

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 - Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

COURS SUR:

Espaces Vectoriels Normés

Pour la 3^{ème} Année Licence Mathématiques - Semestre 5.

Unité d'enseignement : Fondamentale

Crédits : 5

Coefficient : 3

Réalisé par :

Khelili Besma

E-mail : b.khelili@univ-skikda.dz

Année : 2024 / 2025

Résumé

Ce polycopié pédagogique, intitulé “ Les espaces vectoriels normés”, est le fruit de plusieurs années d’enseignement des matières Analyse 1-3, Topologie et Algèbre linéaire. Il est destiné aux étudiants de L3 en licence de mathématiques et a été dispensé à l’université 20 août 1955 de Skikda entre 2018 et 2025.

Ce cours introduit les concepts fondamentaux des espaces normés et des espaces de Hilbert, qui jouent un rôle clé en analyse fonctionnelle. Ce manuscrit constitue un guide complet visant à aider les étudiants à développer une compréhension approfondie de ces espaces, de leurs propriétés et de leurs applications. L’étude de ce sujet leur fournit une base rigoureuse pour la recherche et les applications mathématiques avancées dans divers domaines scientifiques. Il se décline en trois chapitres, chacun étant suivi d’une série d’exercices.

Nous commençons par un rappel des concepts fondamentaux des espaces vectoriels et de leurs sous-espaces, qui forment le cadre général des structures algébriques utilisées en mathématiques. Ensuite, dans le chapitre 1, nous introduisons la notion de norme sur un espace vectoriel, en définissant la norme, la distance et en présentant divers exemples d’espaces vectoriels normés. Il explore l’équivalence des normes et les boules, essentielles pour l’étude de la convergence et de la continuité. Des concepts topologiques fondamentaux, tels que la limite, les ouverts, les fermés, l’adhérence et l’intérieur, sont abordés, ainsi que les ensembles et fonctions bornés. Enfin, la dernière partie traite des espaces de Banach, caractérisés par leur complétude, en introduisant les suites de Cauchy et en illustrant leurs propriétés par des exemples concrets.

Le deuxième chapitre étudie les applications linéaires continues et la continuité dans les espaces vectoriels normés. Il traite des formes linéaires, de la dualité topologique et des propriétés des espaces de dimension finie. Des exercices pratiques illustrent ces concepts.

Le troisième chapitre est consacré aux espaces de Hilbert, qui jouent un rôle central en analyse fonctionnelle en raison de leur structure géométrique riche et de leurs nombreuses applications. Il commence par l’introduction du produit scalaire, qui permet de définir une

distance et d'étudier les propriétés géométriques des espaces vectoriels.

L'étude se poursuit avec les espaces préhilbertiens complets, où l'on introduit les notions essentielles d'orthogonalité et de projection orthogonale. Le théorème de représentation de Riesz est également abordé, illustrant l'importance de la dualité dans ces espaces. Une section d'exercices est incluse pour consolider ces concepts fondamentaux.

Ensuite, le chapitre se focalise sur les systèmes orthogonaux et les bases hilbertiennes, en introduisant les concepts de systèmes orthogonaux et orthonormaux. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est présenté comme un outil essentiel pour construire des bases orthonormées. Les inégalités de Bessel et de Parseval sont étudiées en détail, suivies de l'égalité de Parseval, qui met en évidence le lien entre les séries orthogonales et la structure des espaces de Hilbert. Enfin, une attention particulière est portée aux systèmes orthonormés complets dans des espaces concrets, avec une application directe aux séries de Fourier. La base hilbertienne trigonométrique est introduite, illustrant l'utilité des espaces de Hilbert en analyse de Fourier. La majorité des exemples sont extraits des références [1 – 23]. Pour compléter l'étude, une série d'exercices et de travaux dirigés est proposée, couvrant des sujets variés, pour approfondir la compréhension et maîtriser les outils mathématiques abordés dans ce cours.

Liste des notations et symboles

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire.
A^\perp	le complémentaire orthogonal de A .
\oplus	somme directe (orthogonale).
$\ \cdot\ $	norme.
\overline{A}	l'adhérence de A .
$\overset{\circ}{A}$	l'intérieur de A .
$B(a, r)$	la boule ouverte de centre a et de rayon r .
$B'(a, r)$	la boule fermée de centre a et de rayon r .
$\mathcal{L}(E, F)$	l'espace des applications linéaires continues) de E dans F .
\mathbb{N}	l'espace des entiers naturels.
\mathbb{Z}	l'ensemble des entiers relatifs.
\mathbb{Q}	l'ensemble des nombres rationnels.
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels.
\mathbb{C}	l'espace des nombres complexes.
$\operatorname{Re}(z)$	la partie réelle du nombre complexe z .
$\operatorname{Im}(z)$	la partie imaginaire du complexe z .
$C(\Omega)$	l'espace des fonctions continues sur Ω .
$C^k(\Omega)$	l'espace des fonctions dont la différentielle d'ordre k est continue sur Ω .
$C^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω .
$\mathbb{k}[X]$	l'espace des polynômes.
$\mathbb{k}_d[X]$	l'espace des polynômes de degré au plus d .
$d(x, y)$	la distance entre x et y .

On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{k})$, l'espace des suites réelles ou complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty$, qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme associée $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$, $\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Pour $1 \leq p < +\infty$. On note $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{k}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{k} / \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ muni de la norme usuelle $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{k})$.

On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{k}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{k} / (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$ muni de la norme usuelle $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, $\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{k})$.

On note $c_0 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{k} / \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \right\}$

Soient X un ensemble non vide et $B(X, \mathbb{k})$ le \mathbb{k} -espace vectoriel des applications bornées définies sur X et à valeurs dans \mathbb{k} . Pour tout $f \in B(X, \mathbb{k})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $B(X, \mathbb{k})$.

Sur le \mathbb{k} -espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{k})$ des applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{k} , on a la norme suivante : pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{k})$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.

On note $L_p(I, \mathbb{k})$ pour $p \in [1, +\infty[$, on note l'espace des fonctions mesurables $f : I \rightarrow \mathbb{k}$ tel que $\left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ muni de la norme usuelle $\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < +\infty$. L'espace $L^2(I, \mathbb{k})$ est de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt$.

Contents

I	1
0.1 Introduction et rappels	1
0.1.1 Espace vectoriel	1
0.1.2 Sous espaces vectoriels	3
1 Généralités sur les espaces vectoriels normés	4
1.1 Norme sur un espace vectoriel	4
1.1.1 Exemples d'espaces vectoriels normés	5
1.2 Équivalence des normes	9
1.2.1 Boules	12
1.3 Limite, Ouvert, fermé, adhérence et intérieur.	13
1.3.1 Ensembles et fonctions bornés	17
1.4 Espaces de Banach	19
1.4.1 Quelques notions sur les suites	19
1.4.2 Espaces complets	21
1.4.3 Exemples des espaces de Banach	21
1.4.4 Espace compact	27
1.4.5 Exercices	28
2 Applications linéaires continues	30
2.1 Applications continues	30
2.1.1 Formes linéaires	33
2.1.2 Dual topologique d'un e.v.n.	38
2.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie	39

2.3 Exercices	42
3 Espaces de Hilbert	44
3.1 Produit scalaire	44
3.1.1 Propriétés élémentaires du produit scalaire	47
3.2 Espace préhilbertien complet	49
3.2.1 Espace de Hilbert	55
3.2.2 Notion d'orthogonalité	56
3.2.3 Projection Orthogonale	59
3.2.4 Dualité et théorème de Représentation de Riesz	63
3.2.5 Exercices	64
3.3 Système orthogonal. Bases hilbertiennes	65
3.3.1 Système orthogonal - orthonormal	65
3.3.2 Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	66
3.3.3 Inégalité de Bessel-Parseval	69
3.3.4 Bases Hilbertiennes	71
3.3.5 Égalité de Parseval	73
3.3.6 Exercices	73
3.3.7 Systèmes orthonormés complets dans des espaces concrets	75
3.4 Série de Fourier	79
3.4.1 La base hilbertienne trigonométrique	79
3.5 Exercices	83
3.5.1 TD1: normes, équivalence des normes, ouvert, fermé, adhérence.	83
3.5.2 TD2 : Application continue	85
3.5.3 TD 3: Produit scalaire, Cauchy-Schwarz, projection orthogonale.	88
3.5.4 TD 4: Orthogonale, Systhème orthogonales. Bases hilbertiennes.	93
3.5.5 Solutions d'exercices du chapitre 1	94
3.5.6 Solutions d'exercices du chapitre 2	96
3.5.7 Solutions d'exercices du chapitre 3	98
3.5.8 Examens	101

0.1 Introduction et rappels

0.1.1 Espace vectoriel

Définition 0.1.1 Soit \mathbb{k} un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur \mathbb{k} un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :

1. Une loi interne (c'est-à-dire $E \times E \longrightarrow E$) dite addition, notée $+$, et vérifiant :

i. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E;$

ii. $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in E;$

iii. Il existe un élément de E noté 0_E , dit neutre, tel que

$$\forall x \in E, x + 0_E = x$$

vi. Pour tout $x \in E$, il existe un élément $(-x)$ dit opposé de x , tel que

$$x + (-x) = 0_E$$

2. Une loi externe de domaine \mathbb{k} (c'est-à-dire une application $\mathbb{k} \times E \longrightarrow E$, on note λx l'image dans E du couple $(\lambda, x) \in \mathbb{k} \times E$, qui vérifie :

a. $\lambda(\mu x) = \lambda\mu(x), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E;$

b. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x. \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E;$

c. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y. \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x, y \in E;$

d. $1.x = x, \quad \forall x \in E. \quad (1 \text{ étant l'élément neutre de la multiplication dans } \mathbb{k}).$

Exemple 0.1.1 Soit $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

L'élément nul $0 = (0, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 0^2$ converge trivialement vers 0.

Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Par hypothèse, les séries suivantes convergent: $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < \infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n^2 < \infty$.

L'inégalité $2|x_n y_n| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$ montre que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$ est absolument convergente et on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n + y_n|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2 + 2 \operatorname{Re}(x_n \overline{y_n})) \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2) \end{aligned}$$

Ces inégalités montrent que $x + y$ est dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda x_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^2 |x_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ est finie et que $|\lambda|^2$ est un réel fixé, alors $|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ est fini. Ainsi $\lambda x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

celui-ci est donc un espace vectoriel. Par conséquent, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 0.1.2 L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} de degré n , c'est-à-dire:

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / P(X) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour les lois :

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_n + b_n) x^n \\ \lambda(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) &= (\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \dots + \lambda a_n x^n) \end{aligned}$$

0.1.2 Sous espaces vectoriels

Définition 0.1.2 *Un sous-ensemble non vide de F d'un espace vectoriel E est dit un sous-espace vectoriel si*

1. $F \neq \emptyset$,
2. $\forall x, y \in F, x + y \in F$,
3. $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \lambda x \in F$.

Exemple 0.1.3 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On considère également l'ensemble*

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}.$$

F est un sous-espace vectoriel de E . En effet,

- i) Le polynôme nul $P(X) = 0$ appartient à F car $P(0) = 0$, donc $F \neq \emptyset$.
- ii) Soient $P, Q \in F$, donc $P(0) = 0, Q(0) = 0$. Alors pour tout $P, Q \in F$, on a $(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = 0$, donc $P + Q \in F$.
- iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}, P \in F$, alors $(\lambda P)(0) = \lambda P(0) = 0$, d'où $\lambda P \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 0.1.4 *Soit $F = \left\{ f \in C([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$.*

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $E = C([-1, 1], \mathbb{C})$.

En effet $F \subset C([-1, 1], \mathbb{C})$ et $0_E \in F$ car $\int_{-1}^1 0 dt = 0$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f, g \in F$, on a $\int_{-1}^1 (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_{-1}^1 f(t) dt + \mu \int_{-1}^1 g(t) dt = 0$,

donc $\lambda f + \mu g \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E .

Chapter 1

Généralités sur les espaces vectoriels normés

1.1 Norme sur un espace vectoriel

Définitions, propriétés

Définition 1.1.1 (*Semi-norme*) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} . On appelle semi-norme pour E , une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ on a

- i. $p(x) \geq 0$ propriété de non négativité.
- ii. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, propriété d'homogénéité absolu.
- iii. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, propriété de sous-additivité.

L'espace vectoriel E muni d'une semi-norme s'appelle espace semi-norme, noté par (E, p) .

Exemple 1.1.1 Soit $E = C^1([0, 1])$ l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, 1]$. Définissons :

$$p(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|.$$

Cette application est une semi-norme car:

- i. Pour toute fonction $f \in C^1([0, 1])$, $p(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \geq 0$.
- ii. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda f) = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f'(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = |\lambda|p(f)$.

iii. Pour toutes fonctions $f, g \in E$, on a $p(f + g) = \sup_{x \in [0,1]} |(f + g)'(x)|$.

D'où, par l'inégalité triangulaire : $|(f + g)'(x)| \leq |f'(x)| + |g'(x)|, \forall x \in [0, 1]$. Donc

$$\sup_{x \in [0,1]} |(f + g)'(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)|$$

Ce qui montre que $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$.

Définition 1.1.2 (Norme) Une norme sur un \mathbb{k} -espace vectoriel E est une application:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

Possèdent les propriétés suivantes :

- i. pour tout $x \in E$, $\|x\| \geq 0$;
- ii. Homogénéité : pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{k}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii. Inégalité triangulaire : pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- iv. Séparation : pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0_E$.

Définition 1.1.3 Un espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \|\cdot\|)$.

Quand la norme ne doit pas être précisée, on va dénoter, en bref, un espace normé par E .

1.1.1 Exemples d'espaces vectoriels normés

Exemple 1.1.2 La valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{R} , le module $|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{C} .

Normes usuelles sur \mathbb{k}^n .

Exemple 1.1.3 Sur le \mathbb{k} -espace vectoriel \mathbb{k}^n , on peut définir les trois normes suivantes : pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$, on a:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

La norme $\|\cdot\|_2$ est appelée la norme euclidienne sur \mathbb{K}^n .

Normes usuelles sur $C([a, b], \mathbb{R})$, a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

Exemple 1.1.4 Soit $C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[a, b]$ ($a < b$). Les fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|$ suivantes :

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$

2. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

3. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$

4. Soit p un réel tel que $p \in [1, +\infty[$, $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

Sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Proposition 1.1.1 Dans un espace normé E on a pour tout $x, y \in E$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Le résultat suivant établit le rapport entre les espaces normés et les espaces métriques.

Démonstration. Soient $x, y \in E$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

En remplaçant x et y entre eux, on a

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Cette inégalité montre que la norme est une application lipschitzienne, donc continue

Définition 1.1.4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$ non vide.

1. Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a); a \in A\} = \inf \{\|x - a\|; a \in A\}.$$

2. On appelle diamètre de A et on note $diam(A)$:

$$diam(A) = \sup \{d(x, y), x, y \in A\} = \sup \{\|x - y\|, x, y \in A\}.$$

Théorème 1.1.1 Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique (E, d) , où la distance d est définie par

$$\forall x, y \in E, \|x - y\| = d(x, y).$$

.

Démonstration Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On introduit l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, par

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Alors d est une métrique pour E , induite par la norme $\|\cdot\|$.

En effet, pour tout $x, y \in E$.

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$,
3. $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$,
4. $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$,
5. $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.

Inégalités

Lemme 1.1.1 Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $u, v \geq 0$, on a :

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$

$$uv = \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \iff u^p = v^q.$$

Théorème 1.1.2 Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$1. \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{inégalité de Hölder}).$$

$$2. \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{inégalité de Minkowski}).$$

Démonstration. Si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_q = 0$, l'inégalité est triviale, donc on suppose $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$. D'après le lemme précédent, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}$$

donc on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{j=1}^n |x_j|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{j=1}^n |y_j|^q \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{\|x\|_p^p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|y\|_q^q} \|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| |y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

2. On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p &\leq \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| |x_j + y_j|^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|) |x_j + y_j|^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |y_j| |x_j + y_j|^{p-1} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j| |x_j + y_j|^{p-1} &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \sum_{j=1}^n |y_j| |x_j + y_j|^{p-1} &\leq \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\|x + y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\|x + y\|_p \right)^{\frac{p}{q}}.$$

D'où on a $\left(\|x + y\|_p \right)^{p - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, donc $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

1.2 Équivalence des normes

Définition 1.2.1 Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ telles que pour tout $x \in E$, on ait

$$\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$$

On va voir que deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent des distances équivalentes, ou encore si et seulement si elles induisent des topologies équivalentes au sens de la convergence.

Remarque : Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ deux normes sur E . S'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans E telle que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_a$, mais n'est pas bornée pour la norme $\|\cdot\|_b$, alors les deux normes et ne sont pas équivalentes.

Exemple 1.2.1 Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les normes N_1 et N_2 par

$$\begin{aligned} N_1(f) &= |f(0)| + \|f'\|_\infty \\ N_2(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

N_1 et N_2 sont équivalentes. En effet,

Il est clair que $N_1(f) \leq N_2(f)$. De plus, si $x \in [0, 1]$, alors on écrit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Il vient

$$|f(x)| = |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \leq |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty dt \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_1(f).$$

donc

$$\|f\|_\infty \leq N_1(f) \text{ donc } \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq N_1(f) + \|f'\|_\infty \leq 2N_1(f)$$

On en déduit que $N_2(f) \leq 2N_1(f)$.

Ainsi

$$N_1(f) \leq N_2(f) \leq 2N_1(f)$$

Exemple 1.2.2 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les normes N_1 et N_2 sur E par $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 f(t) dt \text{ et } \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

les trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

En effet, supposons que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. Considérons, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$.

On a alors

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \text{ et } \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Si $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ étaient équivalentes, il existerait $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout n ,

$$\alpha \|f_n\|_2 \leq \|f_n\|_\infty \leq \beta \|f_n\|_2$$

donc $1 \leq \frac{\beta}{\sqrt{2n+1}}$ d'où $\sqrt{2n+1} \leq \beta$ ce qui est impossible pour n grand.

Si $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ étaient équivalentes, il existerait $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout n ,

$$\alpha \|f_n\|_1 \leq \|f_n\|_\infty \leq \beta \|f_n\|_1$$

pour la même fonction $f_n(x)$, on a $\|f_n\|_\infty \leq \beta \|f_n\|_1$ donc $(n+1) \leq \beta$ ce qui est toujours impossible.

Enfin, la même suite de fonctions, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité $\|f_n\|_2 \leq \beta \|f_n\|_1 \implies \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \leq \beta$ est tout aussi impossible. Remarquons que la preuve que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

1.2.1 Boules

Définition 1.2.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit

1. la boule ouverte de centre a et de rayon r par $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$,
2. la boule fermée de centre a et de rayon r par $B'(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$,
3. la sphère de centre a et de rayon r par $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$.

Exemple 1.2.3 1. Soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $B(a, r) =]a - r, a + r[$, $B'(a, r) = [a - r, a + r]$ et $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

2. Soit $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ (respectivement la boule fermée $B'(a, r)$) n'est autre que le disque ouvert (respectivement fermé) centré en a et de rayon r . $S(a, r)$ n'est autre que le cercle de centre a et de rayon r .

Exercice 1.2.1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $\forall a \in E, \forall r > 0$, $B(a, r) = a + B(0_E, r) = a + rB(0_E, 1)$.

Solution: Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons tout d'abord que $B(a, r) = a + B(0_E, r)$. On a

$$\begin{aligned} x \in B(a, r) &\iff \|x - a\| < r \\ &\iff x - a \in B(0_E, r) \\ &\iff x \in a + B(0_E, r) \end{aligned}$$

D'où $B(a, r) = a + B(0_E, r)$.

Montrons maintenant que $B(0_E, r) = rB(0_E, 1)$, on a

$$\begin{aligned} x \in B(0_E, r) &\iff \|x\| < r \\ &\iff \left\| \frac{x}{r} \right\| = \frac{1}{r} \|x\| < 1 \\ &\iff \frac{x}{r} \in B(0_E, 1) \\ &\iff x \in rB(0_E, 1) \end{aligned}$$

D'où $B(0_E, r) = rB(0_E, 1)$.

1.3 Limite, Ouvert, fermé, adhérence et intérieur.

Définition 1.3.1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $x \in E$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans l'espace.

$(E, \|\cdot\|)$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce que l'on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, si elle vérifie l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

et x est alors l'unique limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

On dit que la suite est divergente dans le cas contraire.

Adhérence

Définition 1.3.2 On dit que x est adhérent à F s'il existe une suite de points de F qui converge vers x dans l'espace $(E, \|\cdot\|)$.

On appelle adhérence de F dans $(E, \|\cdot\|)$, que l'on note \overline{F} , l'ensemble des points de E qui sont adhérents à F .

$$\overline{F} = \left\{ x \in E, \text{ il existe une suite } x_n \in F, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \right\}.$$

On dit que F est dense dans $(E, \|\cdot\|)$ si l'on a $\overline{F} = E$.

Exemple 1.3.1 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$F = \{f \in E, f(0) = 0\}.$$

On a $\overline{F} = F$, tandis que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Démontrons cela. Soit $f \in \overline{F}$: il existe (f_n) suite de points de F telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$, d'où $\forall t \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t)$, or $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(0) = 0$, d'où $f(0) = 0$, et $f \in F$. Donc $\overline{F} \subset F$, comme $F \subset \overline{F}$, alors $\overline{F} = F$.

On va montrer que $\overline{F} = E$.

En effet, Soit $g \in E$. On va construire une suite (f_n) de F telle que $\|f_n - g\|_1 \rightarrow 0$. Pour cela, soit $n \geq 1$ et soit f_n la fonction définie par $f_n(t) = g(t)$ pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$ et

$f_n(t) = tg\left(\frac{1}{n}\right) / \left(\frac{1}{n}\right)$ si $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Alors $f_n \in F$ et

$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - g(t)| dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t)| dt + \int_0^{\frac{1}{n}} |g(t)| dt.$$

Mais si $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, alors $|f_n(t)| \leq |g\left(\frac{1}{n}\right)| \leq \|g\|_\infty$. On en déduit que

$$\|f_n - g\|_1 \leq 2 \int_0^{\frac{1}{n}} \|g\|_\infty dt \leq 2 \frac{\|g\|_\infty}{n}.$$

Ceci prouve que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Proposition 1.3.1 *L'adhérence \bar{F} de F est le plus petit fermé de $(E, \|\cdot\|)$ qui contient F .*

Corollaire 1.3.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors son adhérence \bar{F} aussi.*

Démonstration Soit $x, y \in \bar{F}$ et $a, b \in \mathbb{k}$. Il existe $x_n, y_n \in F$ tels que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$,
 $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$.

On a $ax + by = \lim_{n \rightarrow +\infty} (ax_n + by_n)$; et comme $ax_n + by_n \in F$, on obtient $ax + by \in \bar{F}$.

Définition 1.3.3 *On dit que F est fermée dans $(E, \|\cdot\|)$ si $F = \bar{F}$.*

Fermé

Proposition 1.3.2 *F est fermé si et seulement si F contient toutes les limites de ses suites convergentes*

Proposition 1.3.3 *Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, la boule fermée $B'(x, r)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$ et l'on a $\overline{B(x, r)} \subset B'(x, r)$.*

Démonstration

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $B'(x, r)$ qui converge vers y dans $(E, \|\cdot\|)$; on a donc $\|x - y_n\| \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité de l'application $\|\cdot\|$ nous permet de passer à la limite dans cette inégalité : on obtient donc $\|x - y\| \leq r$, si bien que $y \in B'(x, r)$. On a ainsi prouvé que la boule $B'(x, r)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$. $B'(x, r)$ étant un fermé contenant $B(x, r)$, elle contient aussi sa fermeture.

Exemple 1.3.2 On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne $N_2((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$, et on considère la partie

$$A = \{(x, \sin(x)), x \in \mathbb{R}\}$$

La partie A est fermée. En effet, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $l = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons x_n le réel tel que $a_n = (x_n, \sin(x_n))$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y . De plus, comme la fonction sinus est continue, $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sin(x)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $y = \sin(x)$ et donc que $(x, y) \in A$. On a ainsi vérifié que la limite de toute suite convergente d'éléments de A est dans A , ce qui montre que A est fermée.

Intérieur

Définition 1.3.4 : Soit $A \subset E$. On dit que x est intérieur à A si x n'est pas adhérent à A^c , i.e s'il existe une boule ouverte centrée en x qui est inclus dans A . On appelle intérieur de A dans $(E, \|\cdot\|)$, que l'on note \mathring{A} , l'ensemble des points intérieurs à A .

$$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 : B(x; r) \subset A.$$

Proposition 1.3.4 On a les relations $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$ et $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$.

Démonstration

La première relation est évidente puisque, par définition, on a $\mathring{A} = (\overline{A^c})^c$. Pour obtenir la seconde relation, il suffit d'appliquer la première à A^c .

Ouvert

Définition 1.3.5 On dit qu'une partie V de E est un voisinage de x dans $(E, \|\cdot\|)$, si x est intérieur à V , i.e si $x \in \mathring{V}$.

Ainsi, une partie A de E est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points.

Exemple 1.3.3 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$O = \{f \in E \mid f(1) > 0\}.$$

O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. En effet, soit $f \in O$ et posons $r = f(1)$. Alors la boule ouverte $B_\infty(f, r) \subset O$ car si $g \in B_\infty(f, r)$, alors

$$g(1) \geq f(1) + g(1) - f(1) \geq f(1) - \|f - g\|_\infty > f(1) - f(1) = 0.$$

Exemple 1.3.4 On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne $N_2((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$, et on considère la partie

$$A = \{(x, \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

La partie A n'est pas ouverte. En effet,

1. $(0, 0) = (0, \sin(0)) \in A$ mais pour tout $r > 0$, l'élément $(0, \frac{r}{2})$ de \mathbb{R}^2 est dans la boule ouverte $B((0, 0), r)$ mais n'est pas dans A (car $\frac{r}{2} \neq \sin(0)$). La partie A ne contient donc aucune boule ouverte de centre $(0, 0)$. Cette partie n'est donc pas ouverte.

Proposition 1.3.5 A est ouverte dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si A^c est fermée dans $(E, \|\cdot\|)$.

Démonstration

On a A est ouverte $\iff A = \overset{\circ}{A} \iff A^c = (\overset{\circ}{A})^c \iff A^c = \overline{A^c} \iff A^c$ est fermée.

Définition 1.3.6 On dit que A est ouverte dans $(E, \|\cdot\|)$ si $\overset{\circ}{A} = A$.

Proposition 1.3.6 L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A est le plus grand ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ qui est inclus dans A .

Proposition 1.3.7 La boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ et l'on a $x \in E$ et $r > 0$. On a l'égalité $B(x, r) = \overset{\circ}{B(x, r)}$.

Démonstration

Prouvons que $\overset{\circ}{B(x, r)} \subset B(x, r)$, ou encore, par passage au complémentaire, que $(B(x, r))^c \subset \left(\overset{\circ}{B(x, r)}\right)^c = \overline{(B(x, r))^c}$. Soit donc $z \in (B(x, r))^c$. Si $z \in (\overset{\circ}{B(x, r)})^c$ (on a $(\overset{\circ}{B(x, r)})^c \subset (B(x, r))^c$ puisque $B(x, r) \subset \overset{\circ}{B(x, r)}$), il n'y a rien à prouver puisque

$(B'(x, r))^c \subset \overline{(B'(x, r))^c}$. Sinon, on a $\|z - x\| = r$, posons alors $z_n = x + (1 + \frac{1}{n})(z - x)$. On remarque que l'on a $z_n \in (B'(x, r))^c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $\|z_n - x\| = (1 + \frac{1}{n})\|z - x\| > \|z - x\| = r$. Comme $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$, on a bien $z \in \overline{(B'(x, r))^c}$.

Proposition 1.3.8 *L'adhérence de la boule ouverte $\mathring{B}(x, r)$ est la boule fermée $B'(x, r)$.*

Démonstration L'adhérence de la boule ouverte est évidemment contenue dans la boule fermée, puisque celle-ci est fermée dans E . Inversement, si $y \in B'(x, r)$, on a $y_n = \frac{1}{n}x + (1 - \frac{1}{n})y \in \mathring{B}(x, r)$ car $\|x - [\frac{1}{n}x + (1 - \frac{1}{n})y]\| = (1 - \frac{1}{n})\|x - y\| < r$, comme $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$, on obtient $y \in \mathring{B}(x, r)$.

1.3.1 Ensembles et fonctions bornés

Proposition 1.3.9 *Une partie F d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est bornée si et seulement si son diamètre $\delta(F) = \sup_{x, y \in F} \|x - y\|$ est fini.*

Démonstration Comme $\|x - y\| \geq 0$ pour $x, y \in E$, on a $\delta(F) \geq 0$. Par ailleurs, par définition de la borne supérieure, on a l'équivalence

$$\|x - y\| \leq \alpha \text{ pour } x, y \in F \text{ si et seulement si } \sup_{x, y \in F} \|x - y\| \leq \alpha \text{ si et seulement si } \delta(F) \leq \alpha.$$

Proposition 1.3.10 *Une partie F de E est bornée si et seulement si elle est inclus dans une boule ouverte ou fermée.*

Démonstration " \implies " Supposons F est bornée et non vide, on sait qu'il existe un réel $a > 0$ vérifiant $\|x - y\| < a$ pour tout $x, y \in F$.

Fixons un $x \in F$, on a donc bien $y \in B'(x, a)$ pour tout $y \in F$, i.e $F \subset B'(x, a)$.

" \impliedby " S'il existe un réel $r > 0$ et un $c \in E$ tels que l'on ait $F \subset B'(c, r)$, on a $\|y - c\| \leq r$ pour tout $y \in F$, et donc aussi $\|x - y\| \leq \|x - c\| + \|c - y\| \leq 2r$ pour tout $x, y \in F$. Par suite, F est bornée.

Définition 1.3.7 *Soit X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une fonction vectorielle $f : X \longrightarrow E$ est bornée si*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 1.3.11 *Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie convexe, c'est-à-dire que*

$$\forall x, y \in B, \forall \theta \in [0, 1], \quad (1 - \theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère de rayon $r > 0$ n'est pas convexe.

Démonstration

Nous allons faire la preuve pour les boules ouvertes, la preuve pour les boules fermées est identique. Soit $a \in E$, $r > 0$ et considérons la boule ouverte $B(a, r)$. Soit $x, y \in B(a, r)$ et $\theta \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} \|(1 - \theta)x + \theta y - a\| &= \|(1 - \theta)(x - a) + \theta(y - a)\| \\ &\leq \|(1 - \theta)(x - a)\| + \|\theta(y - a)\| \\ &\leq (1 - \theta)\|x - a\| + \theta\|y - a\| \\ &< (1 - \theta)r + \theta r \\ &= r. \end{aligned}$$

Par suite $\|(1 - \theta)x + \theta y - a\| < r$ et donc $(1 - \theta)x + \theta y \in B, \forall \theta \in [0, 1]$.

Pour les sphères, montrons tout d'abord que $S(0, r)$ n'est pas convexe. Soit $x \in S(0, r)$. On a alors $-x \in S(0, r)$ mais $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) = 0_E \notin S(0_E, r)$. Plus généralement pour $S(a, r)$, $a \in E$, on prend $x \in S(a, r)$. On a alors $-x + 2a \in S(a, r)$ mais $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x + 2a) = a \in S(a, r)$.

Définition 1.3.8 (Compacte) *Une partie A de E est compacte si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A .*

Proposition 1.3.12 $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+$ est continue.

1.4 Espaces de Banach

1.4.1 Quelques notions sur les suites

Définition 1.4.1 (Suite bornée) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de E . Elle est dite bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 0} \|u_n\| \leq M < +\infty.$$

Définition 1.4.2 (Suite de Cauchy) Soit $(u_n)_n$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On dira que c'est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, / \quad \forall n > n_\varepsilon, \forall m > n_\varepsilon : \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.4.1 Dans un espace normé, on a

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite de Cauchy de E est bornée.
3. Toute suite convergente de E est de Cauchy.

Démonstration.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E qui converge vers $x \in E$. Montrons que l'ensemble $S = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Trouvons pour cela un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\|x - x_n\| \leq \alpha$ pour tout $n \geq N$. Par l'hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\|x - x_n\| \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Si l'on pose $\alpha = \sup \{1, \|x - x_1\|, \dots, \|x - x_{N-1}\|\}$, on a $1 \leq \alpha < +\infty$ et $\|x - x_n\| \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que l'on a $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \leq 2\alpha$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, si bien que S est borné, on a en fait prouvé que $S \subset B(x, \alpha)$.
2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Donc il existe $n_0 > 0$, tel que $\|x_n - x_m\| < 1$ si $n, m > n_0$, d'où il s'ensuit que

$$\|x_1 - x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n_0} \|x_k - x_{k+1}\| + 1 = M, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. Soit $x_n \longrightarrow x_0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel $n_0(\varepsilon)$, tel que

$$\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tous les } n > n_0(\varepsilon).$$

Alors

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_0\| + \|x_0 - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Définition 1.4.3 *Sous-suite ou suite extraite.* On dira qu'une suite $(v_k)_{k \in D} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite s'il existe une application strictement

croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\{u_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\} = \{v_k, k \in D\}$.

Exemple 1.4.1 Soit la suite $(f_n)_n, n \geq 2$, définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nt + (1 - \frac{1}{2}n) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais n'est pas convergente dans E

En effet,

$$\begin{aligned} \|f_{n+p} - f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_{n+p}(t) - f_n(t)| dt = \int_0^1 |f_{n+p}(t) - f_n(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+p} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \leq \frac{1}{2n} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil + 1$ (où $[x]$ désigne la partie entière du réel x), et pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice Montrer que si $f : E \rightarrow F$, une application entre deux espaces vectoriels normés, uniformément continue et $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E alors $(f(u_n))_n$ est de Cauchy.

Solution

On a f est uniformément continue, ce qui signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E, \|x - y\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Or, comme $(u_n)_n$ est de Cauchy dans E , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, \forall m > N :$
 $\|u_n - u_m\|_E < \delta.$

Par application de l'uniforme continuité de f , on obtient :

$$\|f(u_n) - f(u_m)\|_F < \varepsilon.$$

On a montré que $(f(u_n))_n$ est de Cauchy dans F , ce qui conclut la démonstration.

1.4.2 Espaces complets

Définition 1.4.4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dira que E est un espace de Banach ou un espace complet si toute suite de Cauchy converge dans E .

1.4.3 Exemples des espaces de Banach

Exemple 1.4.2 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.

Preuve : C'est une conséquence du théorème suivant lequel toute suite croissante majorée est convergente. En effet si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} alors elle est bornée. Posons $v_k = \inf \{u_n, n \geq k\}$ alors

$$v_k \leq v_{k+1} \leq M = \sup_j |u_j| < +\infty ; \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = l = \sup_k v_k \in \mathbb{R}$$

De plus $\forall k$ il existe $\varphi(k) \geq k$ tel que

$$v_k \leq u_{\varphi(k)} \leq l + \frac{1}{k+1} \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{\varphi(k)} = l.$$

Ainsi, toute la suite de Cauchy est convergente.

Exemple 1.4.3 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace de Banach.

Exemple 1.4.4 En utilisant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{[10^n \sqrt{2}]}{10^n},$$

montrer que \mathbb{Q} (muni de la distance issue de la valeur absolue) n'est pas complet.

Vérification que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En effet, pour $m > n$, on a

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{[10^n \sqrt{2}]}{10^n} - \frac{[10^m \sqrt{2}]}{10^m} \right|.$$

Puisque $\frac{[10^n \sqrt{2}]}{10^n}$ est une approximation de $\sqrt{2}$ avec n chiffres après la virgule, l'erreur commise est au plus 10^{-n} , et de même pour x_m avec $m > n$. Ainsi, on a :

$$|x_n - x_m| \leq 10^{-n}.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n, m > N$,

$$|x_n - x_m| \leq 10^{-n} < \varepsilon$$

Cela prouve que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{Q} .

Si cette suite convergerait vers une limite dans \mathbb{Q} , elle convergerait de même vers cette même limite dans \mathbb{R} . Par unicité de la limite, cela implique que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, contradiction. Donc cette suite est de Cauchy dans \mathbb{Q} et ne converge pas : \mathbb{Q} n'est pas complet.

Exemple 1.4.5 *L'espace $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{k})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est complet, $p \in [1, +\infty[$.*

Démonstration.

Montrons que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty[$. Soit donc $(x^k)_{k \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\ell^p(\mathbb{N})$. Pour tout $k \geq 0$, on a $x^k = (x_n^k)_{n \geq 0}$ avec $x_n^k \in \mathbb{k}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour $k \geq N$ et $k' \geq N$, on ait

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^{k'}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^k - x^{k'}\|_p < \varepsilon.$$

Soit $n \geq 0$. Pour tout k, k' , on a $|x_n^k - x_n^{k'}| \leq \|x^k - x^{k'}\|_p$, donc la suite $(x_n^k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy dans \mathbb{k} qui est de Banach, donc il existe $x_n \in \mathbb{k}$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_n^k = x_n$. Pour tout $M \geq 0$ et pour tout $k \geq N$ et $k' \geq N$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^M |x_n^k - x_n^{k'}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^k - x^{k'}\|_p < \varepsilon.$$

On fait tendre k vers l'infini, on obtient que :

$$\left(\sum_{n=0}^M |x_n^k - x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $N \geq 0$, d'où on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Soit $x = (x_n)_n \geq 0$, alors on a $x - x^k \in \ell^p(\mathbb{N})$. Comme $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel, alors $x = x - x^k + x^k \in \ell^p(\mathbb{N})$. De plus l'inégalité précédente montre que $(x^k)_{k \geq 0}$ converge vers x dans $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$.

Exemple 1.4.6 On note $E = C([-1, 1], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{C} . L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Démonstration.

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour cet espace vectoriel normé, et on veut prouver qu'il existe une fonction f pour laquelle

$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$. On fixe $x \in [-1, 1]$. De l'inégalité

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \|f_n - f_p\|_\infty,$$

on en déduit que la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{C} . Maintenant, \mathbb{C} est complet. La suite $(f_n(x))_n$ est donc convergente. On note $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une fonction f sur $[-1, 1]$. Il faut maintenant montrer que f est continue sur $[-1, 1]$ puis que (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On commence par fixer $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (f_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n, p \geq n_0 \implies \|f_n - f_p\|_\infty \leq \varepsilon$.

Si x est fixé dans $[-1, 1]$, on en déduit : $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$.

On fait alors tendre p vers $+\infty$. On obtient : $\forall x \in [-1, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Ceci signifie exactement

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$, ce qui montre d'une part que f est continue, et d'autre part que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 1.4.1 Soit $E = C^1([-1, 1])$ l'espace des fonctions complexes continûment dérivables sur $[-1, 1]$.

(1) On munit E de la norme uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Banach (On pourra utiliser la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$).

(2) On munit E de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Solution On utilise la suite proposée en montrant qu'elle est de Cauchy et non convergente dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

De manière évidente, $f_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Notons f , $f(x) = |x|$.

$$\text{Pour tout } x \in [-1, 1], |f_n(x) - f_m(x)| = \frac{\left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}}} \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right).$$

Alors $\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0$, lorsque $n, m \rightarrow +\infty$. Et

$$\text{pour tout } x \in [-1, 1], |f_n(x) - f(x)| = \frac{\left| x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2 \right|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. S'il existe $g \in E$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$, on a en particulier pour tout $x \in [-1, 1]$, $f_n(x) \rightarrow g(x)$ et par suite $f = g$. Mais $f \notin E$. Donc, la suite (f_n) n'est pas convergente dans E .

Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$, alors les deux suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(f_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont de Cauchy dans $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Les règles usuelles d'échange limite-dérivation (la convergence uniforme de la suite des dérivées et la convergence en un point de la suite des fonctions entraînent la « dérivation terme à terme » de la suite) permettent d'assurer qu'il existe $f \in C^1$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n' = f'$, au sens de $\|\cdot\|_\infty$. Donc $f_n \rightarrow f$ au sens de $\|\cdot\|$, et $(E, \|\cdot\|)$ est complet (espace de Banach).

Proposition 1.4.2 $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces normés et $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ l'espace normé produit. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) E est un espace de Banach.
- (ii) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, E_j est un espace de Banach.

Proposition 1.4.3 (des ensembles complets)

1. Toute partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.
2. Toute partie fermée d'une partie complète d'un espace vectoriel normé est complète.

Démonstration

1. Soit $F \subset E$ complète. Soit $(x_n)_n \subset A$ une suite convergente dans E , c'est-à-dire qu'il existe $a \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Ainsi, $(x_n)_n$ est de Cauchy dans F et A étant complète, la suite de Cauchy converge dans F , donc il existe $b \in F$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$. Ainsi,

$$\|a - b\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - b\| \longrightarrow 0.$$

Donc $a = b$.

2. Soit un B un sous-ensemble fermé d'une partie de $F \subset E$ complète. Soit $(b_n)_n \subset B$ une suite de Cauchy de B , alors comme $B \subset A$, c'est une suite de Cauchy de A , il existe $b \in A$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Or B est un fermé de A , donc $b \in B$.

Proposition 1.4.4 (Suite extraite)

1. Si une suite extraite d'une suite de Cauchy est convergente alors toute la suite converge vers la même limite que la sous-suite.
2. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Démonstration

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_\varepsilon \implies \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Notons $y_p = x_{n(p)}$, où $(n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-suite croissante de \mathbb{N}^* . Il existe un entier $P(\varepsilon)$ tel que

$$p > P(\varepsilon) \implies n(p) > N(\varepsilon) \text{ et } \|y_p - y\| \leq \varepsilon.$$

Utilisons ceci pour comparer y à x_n pour n assez grand. Soit donc $n > N(\varepsilon)$ et $p > P(\varepsilon)$.

Nous avons

$$\|y - x_n\| \leq \|y - y_p\| + \|y_p - x_n\| \leq 2\varepsilon$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$.

2. Il s'agit de fabriquer une sous-suite de (x_n) de Cauchy. Pour ceci on utilise le caractère de Cauchy de la suite (x_n) pour $\varepsilon_p = 2^{-p}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $j, k \geq N_p$, $\|x_j - x_k\| \leq 2^{-p}$. On pose

$$m_p = \max(N_1, \dots, N_p) + p \text{ et } y_p = x_{m_p}.$$

Alors, la suite $(m_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et, comme $\min(m_p, m_{p+1}) \geq N_p$, on a $\|y_{p+1} - y_p\| \leq 2^{-p}$.

Théorème 1.4.1 *Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si chaque série absolument convergente converge en norme.*

Démonstration

Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ une série absolument convergente. Notons $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$ et $T_N = \sum_{n=1}^N \|x_n\|$.

La clé est l'inégalité suivante, conséquence évidente de l'inégalité triangulaire :

$$q \geq p \implies \|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\| = T_q - T_p$$

Alors, si la série est absolument convergente, $T_q - T_p \longrightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow \infty$, et $S_q - S_p \longrightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow +\infty$.

Ainsi (S_N) est de Cauchy et donc convergente.

Soit une suite de Cauchy arbitraire $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, il s'agit de montrer qu'elle est convergente.

Supposons en revanche que toutes les séries absolument convergentes convergent. Choisissons pour chaque j un indice n_j de sorte que

$$m, n \geq n_j \text{ et } \|x_m - x_n\| < 2^{-j}.$$

Si $x_0 = 0$, nous avons

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^k (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}).$$

Par l'inégalité triangulaire la série $\sum_{j=1}^k (x_{n_j} - x_{n_{j-1}})$ converge absolument. Par conséquent, x_{n_k} converge vers une certaine limite y .

Pour voir que $(x_n)_n$ converge vers y , nous notons que pour $n \geq n_k$ et k assez grand, nous avons

$$\|x_n - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$$

et donc

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\| \leq 2^{-k} + 2^{-k} \leq 2^{-(k-1)}$$

et donc $x_n \rightarrow y$.

1.4.4 Espace compact

Définition 1.4.5 Soit (E, d) un espace métrique.

1. Un recouvrement de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que $E = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fini de E .
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E . Si $J \subset I$ tel que $E = \bigcup_{i \in J} A_i$, on dit que $(A_j)_{j \in J}$ est un sous-recouvrement de $(A_i)_{i \in I}$. Si de plus, J est fini, on dit alors que $(A_j)_{j \in J}$ est un sous-recouvrement fini de $(A_i)_{i \in I}$.
3. Un recouvrement ouvert de E est une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de E telle que $E = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Définition 1.4.6 Un espace métrique (E, d) est compact si de tout recouvrement ouvert de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de E telle que $E = \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe un sous ensemble

fini J de I tel que $E = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Définition 1.4.7 Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E .

1. On dit que A est compacte si A , munie de la topologie induite par celle de E , est un espace compact.
2. On dit que A est relativement compacte si \bar{A} est compact.

Corollaire 1.4.1 Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) A est relativement compacte.
- (ii) Il existe une partie compacte de E contenant A .
- (iii) Toute suite dans A possède une sous-suite convergente dans E .

Définition 1.4.8 Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors A est un sous ensemble relativement compact ou précompact si \bar{A} est compact en lui même.

L'ensemble A est compact en lui même si et seulement si chaque partie infinie de A possède un point d'accumulation dans E .

Espace localement compact

Définition 1.4.9 L'espace métrique (E, d) est localement compact si pour tout $x \in E$ il existe un ensemble ouvert précompact contenant x .

1.4.5 Exercices

Exercice 1.4.2 Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On considère sur E les normes suivantes:

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ N_2(f) &= \|f\|_\infty + \int_0^1 |f'(t)| dt \end{aligned}$$

1. Montrer que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

2. Trouver une suite de Cauchy dans (E, N_2) non convergente. En déduire que (E, N_2) n'est pas de Banach.

Exercice 1.4.3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour tout $P \in E$, on pose:

$$\|P\|_1 = \int_a^b |P(t)| dt \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |p(t)| .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E .
2. Soit $(P_k)_{k \geq 0}$ une suite bornée dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer que l'on peut en extraire une sous-suite convergente dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 1.4.4 Soit X un espace normé et Y un sous-espace linéaire fermé de X , tel que Y , muni de la norme induite, est complet, et que l'espace quotient X/Y , muni de la norme quotient, est également complet. Prouver que X est un espace complet.

Chapter 2

Applications linéaires continues

2.1 Applications continues

Théorème 2.1.1 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{k} . On dit que l'application $T : E \longrightarrow F$

est linéaire si

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : T(x + y) &= Tx + Ty \\ T(\lambda x) &= \lambda Tx.\end{aligned}$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires définies de E dans F , cet ensemble constitue une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{k} quand on le munit par les deux lois de composition usuelles suivants:

$$\begin{aligned}L(E, F) \times L(E, F) &\longrightarrow L(E, F) \\ (f, g) &\longmapsto f + g,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{k} \times L(E, F) &\longrightarrow L(E, F) \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda f.\end{aligned}$$

Exemple 2.1.1 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et $T : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$, $T(f) = fg$ où g est fixé. T est linéaire car,

soient $f, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f + h)g = (\lambda f + h)g = \lambda fg + hg = \lambda T(f) + T(g)$.

Exemple 2.1.2 Soit $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{k})$. Alors l'application

$$\begin{aligned} T_x & : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow \mathbb{k} \\ y & = (y_n)_{n \geq 0} \longmapsto T_x(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k \end{aligned}$$

est linéaire. En effet, soient $z = (z_n)_{n \geq 0}$, $y = (y_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{k})$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, on a
 $T_x(\lambda z + y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k (\lambda z_k + y_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z_k + \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k = \lambda T_x(z) + T_x(y)$.

Définition 2.1.1 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Une application $T : E \longrightarrow F$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in E$, on ait
 $\|T(x) - T(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$.

La plus petite constante k vérifiant cette inégalité est appelée la constante de Lipschitz de T .

Exemple 2.1.3 Soit $T : E \longrightarrow E$, $T(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$,

$$\begin{aligned} T(x) - T(y) & = \frac{x}{1+\|x\|} - \frac{y}{1+\|y\|} = \frac{x-y}{1+\|x\|} + y \left(\frac{1}{1+\|x\|} - \frac{1}{1+\|y\|} \right) \\ & = \frac{x-y}{1+\|x\|} + y \left(\frac{\|y\| - \|x\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \right) \\ & \leq \|x-y\| + \left(\frac{\|y\| - \|x\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \right) \leq \|x-y\| + (\|x\| - \|y\|) \leq 2\|x-y\|. \end{aligned}$$

Définition 2.1.2 Si E, F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ est dite uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|T(x) - T(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 2.1.3 $T : E \longrightarrow F$ est appelée un homéomorphisme si

- a) T est une bijection continue de E sur F ;
- b) $T^{-1} : F \longrightarrow E$, est continue. S'il existe un homéomorphisme entre E et F , E, F sont dits homéomorphes.

Exemple 2.1.4 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $r > 0$. considérons l'application suivante:

$$\begin{aligned} T & : B(0, r) \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \frac{x}{r - \|x\|} \end{aligned}$$

T est un homéomorphisme. En effet, soient $x \in B(0, r)$ et $y \in E$, alors on a

$$\frac{x}{r - \|x\|} = y \iff x = \frac{ry}{1 + \|y\|}.$$

Donc T est bijective et on a $T^{-1}(y) = \frac{ry}{1 + \|y\|}$. Comme T et T^{-1} sont des composées d'applications continues, alors T et T^{-1} sont continues. Par conséquent, T est un homéomorphisme.

Proposition 2.1.1 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé.

1. L'application φ de $E \times E$ dans E , définie par $\varphi(x + y) = x + y$, est 2-lipschitzienne.
2. L'application ψ de $\mathbb{k} \times E$ dans E , définie par $\psi(\lambda, x) = \lambda x$, est continue.

Démonstration.

Etape 1. Soient (x, y) et (u, v) dans $E \times E$. Alors

$$\|(x + y) - (u + v)\| \leq \|x - u\|_E + \|y - v\|_E \leq 2\|(x, y) - (u, v)\|_{E \times E},$$

ce qui montre l'assertion pour φ . En particulier, φ est uniformément continue.

Etape 2. Soit (λ_0, x_0) un point donné de $\mathbb{k} \times E$. Alors, si $(\lambda, x) \in \mathbb{k} \times E$,

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\|_E = \|\lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x\|_E \leq |\lambda_0| \|x - x_0\|_E + |\lambda_0 - \lambda| \|x\|_E,$$

et on voit que, si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ est donné, il suffit de choisir $\alpha > 0$ tel que $\alpha |\lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, puis $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\beta (\|x_0\| + \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour que $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\|_E < \varepsilon$ dès que $\|x - x_0\|_E < \alpha$ et $|\lambda_0 - \lambda| < \beta$. Ceci prouve la continuité de ψ au point (λ_0, x_0) (il n'y a clairement pas continuité uniforme dans ce cas).

2.1.1 Formes linéaires

Définition 2.1.4 Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{k}$. L'espace dual de E est l'espace vectoriel $E^* = L(E, \mathbb{k})$ de toutes les formes linéaires sur E . Un hyperplan de E est un sous-espace qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ .

Théorème 2.1.2 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \rightarrow F$ une application, et a un point de E . T est dite continue en le point $a \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E : \|x - a\|_E < \eta \implies \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon .$$

Théorème 2.1.3 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i. Existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$, on ait $\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$.
- ii. T est bornée sur la sphère $S = \{x \in E_1; \|x\|_1 = 1\}$.
- iii. T est lipschitzienne.
- iv. T est uniformément continue.
- v. T est continue.
- vi. T est continue en 0.

Démonstration. Il est clair que (i) \implies (ii). Montrons que (ii) \implies (iii). Par hypothèse, il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait $\|T(x)\|_F \leq k$. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, alors on a $\left\| T \left(\frac{x-y}{\|x-y\|_E} \right) \right\|_F \leq k$. Or on a :

$$\left\| T \left(\frac{x-y}{\|x-y\|_E} \right) \right\|_F = \left\| \frac{1}{\|x-y\|_E} (T(x) - T(y)) \right\|_F = \frac{1}{\|x-y\|_E} \|T(x) - T(y)\|_F$$

d'où $\|T(x) - T(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$. Donc T est lipschitzienne. Les implications (iii) \implies (iv) \implies (v) \implies (vi) sont claires. Il reste à montrer que (vi) \implies (i). Par hypothèse, l'application T est continue en 0, et on a $T(0) = 0$ car T est linéaire, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x\|_E \leq \eta$, on ait $\|T(x)\|_F \leq \varepsilon$.

Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, alors $\left\| \frac{\eta x}{\|x\|_E} \right\|_E = \eta$, donc on a $\left\| T \left(\frac{\eta x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq \varepsilon$.

Or on a $\left\| T \left(\frac{\eta x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F = \left\| \frac{\eta}{\|x\|_E} T(x) \right\|_F = \frac{\eta}{\|x\|_E} \|T(x)\|_F$, d'où $\|T(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta} \|x\|_E$. Il suffit maintenant de prendre $M = \frac{\varepsilon}{\eta}$ pour avoir (i).

Théorème 2.1.4 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. La meilleure constante apparaissant dans la condition (i) du théorème précédent s'appelle la norme de T et se note $\|T\|$. Autrement dit, on a

$$\|T\| = \inf \{ M > 0; \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E \}.$$

Théorème 2.1.5 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Alors on a :

1. $\|T\| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$
2. Pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$.

Démonstration.

1. Puisque T est continue, alors l'ensemble

$$B = \{ M > 0; \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E \}$$

est non vide (et minoré dans \mathbb{R}^+), donc $\|T\| = \inf \{ M ; M \in B \}$ existe dans \mathbb{R}^+ . Soit $M \in B$, alors pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E$, donc $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F \leq M$.

Par conséquent, on a $\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F \leq \inf \{ M ; M \in B \} = \|T\|$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}, \text{ donc pour tout } x \in E, \text{ on a } \|T(x)\|_F \leq \left(\sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \right) \|x\|_E$$

d'où $\|T\| \leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$, alors on a :

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| \frac{1}{\|x\|_E} T(x) \right\|_F = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F \leq \|T\|.$$

Donc on a $\sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F \leq \|T\|$. Par conséquent, on a $\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$. On a $\sup_{\|x\|_E < 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \|T\|$.

Il reste à montrer l'inégalité inverse. Soit $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$, on

a $\|(1 - \frac{1}{n})x\|_E = (1 - \frac{1}{n})\|x\|_E < 1$, d'où

$(1 - \frac{1}{n})\|T(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E < 1} \|T((1 - \frac{1}{n})x)\|_F$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|T(x)\|_F \leq$

$\sup_{\|x\|_E < 1} \|T(x)\|_F$. Par conséquent, on a $\|T\| \leq \sup_{\|x\|_E < 1} \|T(x)\|_F$.

2. Pour tout $x \neq 0$, on a $\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|T\|$, donc pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$.

Exemple 2.1.5 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{K})$. On définit l'application linéaire $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ par

$$\forall f \in E, Tf(x) = \int_0^x f(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

Pour tout $f \in E$, on a $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, donc $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\|T\| \leq 1$. De plus, $\|T\| = 1$ car si $f \equiv 1$, on obtient $\|f\|_\infty = 1$ et $\|Af\|_\infty = 1$.

Exemple 2.1.6 Soit $C_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur \mathbb{R} . muni de la norme uniforme. On considère l'application linéaire

$T : C_b(\mathbb{R}) \longrightarrow C_b(\mathbb{R})$ définie par $(Tf)(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$, l'application T est continue et $\|T\| = 5$.

En effet, on a $|(Tf)(x)| \leq 3|f(x)| + 2|f(x+4)| \leq 3\|f\|_\infty + 2\|f\|_\infty = 5\|f\|_\infty$, donc $\|Tf\|_\infty \leq 5\|f\|_\infty$, de sorte que T est continue et $\|T\| \leq 5$.

Si l'on prend une fonction $f \in C_b(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ pour $0 \leq x \leq 4$, on aura $(Tf)(0) = 5$, donc $\|Tf\|_\infty = 5$. Il en résulte que $\|T\| = 5$.

Proposition 2.1.2 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E, G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F, G)} \|f\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Démonstration. On sait que $g \circ f$ est linéaire. De plus, pour tout $x \in E$,

$$\|(g \circ f)(x)\|_G \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f(x)\|_F \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E ,$$

ce qui montre que $g \circ f$ est continue et que $\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Théorème 2.1.6 Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de E dans F . Si F est complet, $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi complet

Démonstration. Supposons F complet, et soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_n$ est de Cauchy dans F , en vertu de l'inégalité:

$$\|T_n(x) - T_k(x)\|_F \leq \|T_n - T_k\| \|x\|_E \quad (I_1)$$

Cette suite converge donc vers un élément $T(x) \in F$. Il est facile de voir qu'alors $T : E \rightarrow F$ est linéaire. Il est continue car:

$$\|Tx\|_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\|_F \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \|T_n\| \|x\|_E \leq \left(\sup_{n \geq 1} \|T_n\| \right) \|x\|_E$$

et car $\left(\sup_{n \geq 1} \|T_n\| \right) < +\infty$ puisque toute suite de Cauchy est bornée.

Pour finir, en faisant tendre k vers l'infini, on obtient :

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \|T_n - T_k\| \right) \|x\|_E$$

pour tout $x \in E$, de sorte que $\|T_n - T\| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \|T_n - T_k\|$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque $(T_n)_n$ est de Cauchy. Donc $(T_n)_n$ converge vers T pour la norme d'application.

En particulier, si $F = \mathbb{k}$, $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ est toujours complet.

Théorème 2.1.7 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \rightarrow F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. T est continue sur E ,
2. Pour toute partie ouverte B de $(F, \|\cdot\|_F)$, l'image réciproque $A = T^{-1}\{B\}$ est une partie ouverte de $(E, \|\cdot\|_E)$.

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire: Supposons T continue, soit B un ouvert de F , et posons $A = T^{-1}(B)$. Soit $a \in A$. T est continue en a , or B est un voisinage de $T(a)$, donc A doit être un voisinage de a , ainsi A est un voisinage de chacun de ses points, donc c'est un ensemble ouvert.

Montrons maintenant que la condition est suffisante: Supposons que l'image réciproque par T de tout ouvert de F soit un ouvert de E . Alors, pour tout point a de E , soit \mathcal{V} un voisinage de $T(a) = b$ dans F . Alors \mathcal{V} contient un ouvert B contenant b , donc l'image réciproque $T^{-1}(\mathcal{V})$ contient $T^{-1}(B)$ qui est un ouvert contenant a . Alors $T^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage de a , ce qui prouve que l'application T est continue en a .

Théorème 2.1.8 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. T est continue sur E ,
2. Pour toute partie fermée V de $(F, \|\cdot\|_F)$, l'image réciproque $U = T^{-1}\{V\}$ est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_E)$.

Démonstration.

On passe du théorème précédent à celui-ci en remplaçant les parties ouvertes considérées dans E et dans F par leurs parties complémentaires fermées.

Exemple 2.1.7 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

A est une partie fermée de E . En effet, posons, pour $f \in E$, $\varphi(f) = f(0)$ et $\psi(f) = \int_0^1 f(t) dt$. Alors φ et ψ sont deux formes linéaires. De plus, elles sont continues car, pour tout $f \in E$,

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \|f\|_\infty \\ |\psi(f)| &\leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

De plus, on a $A = \varphi^{-1}\{0\} \cap \psi^{-1}\{[1, +\infty[\}$. Comme images réciproques de fermés par une application continue, $\varphi^{-1}\{0\}$ et $\psi^{-1}\{[1, +\infty[\}$ sont fermés. Leur intersection est donc un fermé et A est bien fermé.

2.1.2 Dual topologique d'un e.v.n.

Définition 2.1.5 $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E' et est appelé le dual de E . C'est toujours un espace de Banach. La norme de $\varphi \in E'$ est donc définie par:

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{E'} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|T(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |T(x)| = \sup_{\|x\|_E = 1} |T(x)|$$

Exemple 2.1.8 Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme.

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \int_{-1}^1 \frac{tf(t)}{1+t^2} dt$$

φ est continue car: il existe une constante $c \geq 0$ telle que : $|\varphi(f)| \leq c \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$. En effet

$$|\varphi(f)| = \left| \int_{-1}^1 \frac{tf(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \int_{-1}^1 \left| \frac{tf(t)}{1+t^2} \right| dt \leq \int_{-1}^1 \frac{|tf(t)|}{1+t^2} dt.$$

Utilisant $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \int_{-1}^1 \frac{|t|}{1+t^2} dt.$$

Puisque $\frac{|t|}{1+t^2}$ est une fonction paire, on peut écrire :

$$|\varphi(f)| \leq 2 \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = 2 \|f\|_\infty \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2} \right]_0^1 = \ln(2) \|f\|_\infty$$

Par conséquent, $|\varphi(f)| \leq \ln(2) \|f\|_\infty$. Cela montre que φ est continue et que la constante c qui borne $|\varphi(f)|$ est $\ln(2)$.

Proposition 2.1.3 1. *Un sous-espace H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une forme linéaire φ non nulle de E^* telle que $H = \ker \varphi$.*

2. Une forme linéaire non nulle est complètement déterminée par la donnée de l'image d'un vecteur n'appartenant pas à son noyau.

3. Deux formes lineaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même hyperplan noyau.

Proposition 2.1.4 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel norme et φ une forme linéaire non nulle sur E . On note $H = \ker \varphi$ son hyperplan noyau. Alors, H est fermé, si et seulement si φ est continue.

Démonstration. Supposons que $\varphi \in E^*$ soit continue. Alors, $H = \varphi^{-1}\{0\}$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Supposons maintenant que H soit fermé. Comme φ est non nulle et linéaire, il existe $a \in E \setminus H$ tel que $\varphi(a) = 1$. Considérons l'hyperplan translaté $a + H$. Il est fermé puisque les translations sont des homeomorphismes, et $0 \notin a + H$ (car sinon $a \in H$). Il existe donc $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que la boule $B(0, \varepsilon)$ ne rencontre pas $a + H$. Mais ceci montre que $|\varphi(x)| < 1$ pour tout x de $B(0, \varepsilon)$. En effet, s'il existait $x \in B(0, \varepsilon)$ tel que $\varphi(x) \geq 1$ le point $y = \frac{x}{\varphi(x)}$ serait dans $B(0, \varepsilon)$ et vérifierait $\varphi(y) = 1$, ce qui entraînerait $\varphi(y - a) = 0$, soit $y - a \in H$, ce qui est contradictoire. L'application φ est bornée sur B , donc aussi sur la boule unité par homogénéité, donc elle est continue.

Exemple 2.1.9 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(\mathbb{k}, |\cdot|)$ deux espaces normés sur le corps $\mathbb{k}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et soit $T : E \rightarrow \mathbb{k}$ une application linéaire continue sur E . On a

$\ker T = \{u \in E \mid T(u) = 0\} = T^{-1}\{0\}$ est fermé dans E .

2.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 2.2.1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) E est de dimension finie.
- (ii) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
- (iii) Toutes les formes linéaires sur E sont continues.

Démonstration

Montrons d'abord l'implication (i) \implies (ii). Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , où n est la dimension de E . Pour tout $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, alors $\|\cdot\|_\infty$ est une

norme sur E . On va montrer que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. On a $\|x\| = \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x\|_\infty$. Soit $a = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ alors $a > 0$, et pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \leq a \|x\|_\infty$. Comme l'ensemble $\left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n, \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = 1 \right\}$, est compact dans $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$. On a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|_\infty$, donc l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans \mathbb{R}^+ . Par conséquent, il existe $x_0 \in S(0, 1)$ tel que $\inf_{\|x\|_\infty=1} \|x\| = \|x_0\| > 0$. Autrement dit, il existe $b > 0$ tel que $b \leq \|x\|$ si $\|x\|_\infty = 1$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$, alors on a $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_\infty = 1$, d'où $b \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|$. Or on a $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| = \frac{1}{\|x\|_\infty} \|x\|$, donc $b \|x\|_\infty \leq \|x\|$. Par conséquent, il existe $b > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $b \|x\|_\infty \leq \|x\|$. Donc les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. On en déduit (ii).

Montrons l'implication (ii) \implies (iii). Soit $f : E \rightarrow \mathbb{k}$ une forme linéaire quelconque sur E . Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|' = |f(x)| + \|x\|$. Alors $\|\cdot\|'$ est une norme sur E . Par hypothèse toutes les normes sur E sont équivalentes, donc il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|' \leq a \|x\|$, d'où $|f(x)| \leq a \|x\|$. Par conséquent, f est continue.

Pour montrer l'implication (iii) \implies (i), il suffit de montrer que si E est de dimension infinie, alors il existe une forme linéaire non continue sur E . On suppose donc $\dim(E) = +\infty$, et soient $(e_n)_{n \geq 1}$ une suite infinie de vecteurs de E linéairement indépendants et V le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_n)_{n \geq 1}$. Soient W un supplémentaire algébrique de V dans E et P_V la projection sur V parallèlement à W . On définit une forme linéaire φ sur V par $\varphi(e_n) = n \|e_n\|$, donc on a $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i i \|e_i\|$. Soit $f = \varphi \circ p$, alors f est une forme linéaire sur E , et on a $f(e_n) = \varphi(e_n) = n \|e_n\|$, d'où $\frac{|f(e_n)|}{\|e_n\|} = n$. Donc on a $\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = +\infty$. Par conséquent, f n'est pas continue.

Corollaire 2.2.1 *Tout espace normé de dimension finie n est isomorphe à \mathbb{k}^n , muni de l'une de ses normes usuelles.*

Corollaire 2.2.2 *Tout espace normé de dimension finie est complet.*

Corollaire 2.2.3 *Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé dans E .*

Démonstration. En effet, si n est la dimension de A , il existe un isomorphisme linéaire ϕ de \mathbb{R}^n sur A . Comme ϕ est continu, ϕ est uniformément continu et comme \mathbb{R}^n est complet, $\phi(\mathbb{R}^n) = A$ est complet.

Proposition 2.2.1 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace norme de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace norme quelconque. Toute application linéaire f de E dans F est continue.

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et N_1 l'application définie pour tout $x \in E$ par

$N_1(x) = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1$, où $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les composantes de x dans la base \mathcal{B} . On vérifie que N_1 est une norme sur E . Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|_F = \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\|f(e_i)\|_F) N_1(x).$$

Comme E est de dimension finie, N_1 est équivalente à $\|\cdot\|_E$, et l'inégalité précédente prouve la continuité de f car f est linéaire.

Théorème 2.2.2 (Riesz). Un espace norme est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.

Corollaire 2.2.4 Un espace norme $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée $B'(0, 1)$ est compacte.

Démonstration. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut choisir une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E et introduire une nouvelle norme sur E définie, pour tout $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. La boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ notée B_∞ est compacte. En effet, elle est homéomorphe à la boule unité fermée de $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est compacte (considérer l'homéomorphisme $\phi: E \rightarrow \mathbb{k}^n$

qui, à tout $x \in E$, associe ses composantes dans la base \mathcal{B}). Comme toutes les normes sont équivalentes sur E , B_∞ est compacte pour $\|\cdot\|$. De plus, il existe $\alpha \in \mathbb{k}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{k}$, $\|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty$. Donc, $B'(0, 1)$ est inclus dans l'image αB_∞ par l'homothétie de rapport α de B_∞ . Mais B_∞ est compacte dans $(E, \|\cdot\|)$ et les homothéties vectorielles sont

continues dans $(E, \|\cdot\|)$. On en déduit que αB_∞ est compacte dans $(E, \|\cdot\|)$. Comme $B'(0, 1)$ est un sous-ensemble fermé de αB_∞ , il est alors aussi nécessairement compact.

Pour montrer la réciproque, on suppose que la boule unité fermée $B'(0, 1)$ est compacte. D'après le théorème de Riesz, il suffit de montrer que E est localement compact. Soit donc $x \in E$. La boule fermée $B'(x, 1)$ de rayon 1 centrée en x est l'image par la translation t_x de vecteur x de $B'(0, 1)$. Comme t_x est continue et que $B'(0, 1)$ est compacte par hypothèse, on en déduit que $B'(x, 1)$ est compact. Donc, E est localement compact.

Nous pouvons maintenant énoncer une caractérisation des compacts en dimension finie.

Corollaire 2.2.5 *Les compacts d'un espace norme $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie sont exactement les fermés bornés.*

2.3 Exercices

Exercice 2.3.1 *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. On définit $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ par*

$$Tu = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Justifier que T est continue et calculer sa norme.

Exercice 2.3.2 *Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Soit l'application φ de $(E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ défini par

$$(\varphi f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Démontrer que φ est continue.
2. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0, 1]$.
Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\varphi(f_n)\|_1$.
3. Déterminer $\|\varphi\|$.

Exercice 2.3.3 Soit $c_0 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{k} / \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \right\}$. On considère la forme linéaire $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$. définie par $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$ Montrer qu'elle est continue et calculer sa norme.

Exercice 2.3.4 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2}$, $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (F, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

1. Montrer que T est continue.

Chapter 3

Espaces de Hilbert

3.1 Produit scalaire

Dans tout ce chapitre \mathbb{k} désigne ou bien le corps des nombres réels \mathbb{R} ou bien le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

Définition 3.1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels (resp. des complexes); une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) sur E est une application B de $E \times E$ dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) vérifiant

$$\begin{aligned} B(a_1x_1 + a_2x_2, y) &= a_1B(x_1, y) + a_2B(x_2, y) \\ B(x, a_1y_1 + a_2y_2) &= \overline{a_1}B(x, y_1) + \overline{a_2}B(x, y_2). \end{aligned}$$

On dit que B est symétrique (resp. hermitienne) si $B(x, y) = B(y, x)$, (resp. $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$).

On dit que B est positive si en outre $B(x, x) \geq 0$.

On écrit $\langle x, y \rangle$ au lieu de $B(x, y)$.

Définition 3.1.2 (Produit scalaire hermitien). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = (\mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R})$. On appelle produit scalaire (hermitien) sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. i.e. toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{k}$, qui possède les propriétés suivantes:

pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$

i. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

- ii. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
- iii. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- iv. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$;
- v. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$;

Remarques :

Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, alors le produit scalaire est bilinéaire et symétrique.

Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, alors le produit scalaire est sesquilinéaire et hermitien.

Définition 3.1.3 (*Espace préhilbertien réel, espace euclidien*). On appelle espace préhilbertien réel le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si E est de dimension finie, l'espace est dit euclidien.

Définition 3.1.4 (*Espace préhilbertien complexe, espace hermitien*). On appelle espace préhilbertien complexe le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si E est de dimension finie, l'espace est dit hermitien.

Propriétés: On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :

- (1) $\langle 0x, x \rangle = 0$
- (2) $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- (2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Exemple 3.1.1 On considère $E = \mathbb{C}^n$, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Soit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Montrer que l'application ci-dessus définit un produit scalaire sur \mathbb{C}^n .

En effet, pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\text{i. } \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k = \sum_{k=1}^n \overline{y_k \bar{x}_k} = \overline{\sum_{k=1}^n y_k \bar{x}_k} = \overline{\langle y, x \rangle}$$

- ii. $\langle \lambda x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda x_k \overline{y_k} = \lambda \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} = \lambda \langle x, y \rangle$
- iii. $\langle x + y, z \rangle = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) \overline{z_k} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{z_k} + \sum_{k=1}^n y_k \overline{z_k}$
- iv. $\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \geq 0$
- v. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0 \implies \forall k = 1 \dots n, 0 \leq |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0 \implies \forall k = 1 \dots n, |x_k|^2 = 0,$

d'où $\forall k = 1 \dots n, x_k = 0$ donc $x = 0$.

Exemple 3.1.2 On considère $E = C([0, 1], \mathbb{C})$. Pour $f, g \in E$, on définit

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx,$$

cette formule définit un produit scalaire sur E .

En effet, pour tout $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

- i. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \overline{g(x)} \overline{f(x)} dx = \int_0^1 \overline{g(x) f(x)} dx = \overline{\langle g, f \rangle}$.
- ii. $\langle \lambda f, g \rangle = \int_0^1 \lambda f(x) \overline{g(x)} dx = \lambda \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \lambda \langle f, g \rangle$
- iii. $\langle f + g, h \rangle = \int_0^1 (f(x) + g(x)) \overline{h(x)} dx = \int_0^1 f(x) \overline{h(x)} dx + \int_0^1 g(x) \overline{h(x)} dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
- iv. $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$ puisque $|f(x)|^2 \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, il en résulte que: $\langle f, f \rangle \geq 0$.
- v. $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0$. Or, une fonction continue qui est nulle presque partout sur un intervalle est nécessairement nulle.

Ainsi $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, ce qui implique $f = 0_E$.

Les propriétés étant vérifiées, la formule $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ définit bien un produit scalaire sur E .

Exemple 3.1.3 Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$, avec n dans \mathbb{N} et x_n dans \mathbb{k} , telles que $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < \infty$.

Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de l'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$, l'inégalité $2|x_i y_i| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$ est absolument convergente et on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} (|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2 \operatorname{Re}(x_i \bar{y}_i)) \leq 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (|x_i|^2 + |y_i|^2)$$

Ces inégalités montrent que $x + y$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$, celui-ci est donc un espace vectoriel. On pose, pour x et y dans $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$$

On vérifie que cela définit bien un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski s'écrivent

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i \bar{y}_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3.1.1 Propriétés élémentaires du produit scalaire

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Théorème 3.1.1 *Dans l'espace E , l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ pour tout } x \in E.$$

est une norme pour E .

Démonstration. Nous avons $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

De plus $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Enfin

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} \\
 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| \\
 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

d'où $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposition 3.1.1 *Pour tous $x, y \in H$*

- a. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$ (cas réel);
- b. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ (cas complexe).

Démonstration. Il suffit de développer :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$$

et utiliser le fait que $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2 \langle x, y \rangle$ dans le cas réel, et $= 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ dans le cas complexe.

Identités de polarisation.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, on a

$$2 \langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle,$$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire (non nécessairement hermitienne) on a

$$4 \langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle + i \langle x + iy, x + iy \rangle - i \langle x - iy, x - iy \rangle.$$

3.2 Espace préhilbertien complet

Définition 3.2.1 *Un espace préhilbertien réel (ou complexe) est un espace vectoriel E sur $\mathbb{k} = (\mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R})$ sur lequel est défini un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et muni de la norme induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Exemple 3.2.1 *Les espaces \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont des espaces préhilbertiens pour le produit scalaire dit usuel*

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{dans le cas réel.} \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{dans le cas complexe.}\end{aligned}$$

Théorème 3.2.1 *Pour tous $x, y \in E$:*

a. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

b. L'inégalité de Minkowski

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration.

Etant donné deux éléments x et y , on considère la fonction φ définie sur \mathbb{k} par $\varphi(\alpha) = \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle$. C'est une fonction à valeurs positives et par développement, elle s'écrit

$$\varphi(\alpha) = |\alpha|^2 \langle y, y \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle x, x \rangle$$

Supposons $\langle y, x \rangle = |\langle y, x \rangle| e^{i\theta}$ et soit $\alpha = t e^{-i\theta}$ avec t dans \mathbb{R} , et soit $\varphi(\alpha) = P(t)$. Ce qui précède montre que, pour tout réel t ,

$$P(t) = t^2 \langle y, y \rangle - 2t |\langle x, y \rangle| + \langle x, x \rangle \geq 0.$$

Si $\langle y, y \rangle = 0$ l'inégalité précédente ne peut avoir lieu pour tout réel t que si $\langle x, y \rangle = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est dans ce cas une égalité. Sinon, P est un polynôme du second degré qui reste positif en tout t réel ; il en résulte que son discriminant, à savoir

$|\langle x, y \rangle|^2 - \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle$, est négatif ce qui traduit précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De celle-ci on déduit

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

et en ajoutant $\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$ aux deux membres, on trouve

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \left[\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right]^2$$

En prenant la racine carrée des deux membres, on obtient l'inégalité de Minkowski.

Exemple 3.2.2 Dans l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \bar{y}_k$$

on a

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \bar{y}_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \bar{y}_k \right| \leq \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^2 \right].$$

Exemple 3.2.3 Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}.$$

Solution

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $f(x)$ et $g(x) = 1$:

$$\int_0^1 f(x) \cdot 1 dx \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (1)^2 dx}$$

d'où

$$\int_0^1 f(x) \cdot 1 dx \leq \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}.$$

Théorème 3.2.2 *Un produit scalaire est une fonction continuée sur $E \times E$, par rapport à la norme induite.*

Démonstration. Soient $x_0, y_0 \in E$ et les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telles que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ et $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \end{aligned}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

Proposition 3.2.1 (*Identité du parallélogramme*)

Pour tout x, y d'un espace préhilbertien E , on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On dit: Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de ses diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de ses cotés.

Démonstration. Il suffit, pour la preuve, d'effectuer le calcul suivant:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

et

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

l'addition, membre à membre, de ces deux égalités donne l'identité voulue.

Théorème 3.2.3 Soit E un espace normé. E est un espace préhilbertien si et seulement si pour tout $x, y \in E$, on a

$$(a) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Le produit scalaire est unique, et on a

$$(b) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire est montrée dans (3.2.1). Supposons donc qu'on ait (a) et soit $\langle x, y \rangle$ donné par (b).

i) Montrons d'abord que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

En posant $x = y$ dans (b), alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \frac{1}{4} (\|2x\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (2\|x\|^2 + i|1+i|\|x\|^2 - i|1-i|\|x\|^2) = \|x\|^2. \end{aligned}$$

ii) Montrons maintenant que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{k}$, donnée par (b) vérifie les conditions de produit scalaire

1. Évidemment $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\|y + ix\|^2 + i\|y - ix\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2) = \overline{\langle y, x \rangle}. \end{aligned}$$

Puisque d'après (b), on a

$$\operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, iy \rangle,$$

il suffit de montrer la linéarité de la première variable de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour la partie réelle.

Soient x_1, x_2 et $y \in E$ et posons $u_1 = \frac{(x_1+x_2)}{2}$; $u_2 = \frac{(x_1-x_2)}{2}$ et nous avons, en utilisant (b),

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \langle x_1, y \rangle + \operatorname{Re} \langle x_2, y \rangle &= \operatorname{Re} \langle u_1 + u_2, y \rangle + \operatorname{Re} \langle u_1 - u_2, y \rangle \\
 &= \frac{1}{4} [\|u_1 + u_2 + y\|^2 - \|u_1 + u_2 - y\|^2 + \|u_1 - u_2 + y\|^2 - \|u_1 - u_2 - y\|^2] \\
 &= \frac{1}{4} [\|u_1 + u_2 + y\|^2 + \|u_1 - u_2 + y\|^2] - \frac{1}{4} [\|u_1 + u_2 - y\|^2 + \|u_1 - u_2 - y\|^2] \\
 &= \frac{1}{2} [\|u_1 + y\|^2 - \|u_2\|^2] - \frac{1}{2} [\|u_1 - y\|^2 + \|u_2\|^2] \\
 &= \frac{1}{2} [\|u_1 + y\|^2 - \|u_1 - y\|^2] = 2 \operatorname{Re} \langle u_1, y \rangle = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{(x_1 + x_2)}{2}, y \right\rangle.
 \end{aligned}$$

D'autre par, en posant $u_1 = u_2$ nous obtenons

$$\operatorname{Re} \langle 2u_1, y \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle u_1, y \rangle$$

ce qui entraîne l'additivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par rapport à la première variable.

4. De l'additivité, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\langle nx, y \rangle = n \langle x, y \rangle$$

et

$$\left\langle \frac{x}{n}, y \right\rangle = \frac{1}{n} \langle x, y \rangle$$

ce qui entraîne pour $\lambda = \frac{n_1}{n_2}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ que

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad (**)$$

D'autre part puisque d'après (b)

$$\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$$

(*) rest vrai pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et en utilisant la continuité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (respectivement des normes) aussi pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il nous reste à montrer (*) pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Il suffit de le montrer pour $\lambda = i$ puisque nous avons montré que pour $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle ix, y \rangle.$$

d'après (b)

$$\begin{aligned} \langle ix, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|ix + iy\|^2 - i\|ix - iy\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x - iy\|^2 - \|x + iy\|^2 + i[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]) \\ &= i \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

et le théorème est établi.

Exemple 3.2.4 *L'espace normé $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas préhilbertien puisque la norme n'est pas induite par le produit scalaire. En effet, il existe deux fonctions $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tel que l'identité du parallélogramme n'est pas valide. On prend $f(t) = 1 - t$ et $g(t) = t$, alors*

$$\|f + g\|_\infty^2 = \left(\sup_{t \in [0, 1]} |1 - t + t| \right)^2 = 1, \quad \|f - g\|_\infty^2 = \|f\|_\infty^2 = \|g\|_\infty^2 = 1,$$

mais

$$2 = \|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 4$$

Exemple 3.2.5 *L'espace normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas préhilbertien puisque la norme n'est pas induite par le produit scalaire. En effet, Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ où $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$, donc*

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 &= \left(\max_{i=1,2} |x_i + y_i| \right)^2 + \left(\max_{i=1,2} |x_i - y_i| \right)^2 = 8, \\ &\neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 4 \end{aligned}$$

alors l'identité du parallélogramme n'est pas valide.

3.2.1 Espace de Hilbert

Définition 3.2.2 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire.*

Un espace de Hilbert est donc encore un espace de Banach, dont la norme provient d'un produit scalaire.

Exemples.

Exemple 3.2.6 *Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Lorsque le corps de base est réel, on dit que c'est un espace euclidien, et que c'est un espace hermitien lorsque le corps de base est complexe.*

Exemple 3.2.7 *L'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert.*

Démonstration. On a $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$ est un espace préhilbertien, il reste à montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est complet pour la norme associée au produit scalaire usuel. Soit donc (x_p) une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, avec

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots)$$

Par définition $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2$ tend vers zéro lorsque p et q tendent vers l'infini, donc a fortiori pour tout n fixé, la suite numérique

$(x_n^{(p)})$, $p \in \mathbb{N}$, est une suite de Cauchy, notons x_n sa limite et $x = (x_n)$ la suite ainsi définie.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour $p \geq n_0$ et $q \geq n_0$, on ait

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 < \varepsilon$$

Pour tout entier m , on aura a fortiori

$$\sum_{n=1}^m |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 < \varepsilon$$

comme il s'agit ici d'une somme finie, on peut faire tendre q vers l'infini et on obtient l'inégalité

$$\sum_{n=1}^m |x_n^{(p)} - x_n|^2 < \varepsilon.$$

Cela étant pour tout entier m , on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n|^2 < \varepsilon.$$

Il en résulte que la suite $x = (x_n)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et que lorsque p tend vers l'infini, $x^{(p)}$ tend vers x dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

3.2.2 Notion d'orthogonalité

Définition 3.2.3 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{k} -espace préhilbertien.

1. On dit que deux éléments x et y de E sont orthogonaux si l'on a $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.
2. On dit que deux parties non vides A et B de E sont orthogonales si pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. Dans ce cas, on note $A \perp B$.

Exemple

On considère l'espace vectoriel réel E des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Si f et g sont deux éléments de E , on définit le produit scalaire sur E par

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

1. Montrer que si $f \in E$ est une fonction impaire et $g \in E$ une fonction paire, alors $\langle f, g \rangle = 0$.

Posons $h(x) = f(x)g(x)$, les hypothèses font que $f(-x) = -f(x)$ et $g(-x) = g(x)$, il en résulte que $h(-x) = -h(x)$. On a $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx$.

L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique autour de 0 est évidemment nulle, en effet

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx = \int_{-\pi}^0 h(x) dx + \int_0^{\pi} h(x) dx$$

le changement de variable $x \leftrightarrow -u$ montre que $\int_{-\pi}^0 h(x) dx = -\int_0^{\pi} h(x) dx$ ce qui permet bien de conclure que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx = 0$$

Orthogonal d'une partie et propriétés

Définition 3.2.4 L'orthogonal d'une partie non vide A de E est l'ensemble A^\perp des éléments de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A , i.e. $A^\perp = \{x \in E; \langle x, a \rangle = 0, \text{ pour tout } a \in A\}$.

Exemple \mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace G de \mathbb{R}^4 défini par:

$$G = \text{Vect} \{(1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, -1)\}.$$

En effet, on a $G^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \langle (x, y, z, t), (\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}, \acute{t}) \rangle = 0, \text{ pour tout } (\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}, \acute{t}) \in G\}$.

Remarquons ensuite que

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in G^\perp &\iff (x, y, z, t) \perp (1, 1, 1, 0) \text{ et } (x, y, z, t) \perp (2, 1, 1, -1) \\ &\iff x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \iff x = x, y = -x - z, z = z, t = x \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} G^\perp &= \{(x, -x - z, z, x) \text{ pour tout } x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1, 0, 1) + z(0, -1, 1, 0); \text{ pour tout } x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect} \{(1, -1, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une famille génératrice de G^\perp est donnée par les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, -1, 1, 0)$. Ces vecteurs étant linéairement indépendants, ils forment une base de G^\perp .

Proposition 3.2.2 Soit A une partie non vide d'un \mathbb{k} -espace préhilbertien (E, \langle, \rangle) .

1. A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E , et on a $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.
2. On a $\bar{A} \subset (A^\perp)^\perp$.
3. On a $\bar{A}^\perp = A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
4. Si A est dense dans E , alors on a $A^\perp = \{0\}$.
5. Si B est une partie non vide de E , on a $(A \cap B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$. Si $A \subset B$, alors on a $B^\perp \subset A^\perp$.

Démonstration.

1. Soient $a \in A$, $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. On a $\langle x + \lambda y, a \rangle = \langle x, a \rangle + \lambda \langle y, a \rangle = 0$, donc $x + \lambda y \in A^\perp$. Par conséquent, A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Montrons que A^\perp est fermé dans E . Soit $(x_n)_n \geq 0$ une suite dans A^\perp qui converge vers un élément $z \in E$. D'après la proposition (3.2.2), l'application $(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$ est continue, donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, a \rangle = \langle z, a \rangle$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $\langle x_n, a \rangle = 0$, d'où $\langle z, a \rangle = 0$.

Donc on a $z \in A^\perp$. Par conséquent, A^\perp est fermé dans E . Soit $x \in A \cap A^\perp$, alors on a $\langle x, x \rangle = 0$, d'où $x = 0$. Donc on a $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

2. Soit $x \in A$. Pour tout $y \in A^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, donc $x \in (A^\perp)^\perp$. Par conséquent, on a $A \subset (A^\perp)^\perp$. Comme $(A^\perp)^\perp$ est fermé dans E , alors on a $\bar{A} \subset (A^\perp)^\perp$.

3. Puisque l'on a $A \subset Vect(A)$, alors $Vect(A)^\perp \subset A^\perp$. Réciproquement, soit $x \in A^\perp$, alors pour tout $a \in A$, on a $\langle a, x \rangle = 0$.

Soit $y \in Vect(A)$, alors il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ tels que $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, d'où on

$$a \langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle a_i, x \rangle = 0.$$

Donc on a $x \in Vect(A)^\perp$. Par conséquent, on a $A^\perp = Vect(A)^\perp$. On a $A \subset \bar{A}$, alors $\bar{A}^\perp \subset A^\perp$.

Réciproquement, soit $x \in A^\perp$. Soit $y \in A$, alors il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = y$. Donc on a $\langle y, x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle a_n, x \rangle = 0$, d'où \bar{A}^\perp . Par conséquent, on a $A^\perp = \bar{A}^\perp$.

4. Soit $x \in A^\perp$. Comme A est dense dans E , il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x.$$

Alors on a $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle a_n, x \rangle = 0$, d'où $x = 0$. Par conséquent, on a $A^\perp = \{0\}$.

La propriété 5 est triviale.

Proposition 3.2.3 (théorème de Pythagore). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie d'éléments deux à deux orthogonaux dans E , alors on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Démonstration. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle x_i, \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Définition 3.2.5 Soient (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien et $(x_i)_i \in I$ une famille d'éléments non nuls de E .

1. On dit que $(x_i)_i \in I$ est une famille orthogonale ou système orthogonal si les x_i sont deux à deux orthogonaux. Autrement dit, si pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.
2. On dit que $(x_i)_i \in I$ est une famille orthonormale ou système orthonormal ou encore système orthonormé si $(x_i)_i \in I$ est une famille orthogonale et si de plus, pour tout $i \in I$, on a $\langle x_i, x_i \rangle = 1$.

3.2.3 Projection Orthogonale

Rappelons d'abord qu'une partie F d'un espace vectoriel est dite convexe si le segment $[x, y]$ est contenu dans F dès lors que

$$x, y \in F \implies [x, y] \subseteq F,$$

où $[x, y] = \{tx + (1-t)y; t \in [0, 1]\}$.

Tout sous-espace vectoriel est convexe, toute boule est convexe.

Théorème de la projection

Théorème 3.2.4 (Théorème de la projection sur une partie convexe fermée). Soit H un espace de Hilbert et soit F une partie convexe et fermée, non vide, de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que:

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

On dit que $y_0 = P_F(x)$ est la projection de x sur F .

Démonstration.

Soit $d = \text{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$

Notons que si $d = 0$, alors $x \in F$ (car F est fermée), et $y = x$ est l'unique point de F tel que $\|x - y\| = d$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in F$ tel que:

$$\|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

Appliquons alors, pour $n, p \geq 1$, l'identité du parallélogramme à $u = x - y_n$ et $v = x - y_p$, on obtient:

$$4 \left\| x - \frac{y_n + y_p}{2} \right\|^2 + \|y_n + y_p\|^2 = 2 (\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2)$$

Mais, F étant convexe, on a $\frac{y_n + y_p}{2} \in F$; donc:

$$\left\| x - \frac{y_n + y_p}{2} \right\| \geq d,$$

de sorte que l'on obtient :

$$\|y_n + y_p\|^2 \leq 2 \left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p} \right) - 4d^2 = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right).$$

La suite $(y_n)_n$ est par conséquent une suite de Cauchy. Comme H est complet, elle converge donc vers un élément $y_0 \in H$. Mais comme F est fermé, on a en fait, puisque les y_n sont dans F , $y_0 \in F$.

De plus, le fait que $\|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$ entraîne, en passant à la limite, que $\|x - y_0\| \leq d$.

On a donc $\|x - y_0\| = d$, puisque $y \in F$.

2) Unicité. Si $\|x - y'_0\| = \|x - y''_0\| = d$, avec $y'_0, y''_0 \in F$, alors, comme ci-dessus, l'identité du parallélogramme donne:

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y'_0 - y''_0\|^2 &\leq 4 \left\| x - \frac{y'_0 + y''_0}{2} \right\|^2 + \|y'_0 - y''_0\|^2 \\ &= 2 \left(\|x - y'_0\|^2 + \|x - y''_0\|^2 \right) = 2(d^2 + d^2), \end{aligned}$$

d'où $\|y'_0 - y''_0\| \leq 0$, ce qui n'est possible que si $y'_0 = y''_0$.

Théorème 3.2.5 *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $P_F: H \longrightarrow F$ est une application linéaire continue, et $P_F(x)$ est l'unique point $y_0 \in F$ tel que:*

$$y_0 \in F \quad \text{et} \quad x - y_0 \in F^\perp.$$

Exemple 3.2.8 Soit $H = \mathbb{R}^3$ un espace de Hilbert et $F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ un sous-espace vectoriel fermé de H .

On cherche la projection orthogonale de $x = (2, 3, 4)$ sur le sous-espace F . On a

$$\begin{aligned} P_F(x) \in F &\Leftrightarrow P_F(x) = a_0(1, 1, 1), \\ x - P_F(x) \perp F &\Leftrightarrow \langle x - P_F(x), (1, 1, 1) \rangle = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle x - P_F(x), (1, 1, 1) \rangle &= \langle (2 - a_0, 3 - a_0, 4 - a_0), (1, 1, 1) \rangle = 0 \\ &= (2 - a_0) + (3 - a_0) + (4 - a_0) = 0 \\ &= 9 - 3a_0 = 0 \end{aligned}$$

donc $a_0 = 3$. Ainsi $P_F(x) = (3, 3, 3)$.

Propriétés et conséquences

Théorème 3.2.6 Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous espace vectoriel fermé, on a:

$$H = F \oplus F^\perp,$$

et la projection sur F parallèlement à F^\perp associée est P_F . Elle est donc continue, de sorte que la somme directe est une somme directe topologique. On dit que P_F est la projection orthogonale sur F .

Le fait que H soit la somme directe de F et F^\perp signifie que tout $x \in H$ s'écrit, de façon unique, $x = y + z$, avec $y \in F$, $z \in F^\perp$. Notons que, puisque F et F^\perp sont orthogonaux, on a : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$; en d'autres termes:

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2.$$

Démonstration. Le sous-espace $F \cap F^\perp$ est réduit à 0 parce que le produit scalaire est non dégénéré, de plus, pour tout élément x de E , on a évidemment $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$.

Corollaire 3.2.1 *On a $F^{\perp\perp} = \bar{F}$ pour tout sous-espace vectoriel F de l'espace de Hilbert H .*

Démonstration. Comme F^\perp est un sous-espace vectoriel fermé, par la Proposition (3.2.2), on peut lui appliquer le Théorème (3.2.6): $H = F^\perp \oplus F^{\perp\perp}$, que l'on peut aussi écrire : $H = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp$.

D'autre part, on peut aussi appliquer ce théorème au sous-espace vectoriel fermé \bar{F} : $H = \bar{F} \oplus (\bar{F})^\perp = \bar{F} \oplus (F)^\perp$.

Il en résulte, puisque l'on sait que $\bar{F} \subseteq F^{\perp\perp}$, que $F^{\perp\perp} = \bar{F}$.

On en déduit, puisque $H^\perp = \{0\}$ et $H = \{0\}^\perp$, le critère très pratique suivant de densité.

Corollaire 3.2.2 *Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H . Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Démonstration.

On a $F^\perp = (\bar{F})^\perp$. D'où $x \in F^\perp \implies x \in (\bar{F})^\perp \implies x \in H^\perp \implies x = 0$. Donc $F^\perp = \{0\}$.

Inversement, supposons que $F^\perp = \{0\}$ et $H \neq \bar{F}$. Il s'en suit qu'il existe un point a de H n'appartenant pas à \bar{F} .

Le théorème de projection précité confère à une unique projection b sur \bar{F} de sorte que $a - b \in (\bar{F})^\perp$.

Or $(\bar{F})^\perp = \{0\}$, donc $a - b = 0$. Par suite $a = b$ ce qui est absurde. On conclut donc

$$\bar{F} = H .$$

Corollaire 3.2.3 *L'application P_F est un opérateur linéaire de E dans F qui vérifie, pour tout x et tout y dans E ,*

$$\|P_F(x)\| \leq \|x\|, \quad \langle P_F(x), y \rangle = \langle x, P_F(y) \rangle \quad \text{et} \quad P_F(P_F(x)) = P_F(x)$$

Démonstration. Si $x \in E$, on écrit $x = x - P_F(x) + P_F(x)$ et on utilise le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2$$

De plus, comme pour tout $y \in F$, $P_F(y) = y$, et pour tout $x \in E$, $P_F(x) \in F$, on en déduit que $P_F(P_F(x)) = P_F(x)$ pour tout $x \in E$.

D'autre part, pour x et y dans E , les éléments $P_F(x)$ et $y - P_F(y)$ sont orthogonaux et il en résulte que

$$\langle P_F(x), y \rangle = \langle P_F(x), P_F(y) \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, P_F(y) \rangle = \langle P_F(x), P_F(y) \rangle.$$

Théorème 3.2.7 *Soient v_1, v_2, \dots, v_k des éléments deux à deux orthogonaux et de norme 1, dans un espace de Hilbert H , soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_j) et soit x un élément de H . Alors, quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, on a*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \right\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\lambda_j = \langle x, v_j \rangle$ pour $1 \leq j \leq k$. La projection orthogonale de x sur le sous-espace F est

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j$$

La distance γ de x au sous-espace F est donnée par

$$\gamma^2 = \|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k |\langle x, v_j \rangle|^2$$

3.2.4 Dualité et théorème de Représentation de Riesz

Théorème 3.2.8 (*Théorème de représentation de Fréchet-Riesz*).

1. Soit H un espace de Hilbert. et soit $\phi : H \longrightarrow \mathbb{k}$ une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique élément $a \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \phi(x) = \langle x, a \rangle \quad \text{et} \quad \|\phi\| = \|a\|.$$

2. Inversement, tout élément a de H définit une forme linéaire continue ϕ_a sur H par la formule

$$\phi_a(x) = \langle x, a \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une forme linéaire continue ϕ , non identiquement nulle. Soit alors $F = \ker(\phi)$, c'est un hyperplan fermé de H (car ϕ est continue), qui est distinct de H donc $H = F \oplus F^\perp$. Soit y_0 un élément non nul de F^\perp , alors $\phi(y_0) \neq 0$.

Pour tout $x \in E$, on pose

$$u = x - \frac{\phi(x)}{\phi(y_0)} y_0$$

Il est clair que $\phi(u) = 0$, c'est-à-dire que u appartient à F , et comme y_0 appartient à F^\perp , on a $\langle u, y_0 \rangle = 0$. Cela s'écrit, en remplaçant u par son expression, $\langle x, y_0 \rangle - \|y_0\|^2 \phi(x) / \phi(y_0) = 0$.

On en déduit que

$$\phi(x) = \langle x, y_0 \rangle \frac{\phi(y_0)}{\|y_0\|^2}, \quad \forall x \in H.$$

et il suffit alors de poser $a = \|y_0\|^{-2} \overline{\phi(y_0)} y_0$. Il est facile de voir que l'élément a est unique.

Définition 3.2.6 Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H converge faiblement vers a si pour tout élément $y \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle a, y \rangle.$$

3.2.5 Exercices

Exercice 3.2.1 (Cauchy-Schwarz) Montrer que pour tous réels strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n et b_1, b_2, \dots, b_n , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \right) \geq n^2.$$

Exercice 3.2.2 (Cauchy-Schwarz) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que pour tout entier n , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (x_i)^2.$$

Exercice 3.2.3 (Orthogonale F^\perp) On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 3.2.4 (La projection orthogonale) Calculer $\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 3.2.5 (*Supplémentaire orthogonal*) Soit $E = C([-1; 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$$

On note P et I les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.

a. Montrer que $I = [P]^\perp$.

Exercice 3.2.6 (*Théorème de représentation de Riesz–Fisher*). Soit E l'espace préhilbertien des suites complexes $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = 0$$

muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E .
2. Existe-t-il un élément a de E tel que, pour tout u de E , on ait $\phi(u) = \langle u, a \rangle$?
3. Que peut-on en déduire sur E ?

3.3 Système orthogonal. Bases hilbertiennes

3.3.1 Système orthogonal - orthonormal

Définition 3.3.1 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $(x_i)_i \in I$ une famille d'éléments de E .

1. On dit que $(x_i)_i \in I$ est une famille orthogonale ou système orthogonal si les x_i sont deux à deux orthogonaux. Autrement dit, si pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.
2. La famille $(x_i)_i \in I$ est orthonormale si pour tout $i, j \in I$, on a:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

3. Toute famille orthogonale est algébriquement libre. En effet, soient J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{k}$ une famille d'éléments de \mathbb{k} telles que $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0$. D'après le théorème de Pythagore, on a $0 = \left\| \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$ donc on a $\lambda_j = 0$, pour tout $j \in J$.

Exemple 3.3.1 Dans l'espace ℓ^2 la suite (e_n) , telle que e_n soit la suite $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ constituée uniquement de 0 sauf le n -ième terme qui est égal à 1, est un système orthonormal.

3.3.2 Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 3.3.1 (Procédure de Gram-Schmidt). Soit E un espace de Hilbert et soit $\{x_i, i \in I\} \subset H$ un ensemble au plus dénombrable linéairement indépendant. Alors on peut construire un système orthonormal $\{e_i, i \in I\} \subset H$, tel que chaque e_i est une combinaison linéaire de $\{x_j, j \leq i\}$.

Démonstration. Puisque $\{x_i, i \in I\}$ est linéairement indépendant, alors chaque $x_i \neq 0$, $i \in I$.

Posons

$$e_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}, \quad \text{alors } \|e_0\| = 1.$$

Soit ensuite

$$y_1 = x_1 - \lambda_0 e_0$$

où le scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{k}$ est déterminé par la condition

$$\langle y_1, e_0 \rangle = \langle x_1, e_0 \rangle - \lambda_0 \langle e_0, e_0 \rangle = 0, \quad \text{d'où } \lambda_0 = \langle x_1, e_0 \rangle$$

observons que $y_1 \neq 0$, puisque si $y_1 = 0$ alors les vecteurs x_0 et x_1 sont linéairement indépendants.

Posons

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad \text{alors } \|e_1\| = 1 \text{ et } \langle e_0, e_1 \rangle = 0.$$

On procède par récurrence. Supposons que nous ayons construit par la procédé indiqué les vecteurs e_0, e_1, \dots, e_n tel que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ et e_j est une combinaison linéaire de x_0, x_1, \dots, x_j , $j = 0, \dots, n$. On va construire le vecteur e_{n+1} .

Soit d'abord

$$Y_{n+1} = x_{n+1} - (\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n)$$

puisque $\langle Y_{n+1}, e_j \rangle = 0$, on obtient $\lambda_j = \langle x_{n+1}, e_j \rangle$, $j = 0, \dots, n$.

On a $Y_{n+1} \neq 0$, car si $Y_{n+1} = 0$, alors les vecteurs x_0, x_1, \dots, x_{n+1} sont linéairement indépendants. Nous obtenons

$$e_{n+1} = \frac{Y_{n+1}}{\|Y_{n+1}\|} \text{ et } \|e_{n+1}\| = 1 \text{ et } \langle e_{n+1}, e_j \rangle = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

De plus, e_{n+1} est une combinaison linéaire de x_0, x_1, \dots, x_{n+1} .

Exemple 3.3.2 Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser la base suivante en suivant le procédé de Schmidt la base suivante:

$$u_0 = (1, 0, 1), \quad u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (-1, -1, 0).$$

Solution

Le premier vecteur est simplement $e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}$. Puisque $\|u_0\| = \sqrt{\langle u_0, u_0 \rangle} = \sqrt{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} = \sqrt{2}$, on a

$$e_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Cherchons ensuite e_1 sous la forme

$$e_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|}, \quad \text{où } Y_1 = u_1 - \langle u_1, e_0 \rangle e_0$$

on a $\langle u_1, e_0 \rangle = \sqrt{2}$ et $Y_1 = (1, 1, 1) - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (0, 1, 0)$, d'où $\|Y_1\| = \|(0, 1, 0)\| = 1$. on obtient

$$e_1 = (0, 1, 0).$$

Cherchons ensuite e_2 sous la forme

$$e_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|}, \quad \text{où } Y_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 - \langle u_2, e_0 \rangle e_0$$

on a $\langle u_2, e_1 \rangle = \langle (-1, -1, 0), (0, 1, 0) \rangle = -1$ et $\langle u_2, e_0 \rangle = \left\langle (-1, -1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où

$Y_2 = (-1, -1, 0) + (0, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$ et $\|Y_2\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc

$$e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Définition 3.3.2 *Un espace topologique E est dit séparable s'il existe une partie $D \subseteq E$ qui est dénombrable et dense dans E : $\overline{D} = E$.*

Dans le cas des espaces normés, on a une notion équivalente.

Proposition 3.3.1 *Soit E un espace vectoriel normé. Pour que E soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe dans E une partie Δ qui soit dénombrable et totale dans E .*

On dit qu'une partie Δ d'un espace vectoriel normé E est totale lorsque le sous espace vectoriel $\text{vect}(\Delta)$ engendré par cette partie est dense.

Preuve. Le \mathbb{Q} -sous-espace vectoriel (respectivement le $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ -sous-espace vectoriel) engendré par Δ est dénombrable et son adhérence est la même que celle de $\text{vect}(\Delta)$.

Théorème 3.3.2 *Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de H deux à deux orthogonaux. La série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge si et seulement si la série numérique $\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^2$ converge. Dans ce cas, on a la relation de Pythagore généralisée*

$$\left\| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^2$$

Démonstration. Soit (y_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ et (α_n) la suite des sommes partielles de la série

$\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^2$. Le théorème de Pythagore assure que, pour deux entiers quelconques $p < q$,

$$\left\| \sum_{i=p+1}^q x_i \right\|^2 = \sum_{i=p+1}^q \|x_i\|^2$$

ce qui s'écrit $\|y_p - y_q\|^2 = |\alpha_q - \alpha_p|^2$. Ainsi, la suite (y_n) est une suite de Cauchy si et seulement si la suite (α_n) l'est aussi, et dans ce cas on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

ce qui termine la démonstration.

3.3.3 Inégalité de Bessel-Parseval

Théorème 3.3.3 Soit H un espace de Hilbert, soit $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ une suite orthonormée d'éléments de H et soit F le sous-espace de Hilbert qu'elle engendre

(a) Pour tout $x \in H$, la série vectorielle $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ est convergente, sa somme est égale à $P_F(x)$ et on a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

(b) Quels que soient x et y dans H , la série numérique $\sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$, est absolument convergente et on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} = \langle P_F(x), P_F(y) \rangle$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par F_n le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $\{e_1, \dots, e_n\}$ dont ils forment par hypothèse une base orthonormée. Il suit du théorème (3.2.7) que, pour tout élément x de H ,

$$P_{F_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \text{ et } \|P_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$$

L'inégalité $\|P_{F_n}(x)\| \leq \|x\|$ assure la convergence de la série $\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ et, tenant compte du théorème (3.3.2), celle de la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$. La somme de cette dernière est un élément a de F qui vérifie par construction

$$\langle x - a, e_i \rangle = 0, \text{ pour } i \geq 1$$

Mais nous savons bien que cela est une propriété caractéristique de $P_F(x)$.

On a donc $a = P_F(x)$ et de nouveau le théorème (3.3.2) donne

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

Cela prouve l'assertion (a). Quant à l'assertion (b), elle se démontre en remarquant que pour $y \in H$

$$\langle P_{F_n}(x), P_{F_n}(y) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$$

et par passage à la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice Soit $H = L^2([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions mesurables sur l'intervalle $[0, 1]$ telles que leur carré soit intégrable, muni du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

Considérons le sous-espace F engendré par les fonctions $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$.

1. Trouver une famille orthonormée de F dans H .
2. Trouver la projection orthogonale de $f(x) = x^2$ sur F .

Solution

Le sous-espace F est engendré par les fonctions $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$. Pour obtenir une base orthogonale, nous devons orthogonaliser ces deux fonctions en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

$$g_0(x) = \frac{f_0(x)}{\|f_0\|} = 1$$

$$g_1(x) = \frac{f_1(x) - \langle f_1, f_0 \rangle f_0(x)}{\|f_1(x) - \langle f_1, f_0 \rangle f_0(x)\|}$$

$$\langle f_1, f_0 \rangle = \int_0^1 f_1(x) f_0(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \text{ donc } f_1(x) - \langle f_1, f_0 \rangle f_0(x) = x - \frac{1}{2} \text{ et } \|f_1(x) - \langle f_1, f_0 \rangle f_0(x)\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Ainsi } g_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1).$$

2. Trouver la projection orthogonale de $f(x) = x^2$ sur F

La projection orthogonale de $f(x)$ sur F est donnée par:

$$P_F(x^2) = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \langle f, g_1 \rangle g_1$$

$$\langle f, g_0 \rangle = \int_0^1 f(x) g_0(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ et } \langle f, g_1 \rangle = \int_0^1 f(x) g_1(x) dx = \int_0^1 \sqrt{3} x^2 (2x - 1) dx = \frac{1}{6} \sqrt{3}$$

$$\text{On obtient } P_F(x^2) = x - \frac{1}{6}.$$

3.3.4 Bases Hilbertiennes

Définition 3.3.3 On dit qu'une famille $\{e_n, n \in I\}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H , est totale dans H si le sous-espace de Hilbert qu'elle engendre est égal à H . ou encore si le seul vecteur orthogonal à tous les e_n est le vecteur nul.

c'est-à-dire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle x, e_n \rangle = 0 \implies x = 0.$$

Une famille orthonormée et totale dans H est appelée une base hilbertienne de H .

Exemple L'espace $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$ est muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Nous allons montrer que la famille $(e_n)_n \in \mathbb{Z}$, définie par $e_n = e^{2i\pi nx}$, $x \in [0, 1]$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$.

En effet

$$1. \text{ Orthogonalité: pour } n, m \in \mathbb{Z}, \langle e_n, e_m \rangle = \int_0^1 e_n \overline{e_m} dx = \int_0^1 e^{2i\pi nx} e^{-2i\pi mx} dx = \int_0^1 e^{2i\pi(n-m)x} dx.$$

Si $n \neq m$, alors

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{e^{2i\pi(n-m)} - 1}{2i\pi(n-m)} = 0.$$

Si $n = m$, on sait que :

$$\langle e_n, e_n \rangle = \int_0^1 1 dx = 1$$

ce qui prouve que la famille $(e_n)_n \in \mathbb{Z}$ est orthonormale.

2. Pour montrer que cette famille est une base hilbertienne, il faut prouver qu'elle est complète dans $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$, c'est-à-dire que toute fonction $f \in L^2([0, 1]; \mathbb{C})$ peut être approximée en norme L^2 par des combinaisons linéaires finies des e_n .

Cela résulte de la théorie des séries de Fourier dans $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$, qui garantissent que tout élément de $L^2([0, 1]; \mathbb{C})$ admet un développement en série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x),$$

avec des coefficients C_n donnés par :

$$C_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi mx} dx.$$

De plus, la norme L^2 de f est liée aux coefficients de Fourier par l'identité de Parseval :

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^2.$$

Ainsi, toute fonction de $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ peut être approchée arbitrairement bien (au sens de la norme L^2) par une somme partielle de la série de Fourier.

Définition 3.3.4 *Un espace de Hilbert est dit séparable, ou de dimension dénombrable, s'il contient une famille dénombrable totale.*

Un espace de Hilbert qui possède une base hilbertienne est évidemment séparable.

Inversement, on a

Théorème 3.3.4 *Si un espace de Hilbert est séparable, alors il possède une base hilbertienne*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert séparable et $(f_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite totale.

Nous allons construire à partir de cette suite une base hilbertienne.

En enlevant, par récurrence, les f_i qui sont combinaisons linéaires de ceux qui les précèdent, on peut supposer que la suite est formée d'éléments linéairement indépendants.

Pour orthogonaliser cette suite, il suffit alors de procéder à une nouvelle récurrence en définissant une suite (e_n) , $n \in \mathbb{N}$, par

$$e_1 = f_1, \quad e_2 = f_2 - P_{F_1}(f_2), \quad \dots, \quad e_n = f_n - P_{F_{n-1}}(f_n)$$

où F_n désigne bien sûr le sous-espace de H engendré par les n premiers vecteurs de la suite (f_n) . Par construction même, la suite (e_n) , $(n \geq 1)$, est formée de vecteurs deux à deux orthogonaux et, pour tout entier n , le sous espace vectoriel engendré par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est égal à F_n . Les éléments

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment donc une suite totale dans H . En divisant chacun d'eux par sa norme, on obtient une base hilbertienne de H .

Le théorème suivant caractérise les bases hilbertiennes.

3.3.5 Égalité de Parseval

Théorème 3.3.5 Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H .

Les assertions suivantes sont équivalentes:

a. La suite $\{e_n, n \geq 1\}$ est une base hilbertienne de H .

b. Tout élément x de H s'écrit sous la forme $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

c. Quels que soient x et y dans H , on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

d. Pour tout $x \in H$, on a l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Démonstration. Soit F le sous-espace de Hilbert engendré par la suite (e_n) et soit P_F l'opérateur de projection orthogonale sur F . La suite (e_n) est une base hilbertienne si et seulement si $F = H$, c'est-à-dire $P_F = I$, et le théorème (?) montre que (a) est équivalent à (b) et implique (c) et (d).

L'assertion (d) traduit le fait que pour tout x dans H , on a l'égalité $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2$ et par suite $\|x - P_F(x)\| = 0$. Cela veut dire que $P_F = I$ et donc $F = H$.

3.3.6 Exercices

Exercice 3.3.1 On considère l'espace vectoriel réel E des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Si f et g sont deux éléments de E , on définit le produit scalaire sur E par

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

Soient (f_0, f_1, f_2) les fonctions définies par $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{f_0, f_1, f_2\}$. Déterminer une base orthonormale de F .

Solution

Appliquons l'algorithme l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $\{f_0, f_1, f_2\}$. On

a

$$\|f_0\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f_0(x))^2 dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (1)^2 dx} = \sqrt{2\pi}, \text{ donc}$$

$$v_0(x) = \frac{f_0(x)}{\|f_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Posons ensuite

$$v_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} \quad \text{où } Y_1 = f_1 - \langle f_1, v_0 \rangle v_0$$

$$\langle f_1, v_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x dx = 0, \quad Y_1(x) = f_1(x) - \langle f_1, v_0 \rangle v_0(x) = x$$

et

$$\|Y_1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (x)^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}\pi^{\frac{3}{2}}},$$

alors

$$v_1(x) = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}}.$$

Ensuite, posons

$$v_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} \quad \text{où } Y_2 = f_2 - \langle f_2, v_1 \rangle v_1 - \langle f_2, v_0 \rangle v_0$$

$$\text{on a } \langle f_2, v_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{3}\sqrt{2\pi^{\frac{5}{2}}}, \quad \langle f_2, v_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{3}x^3}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}} dx = 0 \quad \text{et}$$

$$Y_2(x) = f_2(x) - \langle f_2, v_1 \rangle v_1(x) - \langle f_2, v_0 \rangle v_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}\pi^2$$

$$\|Y_2\|^2 = \langle Y_2, Y_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 - \frac{1}{3}\pi^2\right)^2 dx = \frac{8}{45}\pi^5, \text{ donc}$$

$$v_2(x) = \frac{3\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)}{2\pi^2\sqrt{2\pi}}$$

Les vecteurs (v_0, v_1, v_2) forment une base orthonormale de F , ces fonctions vérifient les égalités suivantes pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad v_1(x) = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2\pi^{\frac{3}{2}}}}, \quad v_2(x) = \frac{3\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)}{2\pi^2\sqrt{2\pi}}.$$

3.3.7 Systèmes orthonormés complets dans des espaces concrets

Exemple 3.3.3 On note par $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ l'ensemble de toutes les suites complexes de carrés sommables i.e.,

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

muni du produit scalaire usuel:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

La famille $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $e^{(n)} := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, (où chaque $e^{(n)}$ est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n -ième qui vaut 1.) est une base hilbertienne dénombrable de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. En effet, on a $e^{(n)} = \left(e_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $e_k^n = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$.

i) $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : n \neq m$, on a $\langle e^{(n)}, e^{(m)} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} \overline{e_k^{(m)}} = 0$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\langle e^{(n)}, e^{(n)} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} e_k^{(n)} \overline{e_k^{(n)}} = 1$.

Ce qui montre que la famille $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

iii) Montrons que la famille $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est totale dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Une famille orthonormale $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dite totale si l'unique élément $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ orthogonal à tous les $e^{(n)}$ est $x = 0$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \langle x, e^{(n)} \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies x = 0.$$

Supposons qu'un élément $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est orthogonal à tous les $e^{(n)}$, c'est-à-dire que :

$$\langle x, e^{(n)} \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \overline{e_k^n} = x_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi La famille $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est totale dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, ce qui, combiné avec son orthonormalité, prouve qu'elle constitue une base hilbertienne, et on a

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) : x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e^{(n)} \rangle e^{(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^{(n)}.$$

Une autre base hilbertienne pour $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ où

$$\begin{aligned} e_1 &= (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1), 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (-\sin(\theta_1), \cos(\theta_1), 0, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, \cos(\theta_2), \sin(\theta_2), 0, 0, \dots) \\ e_4 &= (0, 0, -\sin(\theta_2), \cos(\theta_2), 0, 0, \dots) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Exemple 3.3.4 *Polynômes de Legendre*

Prenons $I = [-1, 1]$ et $\omega = 1$. La famille $\{x^n, 0 \leq n\}$ est totale dans l'espace de Hilbert $L^2(I, dx)$ et le procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt donne

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \quad \text{car } \langle x, 1 \rangle = 0 \\ p_2(x) &= x^2 - 13, \quad \text{car } \langle 1, x^2 \rangle = 13 \text{ et } \langle x, x^2 \rangle = 0 \\ p_2(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x, \quad \text{car } \langle x, x^3 \rangle = \frac{2}{5} \text{ et } \langle x^2, x^2 \rangle = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La formule suivante, dite formule de Rodrigues, donne l'expression de p_n pour tout entier $n \geq 0$.

Théorème 3.3.6 *Pour tout entier n , p_n est un polynôme unitaire de degré n et on a*

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

Il est clair que la formule de Rodrigues est vraie pour p_0 et p_1 . D'autre part, comme $(x^2 - 1)^n$ est un polynôme de degré $2n$, sa

dérivée d'ordre n est un polynôme de degré n , qui a la même parité que n et on vérifie facilement que le coefficient $\frac{n!}{(2n)!}$ a été choisi de façon que son terme de plus haut degré soit x^n . Compte tenu de l'unicité, il reste à démontrer que les polynômes définis par le second membre sont orthogonaux deux à deux, ce que l'on vérifie par intégrations par parties successives. En effet, pour deux entiers $n > m$

$$\begin{aligned}\langle p_n, p_m \rangle &= \frac{(n!)(m!)}{(2n)!(2m)!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \frac{d^m}{dx^m} ((x^2 - 1)^m) dx \\ &= (-1)^n \frac{(n!)(m!)}{(2n)!(2m)!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} ((x^2 - 1)^m) dx = 0 \text{ car } n + m > 2m\end{aligned}$$

La formule de Rodrigues est ainsi prouvée.

Les polynômes de Legendre, que nous désignerons dans la suite par une lettre majuscule P_n , sont proportionnels aux polynômes p_n et normalisés de façon que $P_n(1)$ soit égal à 1. Ils sont donc donnés, grâce à la formule de Rodrigues, par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n (n!)} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) = \frac{(2n!)}{2^n (n!)^2} p_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Théorème 3.3.7 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a $\|P_n\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}$.*

Démonstration. En effet, un calcul simple d'intégrales donne

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^n dx = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = 2^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Comme on sait que P_n est de la forme:

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + R_n(x)$$

où R_n est un polynôme de degré strictement plus petit que n , on en déduit que $\langle P_n, R_n \rangle = 0$ et par suite

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} 2^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

Complétude des polynômes de Legendre

Un ensemble $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est complet dans $L^2([-1, 1])$ si l'unique fonction $f \in L^2([-1, 1])$ qui est orthogonale à tous les P_n est la fonction nulle.

Autrement dit, si f est telle que :

$$\langle f, P_n \rangle = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

alors $f = 0$ presque partout. Or, d'après le théorème de densité de Weierstrass, les polynômes sont denses dans $C([-1, 1])$ (ensemble des fonctions continues). Et comme $C([-1, 1])$ est dense dans $L^2([-1, 1])$, cela implique que les polynômes de Legendre forment une base hilbertienne.

Théorème 3.3.8 Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné et f une fonction dans $C([a, b])$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un polynôme $p \in P_n$ tels que

$$\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Théorème 3.3.9 La suite des polynômes de Legendre (P_n) est une base orthogonale de l'espace $L^2([-1, 1])$. Toute fonction f de $L^2([-1, 1])$ se développe de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n \rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n(f) P_n \right\| = 0.$$

On a de plus l'égalité de Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|c_n(f)|^2}{2n+1}$$

Exemple 3.3.5 On considère la famille de fonctions de Hermite orthonormées définies par :

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

où $H_n(x)$ sont les polynômes de Hermite, définis par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = 2x. \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

est une base hilbertienne.

3.4 Série de Fourier

3.4.1 La base hilbertienne trigonométrique

Dans ce paragraphe nous donnons une première application de la théorie des espaces de Hilbert.

On va étudier dans ce paragraphe l'espace $L^2([0, 2\pi])$, muni du produit scalaire et norme sont donnés par

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \\ \|f\|_2^2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} par

$$e_n(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Les fonctions (e_n) constituent une famille orthonormale et nous allons montrer que c'est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

Théorème 3.4.1 *La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2([0, 2\pi])$.*

Démonstration. Pour montrer que notre suite est totale, il suffit de montrer que toute fonction f continue et périodique (c'est-à-dire vérifiant $f(0) = f(2\pi)$) est limite uniforme de polynômes trigonométriques, ou combinaisons linéaires finies de fonctions e_n .

En effet, on sait que les fonctions 2π -périodiques et continues sur $[0, 2\pi]$ constituent un sous-espace vectoriel dense de $L^2([0, 2\pi])$, cela veut dire que pour tout élément f de $L^2([0, 2\pi])$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g , 2π -périodique et continue sur $[0, 2\pi]$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$ donc il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

A fortiori, on a $\|f - P\|_2$ (c'est ce qu'on exprime en disant que la convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique). On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$\|f - P\|_2 \leq 2\varepsilon$$

Les polynômes trigonométriques sont donc denses dans l'espace $L^2([0, 2\pi])$, ce qui traduit le fait que la suite (e_n) , $n \in \mathbb{Z}$, est totale dans $L^2([0, 2\pi])$ et en est donc une base hilbertienne.

Théorème 3.4.2 *La suite (e_n) , $n \in \mathbb{Z}$, est une base hilbertienne de l'espace $L^2([0, 2\pi])$. La série de Fourier d'une fonction f de $L^2([0, 2\pi])$ est convergente dans $L^2([0, 2\pi])$ et sa somme est égale à f , c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e_k \right\| = 0 \quad \text{où} \quad c_n(f) = \langle f, e_n \rangle .$$

De plus, pour deux fonctions f et g dans $L^2([0, 2\pi])$, on a les formules de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

Lorsque l'on s'occupe de fonctions réelles et que l'on utilise les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$, où l'on a posé

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

et pour $n > 0$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

les relations précédentes s'écrivent:

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} [|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2] \\ \langle f, g \rangle &= a_0(f) \overline{a_0(g)} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n(f) \overline{a_n(g)} + b_n(f) \overline{b_n(g)} \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.1 *Soit f un élément de $L^2([0, 2\pi])$. Dans l'ensemble des polynômes trigonométriques P de degré inférieur ou égal à n , le polynôme de Fourier $S_n f = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e_k$ réalise le minimum de $\|f - P\|_2$, et il est le seul à avoir cette propriété.*

Démonstration. L'ensemble P_n des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $L^2([0, 2\pi])$ engendré par la famille $\{e_k, |k| \leq n\}$. Le polynôme de Fourier $S_n f$ est la projection orthogonale de f sur P_n , d'où le résultat.

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_n |c_n|^2.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_n c_n \overline{d_n}$$

où les c et d sont respectivement les coefficients de Fourier de f et g .

Exercice 3.4.1 On munit $I = [-\pi, \pi]$ de la mesure de Lebesgue et on considère l'espace $L^2(I)$ des fonctions réelles de carré intégrable sur I , sur lequel on définit le produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$. On rappelle que la famille

$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, n > 1 \right\}$ constitue une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(I)$ et que $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$

i) Calculer $\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle$, $\left\langle x, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$ et $\left\langle x, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$.

ii) Montrer que $\left\| x + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(kx)}{k} \right\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

iii) Calculer $\|x\|_2$, puis utiliser l'égalité de Bessel-Parceval pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution

i) Les quantités à calculer sont les coefficients de la fonction $f(x) = x$ sur la base hilbertienne donnée. Les calculs sont élémentaires:

$$\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 0,$$

$$\left\langle x, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin(nx)}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}}{n}.$$

$$\left\langle x, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos(nx)}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0.$$

ii) Comme la fonction $f(x) = x$ est dans $L^2(I)$, elle s'écrit dans la base hilbertienne S ,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n, \text{ avec } \varphi_n \in S.$$

On obtient $x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sqrt{\pi}}{n} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$. Ces égalités étant au sens de

$L^2(I)$, cela signifie que la série $2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge dans l'espace normé $L^2(I)$ vers la fonction x . Et cela s'écrit

$$\left\| x - 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \right\|_2 = \left\| x + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(kx)}{k} \right\|_2 \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

iii) On a $\|x\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$. D'autre part, d'après la formule de Bessel-Parceval on a,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left\langle x, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\pi}{n^2}, \text{ (les autres termes sont nuls d'après i)). On a donc}$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\pi}{n^2}. \text{ On en déduit l'égalité demandée } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3.4.2 On munit $L^2([-1, 1])$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$

1. Vérifier que les polynômes $X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $X_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ et $X_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer la norme $\|X_1\|_2$ de

X_1 dans $L^2([-1, 1])$.

2. Soit V le sous espace vectoriel de $L^2([-1, 1])$ engendré par $\{X_0, X_1, X_2\}$ et soit P la projection orthogonale de $L^2([-1, 1])$ sur V .

Calculer $P(x^3)$.

Solution Il faut vérifier que $\langle X_i, X_j \rangle = \int_{-1}^1 X_i(x) X_j(x) dx = 0$, pour tout $i \neq j = 0, 1, 2$. On a

$$\langle X_0, X_1 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2} x dx = 0, \quad \langle X_1, X_2 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{15}}{4} x (3x^2 - 1) dx = 0.$$

Le calcul de la norme de X_1 dans $L^2([-1, 1])$ donne $\|X_1\|_2^2 = \langle X_1, X_1 \rangle = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 dx = 1$, d'où $\|X_1\|_2 = 1$.

2. On a d'après le cours $P(f) = \langle f, X_0 \rangle X_0 + \langle f, X_1 \rangle X_1 + \langle f, X_2 \rangle X_2$, pour tout $f \in L^2([-1, 1])$.

- i. Pour $f(x) = x^3$, on a $\langle x^3, X_0 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{2}} dx = 0$, $\langle x^3, X_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $\langle x^3, X_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1) dx = 0$

On en déduit $P(x^3) = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} x = \frac{3}{5} x$.

3.5 Exercices

3.5.1 TD1: normes, équivalence des normes, ouvert, fermé, adhérence.

Série 1

Exercice 1: Soient l'espace $F = C^1([-1, 1], \mathbb{R})$, et N_1 l'application définie sur F par

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E .

Exercice 2: Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit pour $f \in E$,

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E .

2. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N_3(A) = \text{tr}(A^2) \quad \text{et} \quad N_4(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Dire (et le montrer) si N_3 et N_4 sont des normes.

Exercice 3:

3. Soient E et F deux \mathbb{k} -ev, $\|\cdot\|_F$ une norme sur F , $f \in L(E, F)$ et $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$x \mapsto \|f(x)\|_F.$$

Trouver une CNS sur f pour que N soit une norme sur E .

4. Soient a_1, \dots, a_n des réels et $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur \mathbb{R}^n .

Exercice 4:

On définit sur \mathbb{R}^2 les 3 application suivantes

$$N_1((x, y)) = |x| + |y|, \quad N_2((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } N_\infty((x, y)) = \max\{|x|, |y|\}$$

1. Montrer que N_∞ est une norme.

On admet que N_1 et N_2 définissent deux normes sur \mathbb{R}^2 .

2. Prouver que $N_\infty((x, y)) \leq N_2((x, y)) \leq N_1((x, y)) \leq 2N_\infty((x, y))$

On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne $N_2((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$, et on considère la partie

$$A = \{(x, \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

La partie A est-elle ouverte, est-elle fermée? Justifier.

Exercice 5:

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 6:

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si

$$P = \sum_{i=0}^p a_i X^i:$$

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|, \quad N_2(P) = \left[\sum_{i=0}^p |a_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq p} |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux?

Exercice 7: Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{C} telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ appartient à E , on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

b) Soit

$$F = \left\{ a \in E \ / \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 9:

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E, f(1) > 0\} \text{ et } F = \left\{ f \in E \ / \ \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \leq 0 \right\}.$$

1. Est-ce que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?
2. Est-ce que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?

3.5.2 TD2 : Application continue

Exercice 1:

On munit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ de la norme:

$$f \longmapsto \|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx.$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$(\forall n > 0) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ nt & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $[C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1]$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Que peut-on en conclure sur l'espace $[C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1]$.

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $[C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty]$

4. Montrer que $[C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty]$ est un espace complet (espace de Banach).

5. Soit $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ x = (x_k)_{k \geq 0}, x_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

Montrer que $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert.

Exercice 2:

Déterminer si les applications linéaires suivantes sont continues, et si oui calculer leur norme:

$E = C([0, 1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $F = C^1([0, 1])$ muni de $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Soit $T : E \rightarrow F$ défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\| \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|), P(X) \mapsto P(X+1)$.

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme N définie pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ par $N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$

et $\text{Tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Exercice 3: Soit $E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ x = (x_k)_{k \geq 0}, x_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

Pour $u \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on définit $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{n+1}$$

1. Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur E .

Exercice 4:

1. Montrer que les applications linéaires suivantes sont continues,

$$T_1 : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}, T_1(f) = \int_0^1 t f(t) dt$$

$$T_2 : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, T_2(f) = f(1) - f(0)$$

2. Calculer $\|T_1\|$ et $\|T_2\|$.

Exercice 5: On prend $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme uniforme. On considère la forme linéaire

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt - \int_{-1}^0 f(t) dt, \quad f \in E.$$

- a) Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\|$. (pour l'égalité considérer la suite $f_n(x) = 1$ pour $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$, $f_n(t) = -1$ pour $-1 \leq t \leq -\frac{1}{n}$ et $f_n(t) = nt$ pour $-\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}$).

Exercice 6: Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{C} telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ appartient à E , on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Soit

$$F = \left\{ a \in E / \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 7:

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Soit α un point de $[0, 1]$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi_\alpha & : E \longrightarrow \mathbb{C} \\ f & \longmapsto \phi_\alpha(f) = f(\alpha) \end{aligned}$$

est continue sur E .

Soit $A = \{f \in E / f(0) = f(1)\}$

1. Montrer que A est fermé.
2. Montrer que A n'est pas ouvert.

1. Montrer que les applications linéaires suivantes sont continues,

$$T_1 : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}, T_1(f) = \int_0^1 t f(t) dt$$

$$T_2 : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, T_2(f) = f(1) - f(0)$$

2. Calculer $\|T_1\|$ et $\|T_2\|$.

3.5.3 TD 3: Produit scalaire, Cauchy-Schwarz, projection orthogonale.

Série 3

Exercice 1:

Démontrer que les formule suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé:

1. Soit $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ x = (x_k)_{k \geq 0}, x_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$.

On définit une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \times l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

2. pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}[X])^2 \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta}) Q(e^{-i\theta}) d\theta$$

Exercice 2

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz - on précisera l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dans lequel on travaille et les vecteurs de E concernés - établir les inégalités suivantes et en étudier les cas d'égalité :

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$$

2. $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), (\text{tr}(M))^2 \leq n \cdot \text{tr}({}^t M \cdot M)$.

3. Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\int_a^b |f'(t)|^2 dt \right).$$

4. On se donne $(x_1, x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et on pose $G_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}}$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \ln^2(x_k) \geq n \ln^2(G_n)$.

Exercice 3: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel. On suppose que sa norme vérifie l'identité du parallélogramme:

$$(\forall (x, y) \in E \times E) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Soit l'application définie par

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]. \end{aligned}$$

Vérifier que c'est un produit scalaire tel que $(\forall x \in E) \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Pour cela, vérifier pour $(x, y, z) \in E^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconques les identités suivantes:

- i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle$ et $\langle x, 2y \rangle = 2\langle x, y \rangle$.
- ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (considérer l'identité du parallélogramme avec (x, y) , puis $(x + z, y + z)$ et enfin $(x + y + z, z)$).
- iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (considérer d'abord le cas $\alpha \in \mathbb{N}$, puis $\alpha \in \mathbb{Z}$, puis $\alpha \in \mathbb{Q}$, et enfin $\alpha \in \mathbb{R}$).

En déduire que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 4:

1. L'espace $L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty\}$ muni de la norme usuelle

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{avec } 1 \leq p.$$

est-il un espace préhilbertien ?, est-il un espace de Hilbert ?

2. Montrer que dans l'espace normé $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. En déduire que $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5:

Soit $L^2([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) dx$$

1. Calculer la projection orthogonale du point $\cos(x)$ sur $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Calculer $I = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi |\cos(x) - (ax + b)|^2 dx$

3. Calculer $I = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x \sin(t) + y \cos(t) - t)^2 dt$

Exercice 6:

I Soit $E = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / \int_0^1 |t f(t)|^2 dt < \infty \right\}$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t^2 f(t) g(t) dt$$

Calculer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt,$$

II On considère l'espace $E = \mathbb{R}_1[X] \oplus Vect\{f_0\}$ où f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = e^x$.

On admettra sans démonstration que $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$ est un produit scalaire sur E .

Le but de l'exercice est de déterminer $\alpha = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 |e^x - ax - b|^2 dx$.

1. Donner une base orthonormée (Q_0, Q_1) de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

2. Calculer $\langle f_0, Q_0 \rangle$, $\langle f_0, Q_1 \rangle$ et $\|f_0\|^2$. En déduire que

$$\alpha = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \left(\sqrt{6}e^{-1}\right)^2 - \left(\frac{e^1 - e^{-2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = -7e^{-2} + 1.$$

Exercice 7:

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t . B).$$

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$.

1. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})]^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3.5.4 TD 4: Orthogonale, Systhème orthogonales. Bases hilbertiennes.

Exercice 1:

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, on considère le sous espace vectoriel :

$$\mathbf{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y + z = 0 \text{ et } x - z = 0\}$$

1. Déterminer F^\perp
2. Déterminer une base orthonormée de F^\perp .
3. Trouver les projections orthogonales sur F et F^\perp d'un point $u = (1, 1, 1)$ de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2:

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X], \quad \langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Soit $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$ sous espace vectoriel de E

2. Montrer que $F = Vect\{X, X^2\}$
3. Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale de F relativement au produit scalaire.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-t^2}} dx.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 4: Soit $H = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

On note $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, et pour $n \geq 1$: $e_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$ et $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$. Ils engendrent les sous-espaces vectoriels de dimension finie : $F_n = \text{Vect}\{e_0, e_1, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

1. Vérifier que pour tout n entier, $\{e_0, e_1, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

2. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{(1+in)x} dx = \frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2} - i \frac{n(e^{2\pi}-1)}{1+n^2}$ et en déduire les valeurs de $\left\langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle$, $\left\langle e^x, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$,

$\left\langle e^x, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$ pour $n \geq 1$.

3. Montrer que $\left\| e^x - \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2} \cos(kx) - \sum_{k=1}^n \frac{k}{1+k^2} \sin(kx) \right) \right\|_2$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

4. Calculer $\|e^x\|_2^2$ et en déduire que $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$.

3.5.5 Solutions d'exercices du chapitre 1

Exercice 1.5.1

1. Pour tout $f \in E$, on a:

$$N_2(f) = \|f\|_\infty + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \|f\|_\infty + \int_0^1 \|f'\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_1(f).$$

Montrons qu'il n'existe aucune constante $\beta > 0$ telle que pour tout $f \in E$, on ait $N_1(f) \leq \beta N_2(f)$. Pour tout $n \geq 1$, soit g_n la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par $g_n(t) =$

$$\begin{cases} n & \text{si } t = 0 \\ -n^2 t + n & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, soit $f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$, alors $f \in E$, et on a $f_n' = g_n$. On a

$$N_1(f_n) = \|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty = \frac{1}{2} + n \text{ et } \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2},$$

$\int_0^1 |f_n'(t)| dt = \int_0^1 f_n'(t) dt = \int_0^1 h_n(t) dt = \frac{1}{2}$, donc on a $N_2(f_n) = 1$. Par conséquent, il

n'existe aucune constante $\beta > 0$ telle que pour tout $f \in E$, on ait $N_1(f) \leq \beta N_2(f)$. Donc

N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Pour tout $n \geq 2$, soit f_n la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ n(t - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Alors la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 2$ est de Cauchy dans l'espace normé $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$, où $\|h\|_1 = \int_0^1 |h(t)| dt$, pour tout $h \in C([0, 1])$. Pour tout $x \in [0, 1]$, soit $f_n(x) = \int_0^x h_n(t) dt$ alors $f_n \in E$ et on a $f'_n = h_n$. On a

$$\int_0^1 |f'_n(t) - f'_m(t)| dt = \int_0^1 |h_n(t) - h_m(t)| dt = \|h_n - h_m\|_1$$

et

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \int_0^x |h_n(t) - h_m(t)| dt \leq \int_0^1 |h_n(t) - h_m(t)| dt = \|h_n - h_m\|_1$$

D'où $N_2(f_n - f_m) \leq 2 \|h_n - h_m\|_1$. Donc la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ est de Cauchy dans (E, N_2) .

Montrons que $(f_n)_{n \geq 2}$ ne converge pas dans (E, N_2) . Supposons le contraire, alors il existerait $f \in E$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (N_2(f_n - f)) = 0$. D'où on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |h_n(t) - f'(t)| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f'_n(t) - f'(t)| dt = 0.$$

Soit $x \in]0, \frac{1}{2}[$, alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x |h_n(t) - f'(t)| dt = 0$. Comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $h_n(t) = 0$ sur l'intervalle

$[0, x]$, on en déduit que $f(t) = 0$ sur l'intervalle $[0, x]$. Par conséquent, pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $f'(t) = 0$. On a aussi:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f'(t)| dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 |h_n(t) - f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 |h_n(t) - f'(t)| dt = 0$$

d'où $\int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f'(t)| dt = 0$. Par conséquent, pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a $f'(t) = 1$. Donc f' n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse sur f . Par conséquent, (E, N_2) n'est pas un espace de Banach.

Exercice 1.5.2

1. C'est clair.
2. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, alors les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et toute boule fermée pour chacune de deux normes est compacte dans E . Si $(P_k)_{k \geq 0}$ est une suite bornée dans $(E, \|\cdot\|_1)$, alors $(P_k)_{k \geq 0}$ est une suite bornée

dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Donc la suite $(P_k)_{k \geq 0}$ admet une sous-suite convergente dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 1.5.3 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ une suite de Cauchy. Pour tout $x \in X$ nous avons $\|\bar{x}\| = \inf \{\|z\| \mid z - x \in Y\}$, d'où il résulte que $\|\bar{x}\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$. Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ est une suite de Cauchy, il en découle de cette inégalité que la suite $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X/Y$ est aussi une suite de Cauchy. Il existe donc un $z \in X$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\bar{x}_n - \bar{z}\| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overline{x_n - z}\| = 0$. Or, si $\|a_n\| \rightarrow 0$, alors il existe une sous-suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{N} telle que $\|a_{n_k}\| < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. D'après la définition de la norme quotient, on en déduit qu'il existe $y_n \in Y$ tel que $\|(x_{n_k} - z) + y_n\| < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $\|y_n - y_m\| \leq \|y_n + (x_{n_k} - z)\| + \|x_{n_k} - x_{m_k}\| + \|(x_{m_k} - z) + y_m\|$, et par conséquent, $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|y_n - y_m\| = 0$. Puisque Y est complet, il en résulte qu'il existe $y \in Y$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$. Étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_{n_k} - z) + y_n\| = 0$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n_k} = -y + z$. Ainsi, la suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente, et donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-y + z$.

3.5.6 Solutions d'exercices du chapitre 2

Exercice 2.3.1 D'une part, il est facile de voir que T est linéaire. Ensuite, prenons $u \in E$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|Tu| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u\|_\infty = \|u\|_\infty$$

Ceci prouve d'une part que $T(u) \in E$ et donc que T est un endomorphisme de E et d'autre part que T est continue avec $\|T\| \leq 1$.

De plus, si on choisit v la suite constante égale à 1, alors $T(v) = v$ et donc $\|T(v)\|_\infty = \|v\|_\infty$, d'où

$$\|T\| = \sup_{u \in E - \{0_E\}} \frac{\|T(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \geq \frac{\|T(v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} = 1. \text{ Ceci prouve que } \|T\| \geq 1 \text{ et finalement que } \|T\| = 1.$$

Exercice 2.3.2

1. φ est clairement une application linéaire. On a

$$|(\varphi f)(x)| \leq \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_1.$$

On en déduit que

$$\|\varphi(f)\|_1 = \int_0^1 |(\varphi f)(x)| dx \leq \|f\|_1.$$

Ainsi, φ est continue.

$$2. \text{ On a } \varphi(f_n)(x) = \int_0^x n e^{-nt} dt = 1 - e^{-nx} \text{ et } \|f_n\|_1 = 1 - e^{-n}.$$

De plus,

$$\|\varphi(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nx}) dx = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

donc

$$\|\varphi\| \geq \frac{\|\varphi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}}{1 - e^{-n}} \longrightarrow 1 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

D'après la question 1, pour tout $f \in E$, $\|\varphi(f)\|_1 \leq \|f\|_1$ alors $\|\varphi\| \leq 1$. ce qui prouve finalement que $\|\varphi\| = 1$.

Exercice 2.3.3

Pour montrer que φ est continue, il suffit de trouver une constante $c \geq 0$ telle que, pour tout $u \in \ell_0$,

$$|\varphi(u)| \leq c \|u\|_\infty.$$

En effet, pour une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de c_0 , nous avons:

$$|\varphi(u)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}.$$

Comme $|u_n| \leq \|u\|_\infty$ pour tout n , il vient :

$$|\varphi(u)| \leq \|u\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Or, la série géométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$. On en déduit que $|\varphi(u)| \leq \|u\|_\infty$.

Ainsi, φ est bornée avec $c = 1$ et donc continue.

Calcul de la norme de φ . La norme d'une forme linéaire φ est définie par $\|\varphi\| = \sup_{u \in E - \{0_E\}} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_\infty}$

Nous avons déjà montré que pour tout $u \in c_0$, $|\varphi(u)| \leq \|u\|_\infty$ donc $\|\varphi\| \leq 1$.

Pour tout entier $N \geq 1$, considérons la suite $v = (v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq n \leq N, \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}$$

Alors, $\|v\|_\infty = 1$ et

$$\varphi(v) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |\varphi(v)| = 1.$$

donc

$$\|\varphi\| \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_\infty} = 1.$$

Alors $\|\varphi\| = 1$.

Exercice 2.3.4 On prouve que T est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = c \|f\|_2$$

avec $c = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$. c est bien un réel fini, car g est continue sur $[0, 1]$, donc bornée, et on a $c \leq \|g\|_\infty$.

3.5.7 Solutions d'exercices du chapitre 3

Cauchy-Schwarz

Exercice 3.2.1 On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs

$$A = \left(\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}, \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{b_2}}, \dots, \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}} \right) \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{a_1}}, \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}} \right)$$

D'après Cauchy-Schwarz :

$$|\langle A, B \rangle|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i}} \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{a_i}} \right)^2 = n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i}} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{a_i}} \right)^2 \right)$$

on obtient

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \right).$$

Exercice 3.2.2 On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

et $B = (1, 1, \dots, 1)$ dans \mathbb{R}^n

$$|\langle A, B \rangle|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (1)^2 \right)$$

d'où

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (x_i)^2.$$

Exercice 3.2.3(Orthogonale F^\perp)

Soit $g \in F^\perp$. Remarquons que la fonction h définie par $h(x) = xg(x)$ est dans F . On en déduit que $\langle g, h \rangle = 0$, ce qui donne $\int_0^1 xg^2(x)dx = 0$. Or, la fonction $x \mapsto xg^2(x)$ est positive et continue sur $[0, 1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est qu'il s'agit de la fonction identiquement nulle.

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = 0$. Maintenant, g est continue, et donc on obtient que g est identiquement nulle. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 3.2.4 (La projection orthogonale) Posons $H = C([0, 1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Posons $f(x) = x^2$, $g(x) = ax + b$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $F = \text{vect}\{f_0, f_1\}$. On a

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \|f - g\|^2.$$

Mais on sait que

$$\inf_{g \in F} \|f - g\|^2 = \|f - P_F(f)\|^2$$

où $P_F(f)$ est la projection orthogonale de f sur F . Il s'agit donc de calculer cette projection.

on sait que

$$\begin{aligned} P_F(f) \in F &\Leftrightarrow P_F(f) = a_0x + b_0, \\ f - P_F(f) \perp F &\Leftrightarrow \langle f - P_F(f), f_0 \rangle = 0 \text{ et } \langle f - P_F(f), f_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - a_0x - b_0) 1 dx &= 0 \\ \int_0^1 (x^2 - a_0x - b_0) x dx &= 0 \end{aligned}$$

qui permet de calculer a_0, b_0 , on trouve que $P_F(f) = x - \frac{1}{6}$ donc $\|x^2 - p(x^2)\| = \frac{1}{\sqrt{180}}$.

Exercice 3.2.5 (Supplémentaire orthogonal) On a:

$$\forall f \in P \text{ et } \forall g \in I, \quad \langle f, g \rangle = 0,$$

car le produit $t \mapsto f(t)g(t)$ est impair et pair sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Ainsi $P \subset I^\perp$.

Inversement, soit $h \in I^\perp$. On sait $P \oplus I = E$ donc on peut écrire $h = f + g$ avec $f \in P$ et $g \in I$.

On a $\langle h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle$. Or $\langle h, g \rangle = 0$ et $\langle f, g \rangle = 0$ donc $\langle g, g \rangle = 0$ d'où $g = 0$.

Ainsi $h = f \in P$ puis $I^\perp \subset P$. On conclut.

Exercice 3.2.6 (Théorème de représentation de Riesz–Fisher).

1. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a en effet:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci entraîne que ϕ est continue (elle est clairement linéaire) et que $\|\phi\| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Supposons qu'il existe u_n tel élément $a = (a_n)$. Appliquant ϕ au k -ième élément de la base canonique de ℓ^2 , $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ on obtient $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$. Cette suite n'est pas dans E .
3. E n'est pas complet, car la réponse à la question précédente va à l'encontre du théorème de représentation de Riesz.

3.5.8 Examens

Examens final 3^{ème} Année LMD Maths 2019/2018 (UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955-SKIKDA)

MODULE: Espaces Vectoriels Normés

Questions de cours:(6 pts)

1. Enoncer l'identité de Bessel-Parceval.
2. Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- a. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.
 1. b. Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$

Exercice 1:(8 pts)

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = Tr(A^t B)$$

Soit

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

est un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Montrer que $F = \text{Vect}\{A, B\}$, où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, c-à-d (F engendré par A et B)
3. Déterminet F^\perp .
4. Soit

$$V = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ un sous-espace vectoriel de } E.$$

4.1 Déterminer une base orthonormée de V .

4.2 Calculer la projection de $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sur V .

Exercice 2:(6 pts)

Soit $l^\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} / (x_n) \text{ bornée}\}$, muni de la norme $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

On considère l'application

$$T : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x_n$$

1. Montrer que T est bien définie, c'est-à-dire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x_n$ est convergente.
2. Montrer que T est linéaire et continue
3. Montrer que $\|T\| = 2$.

$$\text{Soit } F = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty / \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x_n = 0 \right\}$$

4. Montrer que F est un fermé de l^∞ .

Examens final 3^{ème} Année LMD Maths 2024/2023 (UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955-SKIKDA)

MODULE: Espaces Vectoriels Normés

Exercice 1

Soient l'espace $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ défini par,

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \forall f \in E,$$

et le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \text{pour } f, g \in C^1([0, 1], \mathbb{R}).$$

Considérons l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left((f(0))^2 + \int_0^1 (f'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Démontrer que N est une norme sur E .
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \sqrt{x} \int_0^x (f'(t))^2 dt, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}).$$

3. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
4. Démontrer qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $N(f) \leq c \|f\|_\infty$, et les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty \in E$ ne sont pas équivalentes.

Utiliser la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par: $f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n}$.

Exercice 2

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad f \in E.$$

Soit T l'endomorphisme de E défini par

$$T : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$$

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que T est linéaire et continue.
2. Déterminer $\|T\|$.

Utilisez la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par $f(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0, 1]$.

Exercice 3

Soit $H = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 (1 - x^2) f(x) g(x) dx, \quad f, g \in C([-1, 1], \mathbb{R})$$

Soit

$$F = \{g(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F est fermé.
2. Déterminer la projection $P_F(f)$ de la fonction f sur F , où $f(x) = x^3$.

Examens final L3 Maths 2025/2024 (UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955-SKIKDA)**MODULE: Espaces Vectoriels Normés****Exercice 1**

I) Soit l'espace $E = \ell_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty \right\}$, muni de la norme

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad N(x) = \|x\|_1 + \|x\|_{\infty}$$

où $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$, $\|x\|_{\infty} = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

1. L'identité du parallélogramme est-elle vérifiée pour la norme N ?

(Prendre: $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$)

2. Donner la définition d'un espace de Hilbert.

3. Est-ce-que l'espace (E, N) est un espace préhilbertien? Est-il un espace de Hilbert?

II) Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3} \\ \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, & \text{si } \frac{1}{n^3} < x \leq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $\|f_p - f_q\|$

2. Dédire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E .

3. Etudier la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E . Que peut-on déduire ?

Exercice 2

Soit $E = \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} / \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ muni du produit scalaire et norme

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \quad \|f\| = \left[\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Soit T une application définie par

$$T : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longrightarrow T(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

1. Trouver une fonction $g \in E$ telle que $T(f) = \langle f, g \rangle$.
2. Montrer que T est une application linéaire, continue et calculer $\|T\|$.

Soit F un sous espace de E défini par : $F = \left\{ f \in E \quad / \quad \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$.

3. Montrer que F est fermé.
4. Vérifier que $F = \{g\}^\perp$.

Exercice 3

Soit $E = L^2([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) dx$$

Soit

$$F = \{aX + b \quad / \quad a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_1[X]$$

1. Montrer que F est fermé.
2. Déterminer la projection $P_F(f)$ de la fonction f sur F , où $f(x) = \cos(x)$.

Bibliography

- [1] Aubin Jean Pierre. Analyse fonctionnelle appliquée Tome 2, New York, USA, 1979.
- [2] A. Benaïssa Cherif, A. Beniani. Analyse Fonctionnelle 1. Cours et Exercices Corrigés, Universitaire d'Ain Témouchent. 2020-2021
- [3] Bilal BASTI, Cours Espaces Vectoriels Normés avec des exercices corrigés. Université Ziane Achour de Djelfa (Algérie). 2021.
- [4] (Ellipses) Nino Boccara - Analyse fonctionnelle_ une introduction pour physiciens- Ellipses 1984.
- [5] Haïm Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [6] Houcine Chebli. Analyse Hilbertienne. Édition CPU. Tunis, 2001.
- [7] Constantin Costara, Dumitru Popa. Exercises in Functional Analysis, Kluwer Academic Publishers 2003.
- [8] Nawfal El Hage Hassan. Topologie générale et espaces normés - 2e éd. Cours et exercices corrigés. Sciences Sup 2018. Dunod.
- [9] FARHI Bakir. Polycopié de Topologie générale, Université A. Mira de Béjaïa - Algérie. 2017.
- [10] Alain Guichardet. Intégration Analyse Hilbertienne-Ellipses Marketing, 1998.
- [11] Hameida Ali et Memou Ameer, Cours et exercices corrigés analyse fonctionnelle L3. Université Frères Mentouri Constantine et Université M'Sila. 2020-2021.
- [12] Mohammed Hazi. Introduction aux espaces normés. OPC. Alger 1994.

- [13] Walter Hengartner, Marcel Lambert, Corina Reischer - Introduction à l'analyse fonctionnelle-Presses Universitaires du Québec 1981.
- [14] Gilles Lacombe, Pascal Massat. Analyse fonctionnelle: exercices corrigés,1999.
- [15] Daniel Li. Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés. Ellipses, 2013.
- [16] Jean-Pierre Marco. Mathématiques Analyse L3 Cours complet avec 600 tests et e xercices corrigés. PEARSON (France) 2009.
- [17] H. Queffélec, J. Charles, M. Mbekhta Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs. Rappels de cours et exercices corrigés.2010.
- [18] Queffélec, Hervé. Topologie : Cours et exercices corrigés. 3^e édition. Dunod, 1998.
- [19] Jean Michel Rakotoson. Topologie Cours de 2016-2023. Licence. Topologie, Université de Poitiers, Poitiers, France. 2023, pp.128. halshs-04095393.
- [20] Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis (Third Edition), McGraw-Hill, 1976.
- [21] Saïdi Soumia, Cours sur La théorie spectrale des opérateurs, Ann ee universitaire. 2016-2017.
- [22] Laurent Schwartz.Topologie générale et analyse fonctionnelle, Volume 2. Front Cover. Hermann, 1970.
- [23] Sonntag. Topologie et analyse fonctionnelle. Course de License Avec Exercices-Ellipses Marketing (1998).