamique a été faite par **Hannes Alfvén** [9], et pour lequel il a reçu le prix de Nobel dans la physique en **1970**.

L'étude de la magnétohydrodynamique des fluides conducteurs visqueux joue un rôle significatif, dû à son intérêt pratique et ses applications dans les phénomènes astrophysiques et géophysiques. Les astrophysiciens et les géophysiciens se sont rendu compte de l'importance de la magnétohydrodynamique dans des processus stellaires et planétaires. De telles études ont été effectuées pendant des années dans le raccordement avec des problèmes astrophysiques et géophysiques comme la théorie de « tache de Sun », le mouvement des gaz interstellaires, ...etc. Comme rapporté par **Joseph Larmor (1919)**, les taches du soleil sont provoquées par le champ magnétique du soleil. Le vent solaire est également régi par la magnétohydrodynamique.

Par ailleurs, il existe d'autres applications de la magnétohydrodynamique; plus particulièrement dans le domaine de la médecine. En fait, les principes de la MHD peuvent également être employés pour ralentir l'écoulement du sang dans le système artériel humain où le sang est considéré comme un célèbre bio-fluide. Par conséquent, le champ magnétique est utilisé dans le traitement de certaines maladies cardio-vasculaires (également appelées les maladies cardiaques). Le champ magnétique appliqué affecte également l'écoulement du sang qui est utile pour beaucoup de problèmes comme la tension artérielle et l'hypertension.

I.6 Dynamique des fluides biomagnétiques (DFB)

En **1845**, Michael Faraday a étudié les propriétés magnétiques du sang desséché et a fait une note « doit essayer le sang liquide récent ». Son découverte sur le sang artériel et veineux sans doute aurait excité beaucoup d'intérêt et aurait influencé sensiblement le cours de la recherche sur le sang et l'hémoglobine. Parmi les premiers travaux sur les écoulements du sang, le travail réalisé **Pauling et Coryell** [10] qui traite expérimentalement les propriétés

Généralités et recherche bibliographique

magnétiques et la structure de l'hémoglobine. **Charm et al [11]** ont étudié l'effet du coefficient de transfert de chaleur sur l'écoulement du sang. Les résultats de cette étude indiquent que le coefficient de transfert de chaleur de sang entier peut être estimé à partir des équations théoriques de Graetz, si le nombre de Graetz est plus grand que 20. Quand le nombre de Graetz est moins de 20, le nombre de Nusselt pour le sang diminue sur une ligne au-dessous de l'asymptote maximum théorique. La couche marginale de plasma qui se développe dans certaines conditions a peu d'influence sur le coefficient de transfert de chaleur de suspension de cellules. En **1980, Chato [12]** a étudié le transfert de chaleur pour différents vaisseaux sanguins dans trois types de configurations : un vaisseau simple, deux vaisseaux dans le contre-courant et un vaisseau simple près de la surface de peau.

Récemment, la Dynamique des Fluides Biomagnétiques (DFB) est fortement identifiée comme nouveau domaine dans la théorie de la mécanique des fluides. En fait, la DFB concerne principalement la dynamique des fluides biologiques en présence du champ magnétique. En raison de leur importance considérable pour la technologie biologique et les applications médicales, plusieurs recherche-travaux ont été entrepris sur ce nouveau domaine d'étude intéressant.

Le bio-fluide qui existe dans la créature vivante où l'écoulement est influencé par la présence d'un champ magnétique est considéré comme fluide biomagnétique. Le bio-fluide le plus célèbre est le sang qui tient les propriétés d'un fluide magnétique en raison de l'existence des oxydes de fer dans la molécule d'hémoglobine, qui est présente à une concentration élevée dans les globules rouges.

I.7 Revue bibliographique

Un bref aperçu rapporté sur le champ de recherche envisagé a été fait avec l'intention d'éclaircir le fond de l'étude entrepris par cette thèse.

Cette étude bibliographique s'intéresse principalement aux écoulements de couche limite hydrodynamique stationnaire et instationnaire avec et sans présence du champ magnétique pour les fluides Newtonien et non-Newtonien (principalement les bio-fluides comme « le sang »).

Chen et Libby [13] se sont intéressés au comportement de l'écoulement de couche limite laminaire par utilisation d'un paramètre constant de gradient de pression. Les résultats

Généralités et recherche bibliographique

obtenus montrent pour les solutions de branche supérieure que l'écoulement est stable; cependant l'écoulement de couche limite semble instable pour les solutions de branche inférieure. En **1971**, **Cebeci et Keller [14]** ont utilisé trois méthodes numériques efficaces pour étudier l'écoulement de couche limite régit par l'équation de Falkner-Skan. En effet, il s'agit de la méthode de Tir, de la technique non linéaire de valeur propre et de la méthode parallèle de Tir. Encore, l'écoulement de couche limite d'un fluide micro-polaire autour d'une plaque plane semi-infinie a été étudié par **Ahmadi [15]**. Il a montré que la résolution des équations différentielles donne un ensemble de solutions semblables quand la micro-inertie n'est pas constante.

L'écoulement stationnaire et pulsé du sang dans des petits tubes rigides et circulaires a été réalisé par **Ariman et al [16]** par utilisation de l'approche de micro continuum. Ils ont utilisé une nouvelle condition aux limites sur les rotations des globules rouge du sang aux frontières solides. La solution pulsé et stable de la vitesse de l'écoulement et de la vitesse de rotation des cellules est obtenue par l'application du principe de Hankel et de la transformation de Laplace. La comparaison des profils théoriques de vitesse avec les profils expérimentaux de l'écoulement du sang stable et pulsé montre un bon accord.

Kang et Eringen [17] ont examinés l'effet de la microstructure sur les propriétés rhéologiques du sang. Dans cette étude, la théorie micro-morphique d'Eringen est appliquée pour étudier l'écoulement du sang dans un tube. Les résultats obtenus présentent une explication intégrale de plusieurs phénomènes physiques liés à l'écoulement du sang, tel que la dépendance de la taille du tube de la viscosité apparente et de la distribution non-uniforme de concentration au-dessus de la section transversale du tube.

Les solutions non-semblables pour l'écoulement de couche limite d'un fluide incompressible homogène du second ordre autour d'un dièdre sont établies par **Rajagopal et al [18]**. Ils ont discuté l'évolution du coefficient de frottement superficiel avec le respect des paramètres non newtoniens.

Une étude du comportement d'un fluide visqueux décrit par la théorie de Newton comparé à celui déduit du modèle basé sur la théorie d'un fluide micro-polaire pour l'écoulement de sang est proposée par **Hogan et Henriksen [19]**. La géométrie choisie pour cette analyse comparative est une sténose dans laquelle les effets de gradient devraient être

Généralités et recherche bibliographique

prononcés. Bien que les vitesses et les lignes de courant s'avèrent semblables pour les deux modèles, des différences importantes dans les contraintes de cisaillement sont constatées.

Lih Kuo [20] a pour sa part appliqué la méthode de transformation différentielle pour obtenir les distributions de vitesse et de température dans un écoulement de couche limite autour d'un dièdre (wedge). Les résultats numériques des problèmes dynamique et thermique de couche limite de Falkner-Skan sont largement présentés afin de démontrer l'exactitude et la polyvalence de la méthode de transformation différentielle. En effet, les résultats numériques obtenus montrent que les distributions de vitesse et de température sont en bon accord avec ceux fournis par d'autres méthodes d'approximations numériques.

L'influence du champ magnétique sur l'écoulement de couche limite a fait l'objet de plusieurs travaux. **Watanab et Pop [21]** ont étudiés théoriquement l'écoulement de couche limite, dans un problème de convection naturelle, autour d'un dièdre (coin isotherme) en présence d'un champ magnétique externe. Dans cette étude, la méthode des différences finies est utilisée pour résoudre le système d'équations obtenu. Les effets de la variation du paramètre magnétique, du paramètre d'angle du dièdre et du nombre de Prandtl sont explorés. Les résultats montrent que la vitesse est réduite avec l'élévation du paramètre magnétique M , tandis que la température augmente avec l'accroissement du paramètre M . Par ailleurs, la vitesse et la température augmentent avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

Watanabe et al [22] ont également étudié le problème de convection forcée mixte dans un écoulement de couche limite autour d'un dièdre (wedge) avec aspiration ou injection uniforme. Les équations différentielles partielles sont transformées en équations ordinaires au moyen de la méthode des différences-différentielles. Les solutions des équations résultant de la modélisation mathématique sont obtenues sous une forme intégrale et sont calculées par des procédures numériques itératives. Les auteurs sont intéressés aux distributions des vitesses et des températures, ainsi qu'aux évolutions des coefficients de frottement et du transfert thermique pour diverses valeurs du paramètre d'aspiration/injection, du paramètre de gradient de pression et du paramètre de flottabilité.

Nanousis [23] s'est intéressé aux effets d'un champ magnétique appliqué transversalement sur l'écoulement de convection mixte de couche limite autour d'un dièdre avec aspiration et/ou injection. Les calculs numériques sont effectués pour différentes valeurs des paramètres sans dimensions du problème, et l'analyse des résultats obtenus a prouvé que

Généralités et recherche bibliographique

le champ d'écoulement est fortement influencé par le champ magnétique appliqué. En effet, il a prouvé que le champ magnétique ralentit le mouvement du fluide.

Dans ces dernières années, l'écoulement des bio-fluides sous l'effet d'un champ magnétique externe (écoulement de fluides biomagnétiques) a fait l'objet de nombreuses contributions. **Haik et al [24]** ont donné la première formulation mathématique de la dynamique des fluides biomagnétiques (DFB). En effet, le modèle mathématique proposé suppose que le fluide biomagnétique objet d'étude possède les propriétés magnétiques du sang. Dans cette formulation de DFB, le sang est considéré comme fluide magnétique, homogène, newtonien et non conducteur de l'électricité. Le modèle en question est valide pour l'écoulement laminaire du sang dans de grands vaisseaux où le comportement newtonien est une bonne approximation. Le sang possède la propriété du matériel magnétique et dans quelques circonstances peut être considéré comme fluide diamagnétique, paramagnétique ou ferromagnétique [24].

L'influence du champ magnétique sur l'écoulement des bio-fluides est étudiée intensivement en raison de ces diverses applications dans la technologie biologique et la médecine. Par exemple, certains traitements contre le cancer exigent la séparation propre des cellules rouges du sang entier pour préparer les cellules blanches pour le traitement chimique (**Plavins et Lauva [25]**). Dans l'étude de **Haik et al [26]**, une séparation des globules rouges du sang entier a été faite et les résultats expérimentaux ont prouvé qu'il est possible de séparer les globules rouges du sang entier en utilisant des microsphères magnétiques. **Andersson et al [27]** ont également étudié l'écoulement à travers des sténoses artérielles avec l'occlusion régionale de 48% en considérant l'effet simultané d'une forme asymétrique et des irrégularités surfaces. Par ailleurs, le modèle de (DFB) est basé réellement sur celui de la Ferrohydrodynamique (FHD) qui considère que l'écoulement est affecté par la magnétisation du fluide dans le champ magnétique.

Une simulation numérique d'un fluide biomagnétique en présence d'un thrombus exposé au champ magnétique a été réalisée par **Haik et al [28]**. Cette étude montre que la force magnétique mène à un comportement énergétique dans l'écoulement du fluide et par conséquent le coefficient du frottement augmente avec l'augmentation de la force du champ magnétique.

Généralités et recherche bibliographique

Tzirtzilakis et Kafoussias [29] ont étudié numériquement, par utilisation de la méthode des différences finies, l'écoulement d'un fluide biomagnétique sur une paroi étirée linéairement avec effet de magnétisation dépendant essentiellement de la température comme fonction non linéaire. Encore, par utilisation de la méthode numérique pseudo-spectrale de Tchebychev, **Tzirtzilakis et Tanoudis [30]** sont également intéressés au problème précédent de l'écoulement d'un fluide biomagnétique sur une paroi étirée linéairement en considérant la magnétisation comme une fonction dépendant à la fois de la température et de l'intensité du champ magnétique.

Srivastava [31] a étudié l'écoulement d'un fluide à couple de contraintes (le sang) à travers des vaisseaux sténotiques avec une couche périphérique. Les résultats obtenus montrent principalement que la présence d'une couche périphérique est responsable de la réduction significative de la résistance de l'écoulement du fluide à couple de contraintes.

Kafoussias et al [32] ont étudié numériquement l'écoulement bidimensionnelle stationnaire et laminaire de convection naturelle/forcée de couche limite pour un fluide biomagnétique autour d'une plaque verticale semi-infinie en présence d'un champ magnétique local. Ils ont considéré que la viscosité dynamique et la conductivité thermique du fluide biomagnétique dépendent de la température, tandis que la magnétisation du fluide varie linéairement avec l'amplitude du champ magnétique. L'étude est effectuée pour l'écoulement du sang ($Pr = 21$). Les résultats obtenus indiquent que l'écoulement considéré est influencé par le champ magnétique, ce qui pourrait devenir intéressant en médecine et en bio-ingénierie.

Kafoussias et Nanoussis [33] ont réalisé une étude numérique sur l'écoulement MHD de couche limite laminaire autour d'un dièdre (wedge) quand il est soumis à une injection ou une aspiration de vitesse. Leurs résultats montrent que l'écoulement et le transfert de chaleur sont considérablement influencés par le champ magnétique appliqué.

Anjali et Kandasamy [34] ont étudié l'écoulement laminaire stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux avec des effets de stratification thermiques autour d'un dièdre avec aspiration ou injection. Pour les cas uniformes d'aspiration et d'injection, les auteurs montrent que les distributions de vitesse et de température diminuent avec l'augmentation du paramètre de stratification thermique, tandis que la vitesse croît avec l'accroissement de l'angle d'inclinaison du dièdre. D'autre part, ils montrent que le frottement superficiel augmente avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison du dièdre. Également, pour une aspiration uniforme, le

Généralités et recherche bibliographique

taux du transfert de chaleur augmente, tandis qu'il diminue dans le cas d'injection avec l'accroissement de l'angle d'inclinaison.

Xenos et al [35] sont intéressés à l'étude numérique de l'écoulement MHD de couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression adverse. La méthode de Keller-Box est utilisée pour résoudre les équations issues de la modélisation mathématique. Les résultats obtenus montrent principalement que le champ d'écoulement pourrait être contrôlé par l'effet combiné du champ magnétique et de la condition d'aspiration /injection localisée ou continue, imposée à la surface de la plaque.

Une solution numérique approximative pour la stratification thermique dans le cas de l'écoulement magnétohydrodynamique laminaire stationnaire de couche limite autour d'une paroi d'un dièdre avec aspiration ou injection a été trouvée par **Anjali et Kandasamy [36]**. Ils ont assumé que le fluide est un fluide de Boussinesq visqueux et conducteur de l'électricité et le champ magnétique est appliqué transversalement à la direction de l'écoulement.

Rahman et Sattar [37] ont étudié numériquement l'écoulement MHD de convection naturelle d'un fluide micropolaire à travers une plaque plane poreuse posée verticalement, mobile sans interruption et chauffée uniformément. Les résultats obtenus révèlent que le coefficient de frottement superficiel diminue avec l'augmentation du paramètre d'aspiration, du paramètre du champ magnétique M et du nombre de Prandtl. Par contre, il croît avec l'accroissement du nombre de Richardson, du paramètre de couplage K , du paramètre de source de chaleur Q , du paramètre de viscosité de vortex,.... Par ailleurs, le taux du transfert de chaleur augmente monotoniquement avec l'augmentation du paramètre d'aspiration, du nombre de Richardson, du paramètre de couplage K , et du nombre de Prandtl.

Merkin et Kumaran [38] ont étudié l'écoulement instationnaire de couche limite sur une feuille rétrécie dans un fluide électriquement conducteur sous l'effet du champ magnétique transversal. L'étude est effectuée pour des valeurs du paramètre magnétique M : $M > 1$, $M = 1$ et $M < 1$.

La méthode numérique de quasi-linéarisation spectrale (SQLM) est utilisée par **Srinivasacharya et al [39]** pour étudier l'écoulement magnétohydrodynamique laminaire et stationnaire d'un nano fluide autour d'un dièdre (wedge) avec application d'un champ magnétique variable. Les effets du paramètre magnétique, du paramètre de la loi de puissance

Généralités et recherche bibliographique

de Falkner-Skan et du paramètre de fraction volumique des nanoparticules sur les taux de transfert de chaleur et de masse adimensionnels ont été largement discutés par les auteurs.

L'effet du transfert de chaleur sur l'écoulement de Falkner-Skan M.H.D. d'un fluide de Jeffery a été résolu analytiquement en utilisant la méthode d'Homotopy par **Awais et al [40]**. Les auteurs ont observé que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique M ralentit la vitesse du fluide, fait augmenter l'épaisseur de la couche limite dynamique et peut contrôler le champ d'écoulement. De plus, ils ont également observé que la température du fluide augmente avec l'augmentation du champ magnétique.

Ramesh et Jyothi [41] ont analysé l'écoulement laminaire, bidimensionnel de couche limite d'un fluide visqueux, ainsi que le transfert de chaleur pour des valeurs arbitraires de l'exposant de la température de la paroi et du nombre de Prandtl. Les équations non linéaires issues de la modélisation mathématique sont résolues numériquement par la méthode de Keller-box.

Ferdows et al [42] ont considéré la stabilité des solutions duelles pour l'écoulement et le transfert de chaleur d'un fluide biomagnétique sur une feuille d'étirement/rétrécissement en présence d'un flux thermique et d'un dipôle magnétique. Le calcul numérique a été exécuté en employant la fonction `bvp4c` dans le langage de programmation MATLAB. Des solutions duelles ont été discutées pour une certaine gamme du paramètre d'étirement/rétrécissement et du paramètre d'aspiration.

Ibrahim et Makinde [43] ont présenté un modèle mathématique pour l'écoulement bidimensionnel stationnaire de couche limite d'un fluide visqueux, incompressible et conducteur de l'électricité. Dans cette investigation, le rayonnement d'une plaque plane dans un milieu de réaction chimique sous l'effet de la condition aux limites de la surface convective en présence d'un champ magnétique transversal a été considéré. Les résultats obtenus montrent que l'effet combiné de l'accroissement du nombre de Prandtl et du paramètre de rayonnement tendent à réduire l'épaisseur de la couche limite thermique le long de la plaque et par conséquent la température du fluide se trouve diminuée. Il est également conclu que l'écoulement de Blasius fournit une couche limite thermique plus épaisse mais cette tendance peut être renversée aux basses valeurs des paramètres écrivant le problème.

Eid et al [44] ont étudié les caractéristiques du transfert de chaleur dans un écoulement d'un bio-nanofluide de Sisko non newtonien avec la présence du rayonnement

Généralités et recherche bibliographique

thermique non linéaire. Une étude analytique est présentée par **Ibrahim et al [45]** pour le problème de l'écoulement laminaire de convection mixte d'une surface verticale en présence du rayonnement et de réaction chimique. Le champ magnétique induit est également considéré. Les équations différentielles ordinaires ont été résolues par une méthode dite de perturbation.

Pandey et Kumar [46] ont discuté l'effet de la dissipation visqueux-Ohmique sur l'écoulement MHD du nano-fluide (Cuivre-eau) traversant un dièdre en présence du rayonnement thermique et de réaction chimique. Les équations du problème considéré sont résolues numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg couplée à la technique de Tir.

L'écoulement de couche limite en fonction du temps (écoulement instationnaire) a une très grande importance dans la mécanique des fluides vu ses diverses applications technologiques et industrielles. Le processus de démarrage et le mouvement du fluide périodique sont très importants dans beaucoup de problèmes de technologie, tels que le rotor d'hélicoptère, le propulseur de bateau et les cascades des lames de turbomachines. D'autres applications peuvent être trouvées dans les domaines de bio-fluides, de l'hydrodynamique et de la fabrication. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les effets simultanés du champ magnétique et de l'instabilité de l'écoulement. En effet, **Takhar et al [47]** ont étudié numériquement l'écoulement MHD tridimensionnel instationnaire de couche limite dû au mouvement impulsif d'une surface d'étirement. Les résultats montrent que les contraintes de cisaillement et le transfert de chaleur augmentent avec le paramètre d'étirement et le paramètre magnétique, et il y a une faible transition de la solution à court temps à la solution à long temps. D'autre part, les contraintes de cisaillement augmentent avec le temps, mais le transfert de chaleur augmente jusqu'à un certain instant de temps, mais au-delà duquel il diminue. Les effets du paramètre magnétique et du paramètre d'étirement sont les plus prononcés sur les contraintes de cisaillement dans la direction y .

Bhattacharyya et al [48] ont étudié l'écoulement MHD instationnaire de couche limite avec la diffusion des espèces réactives chimiquement sur une feuille d'étirement perméable avec aspiration ou soufflage. Dans cette investigation, la variation de la loi de puissance de la concentration au niveau de la paroi est également étudiée.

Généralités et recherche bibliographique

La convection forcée dans l'écoulement instationnaire de la couche limite du nanofluide sur une feuille rétrécie perméable en présence du rayonnement thermique est étudiée par **Nandy et al [49]**. Un champ magnétique variable est appliqué perpendiculairement à la feuille. Le modèle de nano-fluide considéré inclut les effets du mouvement Brownien et de thermophorese. Les résultats numériques indiquent que les solutions duelles existent pour certaines valeurs du paramètre magnétique M , du paramètre d'aspiration d'une masse murale (s) et du paramètre d'instabilité A .

Une étude numérique détaillée a été faite par **Ganapathirao et al [50]** pour un écoulement instationnaire de convection mixte autour d'un dièdre tenant compte des effets de réaction chimique et de génération ou d'absorption de chaleur en présence d'aspiration ou d'injection.

De leur part, **Rahman et Sattar [51]** ont étudié numériquement l'écoulement hydromagnétique non-linéaire instationnaire de convection forcée autour d'un dièdre. Ils ont pu observer que l'instabilité commande de manière significative les caractéristiques d'écoulement et le transfert de chaleur du fluide biomagnétique. Également, le champ magnétique induit a un effet significatif sur l'écoulement, le transfert de chaleur et la rotation des corpuscules de sang. De plus, le taux de cisaillement et du transfert de chaleur diminue avec l'accroissement du paramètre d'instabilité, tandis qu'il augmente avec l'augmentation de l'angle du dièdre.

Les effets des propriétés variables du fluide et le thermophorese sur l'écoulement instationnaire de convection forcée au niveau de la couche limite qui se développe le long d'un dièdre perméable d'étirement/rétrécissement ont été étudiés par **Alam et al [52]** numériquement. En effet, les équations locales qui en résultent sont résolues par la technique Nachtsheim-Swigert associé à la méthode de Tir avec intégration de sixième ordre de Runge-Kutta.

Roy et al [53] ont étudié l'écoulement instationnaire de couche limite de convection mixte autour d'un dièdre verticale en présence du rayonnement thermique. Les résultats obtenus montrent que pour les grandes valeurs du nombre de Richardson Ri , l'intensité du frottement superficiel est plus grande. Par ailleurs, quand le nombre de Richardson Ri augmente, il est trouvé que les magnitudes du transfert de chaleur et du transfert de masse

Généralités et recherche bibliographique

s'avèrent plus grandes près du bord d'attaque. De plus, la magnitude du frottement superficiel augmente au fur et à mesure que le nombre de Schmidt est diminué.

Alam et al [54] ont traité l'effet de divers paramètres sans dimensions sur l'écoulement des nanofluides MHD instationnaire en convection forcée au niveau de la couche limite qui se développe autour d'un dièdre perméable étirant la surface.

Le problème de l'écoulement aligné MHD instationnaire d'un nano-fluide magnétique traversant un dièdre a été étudié par **Ilias et al [55]**. Les équations différentielles partielles qui gouvernent le problème étudié sont résolues numériquement par la méthode de Keller-box. Les résultats montrent que le paramètre magnétique et le paramètre d'instabilité influencent la vitesse, la température, le frottement superficiel et le taux du transfert de chaleur du nano fluide de manière significative.

Le comportement thermique dû à la condition aux limites de la surface convective avec ou sans présence du champ magnétique au-dessus de diverses configurations géométriques a été étudié intensivement par beaucoup de chercheurs. Par exemple, **Battaler [56]** a considéré la condition aux limites de surface convective pour les deux problèmes d'écoulement de couche limite de Blasius et de Sakiadis. Il a étudié l'influence du rayonnement thermique sur la couche limite laminaire pour une plaque plane dans un uniforme jet de fluide et pour une plaque mobile dans un fluide ambiant stable. L'auteur a observé généralement que l'écoulement de Blasius fournit une couche limite thermique plus épaisse comparée à l'écoulement de Sakiadis, mais cette tendance peut être renversée aux basses valeurs des paramètres physiques de ce problème.

Aziz [57] a également étudié sous l'effet d'une condition aux limites de surface convective le problème non linéaire classique des couches limites hydrodynamiques et thermiques autour d'une plaque plane connue sous le nom du problème de Blasius.

Ishak [58] a considéré le problème de l'écoulement laminaire et stationnaire de couche limite, ainsi que le transfert de chaleur sur une plaque plane et perméable immergée dans un jet libre uniforme avec la condition aux limites de surface convective.

Le transfert de chaleur en fluide biomagnétique autour d'un dièdre avec la condition aux limites de la surface convective en présence du champ magnétique induit a été analysé numériquement par **Rahman [59]**. Les résultats obtenus indiquent que le profil de

Généralités et recherche bibliographique

température du fluide dans la couche limite augmente avec l'augmentation du nombre de Biot et du paramètre du champ magnétique induit.

Dans une étude numérique, **Khan et al [60]** ont donné des solutions similaires pour l'écoulement bidimensionnel et stationnaire de couche limite de Falkner-Skan d'un nano fluide autour d'un dièdre avec des conditions aux limites convectives. Ils ont conclu que la température sur la surface du corps augmente avec l'augmentation du paramètre de la surface convective.

L'étude de **Alam et al [61]** est basée sur l'écoulement hydromagnétique bidimensionnel instationnaire de convection forcée du sang humain (considéré comme un fluide micropolaire visqueux) le long d'un dièdre perméable avec une condition aux limites de surface convective. La vitesse de l'écoulement potentiel a été prise en fonction de la distance x et du temps t . Les équations locales en résultant de similitude pour l'écoulement instationnaire ont été résolues numériquement en appliquant la technique de Nachtsheim-Swigert associée à la méthode de Tir avec une intégration de Runge-Kutta de sixième ordre.

Les problèmes du transfert de chaleur à travers les milieux poreux ont plusieurs applications en technologie telles que le rétablissement d'énergie géothermique, l'extraction de l'huile brute, la pollution des eaux souterraines, le stockage de l'énergie thermique et l'écoulement qui traverse des milieux de filtrage. À la lumière de ces diverses applications, ce domaine a attiré l'attention d'un certain nombre de chercheurs, et certains d'entre eux sont intéressés par l'étude de l'écoulement de couche limite à travers les milieux poreux. **Anbuezhian et al [62]** ont étudié les effets du thermophorese et de la réaction chimique sur le transfert de chaleur et de masse dans un écoulement MHD de convection mixte traversant une surface poreuse en présence des phénomènes d'aspiration ou d'injection. Une étude analytique réalisée par **Reddy et al [63]** sur l'écoulement MHD instationnaire de convection naturelle d'un fluide viscoélastique et incompressible à travers une plaque verticale dans un milieu poreux. La nouveauté de cette réside dans l'analyse des effets de la perméabilité oscillante et l'aspiration dépendante du temps en présence du rayonnement, de génération de chaleur /absorption, de l'absorption du rayonnement et de la réaction chimique. Les résultats montrent que l'élasticité du fluide et la force de Lorentz réduisent la vitesse et elle est plus prononcée en cas d'espèces plus lourdes.

Généralités et recherche bibliographique

Veera Krishna et al [64] ont considéré l'écoulement magnétohydrodynamique bidimensionnel, oscillant et instationnaire du sang dans une artériole poreuse sous l'influence d'un champ magnétique transversal uniforme dans un canal planaire. Les transferts de chaleur et de masse pendant l'écoulement de sang artériel traversent un milieu poreux sont étudiés. Un modèle mathématique est développé pour l'écoulement instationnaire dont des conditions de glissement sont considérées. Des expressions analytiques pour les profils de la vitesse, de la température et de la concentration ont été recherchées.

Ibrahim et Tulu [65] ont utilisé la méthode (SQLM) pour étudier le problème d'écoulement bidimensionnel laminaire MHD de couche limite pour un nano-fluide à travers un dièdre incorporé dans un milieu poreux. Dans ce travail, les auteurs ont trouvé que l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue avec l'augmentation du gradient de pression, de perméabilité et du paramètre magnétique ; tandis que l'épaisseur de couche limite thermique augmente avec l'augmentation du nombre d'Eckert et du paramètre de thermophorese.

Par ailleurs, au cours de ces dernières décennies, une nouvelle génération de méthodes analytiques tels que : la méthode d'Homotopy HAM, la méthode de variation des itérations VIM, la méthode de DTM, la méthode de décomposition d'Adomian ADM, ont été développées et avec succès utilisée par beaucoup de chercheurs pour différents problèmes scientifiques de frontières dans le domaine de l'ingénierie, la physique, la biologie et la chimie.

En ce qui concerne la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), **Awangkechil et Hashim [66]** étaient parmi les premiers chercheurs qui ont appliqué la méthode ADM pour résoudre le système des équations ordinaires non linéaires qui a été dérivé de l'équation de la couche limite de la convection naturelle. **Momani et Odibat [67]** ont appliqué la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre l'équation de Navier-Stokes fractionnaire dans le temps. **Yu et al [68]** ont également employé la méthode de décomposition d'Adomian pour construire les solutions explicites des équations partielles d'espace/temps de réaction-diffusion (PETRD) linéaires et non linéaires. Dans une étude analytique, **Khalifa et al [69]** ont employé la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre l'équation régularisée modifiée pour des ondes longues (modified regularized long wave equation). Ils ont constaté

Généralités et recherche bibliographique

que la méthode est très efficace et elle fournit des solutions approximatives précises sans discrétisation spatiale en prenant peu de termes seulement.

En utilisant la méthode ADM, plusieurs chercheurs ont focalisés leurs efforts à la résolution des écoulements MHD. Par exemple, **Noor et al [70]** ont analysé le transfert de chaleur de l'écoulement MHD due à une feuille rétrécie perméable incorporée dans un milieu poreux avec prise en compte de la génération de chaleur interne. **Noor et Hashim [71]** ont étudié le même problème précédent mais au-dessus d'une paroi étiré linéairement et incorporée dans un milieu poreux non-Darcien. **Noor et al [72]** ont donné également une solution non-perturbative simple pour l'écoulement visqueux MHD dû à une feuille rétrécie. **Kezzar et Sari [73]** ont utilisé la méthode généralisée de décomposition pour résoudre le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel. Dans un autre travail, la solution sous forme de séries rapidement convergentes des problèmes dynamique et thermique de l'écoulement d'un nanofluide entre des parois inclinés étirables/rétrécissables a été étudié par **Kezzar et Sari [74]**.

De nombreux auteurs ont discuté la similarité de la solution obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian à d'autres solutions analytiques et numériques de problèmes initiaux pour les équations différentielles, telle que la méthode de Picard d'itérations successives de Picard utilisée par **Rach [75]** et **Bellomo et Sarafyan [76]**. **Shawagfeh et Kaya [77]** ont effectué une analyse comparative entre l'ADM et celle de Runge Kutta pour résoudre les systèmes d'équations ordinaires. **Abbasbandy [78]** a proposé une modification efficace de la méthode de perturbation d'homotopy standard, qui est comparée avec la méthode modifiée d'Adomian pour résoudre l'équation non linéaire $f(x) = 0$. Dans un autre travail, **Abbasbandy [79]** a fait une comparaison entre les deux méthodes précédentes, mais pour la solution de l'équation différentielle quadratique de Riccati. **Aminataei et Hosseini [80]** ont comparé la stabilité de la solution d'une équation obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian avec d'autres méthodes numériques telles que la méthode de Runge-Kutta et la méthode des différences finies. La méthode de variation d'itérations VIM et la technique ADM ont été appliquées pour trouver la solution de l'équation Eikonal par **Dehghan et Salehi [81]**. Dans cette étude, ils ont montré que la méthode de variation d'itérations donne la solution du problème sans calculer des polynômes d'Adomian ; qui est un avantage important par rapport au procédé de décomposition d'Adomian. Également, **Sari et al [82]** ont fait une comparaison entre la méthode d'Adomian ADM et de la méthode

Généralités et recherche bibliographique

généralisée d'Adomian GDM en résolvant le problème non linéaire de l'écoulement dans des canaux convergent-divergent.

I.8 Conclusion

L'intérêt d'une telle démarche de recherche bibliographique est, d'une part, de donner les principales définitions en mécanique des fluides et, d'autre part, de se familiariser avec les nouvelles données sur les problèmes existants dans le domaine des écoulements de couche limite en présence d'un champ magnétique. En effet, le rappel bibliographique nous a permis de bien visualiser que la plupart des travaux référentiels cités sont essentiellement portés sur des études numériques de l'écoulement de couche limite laminaire en présence d'un champ magnétique externe. On a également constaté qu'il existe peu de travaux qui s'intéressent aux écoulements instationnaires des bio-fluides en présence d'un champ magnétique. Dans ce contexte, notre contribution portera sur l'étude analytique et numérique de l'écoulement instationnaire d'un bio-fluide autour d'un dièdre sous l'effet d'un champ magnétique transversal. A notre connaissance, la présente contribution est une première tentative de résolution analytique des équations différentielles non linéaires issues de la modélisation mathématique de l'écoulement d'un bio-fluide (sang humain) autour d'un obstacle.

Chapitre II

FORMULATION MATHÉMATIQUE

Sommaire

II.1 Introduction.....	21
II.2 Equations de base de la dynamique des fluides	21
II.3 Formulation mathématique du problème étudié.....	23
II.3.1 Configuration du problème	23
II.3.2 Hypothèses simplificatrices.....	24
II.3.3 Equations du problème	25
II.3.4 Conditions aux limites	25
II.3.5 Adimensionalisation	26
II.3.6 Equations sous forme adimensionnelle.....	27
II.3.7 Paramètres physiques importants	29
II.3.8 Conclusion	30

Formulation mathématique

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps les équations mathématiques de conservation et la configuration du problème étudié. Par la suite et après adaptation des hypothèses simplificatrices, nous présentons les équations gouvernantes décrivant l'écoulement convectif instationnaire d'un fluide biomagnétique micro-polaire incompressible avec les conditions aux limites appropriées. Enfin, nous posons les équations différentielles et les conditions aux limites sous formes adimensionnelles.

II.2 Equations de base de la dynamique des fluides

Les équations fondamentales de la dynamique des fluides sont basées sur les lois universelles de la conservation suivantes : conservation de la masse, conservation du mouvement et conservation de l'énergie. L'équation qui résulte de l'application de la loi de conservation de la masse à un écoulement du fluide s'appelle l'équation de continuité. La loi de conservation du mouvement n'est rien de plus que la deuxième loi de Newton. Quand cette loi est appliquée à l'écoulement du fluide, elle rapporte une équation vectorielle connue sous le nom d'équation du mouvement. La loi de conservation de l'énergie est identique à la première loi de la thermodynamique et l'équation dynamique du fluide en résultant est appelée équation de l'énergie.

II.2.1 Equation de continuité

L'équation de continuité est une équation qui décrit le taux de génération de la masse dans un volume donné est entièrement due à l'apport net d'une masse à travers la surface enfermant le volume étudié (pas de forces internes). C'est un rapport au sujet de la loi de conservation de la masse, c'est-à-dire que la masse peut être créée mais pas détruite. Cette loi donne lieu à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v(\nabla \rho) + \rho(\nabla \vec{v}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Par introduction de la dérivée particulaire, il vient :

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \vec{v}) = 0 \quad (\text{II.3})$$

Où : $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ représente le changement de la densité (dans un écoulement stationnaire) et $div(\rho \vec{v})$ s'appelle le terme convective et \vec{v} est le vecteur vitesse.

Dans le cas d'un fluide incompressible, la dérivée particulaire s'annule :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{II.4})$$

En ce cas, l'équation de continuité se réduit à la forme suivante :

$$div(\vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Dans les coordonnées cartésiennes, l'équation (II.5) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.6})$$

II.2.2 Equation de quantité de mouvement

La signification physique de l'équation du mouvement est que la totalité des forces agissant sur une masse fluide enfermée dans un volume arbitraire fixé dans l'espace est égale au taux du temps de changement du mouvement linéaire. Ces équations sont appelées équations du mouvement de Navier-Stokes qui sont obtenues à partir de la deuxième loi du mouvement de Newton. C'est la loi de la conservation du mouvement. Par conséquent, l'équation du mouvement pour un fluide incompressible lorsque la densité et la viscosité sont constantes peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\rho \left[\frac{D\vec{v}}{Dt} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{II.7})$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{II.8})$$

Où l'opérateur :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II.9})$$

L'équation (II.9) est appelée la dérivée Eulérienne qui implique le taux de variation de certaines particules du fluide et contient à la fois les deux parties locale et convective. En coordonnées cartésiennes, l'équation (II.9) s'écrit :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.10})$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.11})$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.12})$$

II.2.3 Equation de l'énergie

Cette équation basée sur la loi de conservation de l'énergie qui exige que la différence du taux d'énergie par rapport à un volume fixé dans l'espace à l'intérieur d'une surface donnée et la vitesse à laquelle cette énergie sort à travers la surface doit être égale au taux net d'augmentation de l'énergie dans ce volume. Cette équation pour un fluide incompressible peut s'écrire :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \frac{\partial Q_0}{\partial t} + \phi \quad (\text{II.13})$$

$\frac{\partial Q_0}{\partial t}$, est le taux de génération de chaleur par unité de volume par unité de temps dans le fluide. La fonction de dissipation visqueuse est utilisée lorsque la chaleur de frottement doit être considérée. Elle s'exprime par :

$$\phi = 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (\text{II.14})$$

Dans un écoulement incompressible, la vitesse est généralement faible et la différence de température est modérée, le terme de dissipation visqueuse peut donc être négligé.

II.3 Formulation mathématique du problème étudié

II.3.1 Configuration du problème

Dans cette étude, nous considérons l'écoulement laminaire, instationnaire et bidimensionnel d'un fluide biomagnétique se déplaçant autour d'un dièdre. Comme visualisé dans la **Figure (II.1)**, nous supposons que l'écoulement est dirigé le long de l'axe des abscisses avec une vitesse potentielle $U(x, t)$, les propriétés physiques du fluide sont constantes et un champ magnétique H_0 est appliqué perpendiculairement à la direction de l'écoulement. En outre, on adopte que la surface inférieure du dièdre est chauffée par convection par un fluide chaud à la température T_c et par conséquent fournit un coefficient de transfert de chaleur h_c . L'angle totale du dièdre est donné par $\beta\pi$.

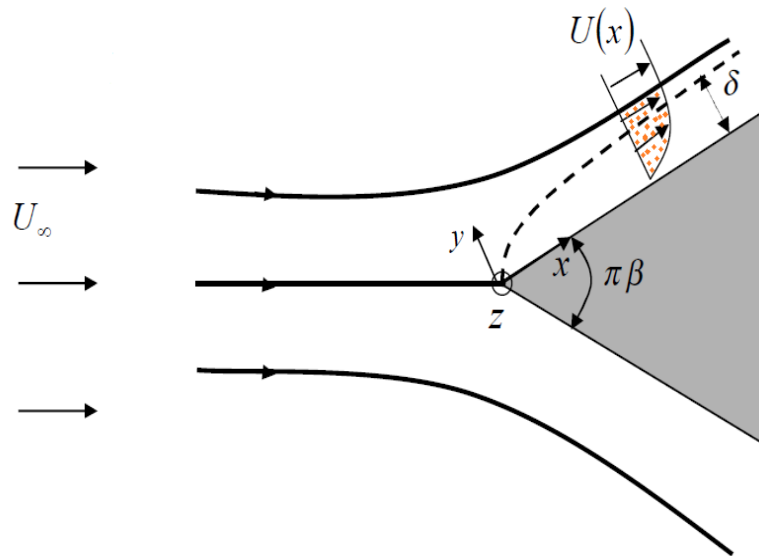


Figure II.1 : Configuration de l'écoulement et coordonnées du problème.

II.3.2 Hypothèses simplificatrices

Pour la modélisation du problème physique de l'écoulement de couche limite d'un fluide biomagnétique autour d'un obstacle, nous adaptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Régime d'écoulement laminaire, bidimensionnel et dépendant du temps (instationnaire).
- Le fluide biomagnétique étudié est le sang humain.
- Le sang est un fluide biomagnétique avec un nombre de Prandtl; $Pr = 21$ (**Chato [12]**).
- Le sang est considéré comme un fluide non newtonien de type micro-polaire, visqueux et incompressible.
- Les propriétés thermo-physiques du fluide biomagnétique étudié sont constantes.
- L'échauffement par effet Joule est négligeable dans l'équation de la chaleur.
- Un champ magnétique uniforme H_0 est appliqué transversalement à la direction de l'écoulement.
- Le champ magnétique induit H^* n'est pas négligeable.
- La direction de propagation (direction de l'écoulement) est considérée le long de l'axe x .

II.3.3 Equations du problème

Considérons les hypothèses mentionnées ci-dessus, les équations décrivant l'écoulement convectif instationnaire d'un fluide biomagnétique micro-polaire incompressible s'écrivent sous la forme suivante (**Rahman [59], Chaudhary et al. [83]**):

II.3.3.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.15})$$

II.3.3.2 Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\nu + \frac{S}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\mu_e H_0}{\rho} \frac{\partial H^*}{\partial y} \quad (\text{II.16})$$

II.3.3.3 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\rho c_p \sigma} \left(\frac{\partial H^*}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.17})$$

II.3.3.4 Equation du moment angulaire

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\nu_s}{\rho j} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{S}{\rho j} \left(2\omega + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{II.18})$$

II.3.3.5 Equation d'induction magnétique

$$\frac{\partial H^*}{\partial t} + u \frac{\partial H^*}{\partial x} + v \frac{\partial H^*}{\partial y} = \frac{1}{\mu_e \sigma} \frac{\partial^2 H^*}{\partial y^2} + H^* \frac{\partial u}{\partial x} + H_0 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{II.19})$$

Où u, v sont les composantes de la vitesse du fluide, ρ est la densité du fluide, μ est la viscosité dynamique du fluide, ν est la viscosité cinématique du fluide, S est la viscosité de vortex, ω est la micro-rotation, T est la température du fluide, j est la micro-inertie, c_p est la chaleur spécifique du fluide à pression constante, μ_e est la perméabilité magnétique, H^* est le champ magnétique induit, σ est la conductivité électrique, k est la conductivité thermique, ν_s est la viscosité du gradient de rotation et t est le temps.

II.3.4 Conditions aux limites

À la surface du dièdre :

$$(y = 0): u = 0, v = 0, -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} = h_c (T_c - T), \omega = -n^* \frac{\partial u}{\partial y}, H^* = H_w. \quad (\text{II.20.a})$$

À la frontière de la couche limite :

$$(y \rightarrow \infty): u = U(x, t), \omega = 0, T = T_\infty, H^* = 0 \quad (\text{II.20.b})$$

Lorsque le paramètre de micro-rotation $n^* = 0$, on obtient $\omega=0$, ce qui indique qu'au près de la surface du dièdre, les micro-éléments dans un écoulement de particules concentrées ne sont pas capable de tourner. Il est à noter que cette étude s'intéresse uniquement à un écoulement de couche limite laminaire.

Par ailleurs, la vitesse de l'écoulement externe $U(x, t)$ et le gradient de pression (P_x) sont donnés par (**Sattar [84]**):

$$U(x, t) = vx^m / \delta^{m+1} \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\rho \left(\frac{v(m+1)x^m}{\delta^{m+2}} \frac{d\delta}{dt} + \frac{v^2 mx^{2m-1}}{\delta^{m+2}} \right) \quad (\text{II.22})$$

Où : δ est une longueur caractéristique dépendant du temps donnée comme suit :

$$\delta = \delta(t) \quad (\text{II.23})$$

Le paramètre m est une fonction du paramètre d'angle du dièdre (ou le paramètre de gradient de pression de Hartree). Il peut être exprimé comme :

$$m = \frac{\beta}{2-\beta} \geq 0 \quad (\text{II.24})$$

En fait, des valeurs positives de β indiquent un écoulement accéléré; cependant, les valeurs négatives correspondent à un écoulement ralenti.

II.3.5 Adimensionalisation

Les équations aux dérivées partielles du problème (**Eqs. II.15–II.19**) avec les conditions aux limites (**Eqs. II.20.a et II.20.b**) peuvent être adimensionnées. Pour ce faire, considérons les fonctions de similarités suivantes :

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{x^{m-1}}{\delta^{m+1}}} \quad \psi = \sqrt{\frac{2v^2 x^{m+1}}{(m+1)\delta^{m+1}}} f(\eta) \quad (\text{II.25})$$

Avec les transformations suivantes :

$$\frac{T-T_\infty}{T_c-T_\infty} = \theta(\eta), \quad \omega = \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{v^2 x^{3m-1}}{\delta^{3m+3}}} N(\eta), \quad H^* = \sqrt{\frac{(m+1)\rho}{2\mu_e} \frac{vx^m}{\delta^{m+1}}} H(\eta) \quad (\text{II.26})$$

Considérons la fonction de courant ψ , les composantes de la vitesse (u, v) s'expriment comme suit:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.27})$$

Tenant compte de (II.25), il vient :

$$u = U(x, t)f' \quad \text{et} \quad v = -\sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{v^2 x^{m-1}}{\delta^{m+1}}} \left(f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right) \quad (\text{II.28})$$

Où: η est la variable de similitude, ψ est la fonction de courant. Les fonctions f , N , H et θ représentent respectivement la fonction de courant adimensionnée, la micro-rotation adimensionnée, le champ magnétique induit adimensionné et la température adimensionnée.

II.3.6 Equations sous forme adimensionnelles

Substitution des équations (II.22), (II.23), (II.24), (II.25) et (II.28) dans les équations (II.16), (II.17), (II.18) et (II.19) a mènent aux équations non linéaires suivantes :

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] [\eta f'' + 2f' - 2] + Re^{m-1} [(1 + \Delta)f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'] = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] \eta \theta' + Re^{m-1} \left[\theta'' + Prf\theta' + PrEc \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{Pm} \frac{1}{2-\beta} (H')^2 \right\} \right] = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] [3N + \eta N'] + Re^{m-1} [(1 + \Delta/2)\xi N'' - (2 - \beta)\Delta(2N + f'') + \xi \{fN' + (1 - 2\beta)Nf'\}] = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] [2H + \eta H'] + Re^{m-1} [H'' + PmfH' + (\beta - 1)Pm\eta Hf'' + (2 - \beta)PmMf''] = 0 \quad (\text{II.32})$$

Où:

Le nombre de Reynolds local, le nombre d'Eckert, le nombre de Prandtl, le nombre du Prandtl magnétique, le paramètre de viscosité de vortex, le paramètre du champ magnétique et le paramètre de la micro-inertie sont donnés par :

$$Re = U_0 x / \nu \quad (\text{II.33.1})$$

$$Ec = (U_0 U^*)^2 / c_p (T_c - T_\infty) \quad (\text{II.33.2})$$

$$Pr = \mu c_p / \kappa \quad (\text{II.33.3})$$

$$Pm = \mu_e \sigma \nu \quad (\text{II.33.4})$$

$$\Delta = S / \mu \quad (\text{II.33.5})$$

$$M = \sqrt{(\mu_e x / \mu U_0 U^*)} * H_0 \quad (\text{II.33.6})$$

$$\xi = j U_0 U^* / \nu x \quad (\text{II.33.7})$$

Avec: $U^* = U / U_0$ est la vitesse adimensionnelle libre de l'écoulement.

Avec :

U_0 : Vitesse de référence.

Nous observons que l'ensemble des équations (II.29), (II.30), (II.31) et (II.32) contient un paramètre $\left[\frac{U_0^{m-1}}{\nu^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right]$. Suivant (Sattar [84]), les solutions des équations (II.29) à (II.32) peuvent être obtenues en considérant la quantité $\left[\frac{U_0^{m-1}}{\nu^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right]$ constante. En conséquence, nous obtenons :

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{\nu^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] = K(\text{constant}) \quad (\text{II.34})$$

l'intégration de l'équation (II.34) donne :

$$\delta = [K(m+1)U_0^{1-m}\nu^m t]^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{II.35})$$

Où la constante d'intégration est déterminée par la condition : $\delta = 0$ lorsque $t = 0$. Pour $m = 1$ et $K = 2$, l'équation (II.35) devient :

$$\delta = 2\sqrt{\nu t} \quad (\text{II.36})$$

La valeur $m = 1$ représente la condition, pour une plaque plane, pour laquelle l'écoulement se nomme écoulement de point d'arrêt de **Himenz** [85]. Il apparaît de l'équation (II.36) que la balance de longueur est compatible à la balance habituelle de longueur considérée pour les divers écoulements de couche limite instationnaire (**Schlichting** [86]). Puisque le paramètre δ est une longueur caractéristique aussi bien qu'un paramètre de similarité, toutes les valeurs de K dans l'équation (II.35) n'affectent pas la nature des solutions sauf que la balance serait différente.

Tenant compte de l'équation (II.34), les équations (II.29) à (II.32) deviennent des équations différentielles ordinaires :

$$K[\eta f'' + 2f' - 2] + Re^{m-1}[(1 + \Delta)f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'] = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$K\eta\theta' + Re^{m-1} \left[\theta'' + Prf\theta' + PrEc \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{Pm} \frac{1}{2-\beta} (H')^2 \right\} \right] = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$K[3N + \eta N'] + Re^{m-1}[(1 + \Delta/2)\xi N'' - (2 - \beta)\Delta(2N + f'') + \xi\{fN' + (1 - 2\beta)Nf'\}] = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$K[2H + \eta H'] + Re^{m-1}[H'' + PmfH' + (\beta - 1)Pm\eta Hf'' + (2 - \beta)PmMf''] = 0 \quad (\text{II.40})$$

Les conditions aux limites dans les équations (II.20.a) et (II.20.b) deviennent maintenant :

$$f = f' = 0, \theta' = \sqrt{2 - \beta} Bi[\theta - 1], N = -n^* f'', H = \sqrt{2 - \beta} h \quad \text{à } \eta = 0 \quad (\text{II.41.a})$$

$$f' = 1, \theta = 0, N = 0, H = 0 \quad \text{à } \eta \rightarrow \infty \quad (\text{II.41.b})$$

Où :

$$Bi = \sqrt{(h_c/\kappa)(xv/U_0U^*)} \quad (\text{II.42.1})$$

Bi : est le nombre de Biot, ce qui caractérise le paramètre de convection de la surface.

$$h = \sqrt{(H_w/U_0U^*)(\mu_e/\rho)} \quad (\text{II.42.2})$$

h : est le paramètre du champ magnétique induit.

II.3.7 Paramètres physiques importants

Parmi les quantités physiques principales d'intérêt, on trouve le coefficient de frottement superficiel (taux d'effort de cisaillement).

Alors, le coefficient de frottement superficiel local C_f est donné par [51] :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho \cdot U_0^2} \quad (\text{II.43})$$

Où τ_w : est la contrainte de cisaillement de la paroi, et elle est donnée par :

$$\tau_w = (\mu + S) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} + S(\omega)_{y=0} = \mu[1 + (1 - n^*)\Delta] \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (\text{II.44})$$

En considérant les fonctions de similitude mentionnées ci-dessus, la forme adimensionnelle du coefficient de frottement superficiel est définie comme :

$$C_f = (2 - \beta)^{-0.5} (1 + (1 - n^*)\Delta) \frac{1}{Re} U^* X^{\frac{m+1}{2}} f''(0) \quad (\text{II.45})$$

Alors, on pose :

$$C_f^{\blacksquare} = C_f U^{*-1} X^{-\frac{m+1}{2}} \quad (\text{II.46})$$

Où:

$X = \frac{x}{\delta}$: est la longueur caractéristique sans dimension.

II.3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une présentation d'un modèle mathématique décrivant le phénomène d'un écoulement instationnaire et bidimensionnel d'un fluide biomagnétique se déplaçant autour d'un obstacle. Le modèle présenté est essentiellement basé sur la théorie des fluides micro-polaires. La modélisation mathématique nous a conduits à un système d'équations différentielles ordinaires couplées de nature très complexe. En effet, à cause de la complexité et de l'accouplement des équations régissant la problématique abordée, nous avons adopté deux approches de résolution : une numérique et l'autre analytique. Le principe des méthodes numériques et analytiques adoptées fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III

OUTILS MATHÉMATIQUES ET IMPLEMENTATION DE LA METHODE ADM

Sommaire

III.1 Introduction	31
III.2 Méthode de décomposition d'Adomian	31
III.2.1 Principe de la méthode ADM.....	32
III.2.2 Polynômes d'Adomian	35
III.2.3 Exemple d'application de la méthode d'Adomian (ADM).....	36
III.3 Méthode de Runge-Kutta	39
III.3.1 Méthode de Runge Kutta d'ordre 4	40
III.3.2 Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg RKF45.....	41
III.3.3 Comparaison entre les solutions de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) et Runge -Kutta-Fehlberg (RKF45).....	43
III.4 Méthode de Tir	44
III.5 Implémentation de la méthode ADM.....	48
III.6 Conclusion.....	53

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

III.1 Introduction

Les méthodes classiques, comme les méthodes des éléments finis, des différences finies, des volumes finis et la méthode spectrale, sont des méthodes utilisées pour la résolution de nombreux modèles en physique se présentant sous la forme d'équations différentielles, équations différentielles ordinaires (EDO) ou encore équations différentielles aux dérivées partielles (EDP). Soient linéaires ou non linéaires, avec des conditions initiales et aux limites, donnent des approximations de la solution en des points discrets. Ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps.

Récemment une nouvelle génération de méthodes dites analytique ou semi-analytique est apparue. Les méthodes semi-analytiques sont proposées pour résoudre les modèles mathématiques, et comme l'équation du bilan de population est une équation intégro-différentielle, ces méthodes ont été appliquées pour obtenir des solutions formelles ou bien la solution exacte.

L'avantage de ces méthodes est qu'elles permettent de résoudre le problème considéré par un schéma direct et donne la solution sous forme une série infinie, rapidement convergente vers la solution exacte si elle existe.

Dans ce chapitre, nous allons exposer les principes de base et les applications des méthodes analytique de décomposition d'Adomian et numérique de Runge-Kutta d'ordre 4. Ces deux méthodes sont utilisées pour résoudre les équations différentielles non linéaires du problème étudié.

III.2 Méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique. Elle est utilisée comme une méthode alternative permettant de résoudre un large éventail de problèmes dont les modèles mathématiques impliqués concernent des problèmes algébriques, différentiels, intégrales, intégro-différentielles, ainsi que des équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et des équations aux dérivées partielles.

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

George Adomian (1923-1996) a introduit une méthode puissante pour résoudre les équations fonctionnelles non linéaires. Depuis lors, cette méthode est connue comme la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) [1989,1994]. La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) [87] est développée depuis les années 80. Cette méthode est une technique approximative analytique robuste qui donne une solution fiable de plusieurs problèmes mathématiques et physiques sous forme de séries rapidement convergentes.

La méthode ADM a été appliquée avec succès à beaucoup de situations. **Adomian et Rach [88]** ont employé la technique ADM pour obtenir la solution des équations algébriques quadratiques. Ils ont conclu que la méthode de décomposition d'Adomian est une technique très efficace pour le calcul des racines des équations polynômes souvent rapportant une convergence très rapide. Sur la base de l'étude précédente, **Adomian et al [89]** traitent également des équations différentielles contenant des termes radicaux. D'autres, comme **Dogan [90]** et **Attili [91]**, ont résolu les équations non linéaires généralisées de Boussinesq. **Dehghan [92]** pour sa part a appliqué la méthode de décomposition d'Adomian pour l'équation parabolique bidimensionnelle sujette aux caractéristiques de frontière non standard. **Afrouzi [93]** a appliqué la technique ADM pour résoudre l'équation de diffusion de réaction. **El-Tawil et al [94]** et **Ramech [95]** ont résolu les équations différentielles de Riccati en utilisant la décomposition d'Adomian. Une comparaison numérique des solutions particulières a été effectuée par **Pamuk [96]**. Il a constaté que la solution de la méthode de décomposition d'Adomian pour les équations de la chaleur linéaires et non linéaires indique qu'il y a une bonne concordance entre les solutions numériques et les solutions exactes particulières en termes d'exactitude et d'efficacité.

III.2.1 Principe de la méthode ADM

La technique est basée sur une décomposition d'une solution d'une équation fonctionnelle non linéaire dans une série de fonctions. Chaque terme de la série est obtenu à partir d'un polynôme généré par un développement en série de puissance d'une fonction analytique.

La méthode présente un algorithme formel. La représentation des termes non-linéaires est nécessaire pour manipuler l'équation non-linéaire d'une manière efficace. Un algorithme alternatif pour calculer les polynômes d'Adomian sera décrit en détail [87].

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$Fu = g \quad (\text{III.1})$$

Où ;

g : est une fonction connue.

F : représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non-linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaire.

La partie linéaire est notée P et la partie non linéaire est notée N . Donc on a :

$$F = P + N \quad (\text{III.2})$$

P sera décomposé en deux termes L et R c.-à-d. $P = L + R$

Avec:

L : est un opérateur différentiel facilement inversible.

R : représente le résidu de l'opérateur linéaire.

N : est un opérateur différentiel non-linéaire.

En substituant l'équation (III.1) dans l'équation (III.2), l'équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (\text{III.3})$$

L'équation (III.3) peut s'écrire comme suit :

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (\text{III.4})$$

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} à l'équation (III.4), on trouve :

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (\text{III.5})$$

Où $L^{-1} = \iint \dots \int (\cdot)(dt)^n$ est l'inverse de l'opérateur L .

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

À titre d'exemple, on prend l'opérateur différentiel L comme suit :

$$L(u) = \frac{d(u)}{dt} \quad , \quad L^{-1}(u) = \int_0^t (u) dt \quad (\text{III.6})$$

On obtient :

$$L^{-1}(Lu) = u - \phi \quad (\text{III.7})$$

Où ϕ : est la constante d'intégration.

Par conséquent, l'équation **(III.5)** prend la forme suivante:

$$u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (\text{III.8})$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution u sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (\text{III.9})$$

Puis à décomposer le terme non-linéaire Nu sous forme d'une série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{III.10})$$

Où les termes A_n sont les polynômes d'Adomian qui sont obtenus grâce à la relation suivante:

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.11})$$

Où λ : est un paramètre réel introduit par convenance.

En substituant les équations **(III.9)** et **(III.10)** dans **(III.8)**, on obtient :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{III.12})$$

$$\text{D'où on déduit} \begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Maintenant, la question qu'on peut poser est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$.

III.2.2 Polynômes d'Adomian

Le procédé d'Adomian est très simple dans une formulation abstraite mais la difficulté se pose dans le calcul des polynômes. Alors dans littérature on trouve plusieurs travaux qui se concentrent sur le calcul de ces polynômes.

Guellal et Cherruault [97] ont présenté des formules pratiques pour le calcul des polynômes d'Adomian, ainsi que pour le calcul de la convergence de la méthode de décomposition. Ils ont également proposé une nouvelle méthode pour résoudre les problèmes d'identification venant de la biologie. **Venkatarangan et Rajalakshmi [98]** ont essayé de modifier la méthode de décomposition d'Adomian afin de résoudre des équations contenant des termes radicaux. **Wazwaz et El-Sayed [99]** de leur part ont présenté une nouvelle modification de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) pour les opérateurs linéaire et non linéaire. **Hosseini [100]** a discuté l'application des polynômes de Tchebychev dans l'exécution numérique de la méthode de décomposition d'Adomian. **Rudall et Rach [101]** ont donné une nouvelle définition des polynômes d'Adomian. Une modification efficace de la méthode de décomposition d'Adomian en employant des polynômes de Legendre est présentée par **Tien et Chen [102]**.

Pour obtenir les polynômes d'Adomian, on introduit le paramètre λ comme suit :

$$u(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^i u_i + \dots \quad (\text{III.14})$$

$$N(u(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^i A_i + \dots \quad (\text{III.15})$$

En utilisant les deux formules précédentes, les polynômes d'Adomian sont définis par la formule suivante :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Alors, on trouve les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0)$$

⋮

Ces formules s'écrivent sous la forme générale comme suit :

$$A_n = \sum_{v=0}^n c(v, n) N^{(v)}(u_0), n \geq 1 \quad (\text{III.18})$$

III.2.3 Exemple d'application de la méthode d'Adomian (ADM)

Dans cette partie, on va expliquer l'application de la méthode ADM dans la résolution des équations différentielles non-linéaires par un exemple des travaux de la littérature.

Exemple 1: Najafi et al [103]

Soit l'équation de couche limite de Blasius (Najafi et al [103]).

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0, \quad (\text{III.19})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$f'(\infty) = 1$$

L'équation de Blasius (III.19) est réécrite sous la forme d'opérateur comme suit :

$$Lf + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

Où

$$Lf = -\frac{1}{2} f f'' \quad (\text{III.21})$$

D'après la méthode ADM, l'application de L^{-1} sur l'équation (III.21), donne :

$$L^{-1}Lf = L^{-1}\left(-\frac{1}{2} f f''\right) \quad (\text{III.22})$$

Où L^{-1} est l'opérateur intégral de troisième ordre,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\cdot) d\eta d\eta d\eta. \quad (\text{III.23})$$

Alors, l'équation (III.22) mène à :

$$f(\eta) = c_1 + c_2 \eta + c_3 \frac{\eta^2}{2} + L^{-1}\left(-\frac{1}{2} f f''\right) \quad (\text{III.24})$$

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

Avec :

c_1, c_2 et c_3 sont mes sont des constantes d'intégration, pouvant être déterminées par utilisation des conditions aux limites de l'équation **(III.20)**.

Selon la méthode ADM, f est décomposé en :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (\text{III.25})$$

Alors que le terme non linéaire dans l'équation **(III.24)** est décomposé en polynômes d'Adomian,

$$Nf = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (f_0, f_1, \dots, f_n) \quad (\text{III.26})$$

Pour le terme $\left(-\frac{1}{2}ff''\right)$, les polynômes correspondants d'Adomian sont évalués par la relation **(III.16)** :

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{4}\alpha^2\eta^2 \\ A_1 &= \frac{11}{480}\alpha^3\eta^5 \\ A_2 &= -\frac{25}{21504}\alpha^4\eta^8 \\ A_3 &= \frac{9299}{212889600}\alpha^5\eta^{11} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

(III.27) dans **(III.24)** mène à :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = c_1 + c_2\eta + c_3\frac{\eta^2}{2} + L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{III.28})$$

L'équation **(III.28)** peut être réécrite comme :

$$f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} = c_1 + c_2\eta + c_3\frac{\eta^2}{2} + L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{III.29})$$

Les relations récursives prennent alors la forme suivante :

$$\begin{cases} f_0 = c_1 + c_2\eta + c_3\frac{\eta^2}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} = L^{-1}A_n \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

La solution approchée pour f peut être alors donnée par:

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

$$\varphi_{k+1} = \sum_{n=0}^k f_n(\eta) \quad (\text{III.31})$$

Si plus d'exactitude est nécessaire, plus de termes devraient être calculées.

Pour établir la solution, les constantes d'intégration devraient être évaluées par l'intermédiaire des conditions aux limites (équation (III.20)).

Dans cette étape, on prend $\alpha = f''(0)$, où α s'obtient numériquement.

Le premier terme est évalué par l'intermédiaire des conditions aux limites comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) = f_0(\eta) &= c_1 + c_2\eta + c_3 \frac{\eta^2}{2} \\ f''(0) = \alpha &\rightarrow c_3 = \alpha \\ f'(0) = 0 &\rightarrow c_2 = 0 \\ f(0) = 0 &\rightarrow c_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Il vient :

$$\varphi_1(\eta) = f_0(\eta) = \alpha \frac{\eta^2}{2} \quad (\text{III.33})$$

Par utilisation de (III.30), les termes f_n sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= -\frac{1}{240} \alpha^2 \eta^5 \\ f_2(\eta) &= \frac{11}{161280} \alpha^3 \eta^8 \\ f_3(\eta) &= -\frac{5}{4257792} \alpha^4 \eta^{11} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Ainsi, la solution approximative $f(\eta)$ de l'équation de Blasius est comme suit :

$$f(\eta) = \frac{1}{2} \alpha \eta^2 - \frac{1}{240} \alpha^2 \eta^5 + \frac{11}{161280} \alpha^3 \eta^8 - \frac{5}{4257792} \alpha^4 \eta^{11} + \dots \quad (\text{III.35})$$

Les trois premiers termes de la solution ADM, ainsi que la solution après 15 itérations pour l'équation de Blasius sont visualisés par les **Figures (III.1)** et **(III.2)**. Les solutions ADM, représentées pour la fonction $f(\eta)$ et le profil de vitesse $f'(\eta)$, sont comparées avec la solution numérique obtenue par la méthode de Runge-Kutta. Les résultats obtenus montrent

qu'au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente (après 15 itérations), la solution ADM converge vers la solution numérique.

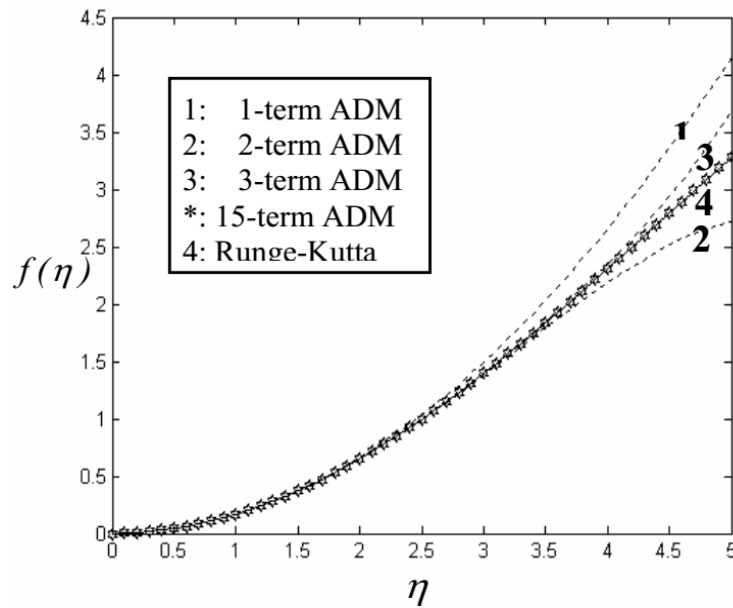


Figure III.1: Comparaison entre la solution ADM et la solution numérique de Runge-Kutta pour la fonction $f(\eta)$ [103].

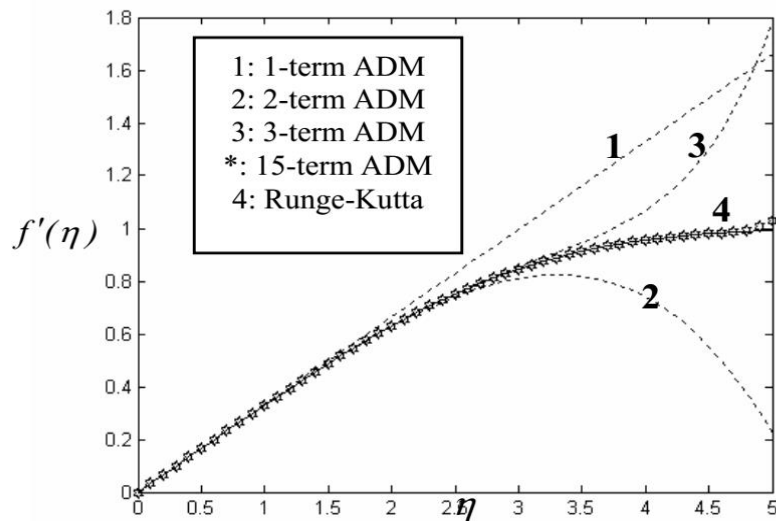


Figure III.2: Comparaison entre la solution ADM et la solution numérique de Runge-Kutta pour le profil de vitesse $f'(\eta)$ [103].

III.3 Méthode de Runge Kutta

La méthode de Runge Kutta est parmi les méthodes les plus utilisées pour la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO).

III.3.1 Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 intervient dans la plupart des programmes EDO comme ceux utilisés par Matlab, Octave et Mathematica. Cette méthode est proposée en 1895 par Carl Runge et Martin Kutta pour résoudre le problème de Cauchy [104].

Soit donnée l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' = f(x, y) \tag{III.36}$$

Avec la condition initiale : $y(x_0) = y_0$

Où y : est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

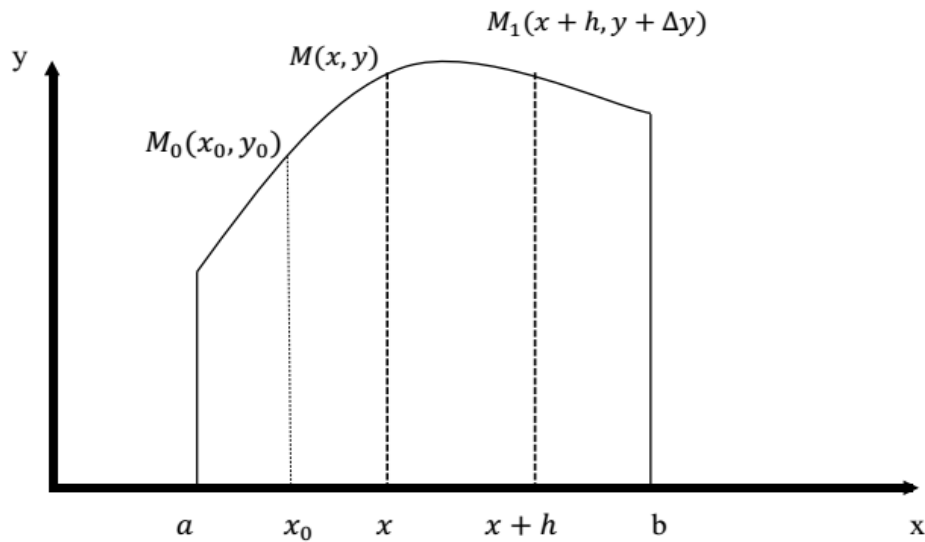


Figure III.3 : Schéma numérique de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Comme elle est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, on applique le développement de Taylor d'ordre 4 au voisinage de x c'est-à-dire $x+h$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{y'(x)}{1} h + \frac{y''(x)}{2!} h^2 + \frac{y'''(x)}{3!} h^3 + \frac{y^{(4)}(x)}{4!} h^4 + O(h^4) \tag{III.37}$$

On pose

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) \tag{III.38}$$

$$\Delta y = \frac{y'(x)}{1} h + \frac{y''(x)}{2!} h^2 + \frac{y'''(x)}{3!} h^3 + \frac{y^{(4)}(x)}{4!} h^4 + O(h^4) \tag{III.39}$$

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

On déduit de cette formule que si on connaît la valeur de $y(x)$ au point x et les dérivées $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{(4)}(x)$, on peut calculer $y(x+h)$.

La méthode de Runge Kutta d'ordre quatre repose sur les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} k_1 = hf(x, y) \\ k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x+h, y+k_3) \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

On peut montrer que $\Delta y = y(x+h) - y(x)$ donné par la formule (III.38) peut s'exprimer par la formule :

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{III.41})$$

Alors, on trouve :

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{avec } y(x_0) = y_0 \quad (\text{III.42})$$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + fk_4) \quad (\text{III.43})$$

Et par conséquent, on trouve :

$$\begin{cases} f_1 = f(x, y) \\ f_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f_1\right) \\ f_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f_2\right) \\ f_4 = f(x+h, y+hf_3) \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

III.3.2 Méthode de Runge Kutta Fehlberg RKF45 [105]

La technique pour garantir l'exactitude de la solution d'une équation différentielle est de résoudre le problème deux fois en employant les tailles du « pas » h et $h/2$ et de comparer les résultats aux points de maillage correspondant à la taille du « pas » la plus grande. Mais ceci exige une quantité significative de calcul pour la taille du « pas » la plus petite et doit être répété si la compatibilité n'est pas assez bonne.

La méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (dénomé RKF45) est une méthode utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires. Elle a un procédé pour déterminer si la taille du pas appropriée h est employée. À chaque étape, deux approximations différentes pour la solution sont effectuées et comparées. Si les deux solutions sont en accord étroit, l'approximation est acceptée. Si les deux solutions ne sont pas compatibles, la taille du pas est

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

réduite. Par ailleurs, si les solutions sont compatibles sur des chiffres plus significatifs qu'exigés, la taille du pas est augmentée.

Chaque étape exige l'utilisation les six valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x, y), \\
 k_2 &= hf\left(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(x + \frac{3}{8}h, y + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\
 k_4 &= hf\left(x + \frac{12}{13}h, y + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\
 k_5 &= hf\left(x + h, y + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\
 k_6 &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right),
 \end{aligned} \tag{III.45}$$

La solution approximative de l'équation différentielle est obtenue suivant l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$y(x + h) = y(x) + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \tag{III.46}$$

Où les quatre valeurs des fonctions f_1 , f_3 , f_4 et f_5 sont employées. Notons que la valeur de la fonction f_2 n'est pas employée dans la formule (III.46). Pour qu'une meilleure valeur pour la solution soit déterminée, on va suivre la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5.

$$z(x + h) = y(x) + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12.825}k_3 + \frac{28.561}{56.430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6, \tag{III.47}$$

La taille du pas optimale sh peut être déterminée en multipliant les temps scalaires de s par la taille du pas courante h . Le scalaire s est donné par:

$$s = \left(\frac{Tol h}{2|z(x+h)-y(x+h)|}\right)^{1/4} \approx 0.84 \left(\frac{Tol h}{|z(x+h)-y(x+h)|}\right)^{1/4}, \tag{III.48}$$

Où Tol : est la tolérance spécifique de commande d'erreur.

III.3.3 Comparaison entre les solutions de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) et Runge-Kutta- Fehlberg (RKF45) [105]

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{Avec} \quad y(0) = 0 \quad \text{à} \quad [0, 1.4] \quad (\text{III.49})$$

Un programme de RK4 a été employé avec la taille du pas $h = 0.1$, qui a exigé de l'ordinateur de produire 14 approximations aux points équidistants dans le tableau (III.1). Tandis qu'un programme de RKF45 a été employé avec la valeur $Tol = 2$ pour la tolérance de la commande d'erreur. Pour le programme RKF45, la taille du pas se change automatiquement et par conséquent le programme produit 10 approximations pour avoir la solution représentée dans le tableau (III.2).

i	t_i	Approximation de RK4 y_i	Solution exacte $y(t_i) = \tan(t_i)$	Erreur $ y(t_i) - y_i $
0	0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.1	0.1003346	0.1003347	0.0000001
2	0.2	0.2027099	0.2027100	0.0000001
3	0.3	0.3093360	0.3093362	0.0000002
4	0.4	0.4227930	0.4227932	0.0000002
5	0.5	0.5463023	0.5463025	0.0000002
6	0.6	0.6841368	0.6841368	0.0000000
7	0.7	0.8422886	0.8422884	0.0000002
8	0.8	1.0296391	1.0296386	0.0000005
9	0.9	1.2601588	1.2601582	0.0000006
10	1.0	1.5574064	1.5574077	0.0000013
11	1.1	1.9647466	1.9647597	0.0000131
12	1.2	2.5720718	2.5720516	0.0000798
13	1.3	3.6015634	3.6021024	0.0005390
14	1.4	5.7919748	5.7978837	0.0059089

Tableau III.1 : Comparaison de la solution numérique RK4 avec la solution exacte [105].

i	t_i	Approximation de RKF45 y_i	Solution exacte $y(t_i) = \tan(t_i)$	Erreur $ y(t_i) - y_i $
0	0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1	0.2	0.2027100	0.2027100	0.0000000
2	0.4	0.4227933	0.4227931	0.0000002
3	0.6	0.6841376	0.6841368	0.0000008
4	0.8	1.0296434	1.0296386	0.0000048
5	1.0	1.5574398	1.5574077	0.0000321
6	1.1	1.9648085	1.9647597	0.0000488
7	1.2	2.5722408	2.5721516	0.0000892
8	1.3	3.6023295	3.6021024	0.0002271
9	1.35	4.4555714	4.4552218	0.0003496
10	1.4	5.7985045	5.7978837	0.0006208

Tableau III.2 : Comparaison de la solution numérique RKF45 avec la solution exacte [105].

Les approximations au point final sont :

$$y(1.4) \approx y_{10} = 5.7985045 \quad \text{et} \quad y(1.4) \approx y_{14} = 5.7919748$$

Et les erreurs sont :

$$E_{10} = 0.0006208 \quad \text{et} \quad E_{14} = 0.0059089$$

D'après les tableaux (III.1) et (III.2) pour les méthodes (RK4) et (RKF45), respectivement, la méthode (RKF45) présente l'erreur la plus petite pour un nombre d'approximations moins que la méthode de (RK4).

III.4 Méthode de Tir [106]

Considérons l'équation différentielle linéaire de second ordre avec les conditions aux limites de la forme :

$$\begin{cases} y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Pour résoudre ce type de problème, il existe plusieurs approches. Parmi ces approches nous choisissons la méthode de Tir (Shooting Method).

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

L'idée de la méthode de Tir est de traiter le problème (III.50) comme un problème de conditions initiales.

On suppose les fonctions $(a_i(x))$ suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité des équations différentielles que nous rencontrons.

La différence entre les équations différentielles avec conditions initiales et celles avec conditions aux limites est que dans le premier cas, à $t = t_0$, la fonction $y(t_0)$ ainsi que sa pente $y'(t_0)$ sont connues. Par contre dans le cas des équations différentielles avec conditions aux limites, les valeurs de la fonction $y(t)$ aux deux extrémités de l'intervalle $y(a)$ et $y(b)$ ne sont pas connues.

Théorème. [107] : *La solution de l'équation différentielles avec conditions aux limites (III.50) est donnée par :*

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(x) \quad (\text{III.51})$$

Où : $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielles avec conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) + a_0(x) \\ y_1(a) &= y_a \\ y_1'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

$$\begin{aligned} y_2''(x) &= a_2(x)y_2'(x) + a_1(x)y_2(x) \\ y_2(a) &= 0 \\ y_2'(a) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

Preuve. On doit vérifier en premier lieu les conditions aux limites. Si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ satisfont respectivement aux équations (III.52) et (III.53) en $x = a$

$$y(a) = y_1(a) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(a) = y_a + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) 0 = y_a$$

Par ailleurs :

$$y(b) = y_1(b) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(b) = y_1(b) + (y_b - y_1(b)) = y_b$$

Il reste à montrer que l'expression (III.51) est bien la solution de l'équation différentielle (III.50).

On pose :

$$c = \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right)$$

Pour simplifier la notation. On doit donc s'assurer que $y_1(x) + y_2(x)$ est la solution de l'équation différentielle **(III.50)**. La dérivée seconde de $y(X)$ peut alors s'écrire :

$$y''(x) = (y_1(x) + cy_2(x))'' = y_1''(x) + cy_2''(x)$$

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont respectivement les solutions des équations **(III.52)** et **(III.53)**. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} y''(x) &= (a_2(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) + a_0(x)) + c(a_2(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)) \\ &= a_2(x)(y_1'(x) + cy_2'(x)) + a_2(x)(y_1(x) + cy_2(x)) + a_0(x) \\ &= a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $y(x)$, définie par **(III.51)** est la solution de l'équation **(III.50)**.

On peut résoudre les équations différentielles **(III.52)** et **(III.53)** à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ou de Runge-Kutta-Fehlberg 4 et 5.

Exemple 2: (D. Ouidja [106])

Pour comprendre le principe de la méthode de Tir, considérons l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) + \frac{1}{x^2} \tag{III.54}$$

Avec les conditions aux limites : $y(1) = 0$ et $y(2) = 0.693147$.

On a dans ce cas : $a_2(x) = \frac{-2}{x}$, $a_1(x) = 0$, et $a_0(x) = \frac{1}{x^2}$

Le tableau qui suit présente la solution de cette équation différentielle. On peut démontrer facilement que la solution analytique de cette équation est $y(t) = \ln x$, ce qui permet de calculer l'erreur absolue qui figure dans la dernière colonne du tableau **(III.3)**.

x	y ₁ (x) = u ₁ (x)	y ₂ (x) = v ₁ (x)	y(x)	Erreur
1.0	0.000 000 00	0.000 000 00	0.000 000 00	0.0000 x 10 ⁻⁰
1.1	0.004 402 51	0.097 907 02	0.095 309 75	0.4299 x 10 ⁻⁶
1.2	0.015 656 98	0.166 663 59	0.182 320 96	0.5997 x 10 ⁻⁶
1.3	0.031 597 42	0.230 765 68	0.262 363 63	0.6325 x 10 ⁻⁶
1.4	0.050 760 44	0.285 710 54	0.336 471 64	0.5924 x 10 ⁻⁶
1.5	0.072 134 27	0.333 329 55	0.405 464 59	0.5143 x 10 ⁻⁶
1.6	0.095 006 09	0.374 996 26	0.470 003 21	0.4173 x 10 ⁻⁶
1.7	0.118 865 94	0.411 761 06	0.530 627 94	0.3123 x 10 ⁻⁶
1.8	0.143 344 54	0.444 440 91	0.587 786 46	0.2057 x 10 ⁻⁶
1.9	0.168 171 91	0.473 680 79	0.641 853 79	0.1008 x 10 ⁻⁶
2.0	0.193 149 33	0.499 996 70	0.693 147 18	0.4400 x 10 ⁻⁹

Tableau III.3 : Résultats de la solution numérique RK4 pour le calcul de y(x) [106].

On a employé la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour le calcul de y₁(x) et de y₂(x). On note que :

$$y_1(b) = y_1(2.0) = 0.19314933 \quad \text{et} \quad y_2(b) = y_2(2.0) = 0.49999670$$

Ce qui permet le calcul de y(x) à l'aide de l'équation différentielle (III.51). Alors on va chercher d'abord y₁(x) et y₂(x), d'après les équations (III.52) et (III.53), on a :

y₁(x) est solution du système :

$$\begin{cases} y_1''(x) = -\frac{2}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x^2} \\ y_1(1) = 0 \quad y_1'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{(III.55)}$$

La résolution du système (III.55), par la méthode de la variation de la constante, nous donne :

$$y_1(x) = \log(x) + \frac{1}{x} - 1$$

y₂(x) est solution du système :

$$\begin{cases} y_2''(x) = -\frac{2}{x}y_2'(x) \\ y_2(1) = 0 \quad y_2'(1) = 1 \end{cases} \quad \text{(III.56)}$$

La résolution du système (III.56) donne

$$y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Alors, d'après l'équation différentielle (III.51) on trouve :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(x) \\ &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \left(\frac{0.693147 - 0.19314933}{0.49999670} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \left(\frac{0.499999767}{0.49999670} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + 1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ y(x) &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

III.5 Implémentation de la méthode de décomposition d'Adomian

Dans cette étude, l'ensemble d'équations non linéaires (II.37) à (II.40) avec les conditions aux limites (II.41.a) et (II.41.b) représenté dans le deuxième chapitre seront résolus analytiquement par utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian.

Selon l'algorithme d'Adomian [87], les équations (II.37) à (II.40) peuvent être écrites comme :

$$L_1 f = -\frac{K}{(1+\Delta)Re^{m-1}} [\eta f'' + 2f' - 2] - \left(\frac{1}{(1+\Delta)} \right) [ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'] \quad (III.57)$$

$$L_2 \theta = -\frac{K}{Re^{m-1}} (\eta \theta') - \left[Pr f \theta' + Pr Ec \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{Pm} \frac{1}{2-\beta} (H')^2 \right\} \right] \quad (III.58)$$

$$\begin{aligned} L_3 N &= -\frac{K}{(1+\Delta/2)\xi Re^{m-1}} [3N + \eta N'] - \left[-\left(\frac{(2-\beta)\Delta}{(1+\Delta/2)\xi} \right) (2N + f'') + \left(\frac{1}{(1+\Delta/2)} \right) \{fN' + \right. \\ &\left. (1 - 2\beta) Nf' \} \right] \quad (III.59) \end{aligned}$$

$$L_4 H = -\frac{K}{Re^{m-1}} [2H + \eta H'] - [H'' + PmfH' + (\beta - 1)Pm \eta Hf'' + (2 - \beta)PmMf''] \quad (III.60)$$

Les opérateurs différentiels linéaires (L_1 , L_2 , L_3 et L_4) sont donnés par:

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

$$L_1 = \frac{d^3 f}{d\eta^3}, \quad L_2 = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}, \quad L_3 = \frac{d^2 N}{d\eta^2} \quad \text{et} \quad L_4 = \frac{d^2 H}{d\eta^2} \quad (\text{III.61})$$

Les inverses des opérateurs L_1, L_2, L_3 et L_4 s'expriment par :

$$L_1^{-1} = \iiint_0^\eta f d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.62})$$

$$L_2^{-1} = \iint_0^\eta \theta d\eta d\eta \quad (\text{III.63})$$

$$L_3^{-1} = \iint_0^\eta N d\eta d\eta \quad (\text{III.64})$$

$$L_4^{-1} = \iint_0^\eta H d\eta d\eta \quad (\text{III.65})$$

L'application des opérateurs $L_i^{-1} (i = 1, 2, 3, 4)$ sur les deux côtés des équations **(III.57)** à **(III.60)** donne :

$$f(\eta) = f(0) + f'(0)\eta + \frac{1}{2}f''(0)\eta^2 + L_1^{-1} \left(-\frac{K}{(1+\Delta)Re^{m-1}} [\eta f'' + 2f' - 2] - \frac{1}{(1+\Delta)} [ff'' + \beta(1-f'^2) + \Delta N' + MH'] \right) \quad (\text{III.66})$$

$$\theta(\eta) = \theta(0) + \theta'(0)\eta + L_2^{-1} \left(-\frac{K}{Re^{m-1}} (\eta\theta') - \left[Prf\theta' + PrEc \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{Pm} \frac{1}{2-\beta} (H')^2 \right\} \right] \right) \quad (\text{III.67})$$

$$N(\eta) = N(0) + N'(0)\eta + L_3^{-1} \left(-\frac{K}{(1+\Delta/2)\xi Re^{m-1}} [3N + \eta N'] - \left[-\left(\frac{(2-\beta)\Delta}{(1+\Delta/2)\xi} \right) (2N + f'') + \left(\frac{1}{(1+\Delta/2)} \right) \{fN' + (1-2\beta)Nf'\} \right] \right) \quad (\text{III.68})$$

$$H(\eta) = H(0) + H'(0)\eta + L_4^{-1} \left(-\frac{K}{Re^{m-1}} [2H + \eta H'] - [H'' + PmfH' + (\beta-1)Pm\eta Hf'' + (2-\beta)PmMf''] \right) \quad (\text{III.69})$$

Où:

$$Nf = -\frac{K}{(1+\Delta)Re^{m-1}} [\eta f'' + 2f' - 2] - \frac{1}{(1+\Delta)} [ff'' + \beta(1-f'^2) + \Delta N' + MH'] \quad (\text{III.70})$$

$$N\theta = -\frac{K}{Re^{m-1}} (\eta\theta') - \left[Prf\theta' + PrEc \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{Pm} \frac{1}{2-\beta} (H')^2 \right\} \right] \quad (\text{III.71})$$

$$NN = -\frac{K}{(1+\Delta/2)\xi Re^{m-1}} [3N + \eta N'] - \left[-\left(\frac{(2-\beta)\Delta}{(1+\Delta/2)\xi} \right) (2N + f'') + \left(\frac{1}{(1+\Delta/2)} \right) \{fN' + (1-2\beta)Nf'\} \right] \quad (\text{III.72})$$

$$NH = -\frac{K}{Re^{m-1}} [2H + \eta H'] - [H'' + PmfH' + (-1)Pm\eta Hf'' + (2-\beta)PmMf''] \quad (\text{III.73})$$

Outils mathématiques et Implémentation de la méthode ADM

Les valeurs des fonctions $f(0), f'(0), f''(0), \theta(0), \theta'(0), N(0), N'(0), H(0)$ et $H'(0)$ dépendent principalement des conditions au limites. En fait, en appliquant les conditions aux limites (II.41.a) et (II.41.b) et en considérant : $f''(0) = a_0, \theta(0) = a_1, N'(0) = a_2$, et $H'(0) = a_3$, nous obtenons:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_0 + L^{-1}(Nf) \quad (\text{III.74})$$

$$\theta(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \theta_0 + L^{-1}(N\theta) \quad (\text{III.75})$$

$$N(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n = N_0 + L^{-1}(NN) \quad (\text{III.76})$$

$$H(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = H_0 + L^{-1}(NH) \quad (\text{III.77})$$

Où : f_0, θ_0, N_0 et H_0 sont exprimés comme suit:

$$f_0 = \frac{\eta^2 a_0}{2} - \frac{\eta^3 \chi_1}{6} + \frac{\eta^3 \Omega_1}{3} \quad (\text{III.78})$$

$$\theta_0 = -\text{Bi}(2 - \beta)^{0.5} \eta + a_1 + \text{Bi}(2 - \beta)^{0.5} \eta a_1 \quad (\text{III.79})$$

$$N_0 = -n^* a_0 + \eta a_2 \quad (\text{III.80})$$

$$H_0 = h(2 - \beta)^{0.5} + \eta a_3 \quad (\text{III.81})$$

Par application de l'algorithme de la méthode de décomposition d'Adomian [87], les premiers termes des polynômes d'Adomian et de la solution sont exprimée comme suit:

❖ Pour la vitesse adimensionnelle:

$$\begin{aligned} A_0^f = & -\frac{1}{2} \eta^2 a_0^2 \lambda_1 + \eta^2 a_0^2 \chi_1 + \frac{2}{3} \eta^3 a_0 \lambda_1 \chi_1 - \eta^3 a_0 \chi_1^2 - \frac{1}{6} \eta^4 \lambda_1 \chi_1^2 + \frac{1}{4} \eta^4 \chi_1^3 - a_2 \chi_2 - a_3 \chi_3 \\ & - 3\eta a_0 \Omega_1 - \frac{4}{3} \eta^3 a_0 \lambda_1 \Omega_1 + 2\eta^2 \chi_1 \Omega_1 + 2\eta^3 a_0 \chi_1 \Omega_1 + \frac{2}{3} \eta^4 \lambda_1 \chi_1 \Omega_1 - \eta^4 \chi_1^2 \Omega_1 \\ & - 4\eta^2 \Omega_1^2 - \frac{2}{3} \eta^4 \lambda_1 \Omega_1^2 + \eta^4 \chi_1 \Omega_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 = & -\frac{1}{120} \eta^5 a_0^2 \lambda_1 + \frac{1}{60} \eta^5 a_0^2 \chi_1 + \frac{1}{180} \eta^6 a_0 \lambda_1 \chi_1 - \frac{1}{120} \eta^6 a_0 \chi_1^2 - \frac{\eta^7 \lambda_1 \chi_1^2}{1260} + \frac{1}{840} \eta^7 \chi_1^3 \\ & - \frac{1}{6} \eta^3 a_2 \chi_2 - \frac{1}{6} \eta^3 a_3 \chi_3 - \frac{1}{8} \eta^4 a_0 \Omega_1 - \frac{1}{90} \eta^6 a_0 \lambda_1 \Omega_1 + \frac{1}{30} \eta^5 \chi_1 \Omega_1 \\ & + \frac{1}{60} \eta^6 a_0 \chi_1 \Omega_1 + \frac{1}{315} \eta^7 \lambda_1 \chi_1 \Omega_1 - \frac{1}{210} \eta^7 \chi_1^2 \Omega_1 - \frac{1}{15} \eta^5 \Omega_1^2 - \frac{1}{315} \eta^7 \lambda_1 \Omega_1^2 \\ & + \frac{1}{210} \eta^7 \chi_1 \Omega_1^2 \end{aligned}$$

❖ Pour la température adimensionnelle :

$$\begin{aligned}
 A_0^\theta &= \frac{1}{2} \text{BiPr}(2 - \beta)^{0.5} \eta^2 a_0 - \text{EcPr} a_0^2 - \frac{1}{2} \text{BiPr}(2 - \beta)^{0.5} \eta^2 a_0 a_1 - \frac{\text{EcPr} a_3^2}{\text{Pm}(2 - \beta)} \\
 &\quad - \frac{1}{6} \text{BiPr}(2 - \beta)^{0.5} \eta^3 \chi_1 + 2 \text{EcPr} \eta a_0 \chi_1 + \frac{1}{6} \text{BiPr}(2 - \beta)^{0.5} \eta^3 a_1 \chi_1 \\
 &\quad - \text{EcPr} \eta^2 \chi_1^2 + \frac{1}{3} \text{BiPr}(2 - \beta)^{0.5} \eta^3 \Omega_1 - 4 \text{EcPr} \eta a_0 \Omega_1 \\
 &\quad - \frac{1}{3} \text{BiPr}(2 - \beta)^{0.5} \eta^3 a_1 \Omega_1 + 4 \text{EcPr} \eta^2 \chi_1 \Omega_1 - 4 \text{EcPr} \eta^2 \Omega_1^2 + \text{Bi}(2 - \beta)^{0.5} \eta \Omega_3 \\
 &\quad - \text{Bi}(2 - \beta)^{0.5} \eta a_1 \Omega_3 \\
 &\quad - 4 \text{EcPr} \eta^2 \Omega_1^2 + \text{Bi}(2 - \beta)^{0.5} \eta \Omega_3 - \text{Bi}(2 - \beta)^{0.5} \eta a_1 \Omega_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{0.083333333333333333 \text{BiPr} \eta^4 a_0}{(2 - 1. \beta)^{0.5}} - \frac{0.041666666666666664 \text{BiPr} \beta \eta^4 a_0}{(2 - 1. \beta)^{0.5}} - \frac{1. \text{EcPr} \eta^2 a_0^2}{(2 - 1. \beta)^1} \\
 &+ \frac{0.5 \text{EcPr} \beta \eta^2 a_0^2}{(2 - 1. \beta)^1} - \frac{0.083333333333333333 \text{BiPr} \eta^4 a_0 a_1}{(2 - 1. \beta)^{0.5}} \\
 &+ \frac{0.041666666666666664 \text{BiPr} \beta \eta^4 a_0 a_1}{(2 - 1. \beta)^{0.5}} - \frac{0.5 \text{EcPr} \eta^2 a_3^2}{\text{Pm}(2 - 1. \beta)^1} \\
 &- \frac{0.033333333333333326 \text{BiPr} \eta^5 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^{1.5}} + \frac{0.033333333333333326 \text{BiPr} \beta \eta^5 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^{1.5}} \\
 &- \frac{0.008333333333333331 \text{BiPr} \beta^2 \eta^5 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^{1.5}} + \frac{0.6666666666666666 \text{EcPr} \eta^3 a_0 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^1} \\
 &- \frac{0.3333333333333333 \text{EcPr} \beta \eta^3 a_0 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^1} + \frac{0.033333333333333326 \text{BiPr} \eta^5 a_1 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^{1.5}} \\
 &- \frac{0.033333333333333326 \text{BiPr} \beta \eta^5 a_1 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^{1.5}} + \frac{0.008333333333333331 \text{BiPr} \beta^2 \eta^5 a_1 \chi_1}{(2 - 1. \beta)^{1.5}} \\
 &- \frac{0.16666666666666666 \text{EcPr} \eta^4 \chi_1^2}{(2 - 1. \beta)^1} \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

❖ Pour la microrotation adimensionnelle:

$$\begin{aligned}
 A_0^N &= -a_0 \lambda_2 + 2na_0 \lambda_2 - 2\eta a_2 \lambda_2 - \frac{1}{2} \eta^2 a_0 a_2 \lambda_3 + n\eta a_0^2 \lambda_4 - \eta^2 a_0 a_2 \lambda_4 + \eta \lambda_2 \chi_1 \\
 &\quad + \frac{1}{6} \eta^3 a_2 \lambda_3 \chi_1 - \frac{1}{2} n\eta^2 a_0 \lambda_4 \chi_1 + \frac{1}{2} \eta^3 a_2 \lambda_4 \chi_1 - 2\eta \lambda_2 \Omega_1 - \frac{1}{3} \eta^3 a_2 \lambda_3 \Omega_1 \\
 &\quad + n\eta^2 a_0 \lambda_4 \Omega_1 - \eta^3 a_2 \lambda_4 \Omega_1 + 3na_0 \Omega_2 - 4\eta a_2 \Omega_2 \\
 N_1 &= -\frac{1}{2} \eta^2 a_0 \lambda_2 + n\eta^2 a_0 \lambda_2 - \frac{1}{3} \eta^3 a_2 \lambda_2 - \frac{1}{24} \eta^4 a_0 a_2 \lambda_3 + \frac{1}{6} n\eta^3 a_0^2 \lambda_4 - \frac{1}{12} \eta^4 a_0 a_2 \lambda_4 \\
 &\quad + \frac{1}{6} \eta^3 \lambda_2 \chi_1 + \frac{1}{120} \eta^5 a_2 \lambda_3 \chi_1 - \frac{1}{24} n\eta^4 a_0 \lambda_4 \chi_1 + \frac{1}{40} \eta^5 a_2 \lambda_4 \chi_1 - \frac{1}{3} \eta^3 \lambda_2 \Omega_1 \\
 &\quad - \frac{1}{60} \eta^5 a_2 \lambda_3 \Omega_1 + \frac{1}{12} n\eta^4 a_0 \lambda_4 \Omega_1 - \frac{1}{20} \eta^5 a_2 \lambda_4 \Omega_1 + \frac{3}{2} n\eta^2 a_0 \Omega_2 - \frac{2}{3} \eta^3 a_2 \Omega_2
 \end{aligned}$$

III.6 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes qui permettent de résoudre le système d'équations non-linéaires régissant la problématique étudiée dans ce travail de thèse.

Comme mentionné plus haut, vu la complexité et l'accouplement du système d'équations différentielles ordinaires obtenus, ainsi que la nature du fluide biomagnétique utilisé (c.à.d. le sang humain), on a bien constaté que la méthode analytique ADM et la méthode numérique de Runge-Kutta Fehlberg 4 et 5 sont parmi les méthodes les plus appropriées pour résoudre ce genre d'équations mathématiques.

Il est à noter que les méthodes présentées se caractérisent par la simplicité, la facilité de programmer et la stabilité de la solution. En effet, en ce qui concerne la méthode analytique de décomposition d'Adomian ADM, on trouve que cette dernière ne nécessite pas une linéarisation ou une discrétisation des variables. La solution est exprimée sous forme d'une série rapidement convergente. De même, pour la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg 4 et 5 couplée à la méthode de Tir. Elle constitue un outil très puissant dans la résolution des équations différentielles ordinaires de type non-linéaires.

Chapitre IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

Sommaire

IV.1 Introduction	54
IV.2 Etude des champs dynamique, thermique et de micro-rotation.....	54
IV.2.1 Champ dynamique	55
IV.2.1.1 Profils de la vitesse pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21).....	55
IV.2.2 Champ thermique.....	60
IV.2.2.1 Cas particulier - Etude paramétrique de l'effet du nombre de Prandtl sur la température	60
IV.2.2.2 Profils de la température pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21).....	63
IV.2.3 Champ de micro rotation	67
IV.2.3.1 Profils de la microrotation pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21)	67
IV.3 Coefficient de frottement superficiel pour le sang humain (Prandtl =21)	72
IV.4 Comparaison entre la solution analytique d'ADM et les résultats numériques	74

Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Après la présentation des méthodes numérique et analytique utilisés dans ce travail, nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la visualisation des différents résultats montrant les effets du nombre de Prandtl, du paramètre d'instabilité de l'écoulement, du paramètre d'angle du diedre, du nombre de Reynolds et de l'intensité du champ magnétique sur les champs hydrodynamique, thermique et de microrotation, ainsi que l'évolution du coefficient de frottement superficiel. Une discussion détaillée des résultats obtenus a été donnée et une comparaison entre les différents résultats des traitements numérique et analytique et ceux disponibles dans la littérature a été également réalisée.

IV.2 Etude des champs dynamique, thermique et de micro-rotation

Dans cette section, on s'intéresse généralement à une étude paramétrique visualisant l'évolution des champs dynamique et thermique, ainsi que celle de la micro-rotation du fluide biomagnétique (sang humain) en fonction de plusieurs paramètres physiques tels que : le paramètre d'instationarité K , le paramètre d'angle du dièdre β , le nombre de Reynolds Re , le paramètre du champ magnétique M et le paramètre du champ magnétique induit h .

Pour toutes les simulations réalisées, Il est à noter que les paramètres physiques suivants sont maintenus fixes: $Pm = 10^{-4}$, $\Delta = 2.0$, $n^* = 0.5$, $\xi = 1.0$, $Bi = 0.5$ et $Ec = 10^{-4}$.

Une autre étude paramétrique particulière (**Section IV.2.2.1**) montrant l'effet de la variation du nombre de Prandtl sur l'évolution du champ thermique a été également réalisée. Dans cette étude, le fluide biomagnétique, qui est le sang humain, présente un nombre de Prandtl $Pr = 21$.

A partir du modèle mathématique décrit dans le deuxième chapitre, on observe clairement que le nombre de Prandtl ne peut être trouvé que dans l'équation d'énergie (équation de la température (**Eq. II.30**)). Par ailleurs, il est également clair que le composant température $\theta(\eta)$ n'existe pas dans les autres équations du problème (c.à.d. les équations de la vitesse, de la micro-rotation et du champ magnétique induit (**Eq. II.29**), (**Eq. II.31**), et (**Eq. II.32**) respectivement). Ceci explique que la variation de ce nombre n'affecte pas la vitesse, la

micro-rotation et le champ magnétique induit. Par contre, la température est fortement affectée par la variation du nombre de Prandtl.

Il est à noter, que notre étude se focalise essentiellement sur l'évolution de la vitesse, de la température et de la micro-rotation dans un écoulement de fluide biomagnétique (sang humain, $Pr = 21$).

IV.2.1 Champ dynamique

IV.2.1.1 Profils de la vitesse pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21)

Dans cette partie, l'écoulement du sang humain ($Pr = 21$) a été considéré. En effet, nous nous sommes intéressés à la distribution des vitesses sous l'effet de divers paramètres physiques d'intérêt tels que le paramètre d'instationarité (K), le nombre de Reynolds (Re), le paramètre d'angle du dièdre (β), le paramètre du champ magnétique (M) et le paramètre du champ magnétique induit (h). Le tableau (IV.1) montre les propriétés thermo-physiques du fluide biomagnétique à $T = 310 K$ qui correspond à la température du corps humain.

Propriétés	Valeurs numériques
Densité ρ (kg/m ³)	1050
Viscosité dynamique μ (Pa.s)	0.0032
Capacité calorifique c_p (J/kg.°K)	14.65
Conductivité thermique k (W/m.°K)	0.0022
Nombre de Prandtl (Pr)	21

Tableau IV.1: Propriétés thermo-physiques du fluide biomagnétique (sang humain) [51].

- *Influence du paramètre d'instationarité K sur la vitesse*

La **Figure (IV.1)** montre l'effet du paramètre d'instationarité K sur le comportement de la vitesse de l'écoulement biomagnétique étudié autour d'un dièdre. Il est à noter que la solution stationnaire correspond à la valeur $K = 0$. Comme le montre la **Figure (IV.1)**, la vitesse du fluide biomagnétique apparaît comme une fonction décroissante du paramètre d'instationarité K dans toute la couche limite et par conséquent le phénomène de retour d'écoulement est favorisé.

- *Influence du nombre de Reynolds Re sur la vitesse*

L'impact du nombre de Reynolds sur l'évolution de la vitesse du sang humain dans la couche limite est donné par les **Figures (IV.2 et IV.3)**. En effet, lorsque $0 \leq \beta < 1$ (par exemple, $\beta = 0.25$), comme le montre la **Figure (IV.2)**, on constate que l'effet du nombre de Reynolds a un comportement semblable à celui observé dans la **Figure (IV.1)** montrant l'effet du paramètre d'instantanéité K . Par ailleurs, comme visualisé dans la **Figure (IV.3)**, lorsque le paramètre d'angle du dièdre devient plus grand que $\beta = 1$ ($\beta = 1.2$ par exemple), nous observons un comportement opposé à celui produit dans la **Figure (IV.2)**. Les résultats de la **Figure (IV.3)** indiquent que la vitesse du fluide augmente au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente et par conséquent la séparation de l'écoulement est entièrement exclue dans ces conditions.

- *Influence du paramètre d'angle du dièdre β sur la vitesse*

L'influence de l'augmentation du paramètre d'angle du dièdre β sur la vitesse adimensionnelle de l'écoulement du fluide biomagnétique est décrite par la **Figure (IV.4)**. Il est bien connu que le paramètre β est une mesure directe du gradient de pression. En effet, une valeur positive de β précise principalement un gradient de pression négatif. D'après la **Figure (IV.4)**, la vitesse du fluide biomagnétique augmente avec l'augmentation de β et par conséquent le phénomène de retour d'écoulement ne se produit pas.

- *Influence du paramètre du champ magnétique M sur la vitesse*

Sous l'effet du paramètre du champ magnétique M comme montré dans la **Figure (IV.5)**, nous observons une diminution de la vitesse du fluide biomagnétique indiquant ainsi que le champ magnétique tend à retarder le mouvement du fluide. En effet, pour l'écoulement instationnaire étudié, la séparation peut se produire au fur et à mesure que le paramètre du champ magnétique M augmente.

- *Influence du paramètre du champ magnétique induit h sur la vitesse*

L'influence du paramètre du champ magnétique induit h sur le champ de vitesse pour l'écoulement instationnaire, objet d'étude est donné par la **Figure (IV.6)**. De cette figure, on constate que la vitesse du fluide biomagnétique est légèrement diminuée avec l'accroissement

du paramètre du champ magnétique induit, ce qui conduit sans doute à l'apparition du phénomène de retour d'écoulement.

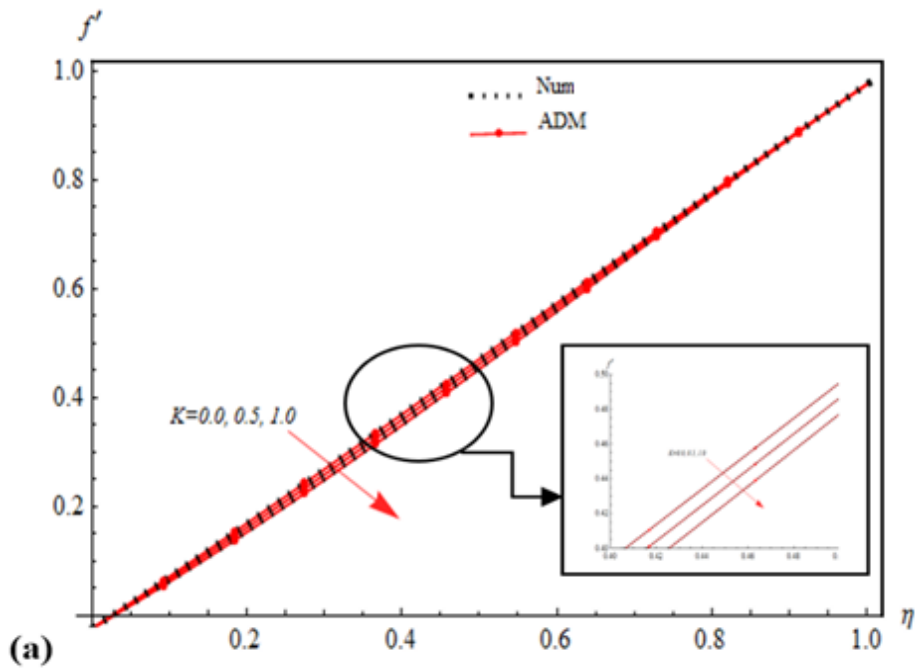


Figure IV.1 : Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre d'instationarité K avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ et $Re = 0.5$.

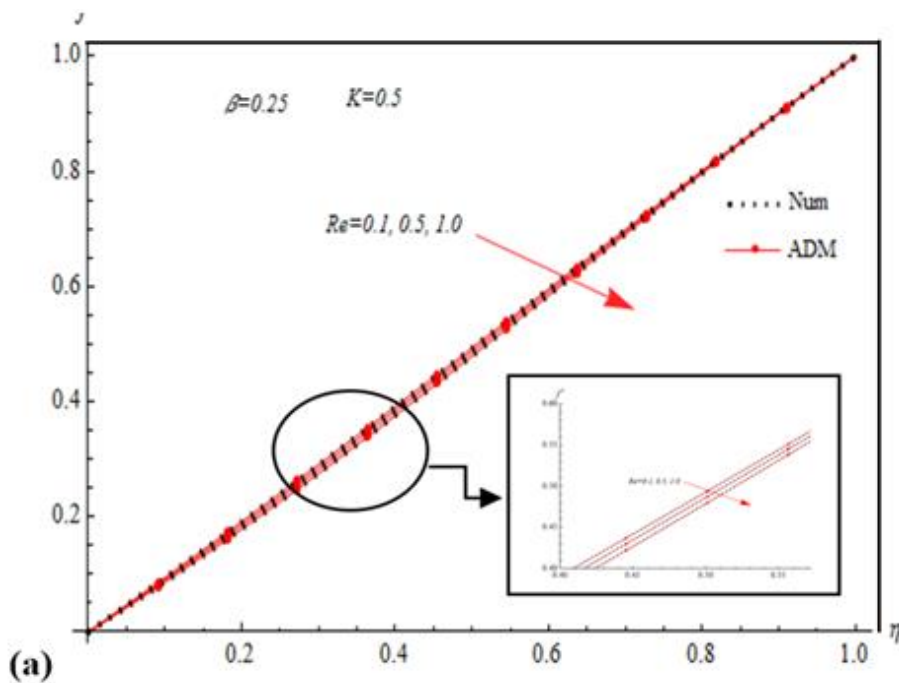


Figure IV.2 : Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.

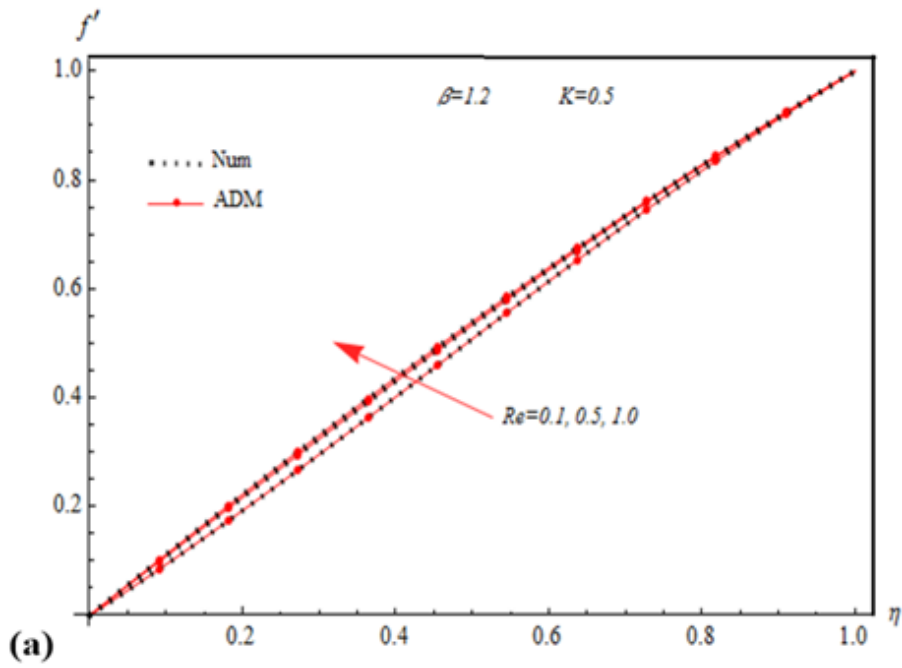


Figure IV.3 : Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.

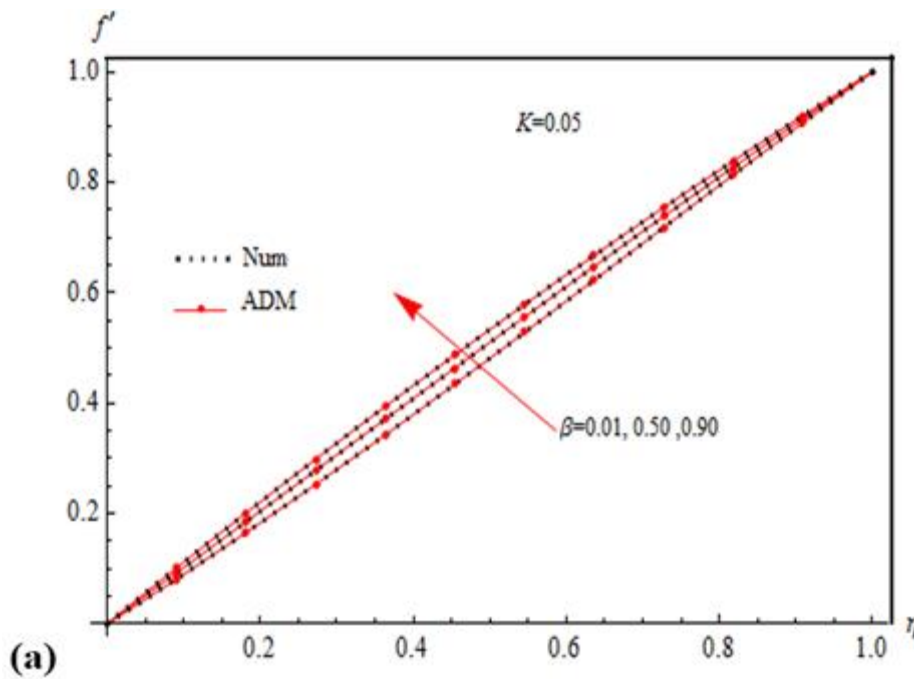


Figure IV.4 : Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $M = 1$.

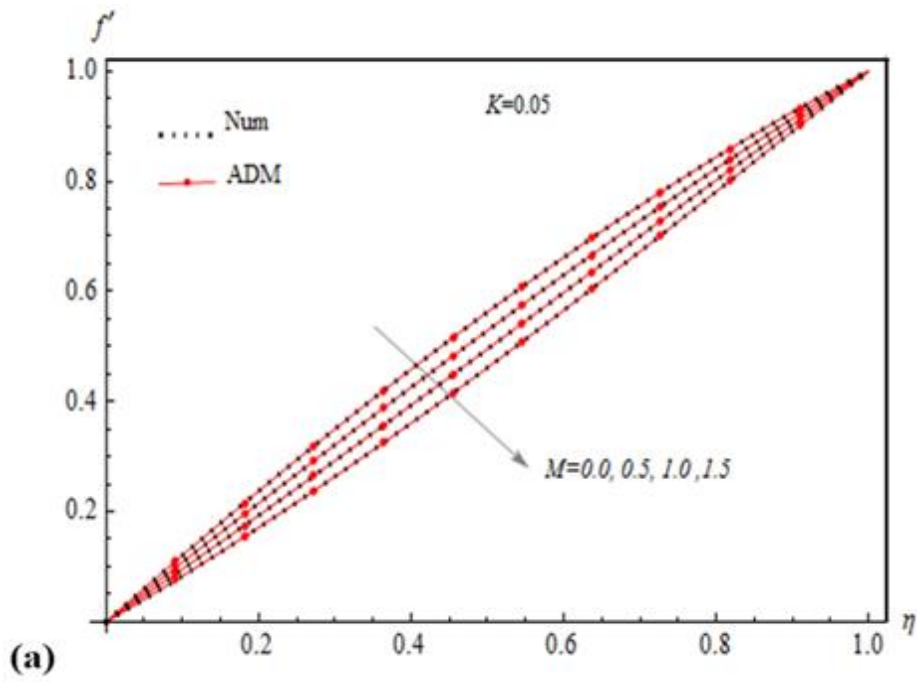


Figure IV.5 : Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $\beta = 0.25$.

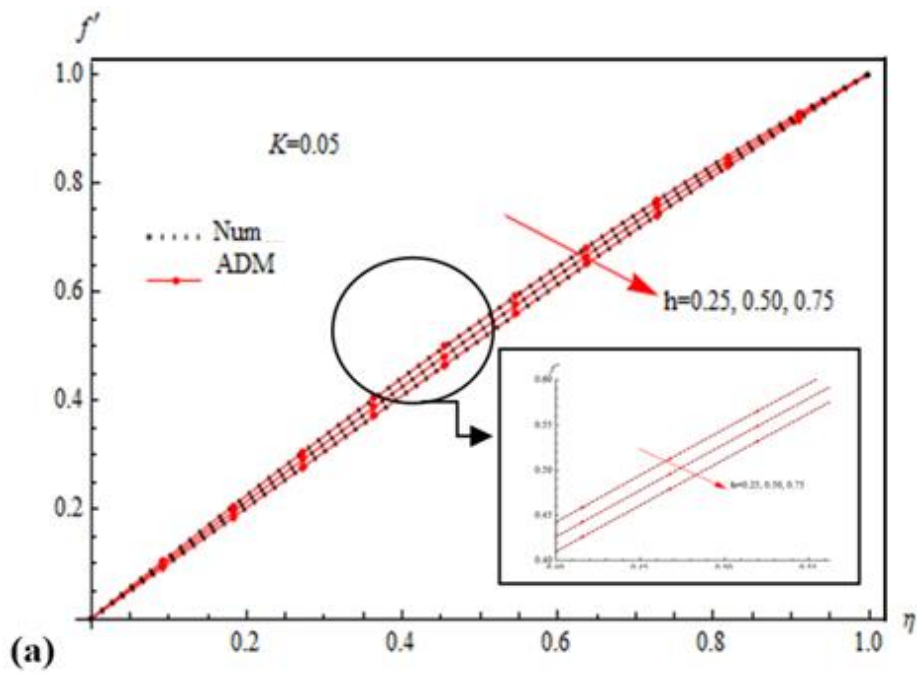


Figure IV.6 : Profils de vitesse pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique induit h avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ et $M = 1$.

IV.2.2 Champ thermique

IV.2.2.1 Cas particulier - Etude paramétrique de l'effet du nombre de Prandtl sur la température

Dans cette partie, la distribution de la température dans un écoulement d'un bio-fluide en fonction du paramètre d'instationarité K , du paramètre d'angle du dièdre β et du paramètre de champ magnétique M a été examinée. Les résultats obtenus sont présentés en termes des profils de température à travers la couche limite pour diverses valeurs du nombre de Prandtl, Pr .

- *Influence du paramètre d'instationarité K , paramètre d'angle du dièdre β et du paramètre de champ magnétique M sur l'évolution de la température*

D'après les **Figures (IV.7, IV.8 et IV.9)**, on constate qu'avec l'augmentation du nombre de Prandtl, la température croît et devient importante proche de la surface du dièdre. Par ailleurs, plus loin de la surface du dièdre, la température varie peu avec l'accroissement du nombre de Prandtl.

L'influence du paramètre d'instationarité K sur la température est présentée par les **Figures (IV.7.a) et (IV.7.b)**. On constate que la température du fluide diminue légèrement avec l'augmentation de l'instationarité de l'écoulement pour tous les cas des figures étudiés qui sont caractérisés par la variation du nombre de Prandtl.

Comme illustré dans les **Figures (IV.8.a) et (IV.8.b)**, la distribution de la température a été étudiée sous l'effet de la variation du paramètre de champ magnétique M . En effet, on constate que la température augmente avec l'augmentation de l'intensité du paramètre M .

Par ailleurs, l'effet du paramètre d'angle β du dièdre sur la distribution de la température est visualisé par les **Figures (IV.9.a), (IV.9.b), et (IV.9.c)** pour différents valeurs du nombre de Prandtl. En effet, pour de faibles valeurs de l'angle β ($0 \leq \beta \leq 1$) (**Figures IV.9.a et IV.9.b**), il est clairement constaté que l'accroissement de l'angle β fait accroître légèrement la température du fluide biomagnétique. D'autre part, pour des valeurs de $\beta > 1$ (par exemple, $\beta = 1.2$) tel que visualisé par la **Figure (IV.9.c)**, la température présente des valeurs légèrement inférieures comparés aux cas précédents.

Également, pour tous les cas de figures présentés, on voit clairement que l'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'accroissement du nombre de Prandtl Pr .

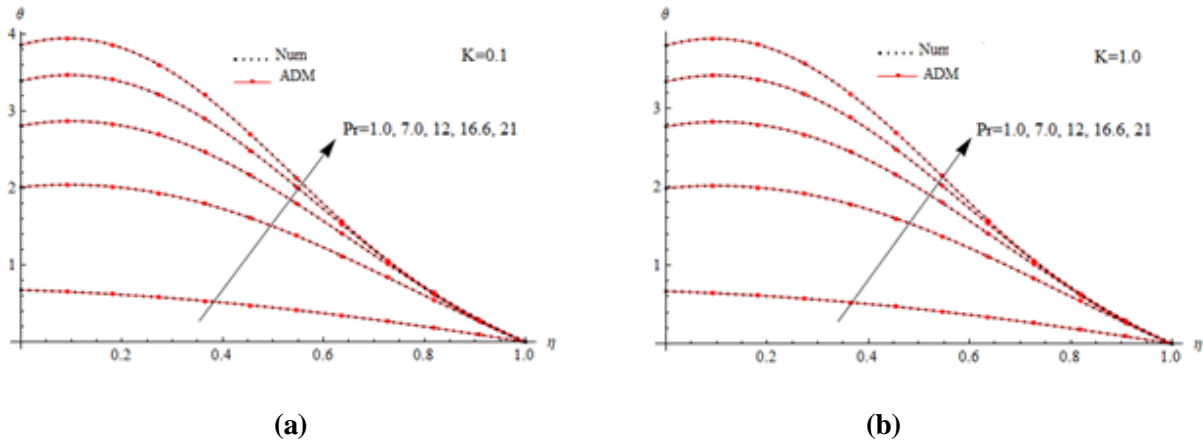


Figure IV.7 : Profils de température pour différentes valeurs du nombres de Prandtl en fonction du paramètre d'instationarité K avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, et $M = 0.5$.

(a) Pour $K = 0.1$

(b) Pour $K = 1.0$

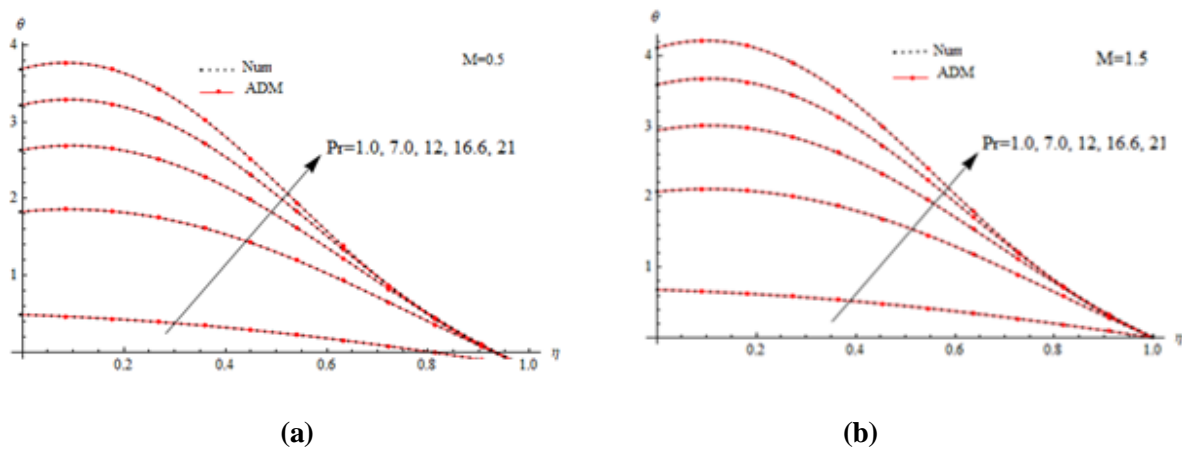


Figure IV.8 : Profils de température pour différentes valeurs du nombres de Prandtl en fonction du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, et $K = 0.05$.

(a) Pour $M = 0.5$

(b) Pour $M = 1.5$

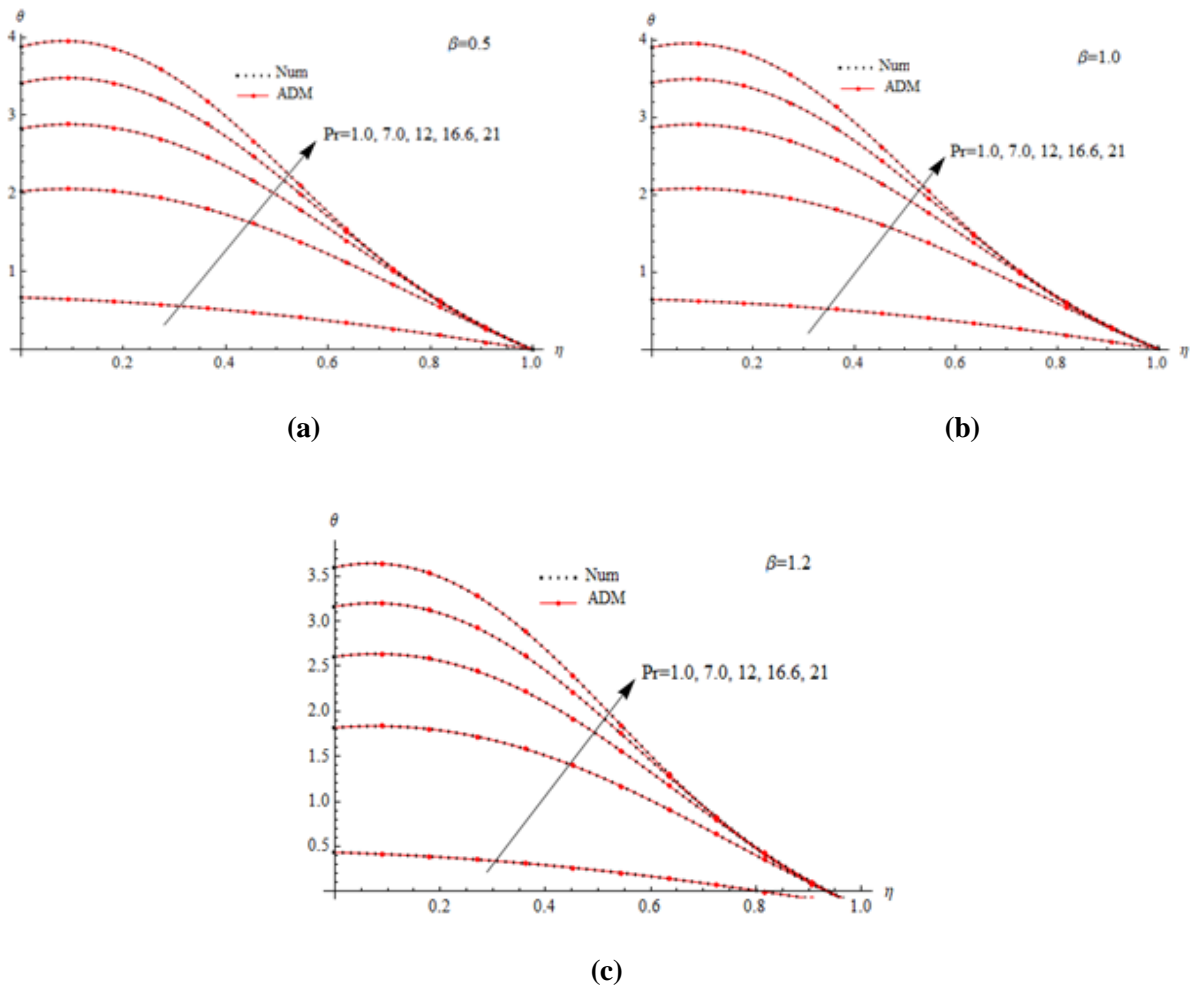


Figure IV.9 : Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Prandtl en fonction du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $K = 0.05$ et $M = 0.5$.

(a) Pour $\beta = 0.5$

(b) Pour $\beta = 1.0$

(c) Pour $\beta = 1.2$

IV.2.2.2 Profils de la température pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21)

- *Influence du paramètre d'instationarité K sur la température*

De la **Figure (IV.10)**, il est clairement démontré que l'augmentation du paramètre d'instationarité K conduit à une diminution de la température du fluide biomagnétique près de la surface du dièdre; cependant, on observe un comportement inverse au delà d'une certaine valeur de la variable sans dimensions $\eta_{critique}$. En effet, plus loin de la surface du dièdre (c.-à.-d. pour $\eta > \eta_{critique}$), on constate que la température augmente avec l'augmentation du paramètre d'instationarité K .

- *Influence du nombre de Reynolds Re sur la température*

La **Figure (IV.11)** montre l'évolution de la température adimensionnelle pour différentes valeurs du nombre de Reynolds quand le paramètre $\beta = 0.25$. Comme visualisée, il est bien clair que l'effet du nombre de Reynolds présente un comportement similaire à celui observé dans la **Figure (IV.10)**. Proche de la surface du dièdre, nous observons que la température diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds Re ; cependant, plus loin de la surface du dièdre, la distribution de la température interfère et augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds. Par ailleurs, l'effet du nombre de Reynolds sur l'évolution de la température, pour une valeur de $\beta=1.2$, est visualisé par la **Figure (IV.12)**. Pour ce cas, on constate que la dissipation se comporte inversement. En effet, il est clairement constaté qu'une élévation de la température, près de la surface du dièdre, se manifeste avec l'accroissement du nombre de Reynolds ; tandis, qu'après une certaine valeur critique de η ($\eta > \eta_{critique}$), on constate que la température diminue avec l'accroissement du nombre de Reynolds Re . Dans cette situation, la température apparait comme une fonction décroissante du nombre de Reynolds.

- *Influence du paramètre d'angle β du dièdre sur la température*

La **Figure (IV.13)** présente l'influence du paramètre β sur l'évolution de la température à travers la couche limite. Les résultats obtenus indiquent une diminution de la température du fluide biomagnétique avec l'augmentation du paramètre β . Ici, on note clairement que la température la plus élevée se produit pour les petites valeurs du paramètre β . Par contre, pour de grandes valeurs du paramètre β , la température est basse.

- *Influence du champ magnétique M sur la température*

La **Figure (IV.14)** montre l'effet du paramètre magnétique M sur l'évolution de la température du fluide biomagnétique étudié. Les résultats obtenus révèlent que la température croît avec l'accroissement du paramètre M . En effet, il est fortement établi que l'augmentation de M fait réduire la vitesse du fluide en créant une force dite de Lorentz qui s'oppose au mouvement du fluide. En conséquence, le transfert de chaleur se trouve augmenté à partir de la surface du dièdre jusqu'au fluide.

- *Influence du champ magnétique induit h sur la température*

La **Figure (IV.15)** visualise l'influence du paramètre du champ magnétique induit h sur la distribution de la température. Les résultats obtenus sont semblables à ceux observés dans la **Figure (IV.14)** montrant l'effet du paramètre M .

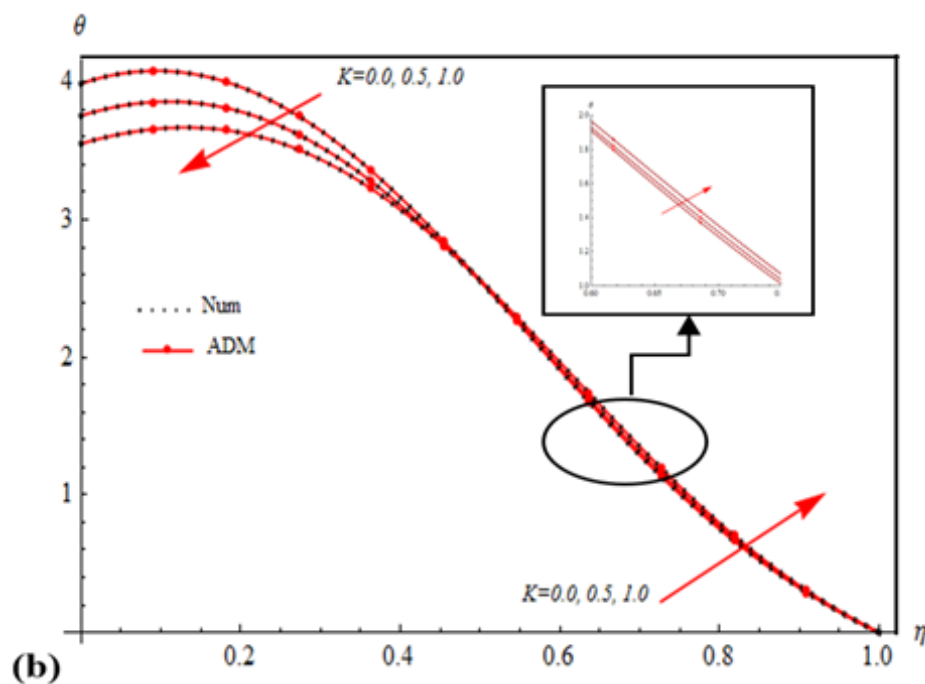


Figure IV.10 : Profils de température pour différentes valeurs du paramètre d'instantanéité K avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ et $Re = 0.5$.

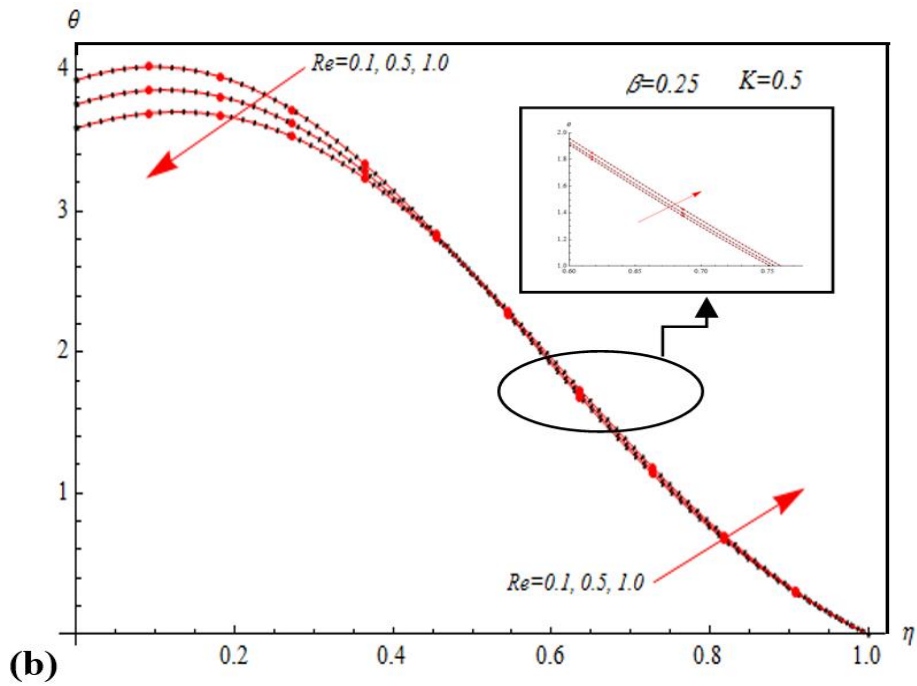


Figure IV.11 : Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.

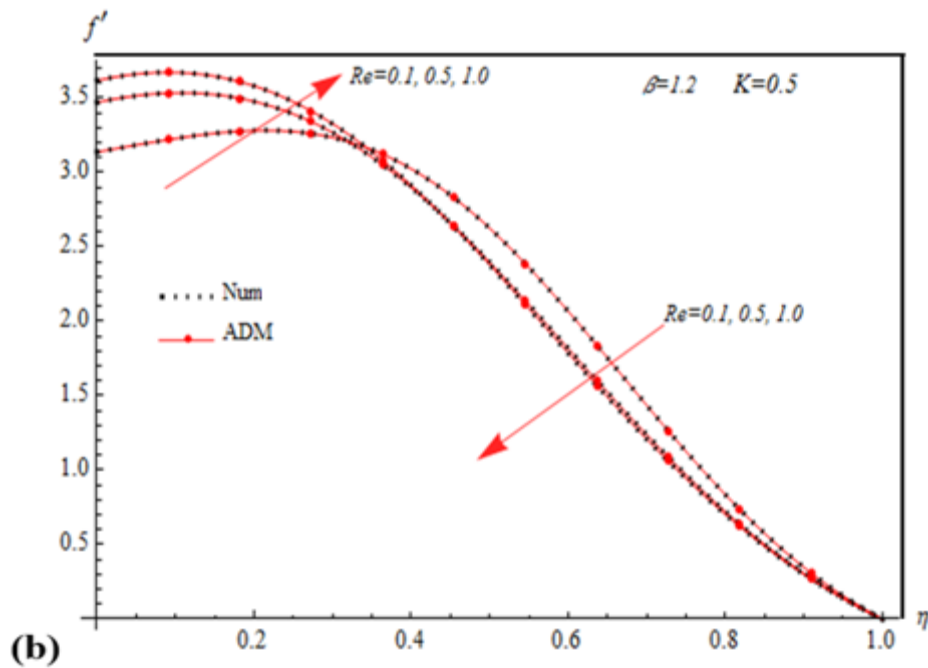


Figure IV.12 : Profils de température pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.

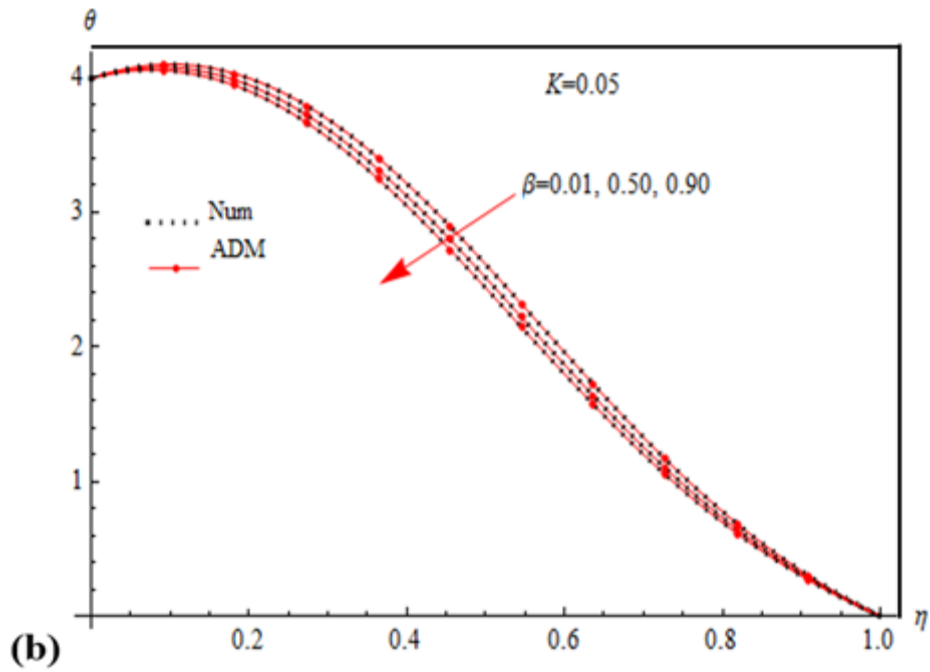


Figure IV.13 : Profils de température pour différentes valeurs du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05, h = 1, K = 0.05$ et $M = 1$.

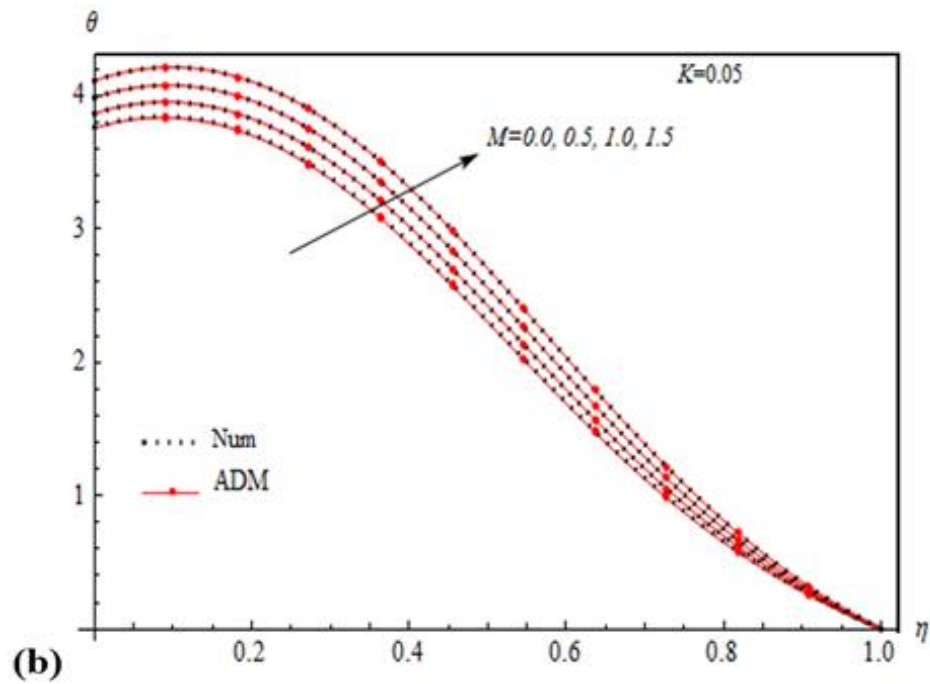


Figure IV.14 : Profils de température pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05, h = 1, K = 0.05$ et $\beta = 0.25$.

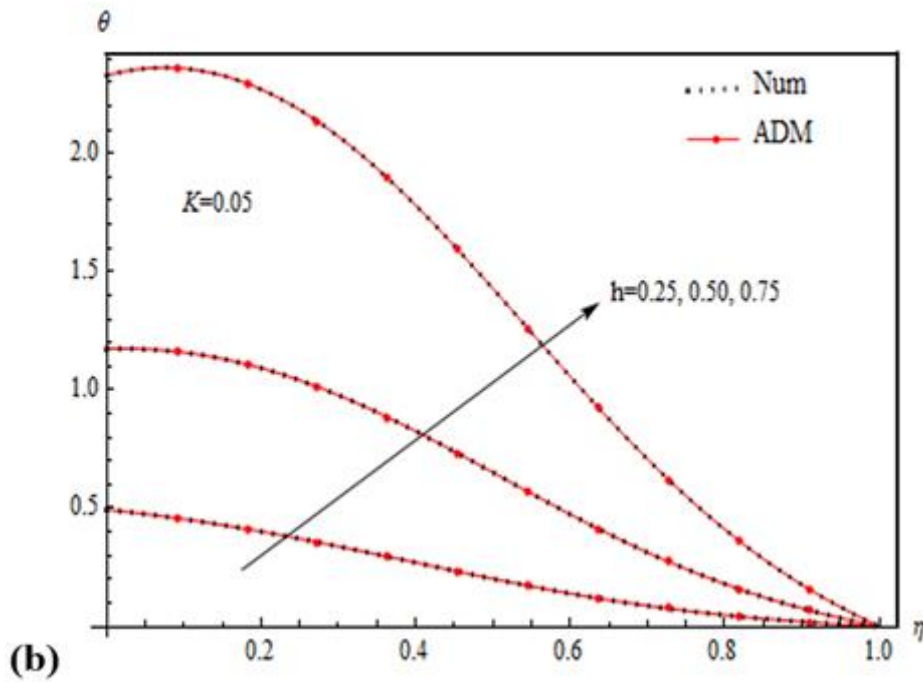


Figure IV.15 : Profils de température pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique induit h avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ et $M = 1$.

IV.2.3 Champ de micro-rotation

Comme mentionné ci-dessus pour les profils de la vitesse, la micro-rotation n'est pas également affectée par la variation du nombre de Prandtl. Dans cette partie, on s'intéresse alors aux effets des différents paramètres physiques du problème tels que : le paramètre d'instationarité K , le nombre de Reynolds Re , le paramètre du champ magnétique M et le paramètre du champ magnétique induit h sur l'évolution de la micro-rotation des corpuscules du fluide biomagnétique (sang humain, $Pr = 21$).

IV.2.3.1 Profils de la micro-rotation pour l'écoulement du sang humain (Prandtl =21)

- *Influence du paramètre d'instationarité K sur la micro-rotation*

La **Figure (IV.16)** indique clairement que la micro-rotation des corpuscules du sang humain au voisinage de la surface du dièdre croît avec l'accroissement du paramètre K . Cependant, plus loin de la surface du dièdre, il est clairement constaté que le paramètre d'instationarité K n'affecte pas la rotation des corpuscules du sang.

- *Influence du nombre de Reynolds Re sur la micro-rotation*

A partir de la **Figure (IV.17)**, nous constatons que la micro-rotation des corpuscules du sang proche de la surface du dièdre apparaît comme une fonction croissante du nombre de Reynolds Re . Par ailleurs, après une certaine valeur critique de la variable de similitude $\eta_{critique}$ (c.-à-d. $\eta > \eta_{critical} \cong 0.46$), il est bien clair que la micro-rotation ne s'affecte par l'accroissement du nombre de Reynolds. Dans la **Figure (IV.18)**, pour $\beta = 1.2$, on observe que le phénomène s'inverse et par conséquent la micro-rotation diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds Re . Ce dernier, n'a aucun effet sur la micro-rotation, plus loin de la surface du dièdre, à partir d'une certaine valeur critique de η ($\eta_{critical} \cong 0.6$). Par ailleurs, proche de la surface du dièdre, il apparaît clairement que la micro-rotation décroît au fur et à mesure que le nombre de Reynolds prend des valeurs très élevées.

- *Influence du paramètre d'angle β du dièdre sur la micro-rotation*

La **Figure (IV.19)** indique que la micro-rotation des corpuscules du sang diminue dans une zone proche de la surface du dièdre au fur et à mesure que le paramètre β augmente. Loin de la surface du dièdre, le comportement de la micro-rotation est tout à fait inversé avec l'accroissement de β .

- *Influence du champ magnétique M sur la micro-rotation*

La **Figure (IV.20)** présente l'influence de l'intensité du champ magnétique M sur l'évolution de la micro-rotation des corpuscules de sang à travers la couche limite. Il est clairement noté que l'accroissement du paramètre M fait considérablement croître la micro-rotation. Physiquement, ceci peut être expliqué par la diminution de la viscosité du fluide biomagnétique sous l'effet de la force de Lorentz. Dans cette situation, le fluide devient mince et par conséquent conduit à l'accroissement de la micro-rotation.

- *Influence du champ magnétique induit h sur la micro-rotation*

Comme représenté par la **Figure (IV.21)**, sous l'effet du champ magnétique induit h , on constate également que la micro-rotation des corpuscules du sang augmente avec l'augmentation du paramètre h .

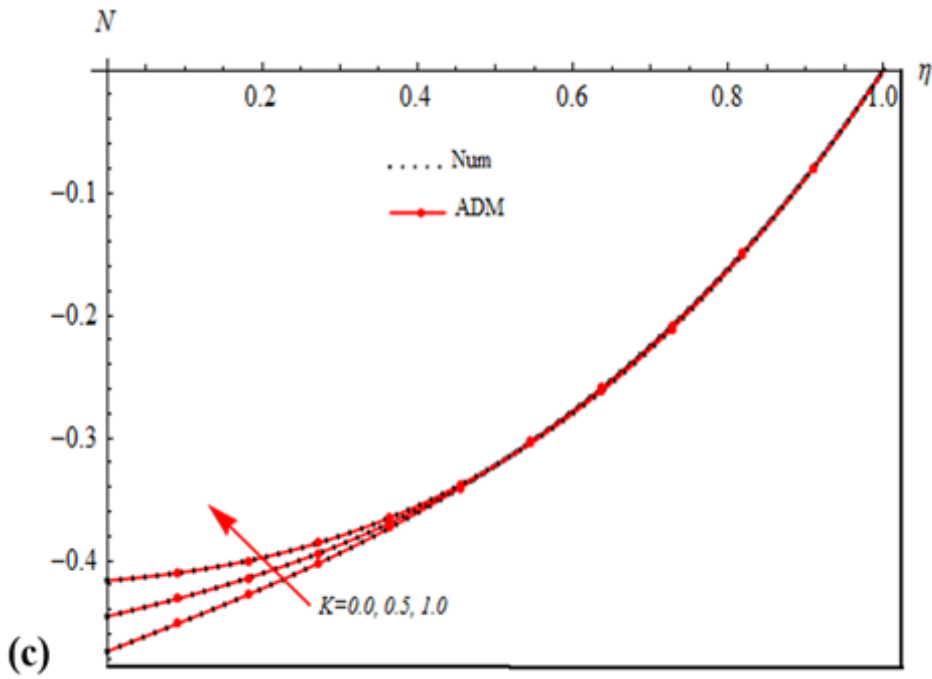


Figure IV.16 : Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre d'instationarité K avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ et $Re = 0.5$.

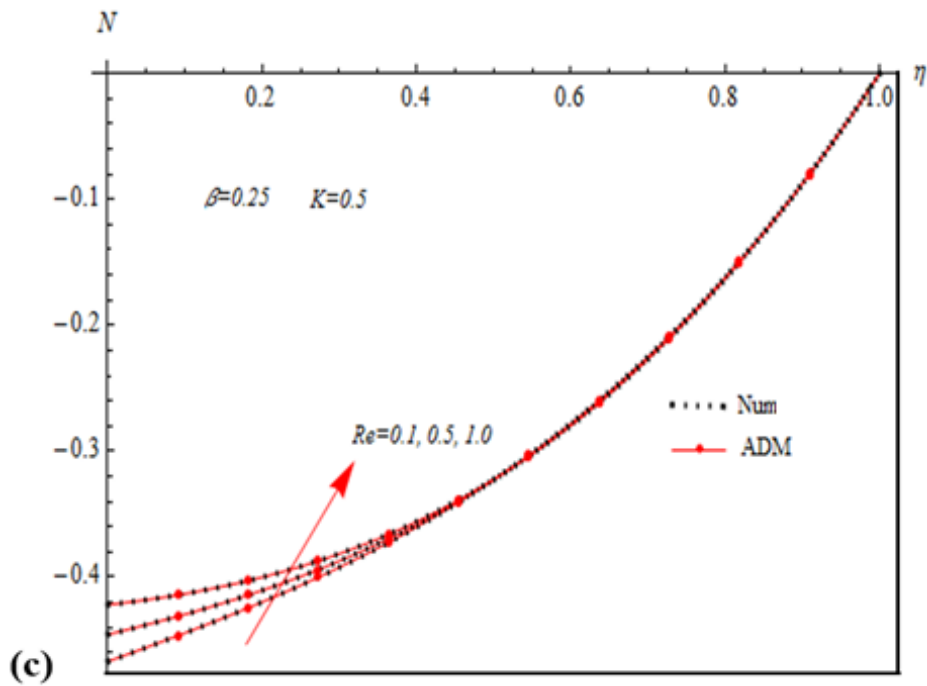


Figure IV.17 : Profils de microrotation pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.

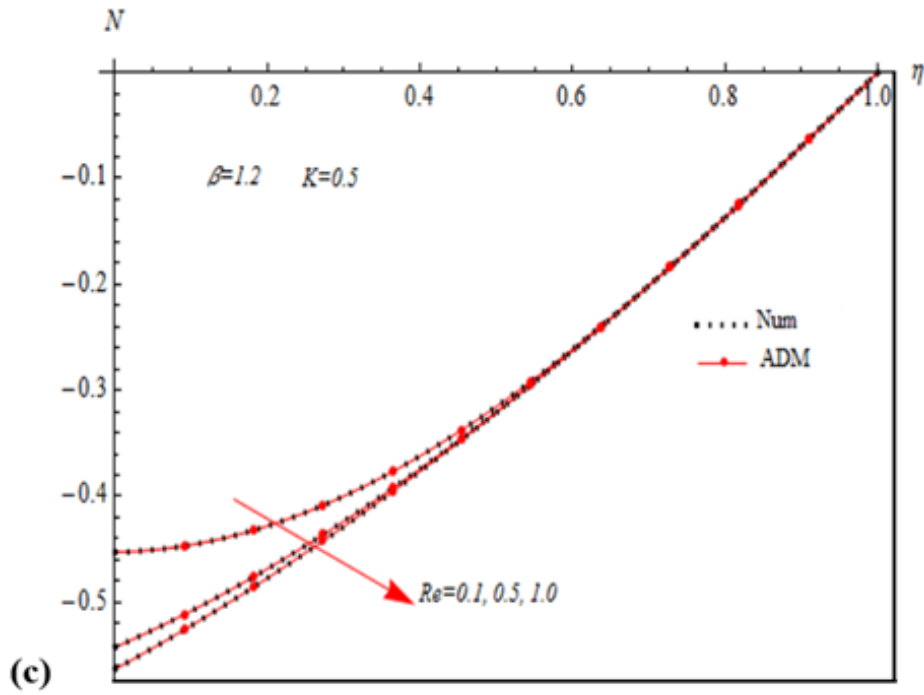


Figure IV.18 : Profils de microrotation pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re avec $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ et $M = 1$.

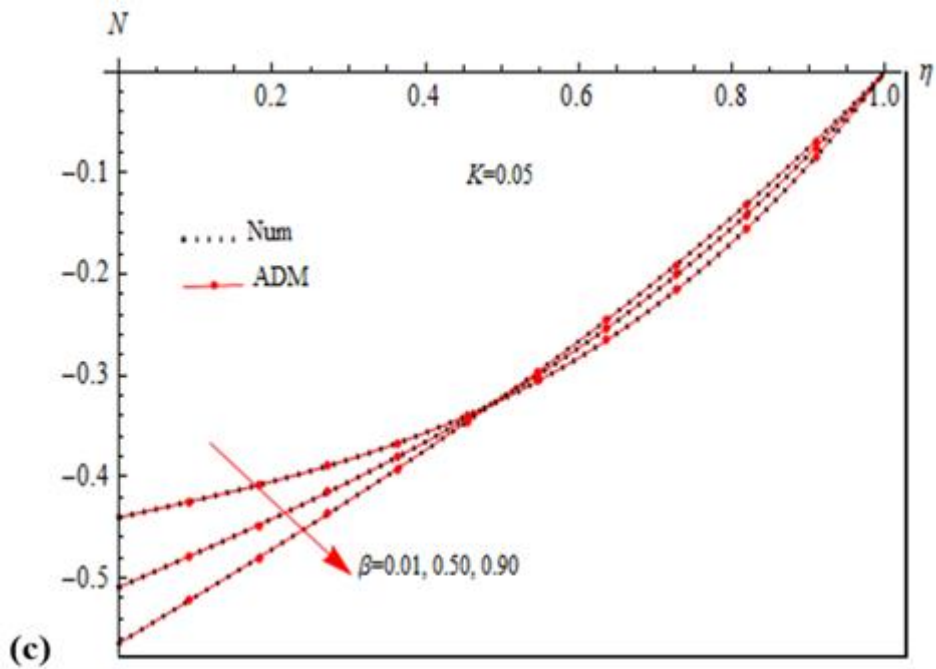


Figure IV.19 : Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre d'angle du dièdre β avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $M = 1$.

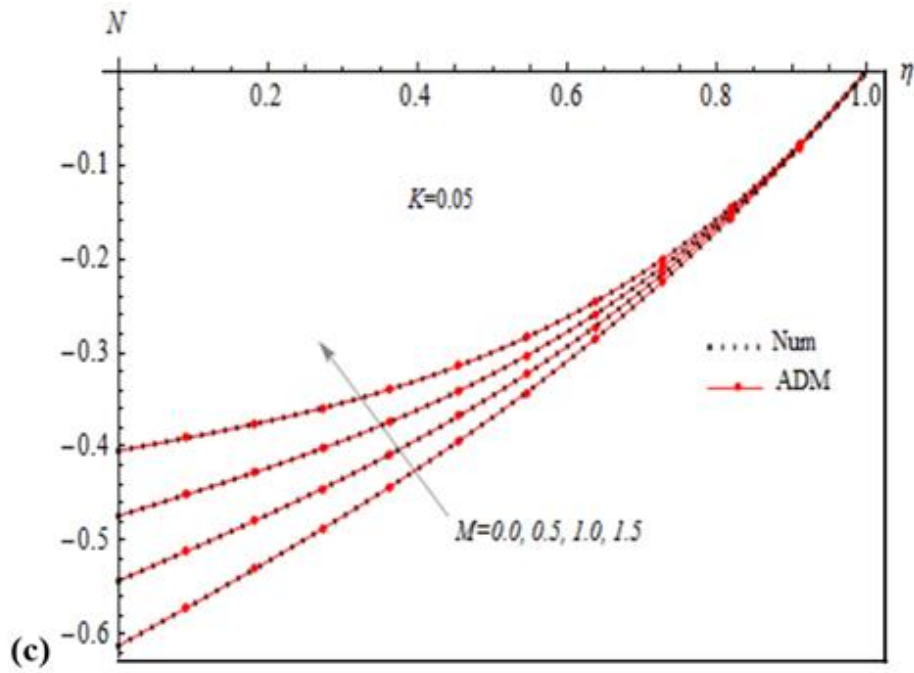


Figure IV.20 : Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique M avec $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ et $\beta = 0.25$.

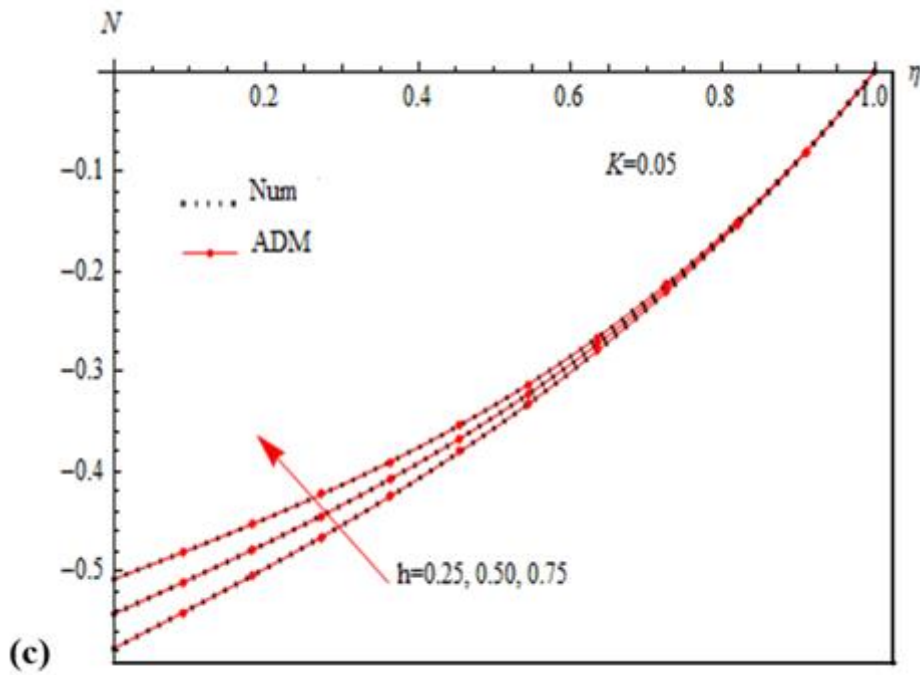


Figure IV.21 : Profils de microrotation pour différentes valeurs du paramètre du champ magnétique induit h avec $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ et $M = 1$.

IV.3 Coefficient de frottement superficiel pour le sang humain (Prandtl =21)

Dans cette section, les effets du paramètre d'instationarité K , du paramètre d'angle du dièdre β et du nombre de Reynolds Re sur l'évolution du coefficient de frottement superficiel du sang humain ont été étudiés et visualisés par les **Figures (IV.22, IV.23 et IV.24)**.

Comme mentionnée précédemment, les paramètres physiques suivants sont maintenus fixes dans toutes les simulations: $Pm = 10^{-4}$, $\Delta = 2.0$, $n^* = 0.5$, $\xi = 1.0$, $Bi = 0.5$ et $Ec = 10^{-4}$.

Le comportement du coefficient de frottement sous l'effet du paramètre β et du paramètre K est donné par la **Figure (IV.22)**. En effet, les résultats obtenus montrent que le coefficient de frottement apparaît comme une fonction décroissante du paramètre d'instationarité K , tandis qu'il croît avec l'accroissement du paramètre β . Par ailleurs, avec l'accroissement de la magnitude du paramètre d'angle β du dièdre, il est clairement démontré que le phénomène de retour d'écoulement disparaît complètement.

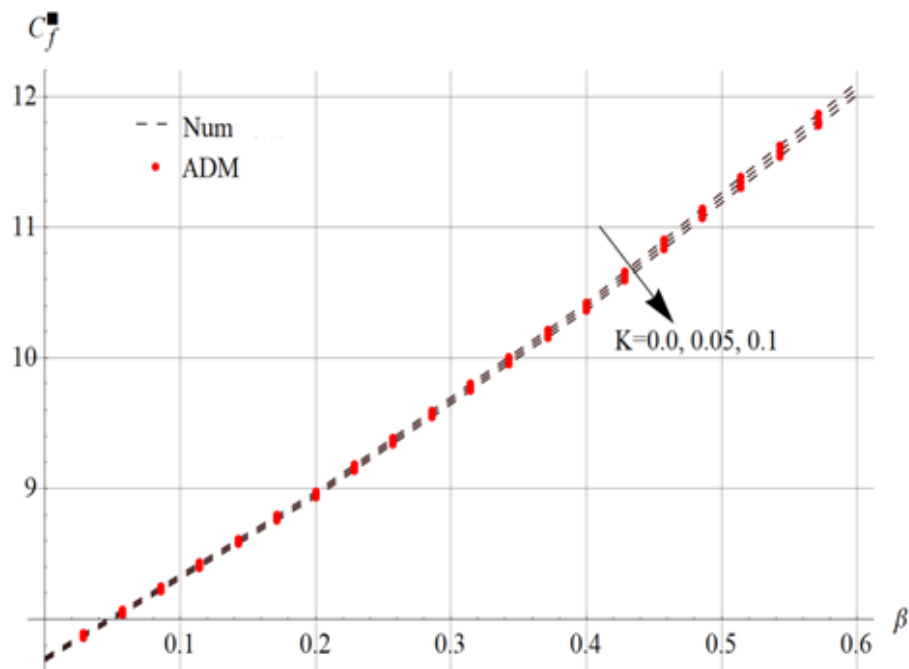


Figure IV.22 : Coefficient de frottement superficiel pour différentes valeurs des nombres de K et de β .

D'autre part, comme le montre la **Figure (IV.23)**, le coefficient de frottement apparaît comme une fonction décroissante du nombre de Reynolds Re . Par contre, avec l'augmentation du paramètre d'angle β , le coefficient de frottement se trouve augmenté. Dans

ces conditions, il est clairement constaté que le phénomène de retour d'écoulement est totalement disparu avec l'augmentation du paramètre d'angle β .

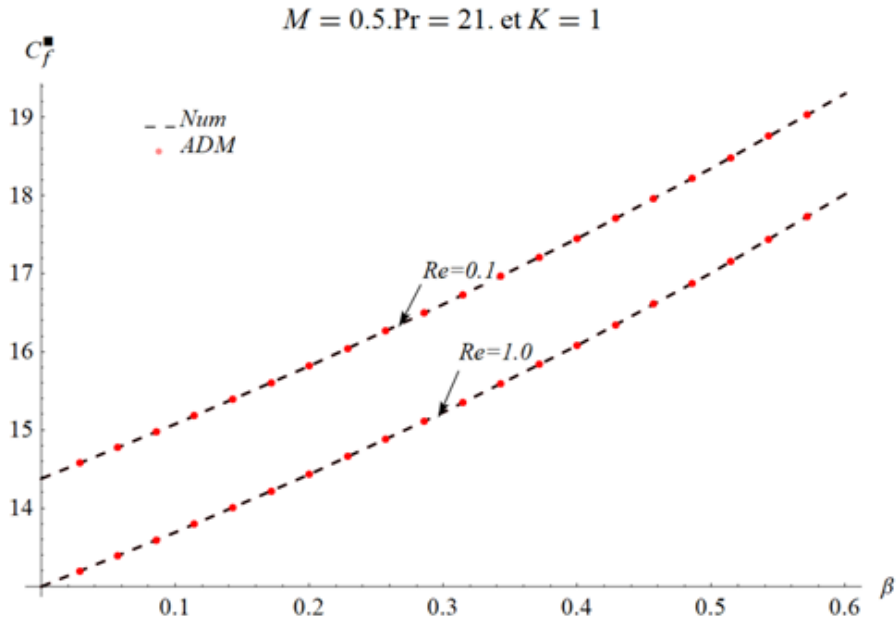


Figure IV.23 : Coefficient de frottement superficiel pour différentes valeurs des nombres de Re et de β .

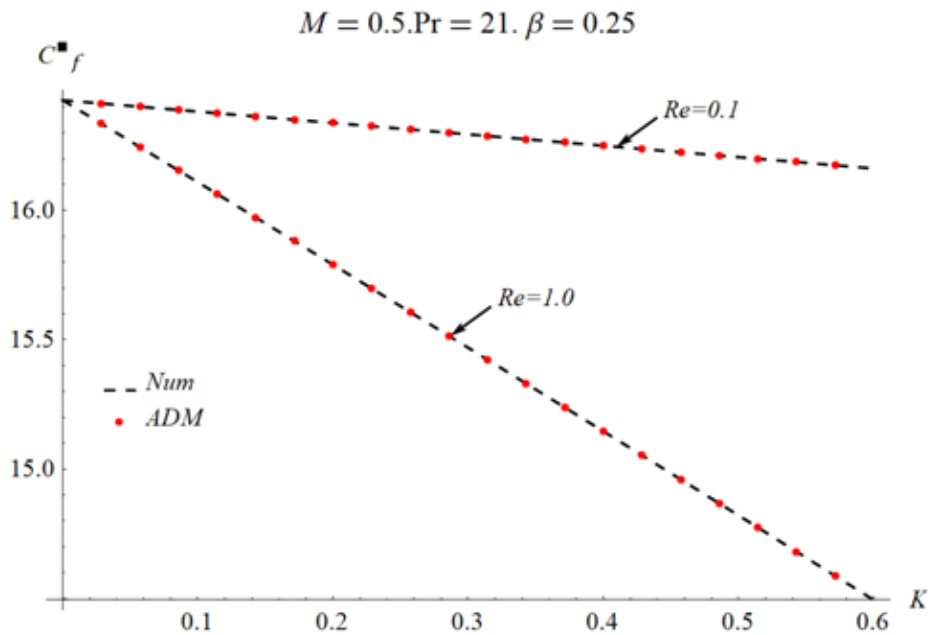


Figure IV.24 : Coefficient de frottement superficiel pour différentes valeurs des nombres de Re et de K .

La **Figure (IV.24)** illustre l'effet combiné de l'augmentation du nombre de Reynolds Re et du paramètre d'instationarité K . En effet, ces deux paramètres ont le même effet sur l'évolution du coefficient de frottement. Ce dernier diminue avec l'augmentation des paramètres Re et K . D'autre part, il est également constaté que le nombre de Reynolds n'influe pas sur l'écoulement étudié dans le cas d'un écoulement stationnaire (c.à.d. pour $K = 0$). Par contre, avec l'augmentation du paramètre K , le coefficient de frottement correspondant à $Re = 0.1$ varie légèrement ; tandis que, pour le cas où $Re = 1.0$, le coefficient de frottement diminue d'une manière accélérée.

IV.4 Comparaison entre la solution analytique d'ADM et les résultats numériques

Dans cette partie, une étude comparative entre les différents résultats des traitements numérique et analytique et ceux disponibles en littérature a été réalisée.

Comme le visualise la **Figure (IV.25)**, les résultats obtenus montrent une concordance parfaite entre les résultats analytiques ADM et ceux disponibles en littérature [108]. En effet, pour le cas étudié dans la **Figure (IV.25)**, nous obtenons:

$$f''(0)^{ADM} = 0.92767899, f''(0)^{Num} = 0.927718972, \text{ et } f''(0)^{OHAM [108]} = 0.92760923.$$

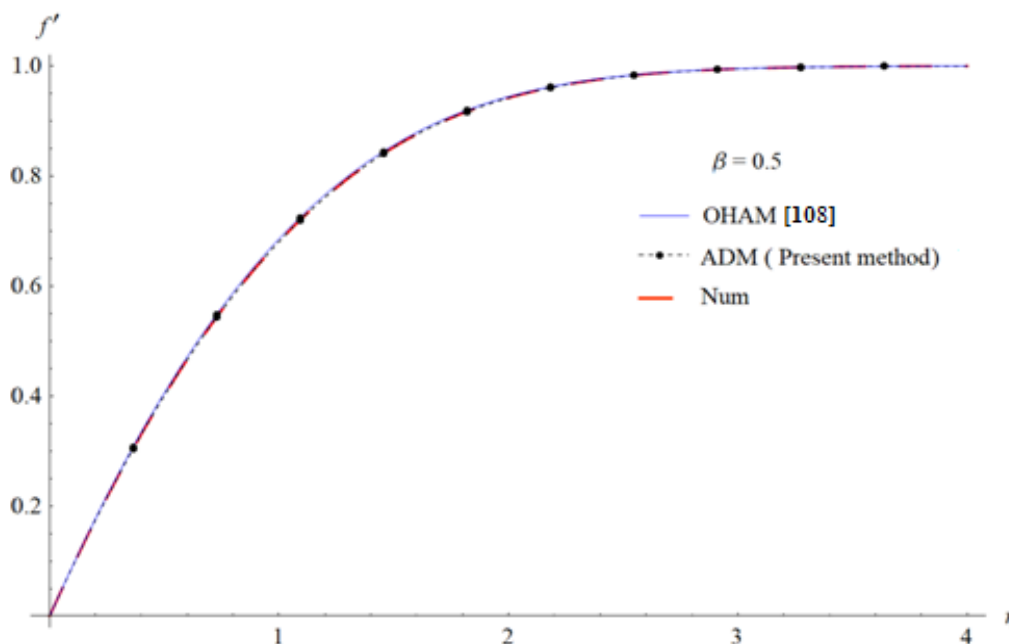


Figure IV.25 : Comparaison entre la solution ADM, la solution numérique et les résultats disponibles dans littérature [108].

Une comparaison entre les résultats analytiques ADM et ceux de la méthode numérique de Runge-kutta-Fehlberg a été également faite pour la vitesse, la température et la micro-rotation de l'écoulement du fluide biomagnétique objet d'étude. Comme représenté dans les tableaux (IV.2) à (IV.4), l'erreur entre tous les paramètres étudiés est donnée par:

$$Erreur = |solution\ numérique - solution\ analytique|$$

A partir des tableaux (IV.2 à IV.4), les résultats analytiques par la méthode ADM comparés aux résultats du traitement numérique par la méthode RKF45 utilisé comme guide indiquent que la méthode ADM converge rapidement vers la solution numérique au bout de quelques itérations, justifiant ainsi l'efficacité et la plus haute précision de la méthode de décomposition d'Adomian. En effet, d'après le tableau (IV.5), il est clairement noté que la précision des solutions analytiques ADM augmente au fur et à mesure que l'ordre des approximations augmente.

D'autre part, les tableaux (IV.6 à IV.8) visualisent la variation des valeurs des constantes de $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$ et $\theta(0)$ en fonction du paramètre du champ magnétique M , du paramètre d'angle β et du paramètre d'instationarité K à $\eta = 0$ pour différents valeurs du nombre de Prandtl. D'après les résultats obtenus, il est clairement démontré que la méthode analytique de décomposition d'Adomian et celle du traitement numérique (méthode de Runge-kutta-Fehlberg) sont en parfaite concordance.

η	$f'_{Numérique}$	f'_{ADM}	$ f'_{Numérique} - f'_{ADM} $
0.0	0.	0.	0.
0.2	0.19141768728440647	0.19141768732025594	$3.584946228762931 \times 10^{-11}$
0.4	0.3910978319547676	0.39109783242873175	$4.739641457085497 \times 10^{-10}$
0.6	0.5960082371868581	0.5960082382532984	$1.066440269426038 \times 10^{-9}$
0.8	0.8012283224934137	0.8012283243023863	$1.808972638350781 \times 10^{-9}$
1.0	1	1.	0.

Tableau IV.2: Comparaison entre la solution analytique ADM et les résultats numériques pour la vitesse du fluide biomagnétique lorsque: $Pr = 21$, $x = 1$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ et $Re = 0.1$.

Résultats et discussions

η	$\theta_{\text{Numérique}}$	θ_{ADM}	$ \theta_{\text{Numérique}} - \theta_{\text{ADM}} $
0.0	3.9278406608175103	3.9278424651995847	0.000001804382074421795
0.2	3.9175912831672313	3.91759337235014	0.00000208918290889315
0.4	3.146464668889907	3.146467020523146	0.000002351633239250361
0.6	1.9126107277531412	1.9126130713075675	0.000002343554426298411
0.8	0.7559951400248722	0.7559974693985586	0.000002329373686382752
1.0	0	0	0

Tableau IV.3: Comparaison entre la solution analytique ADM et les résultats numériques pour la température du fluide biomagnétique lorsque: $Pr = 21$, $x = 1$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ et $Re = 0.1$

η	$N_{\text{Numérique}}$	N_{ADM}	$ N_{\text{Numérique}} - N_{\text{ADM}} $
0.0	-0.46684931160922055	-0.466849311591356	$1.786454317809216 \times 10^{-11}$
0.2	-0.4196241877561029	-0.4196241900437771	$2.287674216727708 \times 10^{-9}$
0.4	-0.360169299886266	-0.36016930283709364	$2.950827637793196 \times 10^{-9}$
0.6	-0.2778733251235815	-0.2778733289203722	$3.796790715160369 \times 10^{-9}$
0.8	-0.1616354064249476	-0.16163541129700026	$4.872052677962202 \times 10^{-9}$
1.0	0	0	0

Tableau IV.4: Comparaison entre la solution analytique ADM et les résultats numériques pour la microrotation du fluide biomagnétique lorsque: $Pr = 21$, $x = 1$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ et $Re = 0.1$.

Résultats et discussions

Ordre d'approximation pour les solutions d'ADM					
$f''_{\text{Numérique}}$	1.0857264008598162	$N'_{\text{Numérique}}$	0.3449645536258656	$\theta_{\text{Numérique}}$	3.867106526091305
$f''_{\text{ADM (3 appro)}}$	1.086950395967958	$N'_{\text{ADM (3 appro)}}$	0.3448717552511812	$\theta_{\text{ADM (3 appro)}}$	9.44344733216317
$f''_{\text{ADM (5 appro)}}$	1.085700164452754	$N'_{\text{ADM (5 appro)}}$	0.3449648755308494	$\theta_{\text{ADM (5 appro)}}$	5.930514917741092
$f''_{\text{ADM (7 appro)}}$	1.0857268104948183	$N'_{\text{ADM (7 appro)}}$	0.34496467052069696	$\theta_{\text{ADM (7 appro)}}$	4.306854107653984
$f''_{\text{ADM (9 appro)}}$	1.0857263954477951	$N'_{\text{ADM (9 appro)}}$	0.34496454988496195	$\theta_{\text{ADM (9 appro)}}$	3.925282228123008
$f''_{\text{ADM (11 appro)}}$	1.0857264008490968	$N'_{\text{ADM (11 appro)}}$	0.3449645539056209	$\theta_{\text{ADM (11 appro)}}$	3.87208628620296
$f''_{\text{ADM (14 appro)}}$	1.0857264007051182	$N'_{\text{ADM (14 appro)}}$	0.34496455385395414	$\theta_{\text{ADM (14 appro)}}$	3.8670451234710237
$f''_{\text{ADM (21 appro)}}$	1.0857264007051182	$N'_{\text{ADM (21 appro)}}$	0.34496455385395414	$\theta_{\text{ADM (21 appro)}}$	3.867106507344131

Tableau IV.5: Ordre des approximations ADM pour les solutions de la vitesse, de la température et de la microrotation du fluide biomagnétique.

M	$Pr = 1$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$\beta = 0.25$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.224130762606	1.224130771564	0.443357480415	0.44335748223	-1.320353081	-1.3203530818	0.676581608547	0.676581594951
0.5	1.085726395335	1.085726395453	0.344964551077	0.34496454988	-1.320306927	-1.3203069274	0.678025402742	0.678025388148
1	0.947237558379	0.947237597245	0.246557261488	0.24655732310	-1.320264687	-1.3202646874	0.679476686823	0.679476672222
1.5	0.808664042108	0.808664053682	0.148135324676	0.14813531612	-1.320226370	-1.3202263709	0.680935498300	0.680935481931
2	0.670005634643	0.670005645144	0.049698450008	0.04969843079	-1.320191986	-1.3201919869	0.682401876078	0.682401860128

Tableau IV.6a : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 1$.

M	$Pr = 7$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$\beta = 0.25$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.224130765140	1.224130771564	0.443357483029	0.44335748223	-1.320353081	-1.3203530818	1.986978132458	1.986982695705
0.5	1.085726401740	1.085726395447	0.344964551336	0.34496454988	-1.320306927	-1.3203069274	2.014759637187	2.014760141646
1	0.947237568413	0.947237597231	0.246557258362	0.24655732309	-1.320264687	-1.3202646874	2.043301444544	2.043300475119
1.5	0.808664055246	0.808664054165	0.148135317374	0.14813531611	-1.320226370	-1.3202263709	2.072623358573	2.072623325055
2	0.670005651510	0.670005781815	0.049698439408	0.04969848665	-1.320191987	-1.3201919870	2.102745091096	2.102745381746

Tableau IV.6b : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 7$.

M	$Pr = 12$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$\beta = 0.25$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.224130763500	1.224130771564	0.443357484133	0.44335748223	-1.320353081	-1.3203530818	2.756943033591	2.756926701910
0.5	1.085726401125	1.085726400451	0.344964552987	0.34496455371	-1.320306927	-1.3203069274	2.815482324316	2.815482290934
1	0.947237568819	0.947237568842	0.246557260529	0.24655726166	-1.320264687	-1.3202646874	2.876650627870	2.876650630399
1.5	0.808664056347	0.808664056464	0.148135319923	0.14813532132	-1.320226370	-1.3202263709	2.940580318644	2.940579837911
2	0.670005653465	0.670005654077	0.049698442454	0.04969844743	-1.320191987	-1.3201919824	3.007407367123	3.007406242842

Tableau IV.6c : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 12$.

M	$Pr = 16.6$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$\beta = 0.25$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.224130762934	1.224130771564	0.443357484609	0.44335748223	-1.320353081	-1.3203530818	3.312679423018	3.312679393563
0.5	1.085726400825	1.085726447175	0.344964553714	0.34496467052	-1.320306927	-1.3203069274	3.399066545740	3.399066694940
1	0.947237568791	0.947237568293	0.246557261513	0.24655726044	-1.320264687	-1.3202646873	3.490518159593	3.490518136874
1.5	0.808664056992	0.808664187499	0.148135320912	0.14813536681	-1.320226370	-1.3202263705	3.587402068024	3.587401886783
2	0.670005654525	0.670005977414	0.049698443589	0.04969855620	-1.320191987	-1.3201919861	3.690108059039	3.690107606664

Tableau IV.6d : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 16.6$.

	$Pr = 21$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$\beta = 0.25$	
M	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.224130763022	1.224130762746	0.443357484548	0.44335748467	-1.320353081	-1.3203530818	3.756260808156	3.756263289003
0.5	1.085726400859	1.085726400795	0.344964553625	0.34496455385	-1.320306927	-1.3203069274	3.867106526091	3.867106507388
1	0.947237568774	0.947237568836	0.246557261400	0.24655726165	-1.320264687	-1.3202646874	3.985636619241	3.985636600070
1.5	0.808664056963	0.808664056752	0.148135320647	0.14813532142	-1.320226370	-1.3202263709	4.112557368170	4.112557330267
2	0.670005654451	0.670005654276	0.049698443282	0.04969844431	-1.320191987	-1.3201919870	4.248638241341	4.248638196474

Tableau IV.6f : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre du champ magnétique M pour $Pr = 21$.

	$Pr = 1$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$M = 0.5$	
β	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.02666515653	1.026665161084	0.270765722407	0.27076573722	-1.412412396	-1.4124123970	0.687112891327	0.687112878211
0.25	1.08572639533	1.085726395335	0.344964551077	0.34496454988	-1.320306927	-1.3203069274	0.678025402742	0.678025388148
0.5	1.14437243020	1.144372426603	0.418900203678	0.41890019744	-1.220558239	-1.2205582398	0.667592356408	0.667592341027
1	1.25477586036	1.254775845877	0.553667703824	0.55366769022	-0.974872885	-0.9748728866	0.637075581225	0.637075566156
1.2	1.26893520609	1.268935191166	0.547335215225	0.54733520267	-0.792501749	-0.7925017522	0.603374383958	0.603374371451

Tableau IV.7a : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 1$.

	$Pr = 7$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$M = 0.5$	
β	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.02666516844	1.026665161084	0.270765726328	0.27076573722	-1.412412397	-1.4124123970	2.00253116311	2.002531544059
0.25	1.08572640174	1.085726395447	0.344964551336	0.34496454988	-1.320306927	-1.3203069274	2.014759637187	2.014760141646
0.5	1.14437243080	1.144372429033	0.418900199722	0.41890020085	-1.220558239	-1.2205582398	2.028630814414	2.028630816392
1	1.25477584968	1.254775846429	0.553667693011	0.55366769115	-0.974872886	-0.9748728866	2.048647668091	2.048647729354
1.2	1.26893519543	1.268935191263	0.547335206103	0.54733520313	-0.792501752	-0.7925017523	1.988252747028	1.988252714741

Tableau IV.7b : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 7$.

	$Pr = 12$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$M = 0.5$	
β	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.02666516848	1.026665168479	0.270765728846	0.27076572995	-1.412412397	-1.4124123970	2.800470687127	2.800472091732
0.25	1.08572640112	1.085726400451	0.344964552987	0.34496455371	-1.320306927	-1.3203069274	2.815482324316	2.815482290934
0.5	1.14437242972	1.144372429024	0.418900200404	0.41890020082	-1.220558239	-1.2205582398	2.833114312493	2.833112897509
1	1.25477584773	1.254775846707	0.553667691913	0.55366769127	-0.974872886	-0.9748772753	2.858815855511	2.858818476498
1.2	1.26893519297	1.268935191708	0.547335204371	0.54733513123	-0.792501752	-0.7925059035	2.774606011360	2.774609585591

Tableau IV.7c : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 12$.

	$Pr = 16.6$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$M = 0.5$	
β	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.02666516830	1.026665161084	0.270765729860	0.27076572763	-1.412412397	-1.4124123969	3.386176346719	3.386176325599
0.25	1.08572640082	1.085726447175	0.344964553714	0.34496467052	-1.320306927	-1.3203069274	3.399066545740	3.399066694940
0.5	1.14437242913	1.144372426590	0.418900200784	0.41890019743	-1.220558239	-1.2205582398	3.415111779149	3.415111778889
1	1.25477584669	1.254775845795	0.553667691324	0.55366769016	-0.974872886	-0.9748728866	3.435467148191	3.435467143853
1.2	1.26893519164	1.268935190907	0.547335203417	0.54733520251	-0.792501752	-0.7925017522	3.330095252073	3.330095233767

Tableau IV.7d : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 16.6$.

	$Pr = 21$		$Re = 0.05$		$K = 0.05$		$M = 0.5$	
β	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.02666516830	1.026665168206	0.270765729733	0.27076572998	-1.412412397	-1.4124123970	3.857913063360	3.857912508077
0.25	1.08572640085	1.085726400795	0.344964553625	0.34496455385	-1.320306927	-1.3203069274	3.867106526091	3.867106507388
0.5	1.14437242920	1.144372428996	0.418900200744	0.41890020081	-1.220558239	-1.2205582398	3.879842686773	3.879842731412
1	1.25477584682	1.254775846523	0.553667691401	0.55366769119	-0.974872886	-0.9748728866	3.891436798964	3.891436865796
1.2	1.26893519181	1.268935191365	0.547335203543	0.54733520339	-0.792501752	-0.7925017522	3.766612793532	3.766612978498

Tableau IV.7f : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'angle du dièdre β pour $Pr = 21$.

K	$Pr = 1$		$Re = 0.05$		$\beta = 0.25$		$M = 0.5$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.08652861396	1.086529027487	0.346461848670	0.34646196809	-1.322844568	-1.3228445685	0.678462213380	0.678462186472
0.05	1.08572639533	1.085726395335	0.344964551077	0.34496454988	-1.320306927	-1.3203069274	0.678025402742	0.678025388148
0.1	1.08492398635	1.084923986476	0.343467583836	0.34346758263	-1.317767662	-1.3177676628	0.677589199306	0.677589184631
0.5	1.07849785046	1.078497850605	0.331503778692	0.33150377740	-1.297394876	-1.2973948768	0.674121475563	0.674121460257
1	1.07044796595	1.070447965963	0.316579046012	0.31657904470	-1.271781143	-1.2717811450	0.669841795072	0.669841779548

Tableau IV.8a : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 1$.

K	$Pr = 7$		$Re = 0.05$		$\beta = 0.25$		$M = 0.5$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.08652862032	1.086529027487	0.346461848936	0.34646196809	-1.322844568	-1.3228445685	2.016473184799	2.016473690885
0.05	1.08572640174	1.085726395447	0.344964551336	0.34496454988	-1.320306927	-1.3203069274	2.014759637187	2.014760141646
0.1	1.08492399280	1.084923986474	0.343467584089	0.34346758262	-1.317767662	-1.3177676628	2.013048831446	2.013049334128
0.5	1.07849785723	1.078497856304	0.331503778943	0.33150378159	-1.297394876	-1.2973948768	1.999461458244	1.999461452816
1	1.07044797302	1.070447972052	0.316579046376	0.31657904913	-1.271781145	-1.2717811450	1.982726708016	1.982726701263

Tableau IV.8b : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 7$.

K	$Pr = 12$		$Re = 0.05$		$\beta = 0.25$		$M = 0.5$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.08652861971	1.086528614067	0.346461850582	0.34646184749	-1.322844568	-1.3228445685	2.817907674541	2.817910977326
0.05	1.08572640112	1.085726400451	0.344964552987	0.34496455371	-1.320306927	-1.3203069274	2.815482324316	2.815482290934
0.1	1.08492399218	1.084923991542	0.343467585745	0.34346758648	-1.317767662	-1.3177676628	2.813060716797	2.813063982361
0.5	1.07849785660	1.078497855893	0.331503780644	0.33150378139	-1.297394876	-1.2974003994	2.793823260453	2.793823298272
1	1.07044797238	1.070447971622	0.316579048145	0.31657904660	-1.271781145	-1.2717811450	2.770118160968	2.770118195795

Tableau IV.8c : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 12$.

K	$Pr = 16.6$		$Re = 0.05$		$\beta = 0.25$		$M = 0.5$	
	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.08652861941	1.086528614067	0.346461851306	0.34646184749	-1.322844568	-1.3228445685	3.402005655643	3.402005639659
0.05	1.08572640082	1.085726447175	0.344964553714	0.34496467052	-1.320306927	-1.3203069274	3.399066545740	3.399066694940
0.1	1.08492399188	1.084923986476	0.343467586475	0.34346758263	-1.317767662	-1.3177676628	3.396131788720	3.396131777035
0.5	1.07849785628	1.078497850605	0.331503781400	0.33150377740	-1.297394876	-1.2973948768	3.372811372208	3.372811356566
1	1.07044797203	1.070447965963	0.316579048934	0.31657904470	-1.271781145	-1.2717811450	3.344059458271	3.344059443028

Tableau IV.8d : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 16.6$.

	$Pr = 21$		$Re = 0.05$		$\beta = 0.25$		$M = 0.5$	
K	$f''(0)^{Num}$	$f''(0)^{ADM}$	$N'(0)^{Num}$	$N'(0)^{ADM}$	$H'(0)^{Num}$	$H'(0)^{ADM}$	$\theta(0)^{Num}$	$\theta(0)^{ADM}$
0	1.08652861944	1.086528614067	0.346461851217	0.34646184749	-1.322844568	-1.3228445685	3.870469841581	3.870469829749
0.05	1.08572640085	1.085726400795	0.344964553625	0.34496455385	-1.320306927	-1.3203069274	3.867106526091	3.867106507388
0.1	1.08492399191	1.084923986476	0.343467586386	0.34346758263	-1.317767662	-1.3177676628	3.863748001999	3.863747990242
0.5	1.07849785632	1.078497856313	0.331503781307	0.33150378160	-1.297394876	-1.2973948768	3.837053477022	3.930798690356
1	1.07044797207	1.070447965963	0.316579048837	0.31657904470	-1.271781145	-1.2717811450	3.804125159244	3.804125148402

Tableau IV.8f : Comparaison entre les valeurs numérique et analytique des constantes $f''(0)$, $N'(0)$, $H'(0)$, et $\theta(0)$ pour diverses valeurs du paramètre d'instationarité K pour $Pr = 21$.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

L'écoulement bidimensionnel instationnaire de couche limite laminaire pour un bio-fluide sous l'effet d'un champ magnétique tout au long d'un dièdre a été étudié numériquement et analytiquement. La solution numérique a été obtenue par les techniques de Runge-Kutta-fehlberg 4 et 5 (RK45) et de Tir, tandis que la solution analytique a été offerte par la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Dans notre étude, la nature du fluide étudié est essentiellement caractérisée par le nombre de Prandtl. En fait, une étude paramétrique montrant l'influence des paramètres physiques tels que le paramètre d'instationarité K , le nombre de Reynolds Re , le paramètre magnétique M , le champ magnétique induit h et le paramètre d'angle du dièdre β sur l'évolution de la vitesse, de la température et de la micro-rotation a été réalisée pour l'écoulement du sang humain ($Pr=21$). Il est à noter qu'une étude paramétrique particulière visualisant l'effet de la variation du nombre de Prandtl sur le champ thermique a été également explorée.

L'étude paramétrique effectuée montre que le champ dynamique (c.-a.-d. la vitesse de l'écoulement) et celui de micro-rotation, sous l'effet des différents paramètres physiques du problème présentent la même allure pour tous les cas d'écoulements étudiés. Par ailleurs, le champ thermique est fortement influencé par la variation des paramètres physiques (K , Re , M , h et β) quelque soit la valeur du nombre de Prandtl. Dans ce travail de recherche, il est à noter qu'une attention particulière a été dédiée à l'écoulement du sang humain, considéré comme un fluide biomagnétique, au travers de la couche limite qui se développe autour d'un dièdre d'angle $\beta\pi$.

De cette étude, les conclusions essentielles qu'on peut tirer sont:

- L'augmentation du paramètre d'instationarité K et du paramètre d'angle du dièdre β affecte de manière significative la vitesse du fluide biomagnétique. En conséquence, la séparation de l'écoulement peut se produire avec l'augmentation du paramètre K , tandis qu'elle se retarde avec l'accroissement du paramètre β .
- Dans la situation d'un angle du dièdre β petit, la vitesse du fluide diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, signalant ainsi le déclenchement du phénomène de la séparation.

- Dans le cas d'un angle du dièdre β plus élevé, la vitesse de l'écoulement apparaît comme une fonction croissante du nombre de Reynolds. Par conséquent, le phénomène de séparation est entièrement disparu.
- À proximité de la surface du dièdre, l'augmentation du paramètre K conduit au décroissement de la température et fait croître la micro-rotation des corpuscules de sang. Cependant, on observe un comportement inverse plus loin du dièdre.
- Le champ magnétique induit et le champ magnétique transversal ont un effet notable sur l'écoulement du fluide biomagnétique, le transfert de chaleur et la micro-rotation des corpuscules du sang humain. En fait, il est clairement noté que le phénomène de retour d'écoulement peut apparaître pour des valeurs plus élevées des paramètres h et M .
- Le coefficient de frottement superficiel apparaît comme une fonction décroissante du paramètre d'instantanéité K , tandis qu'il augmente avec l'augmentation du paramètre d'angle du dièdre β . En effet, l'accroissement de β fait notablement disparaître le phénomène de retour d'écoulement.
- Le coefficient de frottement superficiel diminue avec l'accroissement du nombre de Reynolds Re . En effet, ce décroissement est plus accentué avec les grandes valeurs du nombre de Reynolds Re , ce qui conduit au phénomène de retour d'écoulement.
- Les différents résultats des traitements numérique et semi-analytique obtenus par les méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg et de décomposition d'Adomian respectivement montrent un excellent accord, justifiant ainsi l'efficacité de la méthode analytique adoptée.
- La méthode semi-analytique ADM permet de résoudre différents problèmes non linéaires sans passer par la discrétisation et la linéarisation. De plus, la solution par ce genre de méthodes est donnée sous forme d'une série rapidement convergente.

Perspectives

La présente étude est une première approximation analytique, qui prend en compte la nature de l'écoulement biomagnétique autour d'un obstacle. Pour développer la recherche dans le domaine des bio-fluides sous l'effet d'un champ magnétique, de nombreuses perspectives sont proposées :

- Introduire d'autres méthodes semi-analytiques permettant de résoudre efficacement le problème de couche limite en régime variable (c.à.d. instationnaire dépendant du temps) d'un fluide biomagnétique et faire des comparaisons entre elles afin de montrer l'intérêt d'utilisation de ces méthodes en mécanique des fluides et les transferts thermiques.
- Etudier le problème de l'écoulement instationnaire de couche limite d'un fluide biomagnétique pour d'autres configurations comme l'écoulement sur une feuille d'étirement (stretching sheet), sur une feuille rétrécie (shrinking sheet), ou encore autour d'une surface étirée/rétrécie (par exemple, Stretching/Shrinking Wedge).
- Modéliser mathématiquement et numériquement le phénomène du transfert thermique dans l'écoulement instationnaire d'un fluide biomagnétique sous l'effet du rayonnement thermique et de réaction chimique.
- Etudier analytiquement l'écoulement MHD instationnaire de couche limite d'un fluide biomagnétique autour d'un obstacle quand il est soumis à une injection ou une aspiration de vitesse (section/injection).
- Introduire les effets du thermophorese et du mouvement Brownien sur le transfert de chaleur et de masse de l'écoulement de couche limite MHD d'un fluide biomagnétique dans les milieux poreux.

Références bibliographiques

- [1] **L. Prandtl**, Uber Flussigkeitbewegung bei sehr kleine Reibung, *Third International Math. Congress*, pp. 484-491, 1904.
- [2] **H. Blasius**, Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Angew. Math. Phys.*, 56, pp. 1-37, 1908.
- [3] **V. M. Falkner et S. W. Skan**, Some approximate solutions of the boundary-layer equations. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 12, pp.865-896, 1931.
- [4] **D. R. Hartee**, On an equation occuring in Flakner and Skan's approximate treatment of the equation of the boundary layer, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 33, pp. 223-229, 1937.
- [5] **L. Howarth**. On the solution of the laminar boundary layer equations, *Proc. Roy. Soc. of London*, 164: 547-579, 1938.
- [6] **E. K. Ruuge et A. N. Rusetski**, Magnetic fluid as drug carriers: targeted transport of drugs by a magnetic field, *J. Magn Magn Mater*, 122(1-3):335-339, 1993.
- [7] **S. Rashidi, J. A. Esfahani et M. Maskaniyan**, Applications of magnetohydrodynamics in biological systems-A review on the numerical studies, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 439, 358-372, 2017.
- [8] **J. Hartman, F. Lazarus et D. V. Selskab**, Kgl. Danske Videnskab. Selska, *Mat. Fys. Medd.*, Vol. 15, p. 6, 1937.
- [9] **H. Alfvén**, , Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves, *Nature*, 150 (3805), pp. 405-406, 1942.
- [10] **L. Pauling et C. D. Coryell**, The magnetic properties and structure of hemoglobin, ox yhemoglobin and carbonmonox yhemoglobin, *PROC. N. A. S*, 1936.
- [11] **S. Charm, B. Paltiel et G. S. Kurland**, Heat transfer coefficients in blood flow, *Biorheology*, Vol. 5, pp. 133-145, 1968. Pergamon Press.
- [12] **J. C. Chato**, Heat Transfer to Blood Vessels, *Journal of biomechanical engineering*, vol. 102(2):110-118, may 1980.
- [13] **K. Chen et P. A. Libby**, Boundary layers with small departures from the Falkner-Skan profile, *J. Fluid Mech.* Vol. 33, part 2, 273-282, 1968.
- [14] **T. Cebeci et H. B. Keller**, Shooting and parallel shooting methods for solving the Falkner-Skan boundary-layer equation, *J. Comput. Phys.* 7, 289-300, 1971.
- [15] **G. Ahmadi**, Self-similar solution of imcompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate. *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 14, pp.639-646, 1976.
- [16] **T. Ariman, M. A. Turk et N. D. Sylvester**, On Steady and Pulsatile Flow of Blood, *ASME Journal of Applied Mechanics*.41(1): 1-7, March 1974.
- [17] **C. K. Kang et A. C. Eringen**, The effect of microstructure on the rheological properties of blood. *Bulletin of mathematical biology*. Volume 38, 1976.

- [18] **K. R. Rajagopal, A. S. Gupta et T. Y. Na**, A note on the Falkner-Skan flows of a non-Newtonian fluid, *Int J Nonlinear Mech* 18(4):313–320, 1983.
- [19] **H. A. Hogan et M. Henriksen**, An evaluation of a micropolar model for blood flow through an idealized stenosis, *J. Biomechanics*, Vol. 22. No. 3, pp. 211-218, 1989.
- [20] **B. L. Kuo**, Heat transfer analysis for the Falkner–Skan wedge flow by the differential transformation method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48: 5036–5046, 2005.
- [21] **T. Watanab et I. Pop**, Magnetohydrodynamic free convection flow over a wedge in the presence of a transverse magnetic field, *Int. comm. heat mass transfer*, Vol. 20, pp. 871-881, 1993.
- [22] **T. Watanabe, K. Funazaki et H. Taniguchi**, Theoretical analysis on mixed convection boundary layer flow over a wedge with uniform suction or injection, *Acta Mechanica* 105, 133-141, 1994.
- [23] **N. D. Nanousis**, Theoretical magnetohydrodynamic analysis of mixed convection boundary-layer flow over a wedge with uniform suction or injection, *Acta Mechanica* 138, 21-30, 1999.
- [24] **Y. Haik, C.J. Chen et V. Pai**, Development of biomagnetic fluid dynamics, in: *Proceedings of the IX International Symposium on Transport Properties in Thermal Fluid Engineering*, Singapore, Pacific Center of Thermal Fluid Engineering, pp. 121–126, 1996.
- [25] **J. Plavins et M. Lauva**, Study of colloidal magnetite binding erythrocytes: prospects for cell separation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 122, pp. 349-353, 1993.
- [26] **Y. Haik, V. Pai et C. J. Chen**, Development of magnetic device for cell separation, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 194 (1-3):254-261, 1999.
- [27] **H. I. Andersson, R. Halden et T. Glomsaker**, Effects of surface irregularities on flow resistance in differently shaped arterial stenoses, *J. Biomech.* 33, 1257-1262, 2000.
- [28] **Y Haik, C. J. Chen et J. Chatterjee**, *J. Visualization* 5, 187, 2002.
- [29] **E. E. Tzirtzilakis et N. G. Kafoussias**, Biomagnetic fluid flow over a stretching sheet with non linear temperature dependent magnetization, *Z. angew. Math. Phys.* 54, 551-565, 2003.
- [30] **E. E. Tzirtzilakis et G. B. Tanoudis**, Numerical study of biomagnetic fluid flow over a stretching sheet with heat transfer, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 13, No. 7. pp. 830-848, 2003.
- [31] **V. P. Srivastava**, Flow of a couple stress fluid representing blood through stenotic vessels with a peripheral layer, *Indian J Pure Appl Math* 34:1727–1740, 2003.
- [32] **N. G. Kafoussias, E. E. Tzirtzilakis et A. Raptis**, Free forced convective boundary-layer flow of a biomagnetic fluid under the action of a localized magnetic field, *Can. J. Phys.* 86: 447–457, 2008.
- [33] **N. G. Kafoussias et N. D. Nanoussis**, Magnetohydrodynamic laminar boundary-layer flow over a wedge with suction or injection. *Can. J. Phys.* 75: 733–745, 1997.
- [34] **S. P. Anjali Devi et R. Kandasamy**, Thermal stratification effects on laminar boundary-layer flow over a wedge with suction or injection, *Mecanics Research Communications*. Vol. 28, No. 3, pp. 349-354, 2001.

- [35] **M. Xenos, N. Kafoussias et G. Karahalios**, Magnetohydrodynamic compressible laminar boundary-layer adiabatic flow with adverse pressure gradient and continuous or localized mass transfer, *Can. J. Phys.* **79**: 1247–1263, 2001.
- [36] **S. P. Anjali Devi et R. Kandasamy**, Thermal stratification effects on non linear MHD laminar boundary-layer flow over a wedge with suction or injection, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, No. 5, pp. 717-725, 2003.
- [37] **M. M. Rahman et M. A. Sattar**, Magnetohydrodynamic Convective Flow of a Micropolar Fluid Past a Continuously Moving Vertical Porous Plate in the Presence of Heat Generation/Absorption, *Journal of Heat Transfer*. Vol. 128, FEBRUARY 2006.
- [38] **J.H. Merkin et V. Kumaran**, The unsteady MHD boundary-layer flow on a shrinking sheet, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 29: 357–363, 2010.
- [39] **D. Srinivasacharya, U. Mendu et K. Venumadhav**, MHD Boundary Layer Flow of a Nanofluid Past a Wedge. International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, *Procedia Engineering* 127: 1064-1070, 2015.
- [40] **M. Awais, Aqsa 2, S. E. Awan, S. Ur rehman et M. A. Z. Raja**, Hydro-magnetic falkner -skan fluid rheology with heat transfer properties, *Article in Thermal Science*, December 2018. DOI: 10.2298/TSCII80509312A.
- [41] **B. K. Ramesh et B. Jyothi**, Two-dimensional boundary-layer flow and heat transfer over a wedge: numerical and asymptotic solutions, *Thermal Science and Engineering Progress* 11: 66–73, 2019.
- [42] **M. Ferdows, M. G. Murtaza, J. C. Misra, E. E. Tzirtzilakis et F. Alzahrani**, Dual solutions for boundary layer flow and heat transfer of biomagnetic fluid over a stretching/shrinking sheet in presence of a magnetic dipole and a prescribed heat flux, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 1: 1–17, 2020.
- [43] **S. Y. Ibrahim et O. D. Makinde**, Radiation effect on chemically reacting magnetohydrodynamics (MHD) boundary layer flow of heat and mass transfer through a porous vertical flat plate, *International Journal of the Physical Sciences* Vol. 6(6), pp. 1508-1516, 18 March, 2011.
- [44] **M. R. Eid et K. L. Mahny**, Unsteady MHD heat and mass transfer of a non-Newtonian nanofluid flow of a two-phase model over a permeable stretching wall with heat generation/absorption, *Adv. Powder Technol.* 28 3063-3073, 2017.
- [45] **S. M. Ibrahim¹, F. Mabood, K. Suneetha et G. Lorenzini**, Effects of Chemical Reaction on Combined Heat and Mass Transfer by Laminar Mixed Convection Flow from Vertical Surface with Induced Magnetic Field and Radiation. *Journal of Engineering Thermophysics*, Vol. 26, No. 2, pp. 234–255, 2017.
- [46] **A. K. Pandey et M. Kumar**, Chemical reaction and thermal radiation effects on boundary layer flow of nanofluid over a wedge with viscous and Ohmic dissipation, *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 2017. doi:[10.1016/j.spjpm.2017.10.008](https://doi.org/10.1016/j.spjpm.2017.10.008)
- [47] **H. S. Takhar, A. J. Chamkha et G. Nath**, Unsteady three-dimensional MHD boundary-layer flow due to the impulsive motion of a stretching surface. *Acta Mechanica* 146, 59-71, 2001.

- [48] **K. Bhattacharyya, S. Mukhopadhyay et G. C. Layek**, Unsteady MHD Boundary Layer Flow with Diffusion and First-Order Chemical Reaction over a Permeable Stretching Sheet with Suction or Blowing. *Chem. Eng. Comm.*, 200:379–397, 2013.
- [49] **S. K. Nandy, S. Sidui et T. R. Mahapatra**, Unsteady MHD boundary-layer flow and heat transfer of nanofluid over a permeable shrinking sheet in the presence of thermal radiation, *Alexandria Engineering Journal*, 2014.
- [50] **M. Ganapathirao, R. Ravindran et E. Momoniat**, Effects of chemical reaction, heat and mass transfer on an unsteady mixed convection boundary layer flow over a wedge with heat generation/absorption in the presence of suction or injection, *Heat Mass Transfer*, 51:289–300, 2015.
- [51] **M. M. Rahman et M. A. Sattar**, Nonlinear forced convective hydromagnetic flow of unsteady biomagnetic fluid over a wedge with convective surface condition, *In Chaos, Complexity and Leadership* (pp. 423-452), 2012. Springer, Dordrecht.
- [52] **M.S. Alam, M. Asiya Khatun, M.M. Rahman et K. Vajravelu**, Effects of variable fluid properties and thermophoresis on unsteady forced convective boundary layer flow along a permeable stretching/shrinking wedge with variable Prandtl and Schmidt numbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 105:191–205, 2016.
- [53] **N. C. Roy, M. N. Firoza et A. K. Halder**, Radiation Effect on Unsteady Mixed Convection Boundary Layer Flow, Heat and Mass Transfer over a Wedge, *Dhaka Univ. J. Sci.* 64(1): 59-64, 2016.
- [54] **M. S. Alam, M. Ali, M. A. Alim, M. J. Haque Munshi et M. Z. Uddin Chowdhury**, Solution of Falkner- Skan Unsteady MHD Boundary Layer Flow and Heat Transfer past a Moving Porous Wedge in a Nanofluid, *Procedia Engineering* 194: 414 -420, 2017.
- [55] **M. R. Ilias, N. S. Ismail, W. S. E. C Hussain, N. A. Rawi et S. Shafie**, Unsteady Aligned MHD Boundary Layer Flow of a Magnetic Nanofluid Over a Wedge, *International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET)* 9(11, pp. 794–810), 2018.
- [56] **R. C. Bataller**, Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition. *Applied Mathematics and Computation* 206: 832–840, 2008.
- [57] **A. Aziz**, A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 14: 1064–1068, 2009.
- [58] **A. Ishak**, Similarity solutions for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition. *Applied Mathematics and Computation* 217: 837–842, 2010.
- [59] **M. M. Rahman**, Heat transfer in biomagnetic fluid over a wedge with convective surface boundary condition in the presence of induced magnetic field, *International Journal of Energy & Technology* 3 (17): 1–8, 2011.
- [60] **W. A. Khan, M. A. Hamad et M. Ferdows**, Heat transfer analysis for Falkner–Skan boundary layer nanofluid flow past a wedge with convective boundary condition considering temperature-dependent viscosity, *Proc. Institut. Mech. Eng., Part N: J. Nanoeng. Nanosys* 227(1), 19-27, 2013.
- [61] **M. S. Alam, T Islam et M. M. Rahman**, Unsteady hydromagnetic forced convective heat transfer flow of a micropolar fluid along a porous wedge with convective surface boundary condition. *International journal of heat and technology*. Vol.33, No.2, 2015.

- [62] N. Anbuhezian, K. Srinivasan et R. Kandasamy, Magnetohydrodynamic laminar boundary-layer flow over a porous wedge with thermophoresis particle deposition in the presence of variable stream conditions, *Meccanica* 47:515–528, 2012.
- [63] L. Ramamohan Reddy, M. C. Raju et G.S.S. Raju, Unsteady MHD Free Convection Flow Characteristics of a Viscoelastic Fluid Past a Vertical Porous Plate, *International Journal of Applied Science and Engineering*. 14, 2: 69-85, 2016.
- [64] M. Veera Krishna, B. V. Swarnalathamma et J. Prakash, Heat and Mass Transfer on Unsteady MHD Oscillatory Flow of Blood through Porous Arteriole, *Applications of Fluid Dynamics, Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2017. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5329-0_14
- [65] W. Ibrahim et A. Tulu, Magnetohydrodynamic (MHD) Boundary Layer Flow Past a Wedge with Heat Transfer and Viscous Effects of Nanofluid Embedded in Porous Media, *Hindawi Mathematical Problems in Engineering*. Volume 2019, Article ID 4507852, 12 pages
- [66] S. Awangkechil et I. Hashim, Non-Perturbative solution of free-convective boundary layer equation by Adomian Decomposition method. *Physics letters A*;363(1-2):110-4, 2007.
- [67] S. Momani et Z. Odibat, Analytical solution of a time-fractional Navier–Stokes equation by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*.177, 488–494, 2006.
- [68] Q. Yu, F. Liu, V. Anh et I. Turner, Solving linear and non-linear space–time fractional reaction–diffusion equations by the Adomian decomposition method, *Int. J. Numer. Meth. Engng*; 74:138–158, 2008.
- [69] A. K. Khalifa, K. R. Raslan et H. M. Alzubaidi, Numerical study using ADM for the modified regularized long wave equation, *Applied Mathematical Modelling* 32: 2962–2972, 2008.
- [70] N. F. M. Noor, M. Ismoen et I. Hashim, Heat-transfer analysis of MHD flow due to a permeable shrinking sheet embedded in a porous medium with internal heat generation, *Journal of Porous Media*, vol. 13, no 9, 2010.
- [71] N. F. M. Noor et I. Hashim, MHD viscous flow over a linearly stretching sheet embedded in a non-Darcian porous medium, *J. Porous Media*, vol. 13, no 4, p. 349-355, 2010.
- [72] N. F. M. Noor, S. A. Kechil et I. Hashim, Simple non-perturbative solution for MHD viscous flow due to a shrinking sheet. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no 2, p. 144-148, 2010.
- [73] M. Kezzar et M. R. Sari, Application of the generalized decomposition method for solving the nonlinear problem of Jeffery–Hamel flow, *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 26, no 2, p. 284-297, 2015.
- [74] M. Kezzar et M. R. Sari, Series Solution of Nanofluid Flow and Heat Transfer Between Stretchable/Shrinkable Inclined Walls, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, vol. 3, no 3, p. 2231-2255, 2017.
- [75] R. Rach, On the Adomian (Decomposition) Method and Comparisons with Picard’s Method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 128, 4x&483, 1987.
- [76] N. Bellomo et D. Sarafyan, On adomian’s decomposition method and some comparisons with picard’s iterative scheme, *Journal of mathematical analysis and applications*, 123(2) :389–400, 1987.
- [77] N. Shawagfeh et D. Kaya, Comparing numerical methods for the solutions of systems of ordinary differential equations, *Appl Math Lett* 17, 323–328, 2004.

Références bibliographiques

- [78] **S. Abbasbandy**, Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation* 172: 431–438, 2006.
- [79] **S. Abbasbandy**, Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian's decomposition method. *Appl Math Comput*;172:485, 2006.
- [80] **A. Aminataei et S. S. Hosseini**, The comparison of the stability of Adomian decomposition method with numerical methods of equation solution. *Applied Mathematics and Computation* 186: 665–669, 2007.
- [81] **M. Dehghan et R. Salehi**, The use of variational iteration method and Adomian decomposition method to solve the Eikonal equation and its application in the reconstruction problem, *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*; 27:524–540, 2011.
- [82] **M. R. Sari, M. Kezzar et R. Adjabi**, A Comparison of Adomian and Generalized Adomian Methods in Solving the Nonlinear Problem of Flow in Convergent-Divergent Channels. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 8, no 7, p. 321-336, 2014.
- [83] **R. C. Chaudhary et B. K. Sharma**, Combined heat and mass transfer by laminar mixed convection flow from a vertical surface with induced magnetic field. *J Appl Phys* 99:034901–034910, 2006.
- [84] **M. A. Sattar**, A local similarity transformation for the unsteady two-dimensional hydrodynamic boundary layer equations of a flow past a wedge, *Int J Appl Math Mech* 7(1):15–28, 2011.
- [85] **K. Himenz**, Die Grenzschicht an einen in gleichformigen Flüssigkeitsstrom eingetanchten geraden Kreiszyliinder, *Dinglers Polytechnol J.* 326(321),1911.
- [86] **H. Schlichting**, Boundary layer theory, *McGraw Hill, New York*, 1968.
- [87] **G. Adomian**, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. *Kluwer Academic, Boston*, 1994.
- [88] **G. Adomian et R. Rach**, Application of the Decomposition Method to Inversion of Matrices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 108, 409-421, 1985.
- [89] **G. Adomian, R. Rach et D. Sarafyan**, On the Solution of Equations Containing Radicals by the Decomposition Method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 111, 423-426, 1985.
- [90] **K. Dogan**, Explicit solution of Generalized Non-linear Boussinesq equation, *Journal of Applied Mathematics*;1:29-37, 2001.
- [91] **B. S. Attili**, The Adomian Decomposition Method for Solving the Boussinesq Equation Arising in Water Wave Propagation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* DOI 10.1002/num, 2006.
- [92] **M. Dehghan**, Application of the Adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications, *Applied Mathematics and Computation* 157: 549–560, 2004.
- [93] **G. A. Afrouzi et S. Khademloo**, *International Journal of Non-linear science*; 2:11-5, 2006.
- [94] **M. El-Tawil, A. Ahmed, B. Bahnasawi et A Abdel-Naby**, Solving Riccati differential equation using Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation* 157: 503–514, 2004.

Références bibliographiques

- [95] **RTR. Ramech**, The use of Adomian Decomposition Method for solving generalized Riccati Differential Equations, *Proceeding of the 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Applications ICMSA, 2010*.
- [96] **S. Pamuk**, An application for linear and nonlinear heat equations by Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation 163: 89–96, 2005*.
- [97] **S. Guellal et Y. Cherruault**, Practical formulae for calculation of Adomian's polynomials and application to the convergence of the decomposition method, *International Journal of Bio-Medical Computing 36: 223-228, 1994*.
- [98] **S. N. Venkatarangan et k. Rajalakshmi**, Modification of Adomian's Decomposition method to solve Equations Containing Radicals, *Computers Math. Applic. Vol. 29, No. 6, pp. 75-80, 1995*.
- [99] **A. M. Wazwaz et S. M. El-Sayed**, A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators, *Appl. Math. Comput. 122:393–405, 2001*.
- [100] **M. M. Hosseini**, Adomian decomposition method with Chebyshev polynomials, *Appl. Math. Comput. 175: 1685–1693, 2006*.
- [101] **B. H. Rudall et R. C. Rach**, A new definition of the Adomian polynomials, *Kybernetes, 37(7):910–955, 2008*.
- [102] **W. C. Tien et C. K. Chen**, Adomian decomposition method by Legendre polynomials, *Chaos, Solutions and Fractals 39:2093–2101, 2009*.
- [103] **M. Najafi, H. Khoramishad, H. Massah, M. Moghimi et M. Daemi**, A study of Blasius viscous flow: an ADM analytical solution, *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istanbul, Turkey, May 27-29 (pp57-61), 2006*.
- [104] **N. Piskonov**, Calcul Différentiel et Intégrale, tome 2, *11^{ème} édition, Mir Moscou, 1987*.
- [105] **J. H. Mathews et K. D. Fink**, Numerical Methods using MATLAB, *3^{ème} édition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ07458, 1999*.
- [106] **D. Ouidja**, Principe du maximum et méthode de tir, *mémoire de magister en Mathématiques, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2011*.
- [107] **A. Fortin**, *Analyse numérique pour ingénieurs, Edition de L'école polytechnique de Montréal, 1997*.
- [108] **V. Marinca, RD Ene et B Marinca**, Analytic Approximate Solution for Falkner-Skan Equation, *The Scien.World J. 617453, 1-22, 2014*.

Production Scientifique

Les travaux réalisés au cours de cette thèse sont :

Publications internationales:

- 1 Chahra M. Ayeche, Mohamed Kezzar, Mohamed R. Sari & Mohamed R. Eid,** Analytical ADM study of time-dependent hydromagnetic flow of biofluid over a wedge, *Indian Journal of Physics*, Springer Eds., DOI 10.1007/s12648-020-01935-9, 2021.

Communications internationales avec actes :

- 2 Chahra M. Ayeche, Mohamed Kezzar et Mohamed R. Sari,** Ecoulement hydromagnétique non linéaire de convection forcée d'un fluide biomagnétique instable, *3^{ème} congrès International sur les Energies Renouvelables et le Développement Durable, 2019, Tunisie. (International Journal of Control, Energy and Electrical Engineering, Vol. 10, pp. 13-18).*
- 3 Chahra M. Ayeche, Mohamed Kezzar et Mohamed R. Sari,** Ecoulement hydromagnétique d'un fluide biomagnétique instable, *Fifth International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution, 2019, Constantine.*

Analytical ADM study of time-dependent hydromagnetic flow of biofluid over a wedge

**Chahra M. Ayeche, Mohamed Kezzar,
Mohamed R. Sari & Mohamed R. Eid**

Indian Journal of Physics

ISSN 0973-1458

Indian J Phys

DOI 10.1007/s12648-020-01935-9



Your article is protected by copyright and all rights are held exclusively by Indian Association for the Cultivation of Science. This e-offprint is for personal use only and shall not be self-archived in electronic repositories. If you wish to self-archive your article, please use the accepted manuscript version for posting on your own website. You may further deposit the accepted manuscript version in any repository, provided it is only made publicly available 12 months after official publication or later and provided acknowledgement is given to the original source of publication and a link is inserted to the published article on Springer's website. The link must be accompanied by the following text: "The final publication is available at link.springer.com".

Analytical ADM study of time-dependent hydromagnetic flow of biofluid over a wedge

C M Ayeche¹, M Kezzar¹, M R Sari² and M R Eid^{3,4*} 

¹Mechanical Engineering Department, University of Skikda, El Hadaiek Road, B.O. 26, 21000 Skikda, Algeria

²Laboratory of Industrial Mechanics, University of Badji Mokhtar of Annaba, B.O. 12, 23000 Annaba, Algeria

³Department of Mathematics, Faculty of Science, New Valley University, El-Kharga Al-Wadi Al-Gadid 72511, Egypt

⁴Department of Mathematics, Faculty of Science, Northern Border University, Arar 1321, Saudi Arabia

Received: 16 June 2020 / Accepted: 21 September 2020

Abstract: In this research work, we consider the two-dimensional time-dependent laminar hydromagnetic boundary-layer flow of a bio-magnetic fluid over a wedge using a micropolar fluid model with convective boundary conditions and taking into account the action of a transversely magnetic field. The partial differential equations that govern velocity, temperature and micro-rotation are transformed into nonlinear ordinary differential equations with similarity transformations. The findings are analytically analyzed afterward through the Adomian decomposition method (ADM) and numerically through the shooting technique based on Runge–Kutta–Fehlberg. In this study, we have considered the effect of the unsteadiness parameter K , wedge angle parameter β , Reynolds number Re , magnetic field parameter M and induced magnetic field h on the evolution of dimensionless velocity, temperature and micro-rotation of the bio-magnetic flow throughout the boundary layer. It is found that the flow separation may occur with the increase in unsteadiness parameter K and is prevented as the wedge angle parameter β rises. Also, results indicate that in the vicinity of the wedge surface, increasing K parameter leads to a reduction in fluid temperature and grows the micro-rotation of the blood corpuscles. Finally, comparisons between analytical and numerical data clearly show the effectiveness of the adopted analytical ADM technique.

Keywords: Biofluid; Boundary layer; Magnetic field; Convective surface; Numerical solution; Adomian decomposition method

List of symbols

a_0, a_1, a_2 and a_3	Constants	j	Micro-inertia per unit mass
A_n	Adomian polynomials	K	Unsteadiness parameter
Bi	Biot number	k	Thermal conductivity (W/m K)
C_f	Skin friction coefficient	L	Linear operator
C_p	Specific heat at constant pressure (J/kg K)	L^{-1}	Inverse operator
Ec	Eckert number	M	Magnetic field parameter
f	Dimensionless stream function	m	Velocity exponent
h	Induced magnetic field parameter	N	Dimensionless micro-rotation
h_f	Heat transfer coefficient (W/m ² K)	Nu	Local Nusselt number
H^*	Induced magnetic field intensity (Tesla)	n	Micro-rotation parameter
H	Dimensionless magnetic field	P	Pressure (Pa)
$H0$	Applied magnetic field intensity (Tesla)	Pm	Magnetic Prandtl parameter
Hw	Induced magnetic field (Tesla)	Pr	Prandtl number
		q_w	Heat flux (W/m ²)
		Re	Local Reynolds number
		S	Coefficient of vortex viscosity
		t	Time (s)
		T	Temperature within boundary layer (K)
		T_f	Temperature at bottom (K)

*Corresponding author, E-mail: m_r_eid@yahoo.com; mreid@scin-v.au.edu.eg

T_w	Temperature at surface (K)
T_∞	Temperature of ambient fluid (K)
u	Velocity along x -axis (m/s)
U	Free stream velocity (m/s)
U_0	Characteristic velocity (m/s)
U_∞	Free stream velocity (m/s)
U^*	Nondimensional free stream velocity
v	Velocity along y -axis (m/s)
X	Dimensionless characteristic length
x	Coordinate along surface (m)
y	Coordinate normal to surface (m)

Greek symbols

ρ	Fluid density (kg/m ³)
β	Wedge angle parameter
δ	Length scale (m)
μ	Dynamic viscosity (Pa s)
μ_e	Magnetic permeability (N/A ²)
ν	Kinematic viscosity (m ² /s)
ν_s	Spin-gradient viscosity
Δ	Vortex viscosity parameter
ξ	Micro-inertia parameter
ω	Micro-rotation
σ	Fluid electric conductivity (siemens/m)
ψ	Stream function
η	Similarity parameter
θ	Dimensionless temperature
$\Delta\eta$	Step size
τ_w	Shear stress

1. Introduction

Nowadays, the bio-magnetic fluid dynamics (BFD) are highly recognized as an innovative area in fluid dynamics theory. Biofluid has magnetic properties and can interfere easily with the operation of the magnetic field by magnetization in BFD. On the other hand, due to their considerable importance for bioengineering and medical applications, several research works were undertaken on this new interesting field of study. In the light of the reciprocal influence of asymmetric shape and surface defects, Andersson et al. [1] analyzed movement across blood stenoses with 48% areal occlusions. This study shows that the magnetic force leads to a drastic fluid flow behavior and therefore to the increase in the friction coefficient with the increasing strength of the magnetic field. Interesting research is proposed by Ruuge and Rusteski [2] which demonstrates some important biomedical uses of different types of drug carriers powered by

magnetism. The magnetohydrodynamic biological fluid was numerically tested by Tzirtzilakis et al. [3,4] in the presence of thermal transfer and in the presence of bio-magnetic fluid.

The two-dimensional momentum boundary-layer movement over a wedge widely employed in industrial applications is first introduced by Falkner and Skan [5] since the 1930s. Thereafter, the governing equations of Falkner–Skan flow were resolved numerically by Howarth [6] by utilizing the numerical Runge–Kutta procedure that characterizes the shooting method. On the other hand, several studies were conducted on numerous problems of boundary-layer flow incorporating Newtonian and non-Newtonian fluid models. The magnetohydrodynamic flow through non-parallel porous surfaces, or between two solid, porous plates that intersect in angle using the Jeffery Hamel model, was investigated by Hamrelaine et al. [7]. Raza et al. [8,9] probed the magnetic non-Newtonian nanofluid flow through a nonlinear extending and a diverging (converging) channel. In the case of the magnetic field in a cavity with chamfers, the irreversibility flow of convective nanofluid was determined numerically by Marzougui et al. [10]. Khan et al. [11] elaborated the impact of magneto-hybrid nanofluid with the stability process past a wedge. Srivastava [12] examined a couple of stress fluid flow of blood via stenotic vessels with a peripheral layer. Results show, in particular, that the presence of the peripheral layer causes the couple's resistance to stress fluid to decrease significantly. On his part, Anand and Rajagopal [13] modeled blood flow as a non-Newtonian viscoelastic shear-thinning fluid with rest. In a two-dimensional backward-facing, Choi and Barakat [14] carried out a numerical study of the effects of non-Newtonian blood behavior. Simulation tests revealed that the flow recirculation region downstream of measures for Newtonian fluid in the range 50–400 is 22–63 percent greater than the non-Newtonian fluid. Eid et al. [15] investigated the non-Newtonian Sisko bio-nanofluid flow and heat transfer properties in the presence of nonlinear heat radiation. The findings showed that the thermal boundary layer is being a shortage by radiation and therefore the heat flow on the surface is increased. Abdul Hakeem et al. [16] primarily interested to have an effect on the stagnating point flow of nanofluid Carreau over an electromagnetic plate over a porous matrix on an exponential level of viscosity and on the level of permeability. They showed that both the intensity of electromagnetic and porosity increased to give an improved movability. In another research, Eid [17] studied the heat transmission transfer features of the shape of Au-nanoparticle and the impact of the thermal ray on Sisko blood nanofluid flow. Hoseinzadeh et al. [18] concerned with the effects of a chemical reaction, and nonlinear radiation on a non-

Newtonian Maxwell model via convectively heated surface. The number of Nusselt is observed to increase with the increase in Prandtl, while the growth of Eckert number is seen in reverse behavior.

Magnetohydrodynamics (MHD) or hydromagnetics are mainly interested in studying the dynamics of electrically conducting fluids. This field of research is thus of paramount importance and has attracted the attention of several researchers due to its numerous engineering applications such as MHD pumps, electrostatic and droplet filters, power generators. In the literature, we can easily find several studies dealing with the impact of the magnetic field on heat transference and fluid flow [19–28].

Recently, the influence of the magnetic field on nanofluid flow has also been given special attention. For example, Zangoee et al. [29] investigated the magnetic nanofluid flow among two delayable and rotating radiative drives using Akbari-Ganji (AGM) method. This research mainly reveals the effects of stretching parameters and the number of Reynolds on the nanofluid flow strength, temperature and speed components. Salehi et al. [30] also probed via AGM the magnetic squeezing nanofluid flow and heat transfer among two infinity parallel surfaces. They were interested in the effects on flow and heat transfer of Hartman numbers, base fluids and squeeze numbers. Using the Runge–Kutta–Fehlberg technique, Hoseinzadeh et al. [31] numerically studied the nanofluid micropolar magnetohydrodynamics (MHD) flow over a vertical layer. In addition, Hosseinzadeh et al. [32] discussed three-dimensional cylinder and took into account the impact of gyrotactic dissipation and magnetic fields, the cross-fluid flow comprising gyrotactic microorganisms and nanoparticles, while the entropy analysis is elaborated by Hoseinzadeh et al. [33] on the flow of hybrid nanofluid with magnetic nanoparticle between two rotating enlarging disks.

Thermal behavior due to the surface convection with or without the existence of a magnetic field over various geometrical configurations has gained much attention and is extensively studied by several investigators. For instance, Bataller [34] investigated the influence of thermal radiation on the laminar boundary layer over a flat plate in a stable fluid stream and over the flowing plate in a uniform stream of fluid by considering convective surface boundary conditions. Aziz [35] also studied under the influence of convective conditions the traditional nonlinear issue of thermal boundary layers and hydrodynamic over a flat plate known as the Blasius problem. Khan and Gorla [36] studied numerically via implicit finite difference method the mixed convection of non-Newtonian fluids along with a wedge in a porous material. They applied the Robin boundary condition at the wedge surface. In another work, Khan et al. [37] provided similarity solutions for Falkner–

Skan's steady two-dimensional boundary-layer flow over a convective boundary wedge.

Adomian decomposition method (ADM) [38] established since the 1980s is a robust, analytical approximate technique that gives a reliable solution to several physical and mathematical problems in the procedure of a quickly convergent polynomial series. This method is successfully employed by many researchers for different kinds of scientific problems [39–43].

The main purpose of the current study is to apply Adomian decomposition method in order to resolve the nonlinear issue of hydromagnetic bio-magnetic fluid across a wedge by utilizing a micropolar fluid scheme and by taking into account the convective boundary conditions. Analytical and numerical treatments are carried out for various governing physical quantities of interest such as the unsteady parameter K , Reynolds number Re , angle of wedge parameter β , the parameter of magnetic field M and induced magnetic field h . A comparison between analytical ADM data and computational Runge–Kutta–Fehlberg results used as evidence is also realized in order to show the reliability of the adopted ADM technique.

2. Formulation of the problem

2.1. Governing equations

In this study, we consider the two-dimensional laminar flow of an incompressible viscous bio-magnetic fluid moving over a wedge surface. As drawn in Fig. 1, we assume that the flow is directed along the x -axis, the fluid properties are constant and a uniform magnetic field is applied transversely to the flow orientation. Also, it is adopted that the lower wedge surface is convectively heated from a warm fluid at temperature T_h and consequently providing a coefficient of heat transfer h_h .

Considering the above-mentioned assumptions, the governing equations describing the convective flow of an unsteady incompressible micropolar bio-magnetic fluid can be written in the subsequent form [44,45]:

Continuity equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

Momentum equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \left(v + \frac{S}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\mu_e H_0}{\rho} \frac{\partial H^*}{\partial y}, \quad (2)$$

Energy equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\rho c_p \sigma} \left(\frac{\partial H^*}{\partial y} \right)^2, \quad (3)$$

Angular momentum equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\nu_s}{\rho j} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{S}{\rho j} \left(2\omega + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4)$$

Magnetic induction equation

$$\frac{\partial H^*}{\partial t} + u \frac{\partial H^*}{\partial x} + v \frac{\partial H^*}{\partial y} = \frac{1}{\mu_e \sigma} \frac{\partial^2 H^*}{\partial y^2} + H^* \frac{\partial u}{\partial x} + H_0 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5)$$

where u, v are the components of fluid flow velocity, ρ is the density of fluid, μ is the fluid dynamic viscosity, ν is the fluid kinematic viscosity, S is the vortex velocity, ω is the micro-rotation, T is the temperature of fluid, j is the micro-inertia, c_p is the fluid specific heat at the pressure is constant, μ_e is the magnetic permeability, H^* is the magnetic field, σ is the electrical conductivity, k is the thermal conductivity and t is the time.

Subject to the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \text{at } (y = 0) : u = 0, v = 0, -k \frac{\partial T}{\partial y} &= h_h(T_h - T), \omega \\ &= -n \frac{\partial u}{\partial y}, H^* = H_w, \end{aligned} \quad (6.a)$$

$$\text{as } (y \rightarrow \infty) : u = U(x, t), \omega = 0, T = T_\infty, H^* = 0. \quad (6.b)$$

It is worth to note that the stream flow velocity $U(x, t)$ and the pressure gradient (P_x) are given as [44]:

$$U(x, t) = vx^m / \delta^{m+1}, \quad (7)$$

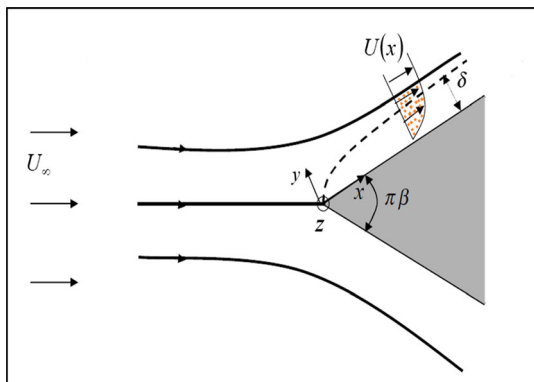


Fig. 1 Flow model and coordinate plane

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= -\rho \left(\frac{v(m+1)x^m}{\delta^{m+2}} \frac{d\delta}{dt} + \frac{v^2 m x^{2m-1}}{\delta^{m+2}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

where δ is a time-dependent distance scale given as follows:

$$\delta = \delta(t). \quad (9)$$

The parameter m is a function of the angle parameter of wedge. It can be expressed as.

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta} \geq 0, \quad (10)$$

the parameter β is a direct measurement of the gradient of pressure. In fact, a nonnegative value of β indicates a decelerated flow; however, a negative value corresponds to the decelerated flow.

When micro-rotation parameter $n = 0$, we obtain $\omega = 0$ which signifies no-spin condition, i.e., it is not possible to rotate the microelements in a concentrated particle flow near to the surface. Considering stream function ψ , the velocity components could be expressed as:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11)$$

Equation (11) yields [45]:

$$\begin{aligned} u &= U(x, t) f' \quad \text{and} \\ v &= -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{v^2 x^{m-1}}{\delta^{m+1}} \left(f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Introduce the similarity transformations [45]:

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{x^{m-1}}{\delta^{m+1}}, \quad \psi = \sqrt{\frac{2v^2 x^{m+1}}{(m+1)\delta^{m+1}}} f(\eta), \quad (13)$$

together with following transformations:

$$\begin{aligned} \frac{T - T_\infty}{T_h - T_\infty} &= \theta(\eta), \quad \omega = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{v^2 x^{3m-1}}{\delta^{3m+3}} N(\eta), \\ H^* &= \sqrt{\frac{(m+1)\rho}{2\mu_e}} \frac{vx^m}{\delta^{m+1}} H(\eta), \end{aligned} \quad (14)$$

where η is the similarity variable, ψ is the function of stream, F, N, H and θ are the dimensionless stream function, the dimensionless micro-rotation, the dimensionless induced magnetic field and the dimensionless temperature, respectively.

Substituting Eqs. (9), (10), (11), (13) and (14) into Eqs. (2), (3), (4) and (5) yields to the following nonlinear differential equations:

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] [\eta f'' + 2f' - 2] + \text{Re}^{m-1} [(1 + \Delta)f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'] = 0, \quad (15)$$

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] \eta \theta' + \text{Re}^{m-1} \left[\theta' + \text{Pr}f\theta' + \text{PrEc} \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{\text{Pm}2 - \beta} (H')^2 \right\} \right] = 0, \quad (16)$$

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] [3N + \eta N'] + \text{Re}^{m-1} [(1 + \Delta/2)\xi N'' - (2 - \beta)\Delta(2N + f'')] + \xi \{ fN' + (1 - 2\beta)Nf' \} = 0, \quad (17)$$

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] [2H + \eta H'] + \text{Re}^{m-1} [H'' + \text{Pm}fH' + (\beta - 1)\text{Pm}\eta Hf'' + (2 - \beta)\text{Pm}Mf''] = 0, \quad (18)$$

where the local Reynolds number, Eckert number, Prandtl number, magnetic Prandtl number, vortex viscosity, magnetic field and micro-inertia parameters are given as:

$$\text{Re} = U_0 x / \nu, \quad (19.1)$$

$$\text{Ec} = (U_0 U_*)^2 / c_p (T_h - T_\infty), \quad (19.2)$$

$$\text{Pr} = \mu c_p / k, \quad (19.3)$$

$$\text{Pm} = \mu_e \sigma \nu, \quad (19.4)$$

$$\Delta = S / \mu, \quad (19.5)$$

$$M = \sqrt{(\mu_e x / \mu U_0 U_*)}, \quad (19.6)$$

$$\xi = j U_0 U_* / \nu x, \quad (19.7)$$

with $U_* = U / U_0$ is the nondimensional free stream velocity.

We observe that the set of Eqs. (15), (16), (17) and (18) contains a similar parameter $\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right]$. Following Sattar [44], the solutions of Eqs. (15)–(18) can be obtained by considering the quantities $\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right]$ constant. Consequently, we get:

$$\left[\frac{U_0^{m-1}}{v^m} \delta^m \frac{d\delta}{dt} \right] = K < (\text{constant}). \quad (20)$$

The integral of Eq. (20) yields:

$$\delta = [K(m+1)U_0^{1-m}v^m t]^{1/(m+1)} \quad (21)$$

Considering Eq. (21), Eqs. (15)–(18) become:

$$K[\eta f'' + 2f' - 2] + \text{Re}^{m-1} [(1 + \Delta)f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'] = 0, \quad (22)$$

$$K\eta \theta' + \text{Re}^{m-1} \left[\theta' + \text{Pr}f\theta' + \text{PrEc} \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{\text{Pm}2 - \beta} (H')^2 \right\} \right] = 0, \quad (23)$$

$$K[3N + \eta N'] + \text{Re}^{m-1} [(1 + \Delta/2)\xi N'' - (2 - \beta)\Delta(2N + f'')] + \xi \{ fN' + (1 - 2\beta)Nf' \} = 0, \quad (24)$$

$$K[2H + \eta H'] + \text{Re}^{m-1} [H'' + \text{Pm}fH' + (\beta - 1)\text{Pm}\eta Hf'' + (2 - \beta)\text{Pm}Mf''] = 0. \quad (25)$$

The boundary conditions Eqs. (6.a) and (6.b) now become:

$$f = f' = 0, \theta' = \sqrt{2 - \beta} \text{Bi} [\theta - 1], N = -nf'', H = \sqrt{2 - \beta} h \text{ at } \eta = 0, \quad (26.a)$$

$$f' = 1, \theta = 0, N = 0, H = 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty, \quad (26.b)$$

where $\text{Bi} = \sqrt{(h_h/k)(xv/U_0 U_*)}$ is the Biot number which characterizes the surface convection parameter and $h = \sqrt{(H_w/U_0 U_*)(\mu_e/\rho)}$ is the induced magnetic field parameter.

2.2. Physical quantities of interest

The main quantities of engineering interest are the skin friction coefficient (rate of shear stress) and the Nusselt number (rate of heat transfer).

The local skin friction coefficient C_f is given as [45]:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho \cdot U_0^2} \quad (27)$$

where the wall shear stress τ_w is as follows

$$\begin{aligned} \tau_w &= (\mu + S) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} + S(\omega)_{y=0} \\ &= \mu(1 + (1 - n)\Delta) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned} \quad (28)$$

On the other hand, the Nusselt number is defined as follows [45]:

$$\text{Nu} = \frac{x \cdot q_w(x)}{K \cdot (T_w - T_\infty)} \quad (29)$$

where the heat flux q_w transferred through the unit area of the surface is expressed as:

$$q_w = -K \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (30)$$

By considering the above-mentioned similarity functions, the dimensionless forms of skin friction coefficient and Nusselt number are defined as:

$$C_f = (2 - \beta)^{-0.5} (1 + (1 - n)\Delta) \frac{1}{\text{Re}} U_* X^{\frac{m+1}{2}} f''(0) \quad (31.1)$$

$$\text{Nu} = -(2 - \beta)^{-0.5} X^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{T_f}{T_\infty} - 1 \right) \theta'(0) \quad (31.2)$$

where $X = \frac{x}{\delta}$ is dimensionless characteristic length.

3. Solution via Adomian decomposition method

Adomian decomposition method [38] established by Georges Adomian since 1980s is highly recognized as a powerful semi-analytical technique. Generally, this reliable technique of computation gives quick solution with elegantly computable terms.

In this work, the set of nonlinear differential Eqs. (22)–(25) with related boundary conditions (26.a) and (26.b) has been resolved analytically using the Adomian decomposition method.

According to the Adomian algorithm [38], Eqs. (22)–(25) can be written as:

$$L_1 F = -\frac{K}{(1 + \Delta)\text{Re}^{m-1}} [\eta f'' + 2f' - 2] - \left(\frac{1}{(1 + \Delta)} \right) [ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'], \quad (32)$$

$$L_2 \theta = -\frac{K}{\text{Re}^{m-1}} (\eta \theta') - \left[\text{Pr}f\theta' + \text{PrEc} \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{\text{Pm}2 - \beta} (H')^2 \right\} \right], \quad (33)$$

$$L_3 N = -\frac{K}{(1 + \Delta/2)\xi\text{Re}^{m-1}} [3N + \eta N'] - \left[-\left(\frac{(2 - \beta)\Delta}{(1 + \Delta/2)\xi} \right) (2N + f'') + \left(\frac{1}{(1 + \Delta/2)} \right) \{fN' + (1 - 2\beta)Nf'\} \right], \quad (34)$$

$$L_4 H = -\frac{K}{\text{Re}^{m-1}} [2H + \eta H'] - [H'' + \text{Pm}fH' + (\beta - 1)\text{Pm}\eta Hf'' + (2 - \beta)\text{Pm}Mf''], \quad (35)$$

where the linear differential operators (L_1 , L_2 , L_3 and L_4) are given by:

$$L_1 = \frac{d^3 F}{d\eta^3}, L_2 = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}, L_3 = \frac{d^2 N}{d\eta^2} \text{ and } L_4 = \frac{d^2 H}{d\eta^2}. \quad (36)$$

The inverses of the operators L_1 , L_2 , L_3 and L_4 could be expressed as:

$$L_1^{-1} = \iiint_0^\eta F d\eta d\eta d\eta, \quad (37.1)$$

$$L_2^{-1} = \iint_0^\eta \theta d\eta d\eta, \quad (37.2)$$

$$L_3^{-1} = \iint_0^\eta N d\eta d\eta, \quad (37.3)$$

$$L_4^{-1} = \iint_0^\eta H d\eta d\eta, \quad (37.4)$$

The application of the operators L_i^{-1} ($i = 1, 2, 3, 4$) to the both sides of Eqs. (32)–(35) yields:

$$F(\eta) = F(0) + F'(0)\eta + \frac{1}{2}F''(0)\eta^2 + L_1^{-1} \left\{ -\frac{K}{(1 + \Delta)\text{Re}^{m-1}} [\eta f'' + 2f' - 2] - \frac{1}{(1 + \Delta)} [ff'' + \beta(1 - f'^2) + \Delta N' + MH'] \right\}, \quad (38)$$

$$\theta(\eta) = \theta(0) + \theta'(0)\eta + L_2^{-1} \left\{ -\frac{K}{\text{Re}^{m-1}} (\eta \theta') - \left[\text{Pr}f\theta' + \text{PrEc} \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{\text{Pm}2 - \beta} (H')^2 \right\} \right] \right\}, \quad (39)$$

$$N(\eta) = N(0) + N'(0)\eta + L_3^{-1} \left\{ -\frac{K}{(1+\Delta/2)\xi\text{Re}^{m-1}} [3N + \eta N'] - \left[-\left(\frac{(2-\beta)\Delta}{(1+\Delta/2)\xi} \right) (2N + f'') + \left(\frac{1}{(1+\Delta/2)} \right) \{fN' + (1-2\beta)Nf''\} \right] \right\}, \quad (40)$$

$$H(\eta) = H(0) + H'(0)\eta + L_4^{-1} \left\{ -\frac{K}{\text{Re}^{m-1}} [2H + \eta H'] - [H'' + \text{Pmf}H' + (\beta-1)\text{Pm}\eta Hf'' + (2-\beta)\text{Pm}Mf''] \right\}, \quad (41)$$

where

$$NF = -\frac{K}{(1+\Delta)\text{Re}^{m-1}} [\eta f'' + 2f' - 2] - \frac{1}{(1+\Delta)} [ff'' + \beta(1-f'^2) + \Delta N' + MH'], \quad (42)$$

$$N\theta = -\frac{K}{\text{Re}^{m-1}} (\eta\theta') - \left[\text{Pr}f\theta' + \text{Pr}Ec \left\{ (f'')^2 + \frac{1}{\text{Pm}2-\beta} (H')^2 \right\} \right], \quad (43)$$

$$NN = -\frac{K}{(1+\Delta/2)\xi\text{Re}^{m-1}} [3N + \eta N'] - \left[-\left(\frac{(2-\beta)\Delta}{(1+\Delta/2)\xi} \right) (2N + f'') + \left(\frac{1}{(1+\Delta/2)} \right) \{fN' + (1-2\beta)Nf''\} \right], \quad (44)$$

$$NH = -\frac{K}{\text{Re}^{m-1}} [2H + \eta H'] - [H'' + \text{Pmf}H' + (\beta-1)\text{Pm}\eta Hf'' + (2-\beta)\text{Pm}Mf'']. \quad (45)$$

The values of $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, $\theta(0)$, $\theta'(0)$, $N(0)$, $N'(0)$, $H(0)$ and $H'(0)$ mainly depend on the boundary conditions. In fact, by applying the boundary conditions (26.a)–(26.a) and considering:

$F''(0) = a_0$, $\theta(0) = a_1$, $N'(0) = a_2$, $H'(0) = a_3$, we get:

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n = F_0 + L^{-1}(NF), \quad (46)$$

$$\theta(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \theta_0 + L^{-1}(N\theta), \quad (47)$$

$$N(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n = N_0 + L^{-1}(NN), \quad (48)$$

$$H(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = H_0 + L^{-1}(NH), \quad (49)$$

where F_0 , θ_0 , N_0 and H_0 are expressed as follows:

$$F_0 = \frac{\eta^2 a_0}{2} - \frac{\eta^3 \chi_1}{6} + \frac{\eta^3 \Omega_1}{3}, \quad (50)$$

$$\theta_0 = -\text{Bi}(2-\beta)^{0.5} \eta + a_1 + \text{Bi}(2-\beta)^{0.5} \eta a_1, \quad (51)$$

$$N_0 = -na_0 + \eta a_2, \quad (52)$$

$$H_0 = h(2-\beta)^{0.5} + \eta a_3, \quad (53)$$

By applying the Adomian decomposition method algorithm [38], the first expressions of Adomian polynomials and solution are expressed as next:

• For velocity:

$$A_0^F = -\frac{1}{2} \eta^2 a_0^2 \lambda_1 + \eta^2 a_0^2 \chi_1 + \frac{2}{3} \eta^3 a_0 \lambda_1 \chi_1 - \eta^3 a_0 \chi_1^2 - \frac{1}{6} \eta^4 \lambda_1 \chi_1^2 + \frac{1}{4} \eta^4 \chi_1^3 - a_2 \chi_2 - a_3 \chi_3 - 3\eta a_0 \Omega_1 - \frac{4}{3} \eta^3 a_0 \lambda_1 \Omega_1 + 2\eta^2 \chi_1 \Omega_1 + 2\eta^3 a_0 \chi_1 \Omega_1 + \frac{2}{3} \eta^4 \lambda_1 \chi_1 \Omega_1 - \eta^4 \chi_1^2 \Omega_1 - 4\eta^2 \Omega_1^2 - \frac{2}{3} \eta^4 \lambda_1 \Omega_1^2 + \eta^4 \chi_1 \Omega_1^2, \quad (54)$$

$$F_1 = -\frac{1}{120} \eta^5 a_0^2 \lambda_1 + \frac{1}{60} \eta^5 a_0^2 \chi_1 + \frac{1}{180} \eta^6 a_0 \lambda_1 \chi_1 - \frac{1}{120} \eta^6 a_0 \chi_1^2 - \frac{\eta^7 \lambda_1 \chi_1^2}{1260} + \frac{1}{840} \eta^7 \chi_1^3 - \frac{1}{6} \eta^3 a_2 \chi_2 - \frac{1}{6} \eta^3 a_3 \chi_3 - \frac{1}{8} \eta^4 a_0 \Omega_1 - \frac{1}{90} \eta^6 a_0 \lambda_1 \Omega_1 + \frac{1}{30} \eta^5 \chi_1 \Omega_1 + \frac{1}{60} \eta^6 a_0 \chi_1 \Omega_1 + \frac{1}{315} \eta^7 \lambda_1 \chi_1 \Omega_1 - \frac{1}{210} \eta^7 \chi_1^2 \Omega_1 - \frac{1}{15} \eta^5 \Omega_1^2 - \frac{1}{315} \eta^7 \lambda_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{210} \eta^7 \chi_1 \Omega_1^2, \quad (55)$$

• For temperature:

$$A_0^\theta = \frac{1}{2} \text{BiPr}(2-\beta)^{0.5} \eta^2 a_0 - \text{EcPra}_0^2 - \frac{1}{2} \text{BiPr}(2-\beta)^{0.5} \eta^2 a_0 a_1 - \frac{\text{EcPra}_3^2}{\text{Pm}(2-\beta)} - \frac{1}{6} \text{BiPr}(2-\beta)^{0.5} \eta^3 \chi_1 + 2\text{EcPr}\eta a_0 \chi_1 + \frac{1}{6} \text{BiPr}(2-\beta)^{0.5} \eta^3 a_1 \chi_1 - \text{EcPr}\eta^2 \chi_1^2 + \frac{1}{3} \text{BiPr}(2-\beta)^{0.5} \eta^3 \Omega_1 - 4\text{EcPr}\eta a_0 \Omega_1 - \frac{1}{3} \text{BiPr}(2-\beta)^{0.5} \eta^3 a_1 \Omega_1 + 4\text{EcPr}\eta^2 \chi_1 \Omega_1 - 4\text{EcPr}\eta^2 \Omega_1^2 + \text{Bi}(2-\beta)^{0.5} \eta \Omega_3 - \text{Bi}(2-\beta)^{0.5} \eta a_1 \Omega_3, \quad (56)$$

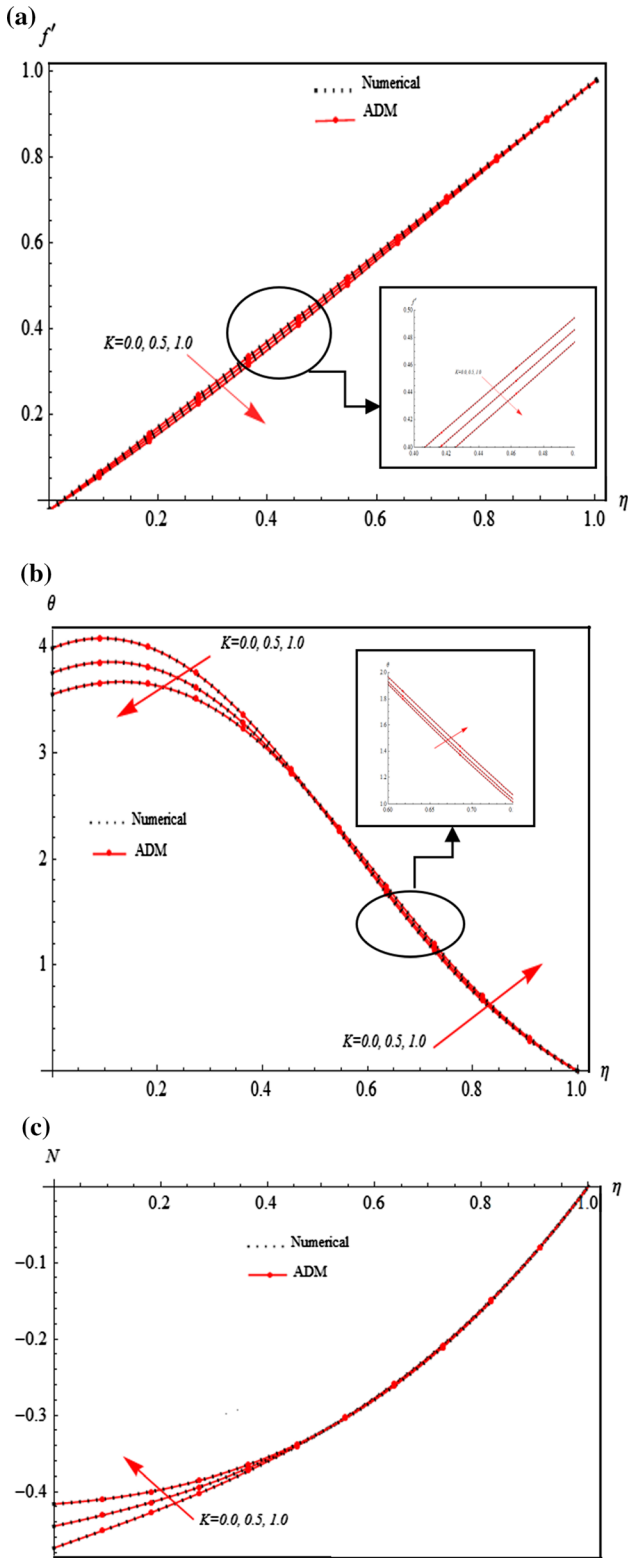


Fig. 2 a Fluid velocity, b temperature and c micro-rotation profiles for different values of K when $\beta = 0.25$, $h = 1$, $M = 1$ and $Re = 0.5$

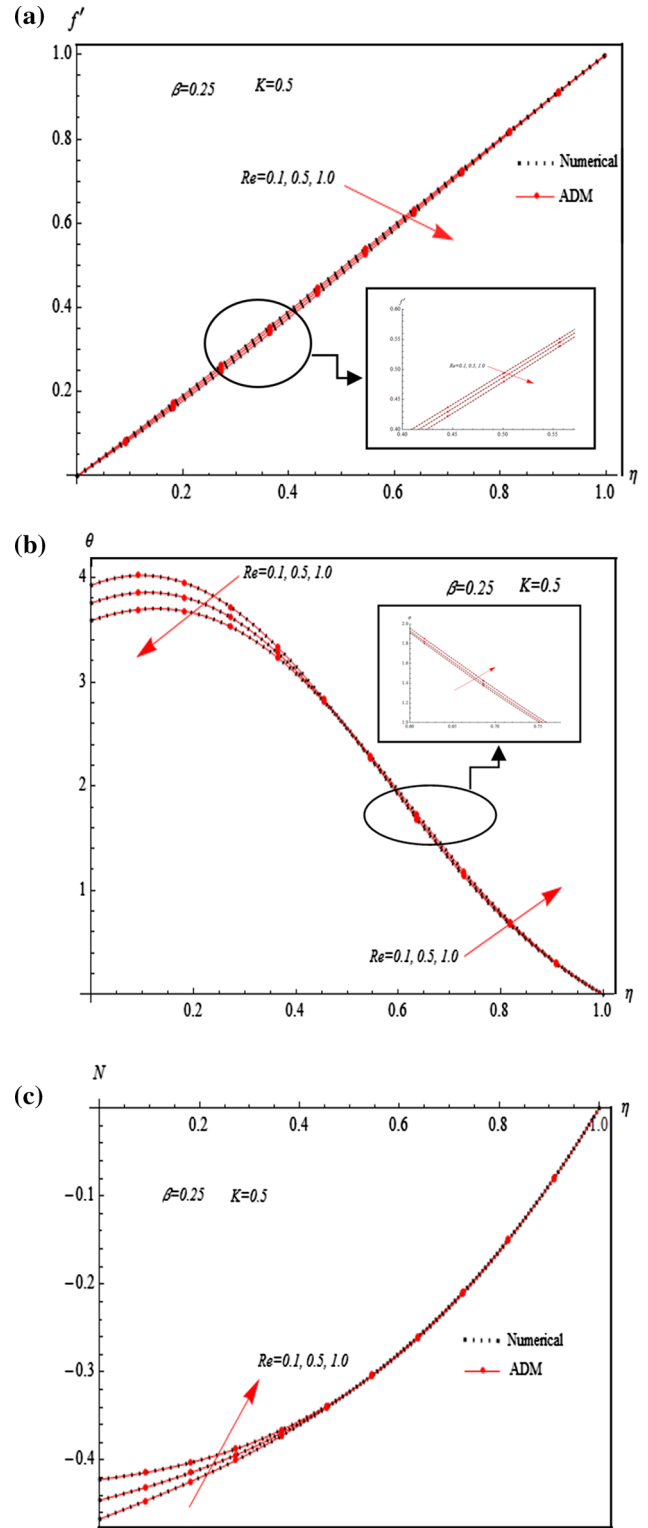


Fig. 3 a Fluid velocity, b temperature and c micro-rotation profiles for different values of Re when $\beta = 0.25$, $h = 1$, $K = 0.5$ and $M = 1$

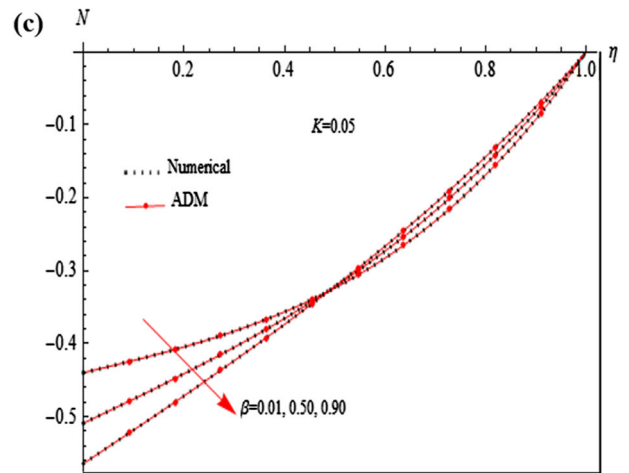
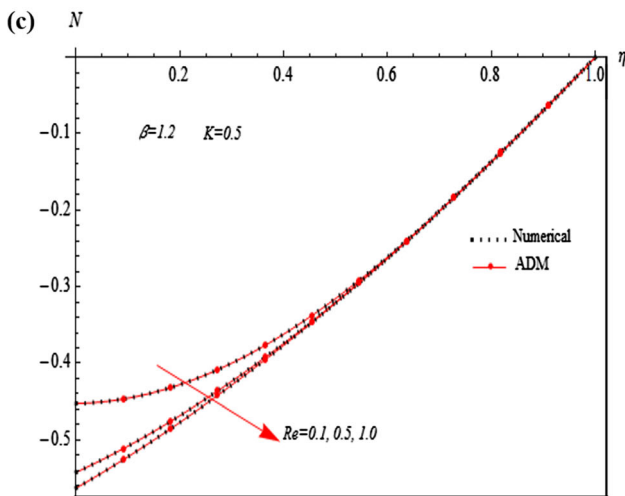
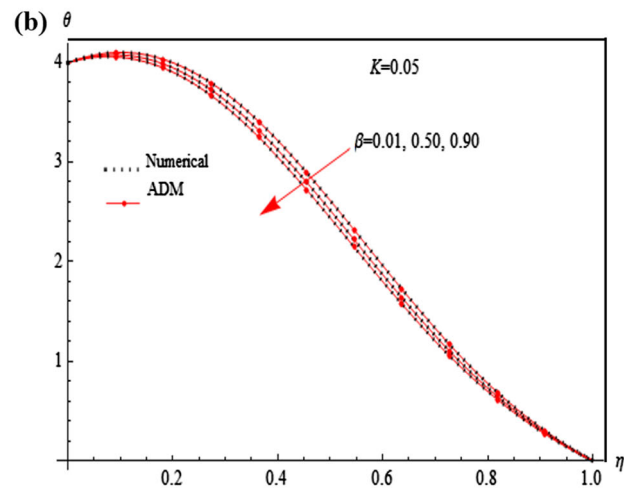
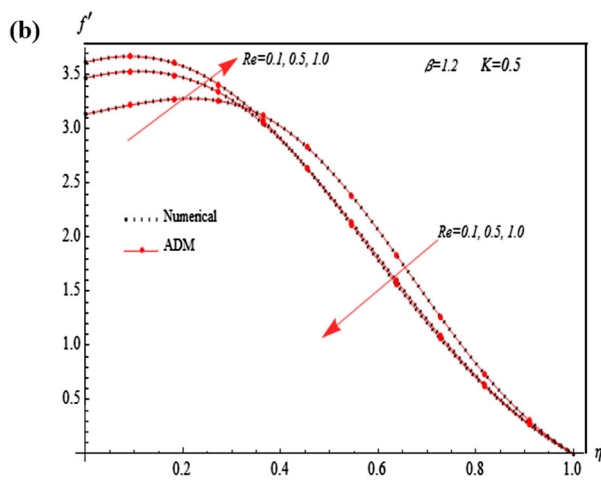
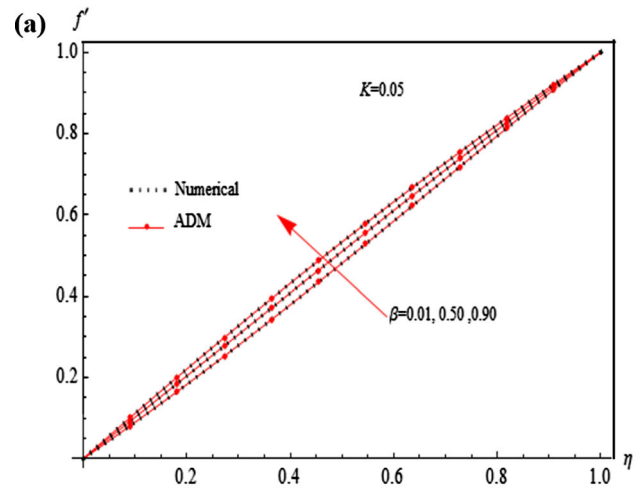
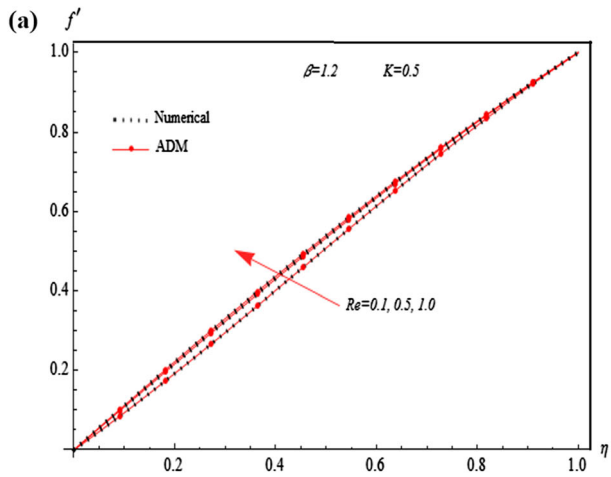


Fig. 4 a Fluid velocity, b temperature and c micro-rotation profiles for different values of Re when $\beta = 1.2$, $h = 1$, $K = 0.5$ and $M = 1$

Fig. 5 a Fluid velocity, b temperature and c micro-rotation profiles for different values of β when $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ and $M = 1$

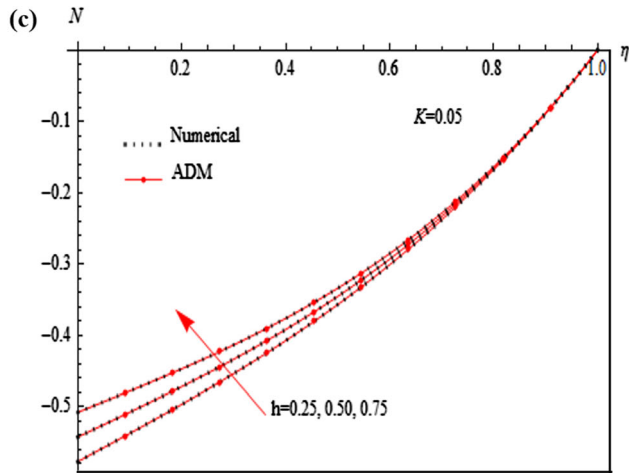
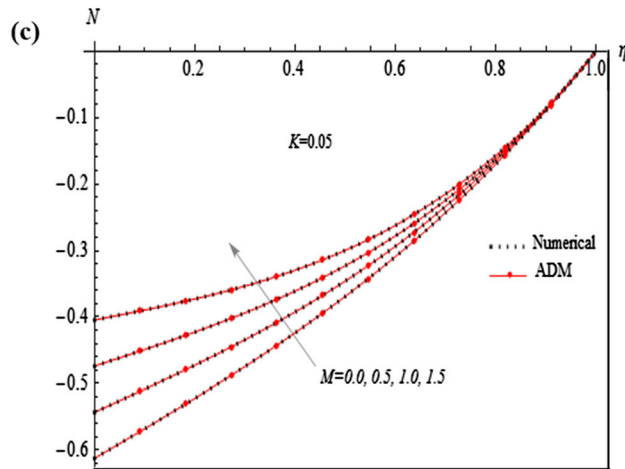
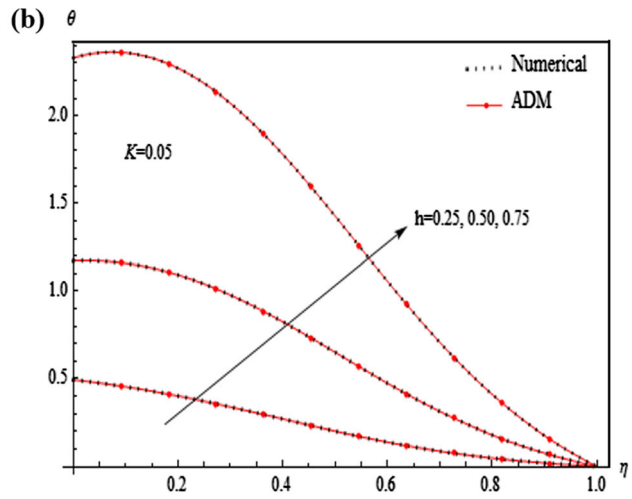
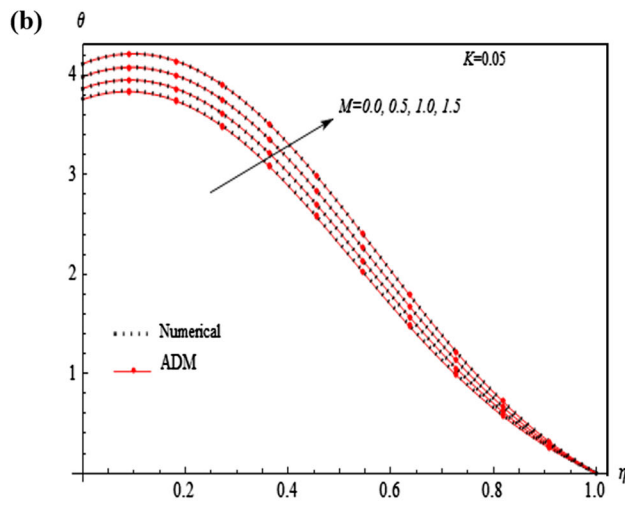
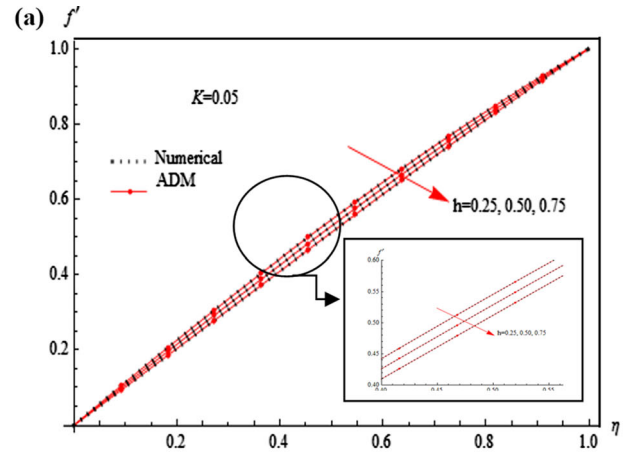
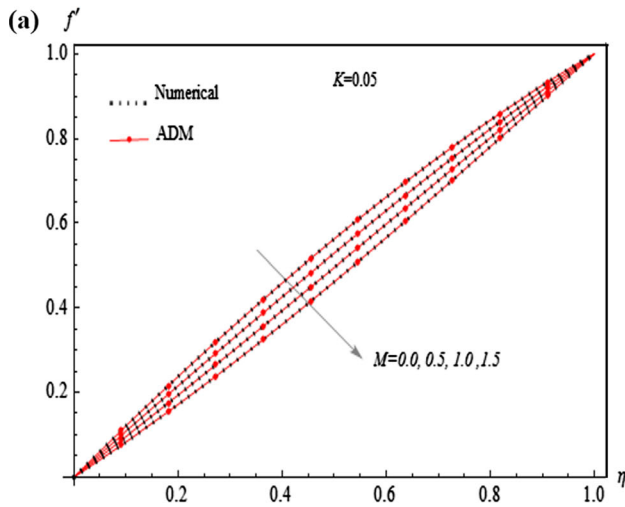


Fig. 6 **a** Fluid velocity, **b** temperature and **c** micro-rotation profiles for different values of M when $Re = 0.05$, $h = 1$, $K = 0.05$ and $\beta = 0.25$

Fig. 7 **a** Fluid velocity, **b** temperature and **c** micro-rotation profiles for different values of h when $Re = 0.05$, $\beta = 0.25$, $K = 0.05$ and $M = 1$

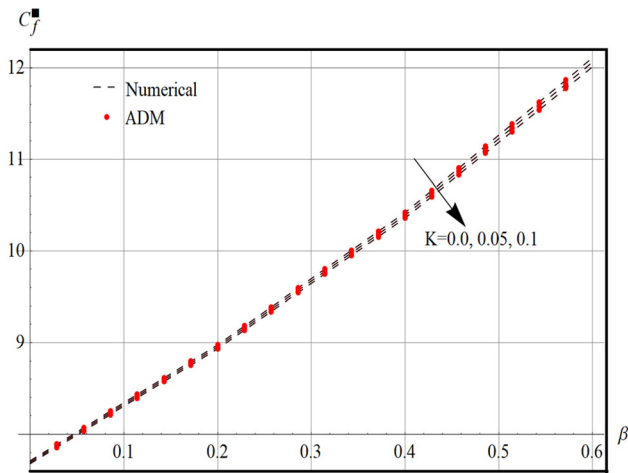


Fig. 8 Skin friction coefficient $C_f^* = C_f U_*^{-1} X^{-\frac{m+1}{2}}$ versus K and β

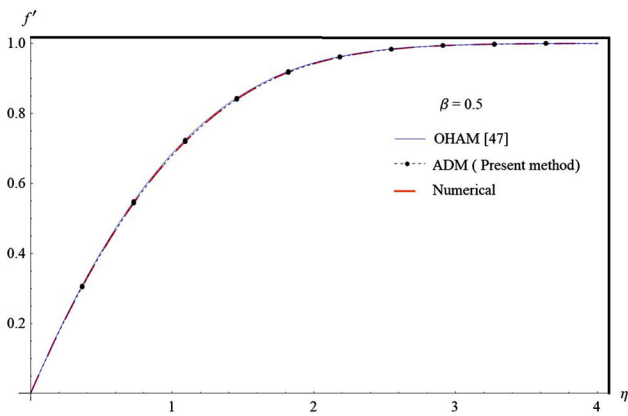


Fig. 9 Comparison between ADM solution and results of the literature available

Table 1 Thermo-physical properties of the bio-magnetic fluid (human blood) [45]

Properties	Numerical values
Density ρ (kg/m ³)	1050
Dynamic viscosity μ (Pa s)	0.0032
Heat capacity c_p (J/kg K)	14.65
Thermal conductivity k (W/m K)	0.0022
Prandtl number (Pr)	21

$$\left. \begin{aligned} F(\eta) &= F_0 + F_1 + \dots + F_n, \\ \theta(\eta) &= \theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_n, \\ N(\eta) &= N_0 + N_1 + \dots + N_n, \\ H(\eta) &= H_0 + H_1 + \dots + H_n. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

4. Results and discussion

Figures 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9 depict the effect of various parameters of interest such as unsteady parameter (K), Reynolds number (Re), wedge angle (β), magnetic field (M), induced magnetic field (h) on the evolution of nondimensional velocity, temperature and micro-rotation fields. In this study, we consider human blood as the bio-magnetic fluid. Table 1 displays the thermo-physical features of the bio-magnetic fluid at $T = 310$ K which correspond to the human body temperature. Also, it is worth to note that the following parameters are kept fixed in simulations: $Pr = 21$, $Pm = 10^{-4}$, $\Delta = 2.0$, $n = 0.5$, $\xi = 1.0$, $Bi = 0.5$ and $Ec = 10^{-4}$.

Figure 2 displays the effect of parameter unsteadiness on the behavior of velocity, temperature and micro-rotation of the studied bio-magnetic flow over a wedge. It is worth to note that the steady-state solution corresponds to the value $K = 0$. As displayed in Fig. 2a, we notice that the bio-magnetic fluid velocity seems as a decreasing function of the parameter of unsteadiness K in all the boundary layers and consequently the backflow can be started. From Fig. 2b, the increase in an unsteadiness parameter K shows a decrease in bio-magnetic fluid temperature near the wedge surfaces; however, a reverse behavior is observed after a specific critical value of a dimensionless variable $\eta_{critical}$. In fact, away from the wedge surfaces (i.e., when $\eta > \eta_{critical}$), we notice that the temperature augments with the increase in unsteadiness parameter K . Figure 2c clearly reveals that the micro-rotation of the human blood corpuscles near the wedge surfaces upsurges with the rise in K parameter. But, away from the wedge, the unsteadiness parameter does not affect the rotation of the blood corpuscles.

Impacts of Reynolds number on the behavior of the velocity, energy and micro-rotation of the human blood corpuscles throughout the boundary layer in the case of bio-magnetic fluid flow are depicted in Figs. 3 and 4. In fact, when $\beta = 0.25$, as displayed in Fig. 3, the influence of Reynolds number has similar behavior to that observed in Fig. 2 which shows the effect of unsteadiness parameter K . Otherwise, as displayed in Fig. 4, when the wedge angle parameter becomes higher ($\beta = 1.2$ for example), we observe an opposite behavior that occurred in Fig. 3. As drawn in Fig. 4a, results obtained reveal that the fluid velocity rises as the Reynolds number Re increases and therefore the flow separation is entirely excluded. Figure 4b shows the evolution of nondimensional temperature for various values of Reynolds number. Here, we see that the temperature increases near the wedge surface with the augment of Reynolds number Re ; however, outside the wedge superficies, the temperature distributions interfere

Table 2 Comparison between analytical ADM solution and numerical results for biofluid velocity when $x = 1$, $\Delta = 2$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$ and $Re = 0.1$

η	f'^{Num}	f'^{ADM}	$ f'^{Num} - f'^{ADM} $
0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.1914176872844065	0.1914176873202560	$3.584946228762931 \times 10^{-11}$
0.4	0.3910978319547676	0.3910978324287318	$4.739641457085497 \times 10^{-10}$
0.6	0.5960082371868581	0.5960082382532984	$1.066440269426038 \times 10^{-9}$
0.8	0.8012283224934137	0.8012283243023863	$1.808972638350781 \times 10^{-9}$
1.0	1.0	1.0	0.0

Table 3 Comparison between analytical ADM solution and numerical results for biofluid temperature $x = 1$, $Pr = 21$, $Ec = 10^{-4}$, $Pm = 10^{-4}$, $Bi = 0.5$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$

η	θ^{Num}	θ^{ADM}	$ \theta^{Num} - \theta^{ADM} $
0.0	3.9278406608175103	3.927842465199585	0.00000180438207442180
0.2	3.9175912831672313	3.917593372350140	0.00000208918290889315
0.4	3.1464646688899070	3.146467020523146	0.00000235163323925036
0.6	1.9126107277531412	1.912613071307568	0.00000234355442629841
0.8	0.7559951400248722	0.755997469398559	0.00000232937368638275
1.0	0.0	0.0	0.0

Table 4 Comparison between analytical ADM solution and numerical results for biofluid micro-rotation $x = 1$, $n = 0.5$, $\Delta = 2$, $\beta = 0.25$, $K = 0.5$, $M = 1$, $Re = 0.1$, $\zeta = 1$

η	N^{Num}	N^{ADM}	$ N^{Num} - N^{ADM} $
0.0	- 0.46684931160922055	- 0.466849311591356	$1.786454317809216 \times 10^{-11}$
0.2	- 0.4196241877561029	- 0.4196241900437771	$2.287674216727708 \times 10^{-9}$
0.4	- 0.360169299886266	- 0.36016930283709364	$2.950827637793196 \times 10^{-9}$
0.6	- 0.2778733251235815	- 0.2778733289203722	$3.796790715160369 \times 10^{-9}$
0.8	- 0.1616354064249476	- 0.16163541129700026	$4.872052677962202 \times 10^{-9}$
1.0	0.0	0.0	0.0

and diminish with the increase in the magnitude of the Reynolds number. From Fig. 4c, we notice that the micro-rotation of the blood corpuscles near the wedge surfaces looks like a declining function of Re . But, after a certain critical dimensionless variable $\eta_{critical}$ (i.e., $\eta > \eta_{critical} \cong 0.6$), it is clear that the micro-rotation is not influenced by the Reynolds number augment.

The influence of increasing wedge angle parameter β on nondimensional velocity, temperature and micro-rotation of the bio-magnetic fluid flow is described by Fig. 5. As well known, the parameter β is a direct measurement of the pressure gradient. In fact, a nonnegative value of β mainly points out a negative gradient of pressure. From Fig. 5a,

the bio-magnetic fluid velocity increases with the increase in β , and consequently the backflow phenomena do not occur. Figure 5b presents the influence of the parameter β on the dimensionless temperature throughout the boundary layer. Results obtained indicate a reduction in the temperature of the bio-magnetic fluid with the increase in β . Here, it is clearly noticed that a higher temperature occurred for smaller β ; however, vice versa for larger β . Furthermore, Fig. 5c indicates that the blood corpuscles micro-rotation declines near the wedge surface as β augments. Far away from the wedge surface, we clearly state that the micro-rotation overlaps and rises with the increment in β .

Table 5 Order of ADM approximations solutions

Order of approximation					
f''^{Num}	1.085726400859816	N^{Num}	0.3449645536258656	θ^{Num}	3.86710652609131
$f''^{ADM(3)}$ approximations)	1.086950395967958	$N^{ADM(3)}$ approximations)	0.3448717552511812	$\theta^{ADM(3)}$ approximations)	9.44344733216317
$f''^{ADM(5)}$ approximations)	1.085700164452754	$N^{ADM(5)}$ approximations)	0.3449648755308494	$\theta^{ADM(5)}$ approximations)	5.93051491774110
$f''^{ADM(7)}$ approximations)	1.085726810494818	$N^{ADM(7)}$ approximations)	0.3449646705206966	$\theta^{ADM(7)}$ approximations)	4.30685410765398
$f''^{ADM(9)}$ approximations)	1.0857263954477951	$N^{ADM(9)}$ approximations)	0.34496454988496195	$\theta^{ADM(9)}$ approximations)	3.92528222812301
$f''^{ADM(11)}$ approximations)	1.0857264008490968	$N^{ADM(11)}$ approximations)	0.3449645539056209	$\theta^{ADM(11)}$ approximations)	3.87208628620296
$f''^{ADM(14)}$ approximations)	1.0857264007051182	$N^{ADM(14)}$ approximations)	0.34496455385395414	$\theta^{ADM(14)}$ approximations)	3.86704512347102
$f''^{ADM(21)}$ approximations)	1.0857264007051182	$N^{ADM(21)}$ approximations)	0.34496455385395414	$\theta^{ADM(21)}$ approximations)	3.86710650734413

Under the effect of the magnetic field parameter M as displayed in Fig. 6a, we notice an increase in the bio-magnetic fluid velocity which indicates that the magnetic field tends to delay the fluid motion. In fact, for the unsteady flow that has been studied, the separation may occur with the upsurge in M . The results drawn in Fig. 6b reveal that the fluid temperature increases as the M parameter augments. In fact, it is highly established that the increase in M lowers the fluid velocity by creating a well-known Lorentz force which opposes the fluid motion. As a result, heat transfer is stepped up from the wedge to the fluid. Figure 6c gives the magnetic field influence on the blood corpuscles micro-rotation within the boundary layer. It is noted that a magnetic parameter M increase the rotation of blood corpuscles. Physically, it is true due to the fact that Lorentz force declines the fluid viscosity, so the fluid becomes thinning and therefore leads to an increase in micro-rotation.

Influences of induced magnetic field h on the velocity, temperature and micro-rotation fields for unsteadiness flow are given in Fig. 7. From Fig. 7a, it is observed that the bio-magnetic fluid velocity slightly decreases as the induced magnetic field parameter increases which undoubtedly leads to the backflow phenomenon. Figure 7b shows that the influence of the parameter of induced magnetic field h on the heat distribution is similar to that observed in Fig. 6b which shows the effect of M parameter. In this investigation, it is also found that the micro-rotation of the blood corpuscles rises with the increment in h parameter as depicted in Fig. 7c.

The behavior of the skin friction coefficient under the effect of wedge angle parameter β and unsteadiness

parameter K is depicted in Fig. 8. In fact, as drawn, we notice that the skin friction coefficient appears as a decreasing function of the unsteadiness parameter K , whereas it augments with the rise in wedge angle parameter β . In fact, with the increase in the magnitude of the wedge angle parameter β , we clearly state that the backflow phenomenon entirely disappeared.

A comparison between analytical ADM data and those of the numerical Runge–Kutta–Fehlberg method was made for velocity, temperature and micro-rotation of the studied biofluid flow. In fact, as depicted in Tables 2, 3 and 4, the error among all studied parameters is introduced as follows:

$$\text{Error} = |\text{Numerical solution} - \text{Analytical solution}|$$

From Tables 2, 3 and 4, ADM results compared with numerical computations indicate the consistency of the results and support the higher precision of the Adomian decomposition method. As drawn in Fig. 9, results obtained show a perfect concordance between ADM results and those available in [46]. It is also worth mentioning that for the case displayed in Fig. 9, we get:

$$f''(0)^{ADM} = 0.92767899, f''(0)^{Num} = 0.927718972 \text{ and } f''(0)^{OHAM[47]} = 0.92760923.$$

Finally, from Table 5, it is highly noticed that the precision of ADM solutions increases with the increase in approximations order.

5. Conclusions

In this research work, the two-dimensional unsteady and laminar hydromagnetic boundary-layer flow of a bio-

magnetic fluid through a wedge was numerically and analytically investigated. In fact, we have considered the effects of the unsteady parameter K , Reynolds number Re , wedge angle β , magnetic field M and induced magnetic field h on the evolution of nondimensional velocity, temperature and micro-rotation of the bio-magnetic flow throughout the boundary layer. From simulations, the essential conclusions which we can draw are:

Increasing unsteadiness parameter K and wedge angle parameter β significantly affects the bio-magnetic fluid velocity. Consequently, flow separation may occur with the increase in K parameter and is prevented as β parameter augments.

In the situation of the lower wedge angle, the fluid velocity decreases with the increase in Reynolds number, thus signaling the beginning of separation.

In the case of a higher wedge angle, the flow velocity of fluid upsurges with the augment of Reynolds number. Therefore, the backflow phenomenon entirely vanishes. In the vicinity of the wedge surface, increasing K parameter leads to a reduction in fluid temperature and also grows the micro-rotation of the blood corpuscles. However, a reverse behavior is observed away from the wedge.

Induced magnetic field h and magnetic field M have substantial impacts on the bio-magnetic flow, heat and micro-rotation of the human blood corpuscles. In fact, it is extremely noted that the reverse flow phenomenon has higher values of both h and M parameters.

Skin friction appears as a diminishing function of unsteadiness parameter K , while it augments with the rise in angular parameter β . In fact, the increase in β leads to the disappearance of the backflow phenomenon. Analytical outcomes of Adomian decomposition and those of the numerical Runge–Kutta–Fehlberg technique show an excellent concordance and consequently justify the effectiveness of the adopted ADM method.

References

- [1] H I Andersson, R Halden and T Glomsaker *J. Biomech.* **33** 1257 (2000).
- [2] E K Ruuge and A N Rusetski *J. Magn. Magn. Mater.* **122** 335 (1993).
- [3] E E Tzirtzilakis and N G Kafoussias *ZAMP* **54** 551 (2003).
- [4] E E Tzirtzilakis and G B Tanoudis *Int. J. Num. Methods. Heat Fluid Flow* **13** 830 (2003).
- [5] V M Falkner and S W Skan *Philos. Mag.* **12** 865 (1931).
- [6] L Howarth *Math. Phys. Sci.* **164** 547 (1938).
- [7] S Hamrelaine, F Mebarek-Oudina and M R Sari *J. Adv. Res. Fluid Mech. Therm. Sci.* **58** 173 (2019).
- [8] J Raza, M Farooq, F Mebarek-Oudina and F Mahanthesh *Multidiscip. Model. Mater. Struct.* **15** 319 (2019).
- [9] J Raza, F Mebarek-Oudina, P Ram and S Sharm *Def. Diff. Forum* **401** 92 (2020).
- [10] S Marzougui, F Mebarek-Oudina, A Assia, M Magherbi, Z Shah and K Ramesh *J. Therm. Anal. Calorim.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s10973-020-09662-3>
- [11] U Khan, A Zaib and F Mebarek-Oudina *Arab. J. Sci. Eng.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s13369-020-04680-7>
- [12] V P Srivastava *Indian J. Pure Appl. Math.* **34** 1727 (2003).
- [13] M Anad and K RRajagopal *Int. J. Cardiol. Med. Sci.* **4** 59 (2004).
- [14] H WChoi and A I Barakat *Biorheology* **42** 493 (2005).
- [15] M R Eid, A Alsaedi, T Muhammad and THayat *Results Phys.* **74** 388 (2017).
- [16] A Hakeem, M Nayak and OMakinde *Appl. Comput. Mech.* **5** 390 (2019).
- [17] M. R. Eid *J. Non-Equili. Thermodyn.* **45** 97 (2020).
- [18] M Kh Hosseinzadeh, B Jafari Gholinia, A Ghanbanpour, H Olifah and D D Ganji *Heat Transf. Asian Res.* **1** 16 (2018).
- [19] M Rashidi, N V Ganesh, A A Hakeem and B Ganga *J. Mol. Liq.* **198** 234 (2014).
- [20] F Hady, M R Eid and M A Ahmed *J. Pure Appl. Math.: Adv Appl.* **12** 181 (2014).
- [21] M R Eid *J. Mol. Liq.* **220** 718 (2016).
- [22] M R Eid and K L Mahny *Adv. Powder Technol.* **28** 3063 (2017).
- [23] A F Al-Hossainy, M R Eid and M S Zoromba *Phys. Scr.* **94** 105208 (2019).
- [24] M R Eid, A Al-Hossainy and M S Zoromba *Commun. Theoret. Phys.* **71** 1425 (2019).
- [25] S Lahmar, M Kezzar, M R Eid and M R Sari *Physica A* **540** 123138 (2020).
- [26] M R Eid, K Mahny and A T Dar Muhammad *Physica A* **540** 123063 (2020).
- [27] A Dogonchi, Z Asghar and M Waqas *Int. Commun. Heat Mass Transf.* **112** 104449 (2020).
- [28] M Waqas, S Jabeen, T Hayat, S Shehzad and A Alsaedi *Int. Commun. Heat Mass Transf.* **112** 104401 (2020).
- [29] M R Zangoee, Kh Hoseinzadeh and D D Ganji *Case Stud. Ther. Eng.* **14** 100460 (2019).
- [30] S Salehi, A Nori, Kh Hoseinzadeh and D D Ganji *Case Stud. Ther. Eng.* **21** 100650 (2020).
- [31] Kh Hoseinzadeh, S Roghani, A Asadi, A Mogharrebi, DD Ganji *Int. J. Num. Methods Heat Fluid Flow* <https://doi.org/10.1108/HFF-02-2020-0095> (2020)
- [32] Kh Hoseinzadeh, S Roghani, A Mogharrebi, A Asadi, DD Ganji *Alex. Eng. J.* <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.04.037> (2020)
- [33] K Hoseinzadeh, A Mogharrebi, A Asadi, M Sheikhshahrokhdehordi, S Mousavisani and D D Ganji *Int. J. Amb. Energy* **1** 2–2 (2019). <https://doi.org/10.1080/01430750.2019.1681294>
- [34] R C Bataller *Appl Math. Comput.* **206** 832 (2008).
- [35] A Aziz *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **14** 1064 (2009).
- [36] W A Khan and R S R Gorla *J. Mech. Sci. Technol.* **24** 1919 (2010).
- [37] W A Khan, M A Hamad and M Ferdows *Proc. Inst. Mech. Eng Part N: J. Nanoeng. Nanosys.* **227** 19 (2013).
- [38] G Adomian *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method.* (Berlin: Springer) (2013)
- [39] Q Esmaili, A Ramiar, E Alizadeh and D D Ganji *Phys. Lett. A* **372** 3434–3439 (2008).
- [40] S Abassbandy *Chaos Soliton. Fract.* **31** 260 (2007).
- [41] E Alizadeh, M Farhadi, K Sedighi and H R Ebrahimi-Kebria *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 724 (2009).
- [42] L. Bougoffa, R. Rach, A. Wazwaz and J. Duan *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **25** 912 (2015).

- [43] A Wazwaz, R Rach and L Bougoffa *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **26** 2393 (2016).
- [44] M Sattar *Int. J. Appl. Math. Mech.* **7** 15 (2011).
- [45] M M Rahman and M A Sattar *Springer Proceed. Complex. S Banerjee and SS Ercetin* **49** (eds.) (2012)
- [46] V Marinca, R D Ene and B Marinca *Sci. World J.* **2014** 617453 (2014).

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.