الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministŕe de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientfiique
Université 20 août 1955 - Skikda
Faculté des sciences
Département de mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

دروس حسب مقرر مقاييس طلبة السنة ثالثة رياضيات ل.م.د

الأمثلية دون قيود
Optimisation sans Contraintes

من اعداد الاستاذ:
- فاتح ساسي

f.saci@univ-skikda.dz

السنة الجامعيـــــــة 2022-2021

المحتويات

مقدمة

لطالما اقترنت النمذجة الرياضياتية لمختلف الظواهر الفيزيائية و الإشكاليات اليومية بلغة نظرية تسمى اليوم بالأمثلية أو الأمثَلة، والتي ظهرت بظهور الإنسان منذ القدم من خلال ممارساته اليومية، و قد اقترن بروزها كمجال بحث فعلي بأعمال كل من نيوتن، لاغرونج، كوشي وأولر في القرن 18، وتطورت بتطور علوم الحاسوب و ظهور البرمجة العددية لتشمل بعد ذلك جميع المجالات.
إن المبدأ العام للأمثلية يتمثل في استخدام عدة طرق تحليلية و عددية لايجاد الحلول المثلى لمسألة معينة، هذه الأخيرة ترتكز على تابع متعدد المتغيرات غالبا و في بعض الأحيان يكون مرفقا ببعض الشروط أو القيود، كما أن الحلول تختلف دقتها من طريقة لأخرى فلكل طريقة خوارزمية ذات خطوات و هوامش خطأ مختلفة.

اختصارا يمكن القول

الأمثلية = عين النقطة الحدية الصغرى (و في بعض الحالات العظمى) لدالة معينة.

و عليه، من أجل كل تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ مسألة الأمثلية دون قيود تكتب على الشكل

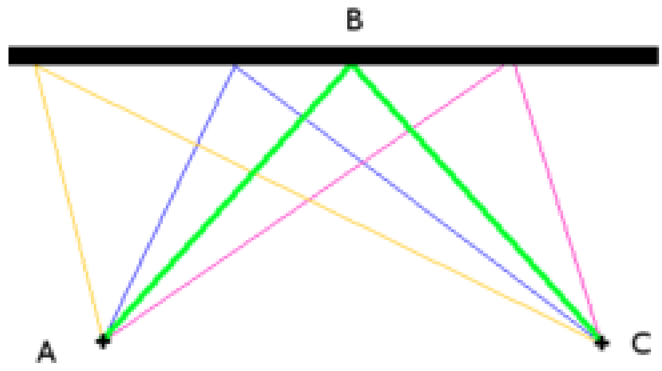
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{1.0}$$

مايعني البحث أولا عن القيمة الصغرى بمجموعة الصور

$$Im_f = \{f(x),\ \text{tel que } x \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.0}$$

مثال:

المسار الأقصر الواصل ما بين النقطتين A و C مرورا بالمستقيم (Δ)، يمثل ذلك المسار حيث زاوية السقوط تساوي زاوية الانكسار (بالرسم التوضيحي المسار يشمل النقطة B).

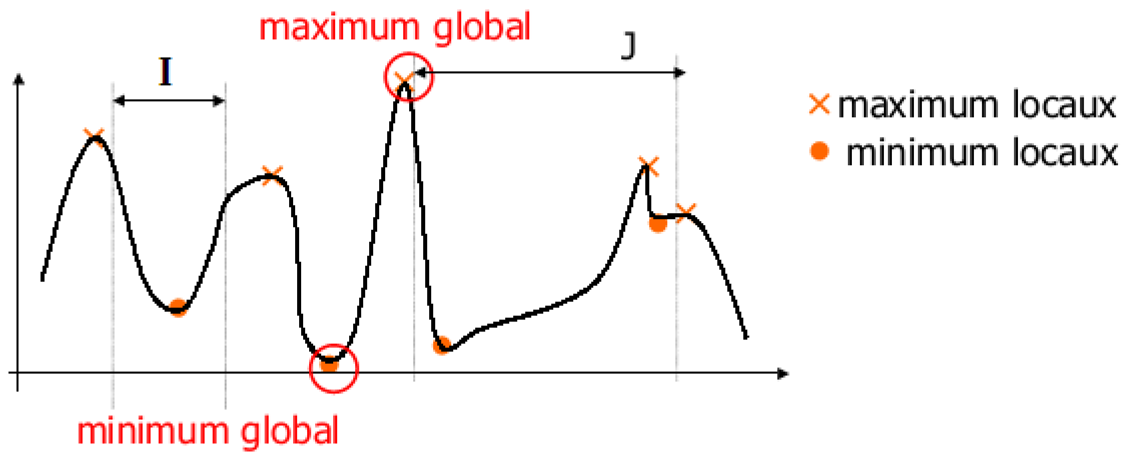


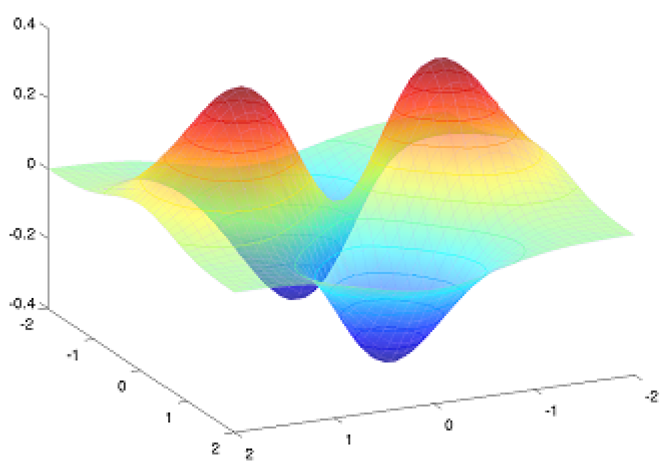
مثال:

بالهندسة الفضائية، تحصل على المسافة ما بين نقطة و مستو من خلال الإسقاط العمودي (أصغر بُعد ما بين النقطة و المستوي).

مثال:

هندسيا، يمكن استنتاج امكانية وجود نقط حدية أصغرية أو أعظمية لتابع كيفي $f \in \mathbb{R}$.





الفصل الأول

الحساب التفاضلي

1.1 الجداء السلمي والنظيم

تعريف 1.1.1 (الجداء السلمي)
ليكن $x, y \in \mathbb{R}^n$، نعرف الجداء السلمي لـ x و y بالعلاقة:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

تعريف 2.1.1 (النظيم)
ليكن الفضاء الشعاعي E المعرف على الحقل $\mathbb{K}$، نسمي نظيما كل تطبيق معرف بالشكل:

$$\|\centerdot\| : E \to \mathbb{R}_+$$

ويحقق ما يلي:

1- $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2- $\forall x \in E, \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

3- $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

النُّظم الأساسية على $\mathbb{R}^n$:

1- $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

2- $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3- $\|x\|_3 = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$

2.1 الاستمرارية

تعريف 1.2.1
ليكن التابع :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

وليكن $x_0 \in \mathbb{R}^n$، نقول أن f مستمر عند النقطة x_0 إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad : \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

ما يعني أن:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ملاحظة 1.2.1
نقول أن f مستمر على مجموعة النقط $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كان مستمرا عند كل نقطة من Ω.

خاصية 1.2.1 (متباينة كوشي شوارتز)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \qquad (1.1)$$

حيث $\|.\|$ يمثل النظيم الاقليدي.

3.1 التفاضلية من الدرجة الأولى

لنعتبر في كل ما يلي التابع

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

تعريف 1.3.1 (المشتقة المتجهية)
لتكن النقطة $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و كذلك الشعاع $d \in \mathbb{R}^n$. نعرف المشتقة المتجهية لـ f وفق الشعاع d عند النقطة x_0 بالنهاية:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

تعريف 2.3.1 (المشتقة الجزئية)
نعرف الإشتقاق الجزئي على أنه اشتقاق وفق أشعة الأساس القانوني، أي:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}$$

تعريف 3.3.1 (شعاع التدرج)
إذا كانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ موجودة من أجل كل $i = \overline{1,n}$، فإن **شعاع التدرج** المرفق بالتابع f عند النقطة $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يعرف كالتالي:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ملاحظة 1.3.1 شعاع تدرج التابع f عند النقطة $x \in \mathbb{R}^n$، يمثل شعاعا عموديا على منحنيات المستوى الخاصة بـ f و التي تشمل x.

تطبيق 3.1.1 عين شعاع التدرج للتابع f في كل حالة:

$$f(x, y) = -x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2, \qquad \Omega = \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \ln(x_3 - 2), \qquad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]2, +\infty[$$

ملاحظة 2.3.1 يمكن كتابة المشتقة المتجهية لـ f عند النقطة $a \in \mathbb{R}^n$ في اتجاه الشعاع v على الشكل

$$\delta f(a, d) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hd) - f(a)}{h} = \nabla^T f(a) d \qquad (2.1)$$

تعريف 4.3.1 (اتجاه الانحدار)
ليكن الشعاع $d \in \mathbb{R}^n$، نقول عن d أنه شعاع أو اتجاه انحدار لـ f عند النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$$\exists \eta > 0,\ t \in [0, \eta] :\ f(x + td) \leq f(x) \qquad (3.1)$$

نظرية 1.3.1
لتكن $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للتفاضل و $x, d \in \mathbb{R}^n$.
إذا كان $d^t\nabla f(x) < 0$ فإن: d اتجاه انحدار لـ f.

البرهان 1 لدينا f قابل للتفاضل و عليه نكتب منشور تايلور من الدرجة الأولى

$$f(x+td) = f(x) + td^t\nabla f(x) + \|td\|\,\varepsilon(td), \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon(td) = 0$$

أي

$$\frac{f(x+td) - f(x)}{t} = d^t\nabla f(x) + \|d\|\,\varepsilon(td)$$

و بما أن $d^t\nabla f(x) < 0$ و $\lim_{t\to 0}\varepsilon(td) = 0$، نتحصل على

$$f(x+td) - f(x) < 0$$

أي

$$f(x+td) < f(x)$$

ما يعني أن d اتجاه انحدار لـ f.

4.1 التفاضل

تعريف 1.4.1
نقول أن الدالة f قابلة للتفاضل عند $x_0 \in \mathbb{R}^n$ إذا وجد تطبيق خطي مستمر $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و دالة $\varepsilon:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بحيث:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h), \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

علما أن $\lim_{||h||\to 0}\varepsilon(h) = 0$
وكذلك

$$L(h) = \nabla^T f(x_0).h = \langle \nabla f(x_0), h\rangle$$

يسمى L بتفاضل التابع f عند النقطة x_0.

ملاحظة 1.4.1
إذا كانت العلاقة

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} = \partial_d f(x_0)\ ,\forall d \in \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

محققة فإن الدالة f قابلة للتفاضل عند النقطة x_0.

قضية 1.4.1 اذا كان التابع f قابلا للتفاضل عند النقطة x_0، فإن التطبيق L **وحيد.**

البرهان 2 يكفي افتراض وجود تفاضلين اثنين للتابع f عند النقطة x_0، ثم التوصل لتساويهما.

قضية 2.4.1 اذا كان التابع f قابلا للتفاضل عند x_0، فإن f **مستمر** عند النقطة x_0.

البرهان 3 لدينا التطبيق L خطي مستمر، و لما يكون h بجوار الصفر أي $0 \to \|h\|$، نجد

$$\lim_{\|h\|\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

قضية 3.4.1 اذا كانت المشتقة المتجهية لـ f في الاتجاه $d \in \mathbb{R}^n$ موجودة، فإن f قابل للتفاضل.

خاصية 1.4.1 نقول أن التابع f **متزايد** في الاتجاه d اذا كانت المشتقة المتجهية **موجبة تماما**، و نقول أن f **متناقص** في الاتجاه d اذا كانت المشتقة المتجهية **سالبة تماما**. في هذه الحالة الأخيرة، نقول كذلك أن الاتجاه d **اتجاه انحدار.**

5.1 التفاضلية من درجات عليا

ليكن التابع $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$، حيث D مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^2$. في هذه الحالة، التابع f له مشتقتين جزئيتين من الدرجة الأولى و أربع مشتقات جزئية من الدرجة الثانية، و هي كالتالي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

مبرهنة 1.5.1 (شوارتز)
اذا كانت على الأقل احدى المشتقتين الجزئيتين $\partial_{xy} f$ و $\partial_{yx} f$ مستمرة عند النقطة (x_0, y_0)، فإن

$$\partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_{xy} f(x_0, y_0) \qquad (6.1)$$

6.1 المصفوفات

تعريف 1.6.1 (المصفوفة)
ليكن الحقل $\mathbb{K}$ و $n, p \in \mathbb{K}$.
نسمي مصفوفة ذات n سطر و p عمود كل جملة مكونة من $n.p$ عنصر مرتبة كما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

ونرمز للمصفوفة A بـ: $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

تعريف 2.6.1 (المصفوفة المربعة)
نقول عن A أنها مصفوفة مربعة إذا كان: $n = p$.
ونكتب: $A \in M_n(\mathbb{R})$.

تعريف 3.6.1 (المصفوفة المتناظرة)
نقول عن A أنها متناظرة إذا كان: $A^t = A$.
حيث: A^t تمثل المصفوفة المرافقة لـ A.

تعريف 4.6.1 (المصفوفة نصف معرفة موجبة)
نقول عن A أنها مصفوفة نصف معرفة موجبة إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ x^t A x \geq 0$$

تعريف 5.6.1 (المصفوفة المعرفة الموجبة)
نقول عن A أنها مصفوفة معرفة موجبة إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ : x^t A x > 0$$

مبرهنة 1.6.1
إذا كانت A متناظرة، معرفة وموجبة فهي قابلة للقلب.

تعريف 6.6.1 (المصفوفة الهسية)
إذا كانت f قابلة للاشتقاق الجزئي فإن المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية تشكل مصفوفة هس ، و هي مصفوفة مربعة نرمز لها بـ: $H_f(x)$، $\nabla(\nabla f(x))$ أو $\nabla^2 f(x)$، وتعطى بالشكل:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1x_1}f(x) & \partial_{x_1x_2}f(x) & \dots & \partial_{x_1x_n}f(x) \\ \partial_{x_2x_1}f(x) & \partial_{x_2x_2}f(x) & \dots & \partial_{x_2x_n}f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_nx_1}f(x) & \partial_{x_nx_2}f(x) & \dots & \partial_{x_nx_n}f(x) \end{pmatrix}$$

خاصية 1.6.1 ليكن التابع

$$\begin{aligned} f: \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

اذا كان $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$، فإنه من أجل كل $x \in \Omega$ المصفوفة $H_f(x)$ **متناظرة** (حسب نظرية شوارتز).

مثال 1.6.1 عين مصفوفة هس للتابع المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ

$$f(x,y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$$

ملاحظة 1.6.1 عموما، من خلال مصفوفة هس يمكن دراسة تحدب التوابع متعددة المتغيرات (تذكر استعمال المشتقة الثانية في حالة الدوال أحادية المتغير).

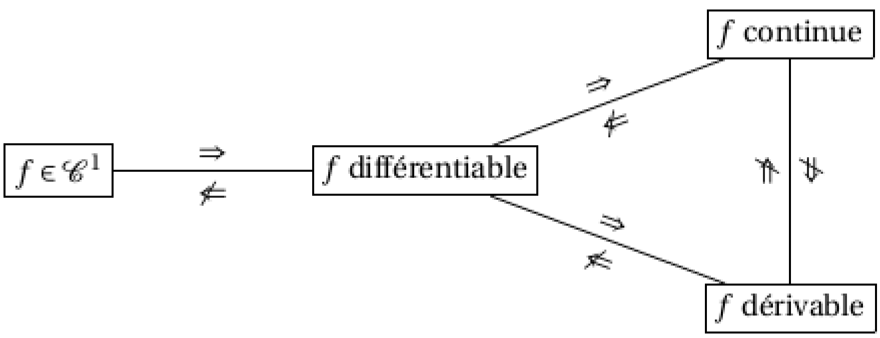
7.1 فضاء الدوال المستمرة من الصنف C^k

تعريف 1.7.1
نقول عن تابع f أنه من الصنف C^k على $\mathbb{R}^n$ إذا كانت كل المشتقات الجزئية لـ f حتى الدرجة k موجودة و مستمرة.

ملاحظة 1.7.1 1- العبارة $f \in C^0(\Omega)$ تعني أن التابع f مستمر على Ω.

2- اذا كانت كل المشتقات الجزئية من كل الدرجات موجودة، نكتب $f \in C^\infty(\Omega)$.

3- يمكن ايجاز العلاقة ما بين استمرارية، اشتقاقية و تفاضلية الدوال بالمخطط الموالي



شكل 1.1: مخطط العلاقة ما بين الاستمرارية، الاشتقاقية و التفاضل

1.7.1 نشر تايلور

1) من الصنف C^1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في جوار x_0 مرة واحدة فإنه يمكن كتابتها على الشكل :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla^t f(x_0)h+\|h\|\,\varepsilon(h)$$

حيث: $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\varepsilon(h)=0$

2) من الصنف C^2

إذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين في جوار x_0 فإنه يمكن كتابتها على الشكل:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla^t f(x_0)h+\frac{1}{2}h^t H_f(x_0)h+\|h\|^2\,\varepsilon(h)$$

حيث: $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\varepsilon(h)=0$

2.7.1 الدالة التربيعية المرفقة بمصفوفة مربعة

لازمة 1.7.1 من أجل كل مصفوفة مربعة $A\in M_n(\mathbb{R})$، نعرف الدالة التربيعية المرفقة بـ A بالشكل التالي

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}\\ f(x) &= \langle Ax,x\rangle \end{aligned}$$

علما أن

$$\nabla f=(A+A^T)x,\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n \tag{7.1}$$

البرهان 4 -1 الطريقة الأولى: نعلم أن المصفوفة A ذات n سطر و n عمود، و عليه من أجل كل عنصر معين $p\in\{1,2,\ldots,n\}$، يمكن أن نكتب

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle Ax,x\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j\\ &= A_{pp}x_p^2+\sum_{j=1,j\neq p}^{n}A_{pj}x_px_j+\sum_{i=1,i\neq p}^{n}A_{ip}x_ix_p+\sum_{i,j=1,i\neq p,j\neq p}^{n}A_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

و منه

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}=2A_{pp}x_p+\sum_{j=1,j\neq p}^{n}A_{pj}x_j+\sum_{i=1,i\neq p}^{n}A_{ip}x_i=(Ax)_p+(A^Tx)_p$$

أي أن

$$\nabla f = (A + A^T)x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ما يكافئ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}x_i, \quad i = \overline{1,n}$$

2- الطريقة الثانية: تقدم بحصة الأعمال الموجهة.

ملاحظة 2.7.1 بنفس الطريقة يمكن تبيان أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = (A + A^T)_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n} \tag{8.1}$$

أي أن

$$H_f(x) = \nabla^2 f(x) = (A + A^T), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{9.1}$$

أي أن كل عناصر مصفوفة هس للتابع التربيعي f تمثل أعدادا ثابتة.

8.1 التحدب

1.8.1 المجموعات المحدبة

تعريف 1.8.1 (المجموعة المحدبة)
لتكن $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$. نقول عن $\mathcal{S}$ أنها مجموعة محدبة إذا تحقق:

$$[x,y] \subseteq \mathcal{S} : \forall x,y \in \mathcal{S} \tag{10.1}$$

هندسيا نقول أن القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من S محتواة في S.

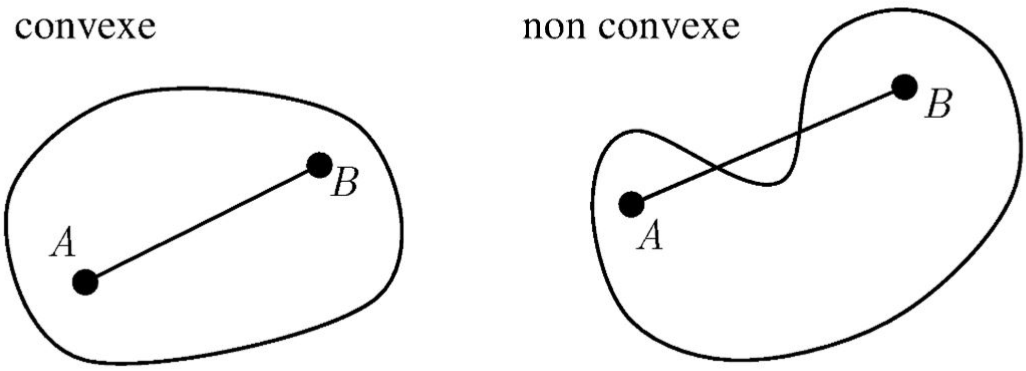
تعريف 2.8.1

$$\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \text{ مجموعة محدبة } \Leftrightarrow \forall x,y \in \mathcal{S},\ \forall \lambda \in [0,1]: \ (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{S} \tag{11.1}$$

مثال 1.8.1 القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين x و y من الفضاء هي مجموعة النقط التي نرمز لها بالرمز $[x,y]$ و نعرفها كما يلي:

$$[x,y] = \{\ tx + (1-t)y\ ,\ t \in [0,1]\}$$

ما يعني أنها مجموعة محدبة.



شكل 2.1: مجموعة محدبة و أخرى غير محدبة

مثال 2.8.1 1) الفضاء $\mathbb{R}^n$ مجموعة محدبة.

2) $\mathbb{R}^*$ ليست مجموعة محدبة.

3) نصف المستوي المعرف ب: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^n, y>0\}$ هو مجموعة محدبة.

4) المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة محدبة.

خاصية 1.8.1 تقاطع مجموعتين محدبتين هو مجموعة محدبة.

البرهان 5 نعتبر مجموعتي النقط المحدبتين : $S_1\subseteq\mathbb{R}^n$ ، $S_2\subseteq\mathbb{R}^n$

بما أن S_1 محدب فإن :

$$\forall x,y\in S_1\ ,\forall t\in[0,1]:tx+(1-t)y\in S_1 \tag{12.1}$$

و كذلك S_2 محدب أي:

$$\forall x,y\in S_2\ ,\forall t\in[0,1]:tx+(1-t)y\in S_2 \tag{13.1}$$

ومنه:

$$\forall x,y\in S_1\cap S_2\Rightarrow\begin{cases}x,y\in S_1\\ \quad\wedge\\ x,y\in S_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}tx+(1-t)y\in S_1, & \forall t\in[0,1]\\ \qquad\qquad\wedge & \\ tx+(1-t)y\in S_2, & \forall t\in[0,1]\end{cases}$$

و بالتالي

$$tx+(1-t)y\in S_1\cap S_2,\qquad \forall t\in[0,1]$$

مايعني أن $S_1\cap S_2$ مجموعة محدبة.

خاصية 2.8.1 إذا كانت S مجموعة محدبة فإنه من أجل $\alpha \in \mathbb{R}^n$، αS مجموعة محدبة.

خاصية 3.8.1 الجداء الديكارتي لمجموعتين محدبتين هو مجموعة محدبة.

خاصية 4.8.1 المجموعة المولدة بعنصر $\{\alpha\}$ هي مجموعة محدبة.

ملاحظة 1.8.1
اتحاد محدبين لا يمثل بالضرورة مجموعة محدبة.

مثال 3.8.1

1) $\mathbb{R}_+^*$و$\mathbb{R}_-^*$ محدبتين لكن $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$ غير محدبة.

2) $\mathbb{R}_+$و$\mathbb{R}_-$ محدبتين و $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ محدبة.

نتيجة 1.8.1

1) إذا كانت S محدبة و $\text{int}(S) \neq \phi$ فإن : $\text{int}(S)$ محدبة.

2) إذا كانت S محدبة فإن $\overline{S}$ محدبة.

2.8.1 الدوال المحدبة

نأخذ في كل ما يلي $\mathcal{S}$ مجموعة محدبة من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 3.8.1
لتكن الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- نقول أن f محدبة على $\mathcal{S}$ إذا تحقق:

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \forall t \in [0,1] : f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (14.1)$$

- نقول عن f أنها محدبة تماما على $\mathcal{S}$ إذا كان :

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \forall t \in [0,1] : f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (15.1)$$

تعريف 4.8.1
- نقول أن f مقعرة على $\mathcal{S}$ إذا كان:

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \forall t \in [0,1] : f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (16.1)$$

- نقول عن f أنها مقعرة تماما على $\mathcal{S}$ إذا كان:

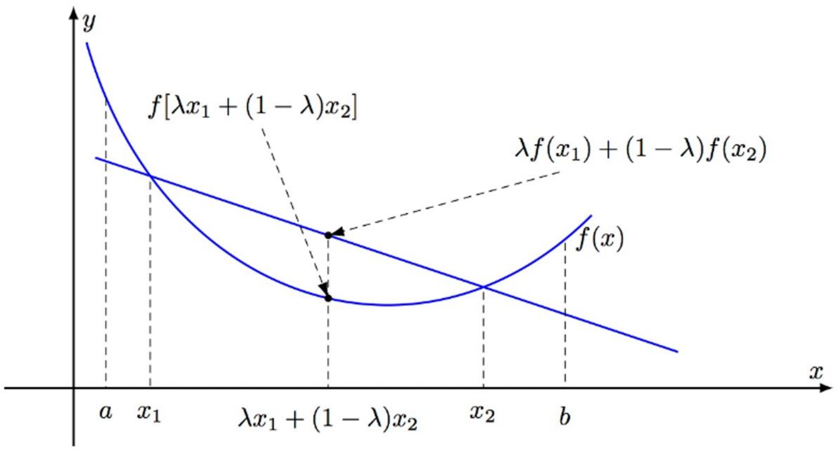
$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \forall t \in [0,1] : f(tx+(1-t)y) > tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (17.1)$$

ملاحظة 2.8.1 1- يمكن القول أن f مقعرة اذا كانت $-f$ محدبة.

2- نقول أن f مقعرة تماما اذا كانت $-f$ محدبة تماما.

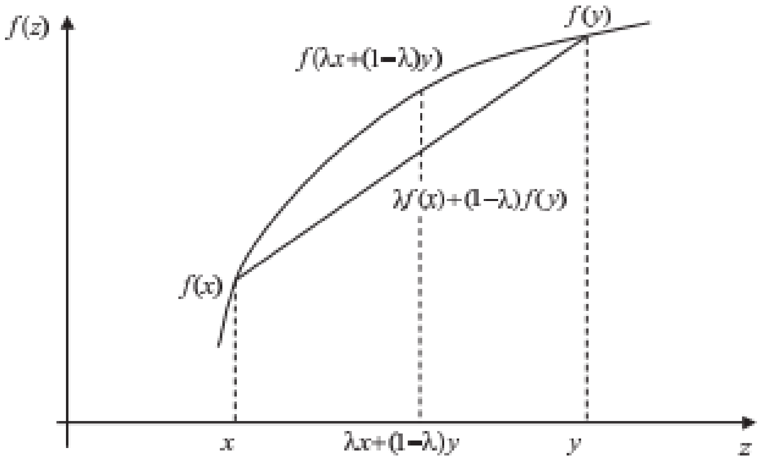
1.2.8.1 التفسير الهندسي لتحدب الدوال

انطلاقا ممن التعريف، يمكننا القول أن f دالة محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين من تمثيلها البياني تقع أعلى البيان الواصل بين نفس النقطتين، كما يوضحه الشكل الموالي



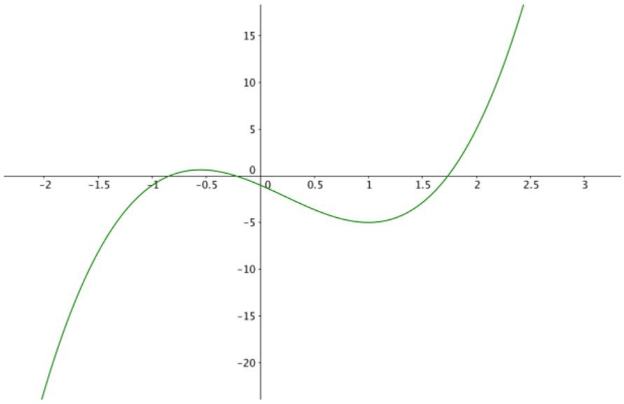
شكل 3.1: الشكل العام لبيان دالة محدبة

و بنفس الطريقة نفسر تقعر الدوال



شكل 4.1: الشكل العام لبيان دالة مقعرة

بينما يمثل البيان الموالي دالة كيفية غير محدبة و غير مقعرة



شكل 5.1: تمثيل بياني لدالة غير محدبة وغير مقعرة

مثال 4.8.1
النظيم دالة محدبة، لنبين ذلك بأخذ:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\|x\| \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &= \|tx+(1-t)y\| \\ &\leq \|tx\|+\|(1-t)y\| \\ &\leq |t|\,\|x\|+|1-t|\,\|y\| \\ &\leq t\,\|x\|+(1-t)\,\|y\| \\ &\leq tf(x)+(1-t)f(y) \end{aligned}$$

ملاحظة 3.8.1
الدالة التآلفية الخطية محدبة ومقعرة في آن واحد. لنبين ذلك بأخذ

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=ax+b, \quad a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R} \end{array}$$

من أجل كل $t\in[0,1]$ لدينا

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &= a(tx+(1-t)y)+b \\ &= tax+(1-t)ay+b \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned} tf(x)+(1-t)f(y) &= t(ax+b)+(1-t)(ay+b) \\ &= tax+tb+(1-t)y+b-tb \\ &= tax+(1-t)y+b \end{aligned}$$

ومنه: $f(tx+(1-t)y)=tf(x)+(1-t)f(y)$

خاصية 5.8.1
لتكن f و g دالتين محدبتين و $\alpha>0$ فإن:

1) الدالة $f+g$ دالة محدبة.

2) αf دالة محدبة.

خاصية 6.8.1
لتكن $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالتين محدبتين. إذا كانت g متزايدة فإن gof محدبة.

البرهان 6 لدينا من أجل كل $t\in[0,1]$

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y) \qquad (18.1)$$

و بما أن التابع g متزايد فإن

$$g(f(tx+(1-t)y)\leq g(tf(x)+(1-t)f(y)) \qquad (19.1)$$

أي

$$gof(tx+(1-t)y)\leq tgof(x)+(1-t)gof(y) \qquad (20.1)$$

ومنه gof محدب.

مبرهنة 1.8.1 (الخاصية المميزة لتحدب الدوال)
إذا كانت f دالة محدبة فإن:

$$\forall x_i\in D_f\subseteq\mathbb{R}^n,\forall t_i>0,\sum_{i=1}^{n}t_i=1 f(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i)\leq\sum_{i=1}^{n}t_if(x_i) \qquad (21.1)$$

(يمكن برهان ذلك بالتراجع).

ملاحظة 4.8.1

1) فرق دالتين ليس بالضرورة محدبا.

2) جداء دالتين محدبتين ليس بالضرورة محدبا.

نظرية 1.8.1 (التحدب والاستمرار)

لتكن الدالة :

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

إذا كانت f محدبة على D_f فإن f مستمرة على D_f.

9.1 التحدب والتفاضل

1.9.1 التحدب والتفاضلية الأولى

نظرية 1.9.1

لتكن الدالة :

$$\begin{array}{llll} f: & S \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

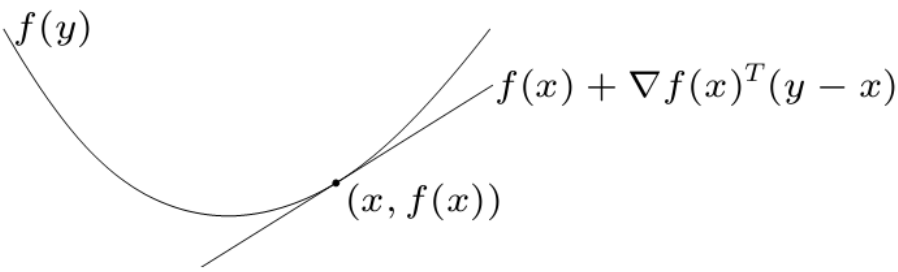
إذا كانت f قابلة للتفاضل على S فإن:

- الدالة f محدبة اذا و فقط اذا كان

$$\forall x, x_0 \in S : f(x) \geq \nabla^t f(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{22.1}$$

- الدالة f محدبة تماما اذا و فقط اذا كان

$$\forall x, x_0 \in S : f(x) > \nabla^t f(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{23.1}$$



شكل 6.1: تقريب (من الأسفل) من الدرجة الأولى للتابع f

البرهان 7 • لنبين أن : f محدبة $\Leftarrow f(x) \geq \nabla^t f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

لدينا f دالة محدبة $\Leftrightarrow$ $f(tx+(1-t)x_0) \leq tf(x)+(1-t)f(x_0)$

و f قابلة للتفاضل حسب نشر تايلور من الدرجة الأولى:

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)x_0) &= f(x_0+t(x-x_0)) \\ &= f(x_0)+t(x-x_0)^t\nabla f(x_0)+\|t(x-x_0)\|\,\varepsilon(t(x-x_0)) \end{aligned}$$

ومنه :

$$f(x_0)+t(x-x_0)^t\nabla f(x_0)+\|t(x-x_0)\|\,\varepsilon(t(x-x_0)) \leq tf(x)+f(x_0)-tf(x_0)$$

أي:

$$t(x-x_0)^t\nabla f(x_0)+\|t(x-x_0)\|\,\varepsilon(t(x-x_0)) \leq t(f(x)-f(x_0))$$

لدينا لما $t \to 0^+$:

$$f(x)-f(x_0) \geq (x-x_0)^t\nabla f(x_0)$$
$$f(x) \geq f(x_0)+(x-x_0)^t\nabla f(x_0) \ \forall x, x_0 \in S$$

- لنبين أن: $f(x) \geq \nabla^t f(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftarrow f$ محدبة

نكتب من أجل النقط الكيفية x، x_0 و z من D_f

$$\forall x, z \in D_f : f(x) \geq \nabla^t f(z)(x-z)+f(z)$$

$$\forall x_0, z \in D_f : \ f(x_0) \geq \nabla^t f(z)(x_0-z)+f(z)$$

و من أجل $t>0$ نكتب

$$\begin{cases} tf(x) \geq t\nabla^t f(z)(x-z)+tf(z) \\ (1-t)f(x_0) \geq (1-t)\nabla^t f(z)(x_0-z)+(1-t)f(z) \end{cases}$$

بجمع المتراجحتين طرفا الى طرف نحصل على

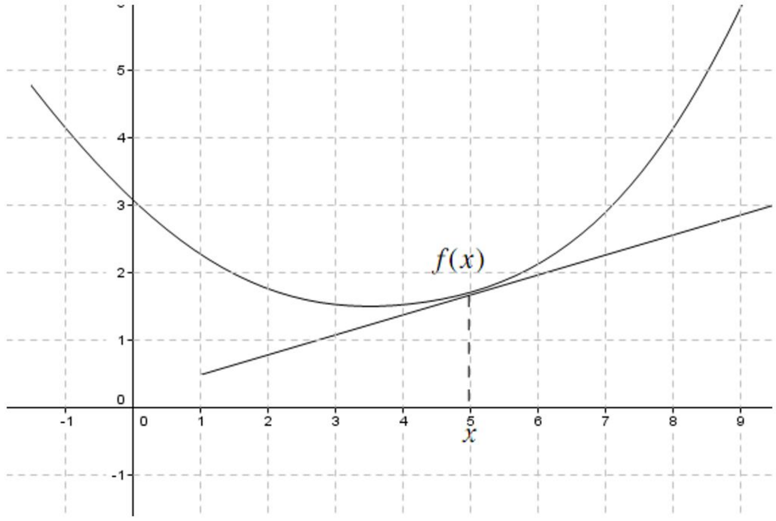
$$\begin{aligned} tf(x)+(1-t)f(x_0) &\geq f(z)+\nabla^t f(z)\left[t(x-z)+(1-t)(x_0-z)\right] \\ &\geq f(z)+\nabla^t f(z)\left[tx+(1-t)x_0-z\right] \end{aligned}$$

وبوضع $z=tx+(1-t)x_0$ نجد

$$tf(x)+(1-t)f(x_0) \geq f(tx+(1-t)x_0)$$

ما يعني أن f محدب.

ملاحظة 1.9.1
إذا كانت الدالة f محدبة فإن منحناها البياني يقع أعلى مماساتها كما هو مبين في الشكل الموالي.



شكل 7.1: التفسير الهندسي لتحدب الدوال

2.9.1 التحدب والتفاضلية الثانية

نظرية 2.9.1
ليكن التابع f قابلا للتفاضل مرتين على مجموعة النقط $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

1- f محدب اذا و فقط اذا كانت مصفوفة هس H_f نصف معرفة موجبة.

2- f محدب تماما اذا و فقط اذا كانت مصفوفة هس H_f معرفة موجبة.

3- f مقعر اذا و فقط اذا كانت مصفوفة هس H_f نصف معرفة سالبة.

4- f مقعر تماما اذا و فقط اذا كانت مصفوفة هس H_f معرفة سالبة.

البرهان 8 • لنبين أن f محدبة $\Leftarrow H_f(x)$ نصف معرفة موجبة.
الدالة f قابلة للتفاضل مرتين على S ولدينا حسب نشر تايلور:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla^t f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H_f(x_0)(x - x_0) + \|x - x_0\|^2 \varepsilon(x - x_0) \quad (24.1)$$

f محدبة ومنه :

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla^t f(x_0)(x - x_0)$$

ما يعني أن

$$f(x_0)+\nabla^t f(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0)+\|x-x_0\|^2\varepsilon(x-x_0) \geq f(x_0)+\nabla^t f(x_0)(x-x_0)$$

أي

$$\frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0)+\|x-x_0\|^2\varepsilon(x-x_0) \geq 0$$

بوضع $x-x_0=th$ نجد

$$\frac{1}{2}(th)^t H_f(x_0)th+\|th\|^2\varepsilon(th) \geq 0$$

ما يكافئ

$$\frac{1}{2}t^2h^t H_f(x_0)h+t^2\|h\|^2\varepsilon(th) \geq 0$$

أي

$$\frac{1}{2}h^t H_f(x_0)h+\|h\|^2\varepsilon(th) \geq 0$$

لما $t \to 0$ نحصل على

$$\frac{1}{2}h^t H_f(x_0)h \geq 0$$

أي

$$h^t H_f(x_0)h \geq 0$$

ومنه $H_f(x)$ نصف معرفة موجبة.

- لنبين أن: H_f نصف معرفة موجبة $\Leftarrow f$ محدبة.

لدينا نشر تايلور من الدرجة الثانية

$$f(x)=f(x_0)+\nabla^t f(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0)$$

و بما أن H_f نصف معرفة موجبة نكتب

$$f(x)-f(x_0)-\nabla^t f(x_0)(x-x_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0) \geq 0$$

ما يعني أن

$$f(x)-f(x_0)-\nabla^t f(x_0)(x-x_0) \geq 0$$

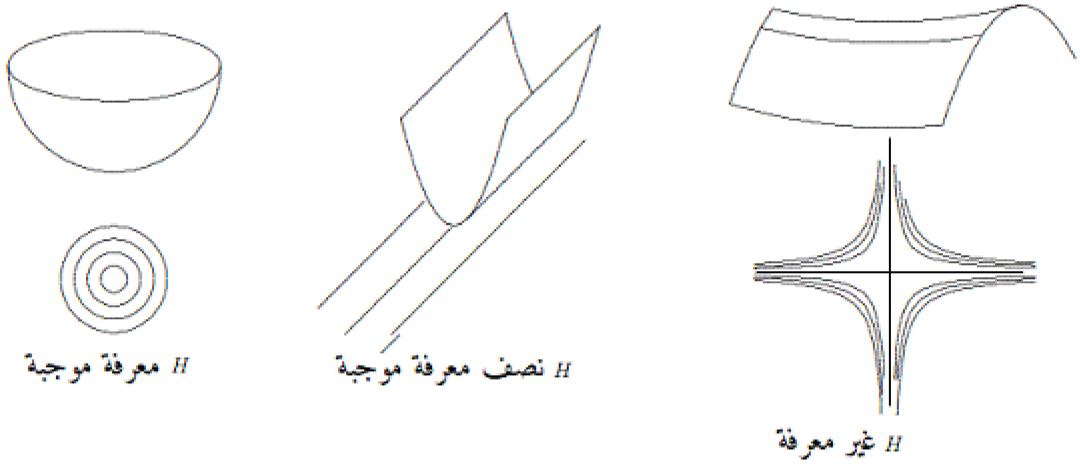
أي

$$f(x) \geq f(x_0)+\nabla^t f(x_0)(x-x_0)$$

ومنه f محدبة.

بنفس الطريقة يمكن اثبات باقي التكافؤات.

مثال 1.9.1 من خلال السطح البياني الممثل للتابع $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ يمكن استنتاج طبيعة تحدب أو تقعر الدالة (تعريف مصفوفة هس)، كما توضحه الأسطح التالية:

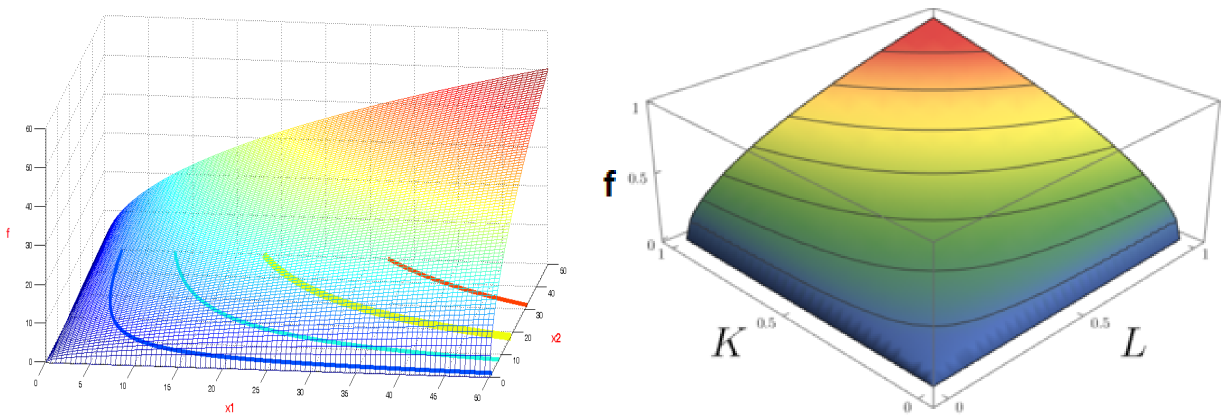


شكل 8.1: التحدب و التفاضلية الثانية

مثال 2.9.1 لتكن دالة كوب-دوغلاس المعروفة كذلك باسم دالة الإنتاج و المعرفة من أجل متغيرين اثنين $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ بـ

$$f(x, y) = cx^a y^b, \;\; \textit{avec} \;\; a, b, c > 0$$

حيث:
تمثل f مستوى الانتاج، x يعبر عن مستوى رأس المال بينما يمثل y مستوى أو حجم العمل. كما أن c، a و b عبارة عن ثوابت تحدد بتقنيات و خوارزميات معينة.



شكل 9.1: سطح و منحنيات المستوى لدالة كوب-دوغلاس

لدينا في هذه الحالة:

$$\nabla^2 f(x, y) = H_f(x, y) = \begin{pmatrix} a(a-1)cx^{a-2}y^b & abcx^{a-1}y^{b-1} \\ abcx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)cx^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

و حتى تكون f مقعرة يجب أن يكون

$$a(a-1)cx^{a-2}y^b \leq 0, \quad b(b-1)cx^a y^{b-2} \leq 0, \quad det(H_f) \geq 0$$

و هو ما يكافئ

$$0 \leq a, b \leq 1$$

(كذلك f مقعرة تماما اذا و فقط اذا كان $0 < a, b < 1$)

الأمثلية دون قيود

التمرين الأول

I) عين النهايات التالية اذا ما وجدت:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$ 4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

II) لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ بـ

$$f(x,y)=\frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}$$

هل تقبل f تمديدا بالإستمرارية عند النقطة $(0,0)$ ؟

التمرين الثاني

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

❶ أحسب كلا من $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

❷ أدرس قابلية تفاضل الدالة f عند النقطة $(0,0)$.

التمرين الثالث

لتكن المصفوفة $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ و الدالة

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \langle Ax,x\rangle\end{array}$$

بين أن:

❶ $\forall x\in\mathbb{R}^n:\nabla f=(A+A^t)x$

❷ $\forall x\in\mathbb{R}^n:\Delta f=(A+A^t)$

التمرين الرابع

أحسب كلا من ∇f و Δf في كل حالة

❶ $f(x)=c^tx$

❷ $g(x)=\frac{1}{2}x^tQx+c^tx$، حيث Q مصفوفة متناظرة.

❸ $h(x)=\|Ax-b\|^2$

التمرين الخامس

لتكن الدالة $f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$ و النقطتين $a(1,1)$ و $b(-2,1)$.

❶ أحسب $f(a),\ \ f(b),\ \ \nabla f(a),\ \ \nabla f(b)$

❷ الإتجاه $d=a-b$ هل يمثل اتجاه انحدار للدالة f عند النقطة b ؟ برر اجابتك.

التمرين السادس

لنعتبر الدالة $\quad T(x,y,z)=80-20xe^{-\frac{1}{20}(x^2+y^2+z^2)}$

التي تعطي درجة الحرارة بمختلف نقاط مكعب معدني مركزه النقطة $O(0,0,0)$.

❶ أحسب معدل تغير درجة الحرارة عند النقطة $O(0,0,0)$ في اتجاه شعاع الوحدة $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

❷ حدد الإتجاه حيث يكون مقدار تغير T أعظميا.

التمرين السابع

لتكن الدالة: $g(x)=\ln\ln x$

❶ عين مجال تعريف الدالة g.

❷ برهن أن g دالة مقعرة على كامل مجال تعريفها.

❸ استنتج المتباينة:

$$\forall a,b\in]1,+\infty[:\ \ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\sqrt{\ln a\ln b}$$

التمرين الثامن

عين منشور تايلور لكل دالة عند النقط المعطاة

❶ $(x_0,y_0)=(1,1)\qquad f(x,y)=x^2+y^2+xy,$

❷ $(x_0,y_0)=(0,0)\qquad g(x)=x^2y^3,$

❸ $(x_0,y_0)=(0,0)\qquad h(x)=e^{-2x+y},$

التمرين التاسع

لنعتبر الدالة

$$f:\quad x\in\mathbb{R}^n\longmapsto\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle-\langle b,x\rangle$$

حيث: $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة، الشعاع $b\in\mathbb{R}^n$، و $\langle .,. \rangle$ يمثل رمز الجداء السلمي.

❶ لتكن λ_m و λ_M أصغر و أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A على الترتيب. بين أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}^n:\quad \lambda_m||x||^2\leq\langle Ax,x\rangle\leq\lambda_M||x||^2$$

❷ أثبت أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^n$. أحسب df و ∇f من أجل كل $x\in\mathbb{R}^n$.

❸ بفرض أن A موجبة، بين أن A عكوسة إذا و فقط إذا كانت معرفة موجبة.

الفصل الثاني

الأمثلية غير المقيدة

1.2 الشكل الرياضي العام لمسألة الأمثلية

نعتبر في كل ما يلي التابع:

$$\begin{aligned} f: \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

تعريف 1.1.2
مسألة الأمثلية هي كل مسألة تكتب على الشكل:

$$(P): \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

ملاحظة 1.1.2
نسمي بمسألة الأعظمية كل مسألة تكتب على الشكل:

$$(P'): \quad \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

تعريف 2.1.2
نقول أن $\hat{x}$ حل أصغري للتابع f إذا كان:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(\hat{x})$$

تعريف 3.1.2
نقول عن $\hat{x}$ أنه حل أعظمي لـ f إذا تحقق :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(\hat{x})$$

تعريف 4.1.2
$\hat{x}$ حل أمثلي لـ f يعني إحدى اثنتين، فإما يكون حلا أصغريا أو حلا أعظميا.

ملاحظة 2.1.2

1) نقول أن $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ حد أدنى محلي للمسألة (P) إذا وجد $\nu_\varepsilon(\hat{x})$ جوار لـ $\hat{x}$ حيث:

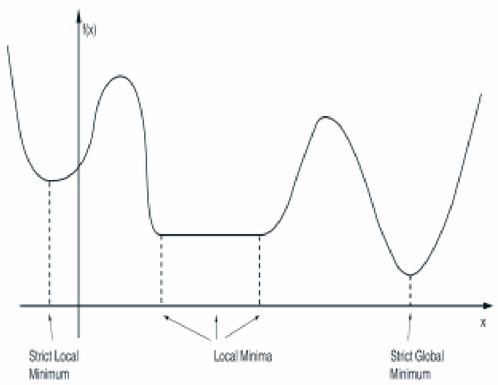
$$\forall x \in \nu_\varepsilon(\hat{x}) : f(\hat{x}) \leq f(x) \tag{1.2}$$

2) نقول أن $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ حل أمثلي تام (مطلق) للمسألة (P) إذا وجد $\nu_\varepsilon(\hat{x})$ جوار لـ $\hat{x}$ حيث:

$$\forall x \in \nu_\varepsilon(\hat{x}),\ \ x \neq \hat{x} :\ \ f(\hat{x}) < f(x) \tag{2.2}$$

3) صورة الحل الأصغري $m = f(\hat{x})$ تسمى القيمة الأصغرية.

$$f(x) \geq f(\hat{x}), \forall x \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{cases} m = f(\hat{x}) = \min f(x) \\ x \in D_f \end{cases}$$



شكل 1.2: تمثيل بياني يوضح أنواع الحواد

2.2 خواص مسائل الأمثلية

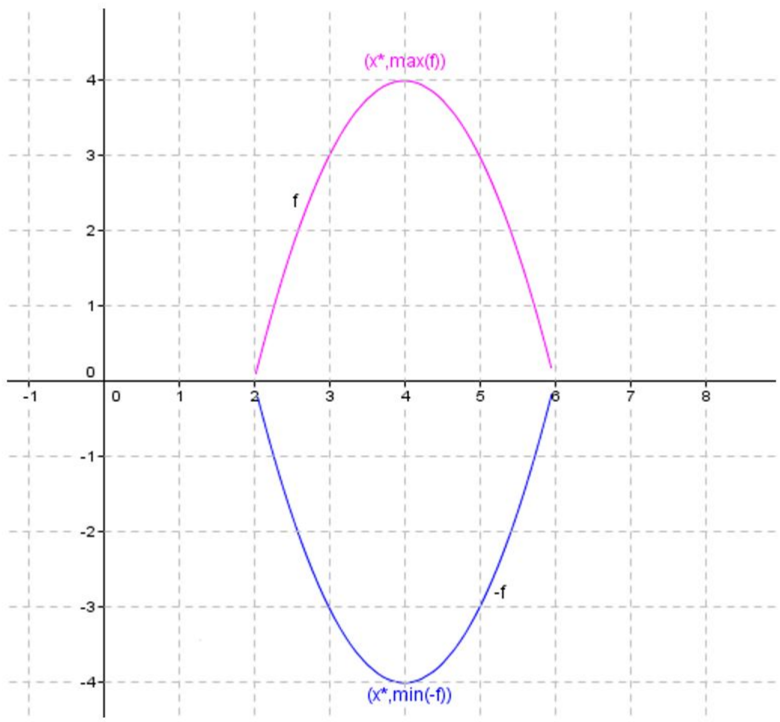
لتكن المسألة التالية:

$$(P):\quad \begin{cases} m = \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

خاصية 1.2.2 (العلاقة بين min و max)
المسألتان الأصغرية والأعظمية لهما نفس الحل، أي أن التابعين f و $(-f)$ لهما نفس الحل الأمثلي، و نكتب:

$$\min f(x) = -\max(-f(x)) \tag{3.2}$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل 2.2: رسم بياني يوضح العلاقة بين القيمة الحدية الصغرى والكبرى

البرهان 9 x^* حل أصغري لـ f معناه:

$$\min f(x) = f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

و منه

$$-f(x^*) \geq -f(x)$$

ما يعني أن

$$-f(x^*) = \max(-f(x))$$

اذا

$$f(x^*) = -\max(-f(x))$$

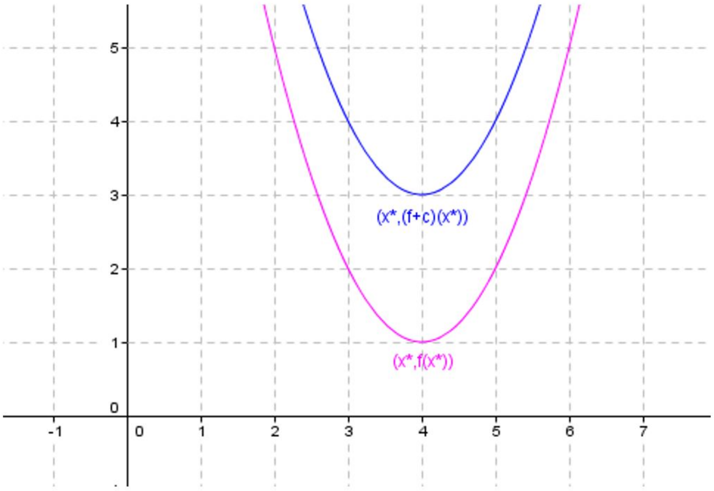
و بالتالي

$$\min f(x) = -\max(-f(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

خاصية 2.2.2 (الإنسحاب)
إذا كانت النقطة x^* حلا أصغريا للمسألة (P) فإنها كذلك حل أصغري لمسألة الأمثلية:

$$(P): \quad \begin{cases} m = \min(f+c)(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

حيث c ثابت حقيقي. التمثيل الموالي يوضح ذلك



شكل 3.2: رسم توضيحي لخاصية الانسحاب

البرهان 10 x^* حل أصغري لـ f معناه:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(x^*)$$

بإضافة الثابت الحقيقي c لطرفي المتباينة نجد:

$$f(x) + c \geq f(x^*) + c$$

أي

$$f(x) + c(x) \geq f(x^*) + c(x^*)$$

اذا نكتب

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (f+c)(x) \geq (f+c)(x^*)$$

و بالتالي نستنتج أن x^* حل أصغري للتابع $(f+c)$.

ملاحظة 1.2.2

f و $(f+c)$ لهما نفس الحل الأصغري، لكن

$$f(x^*) \neq (f+c)(x^*)$$

خاصية 3.2.2 (مركب دالتين)

لتكن الدالتين:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & g(y) \end{array}$$

إذا كانت الدالة g **متزايدة** فإن f و $g \circ f$ لهما نفس الحل الأمثلي.

البرهان 11 • لتكن النقطة x^* حل أصغري لـ f، أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(x^*)$$

و باستعمال الدالة المتزايدة g نجد

$$g(f(x)) \geq g(f(x^*))$$

أي

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad gof(x) \geq gof(x^*)$$

ما يعني أن x^* حل أصغري لـ $g \circ f$ كذلك.

• إذا كان x^* حل أعظمي لـ f يعني:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^*)$$

و بما أن g متزايدة:

$$g(f(x)) \leq g(f(x^*))$$

أي

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad gof(x) \leq gof(x^*)$$

ومنه x^* حل أعظمي لـ $g \circ f$.

مثال 1.2.2

1) الدالتان e^f و f لهما نفس الحل الأمثل (لأن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$).

2) اذا كانت الدالة f موجبة تماما فإن الدالتين $\ln f$ و f لهما نفس الحل الأمثل (لأن دالة اللوغاريتم النيبيري متزايدة تماما على $]0, +\infty[$).

3.2 وجود ووحدانية الحل الأصغري

تعريف 1.3.2 (الدالة القسرية)
نقول عن الدالة f أنها قسرية (زائدية) إذا كان:

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{4.2}$$

مثال 1.3.2 التابع المعرف على $\mathbb{R}^n$ بـ $f(x) = \|x\|_2$ قسري.

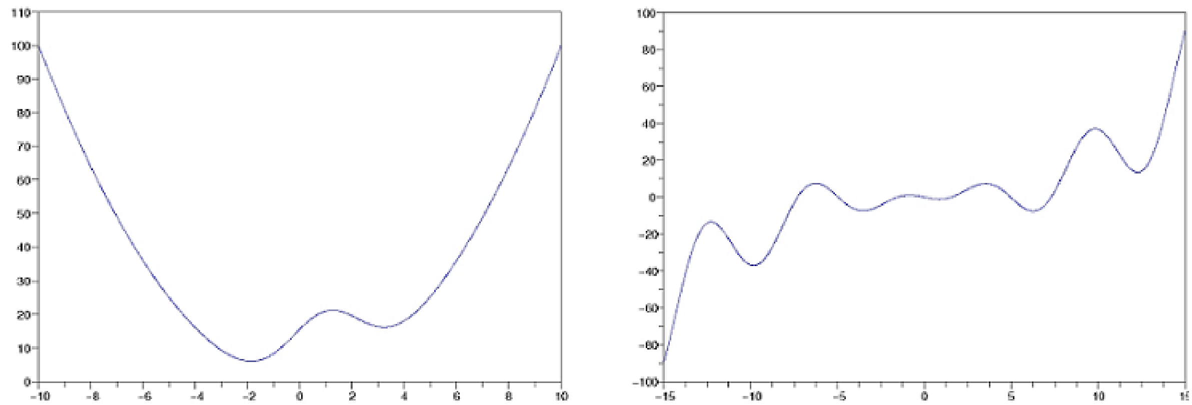
مثال 2.3.2 التابع المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ $g(x) = x_1^2 - x_2^2$ غير قسري، لأن المتتالية ذات الحد العام $x_n = (0, n)$ المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، تعطينا

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| &= \lim_{n \to +\infty} \sqrt{0^2 + n^2} \\ &= \lim_{n \to +\infty} |n|, \qquad n \geq 0 \\ &= \lim_{n \to +\infty} n \\ &= +\infty \end{aligned}$$

بينما

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} g(x_n) &= \lim_{n \to +\infty} g(0, n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} -n^2 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

مثال 3.3.2 يمكن استنتاج قسرية الدوال انطلاقا من تمثيلها البياني



شكل 4.2: مثال عن تابع قسري و آخر غير قسري (على اليسار و اليمين على الترتيب)

نظرية 1.3.2 (وجود الحل الأصغري)
لتكن مسألة الأمثلية:

$$(P):\begin{cases} m=\min f(x) \\ x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

إذا كانت f مستمرة وقسرية فإن المسألة (P) تقبل حلا على الأقل.

مبرهنة 1.3.2 (وحدانية الحل الأصغري)
إذا كانت f محدبة تماما فإن الحل الأصغري إذا ما وجد فهو وحيد.

البرهان 12 نفرض وجود حلين أصغريين x_1^* و x_2^* حيث:

$$\begin{cases} x_1^*\neq x_2^* \\ \text{و} \\ f(x_1^*)=f(x_2^*)=m \end{cases}$$

و بما أن f محدبة تماما فإن

$$\begin{aligned} \forall\lambda[0,1]: f(\lambda x_1^*+(1-\lambda)x_2^*) &< \lambda f(x_1^*)+(1-\lambda)f(x_2^*) \\ &< \lambda m+(1-\lambda)m \\ &< m \end{aligned}$$

وهذا تناقض لأن m قيمة أصغرية، وهو ما يوجب خطأ الفرضية التي انطلقنا منها، أي أن الحل الأصغري وحيد $(x_1^*=x_2^*)$.

4.2 الأمثلية والتفاضلية الأولى

نظرية 1.4.2 **(الشرط اللازم)**

لتكن الدالة القابلة للتفاضل مرة واحدة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
إذا كان $\hat{x}$ أصغري محلي لـ f فإن:

$$\nabla f(\hat{x}) = 0$$

والعكس غير صحيح.

البرهان 13 بما أن f قابلة للتفاضل، نكتب منشور تايلور في جوار النقطة $\hat{x}$ كالآتي:

$$f(\hat{x} + th) = f(\hat{x}) + \nabla^t f(\hat{x})th + t\,\|h\|\,\varepsilon(th) \tag{5.2}$$

و لأن $\hat{x}$ نقطة أصغرية لـ f فمن البديهي أن

$$f(\hat{x} + th) \geq f(\hat{x}) \tag{6.2}$$

من (5.2) و (6.2) نجد

$$\nabla^t f(\hat{x})th + t\,\|h\|\,\varepsilon(th) \geq 0 \tag{7.2}$$

بالقسمة على t حيث $t > 0$:

$$\nabla^t f(\hat{x})h + \|h\|\,\varepsilon(th) \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n \tag{8.2}$$

لما $t \to 0^+$ نجد

$$\nabla^t f(\hat{x})h \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \tag{9.2}$$

باختيار $h = -\nabla f(\hat{x})$ نحصل على:

$$0 \leq -\|\nabla f(\hat{x})\|^2 \leq 0 \tag{10.2}$$

ما يعني أن

$$\nabla f(\hat{x}) = 0 \tag{11.2}$$

و كذلك بنفس الطريقة لما $t \to 0^-$ نجد:

$$\nabla^t f(\hat{x})h \leq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \tag{12.2}$$

بوضع $h = \nabla f(\hat{x})$ نحصل على

$$0 \leq \|\nabla f(\hat{x})\|^2 \leq 0 \tag{13.2}$$

أي أن

$$\nabla f(\hat{x}) = 0 \tag{14.2}$$

ملاحظة 1.4.2 اذا كان $\nabla f(\hat{x}) = 0$ نسمي $\hat{x}$ بـ **النقطة الحرجة** .

نظرية 2.4.2 (الشرط الكافي)
لتكن الدالة القابلة للتفاضل مرة واحدة

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

إذا كانت f محدبة و $\nabla f(x^*) = 0$ فإن x^* حل أصغري محلي لـ f.

البرهان 14 f محدبة معناه

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla^t f(x^*)(x - x^*) \tag{15.2}$$

وبما أن :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

فإن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \geq f(x^*)$$

ما يعني أن: x^* يمثل حلا أصغريا لـ f.

5.2 الأمثلية والتفاضلية الثانية

نظرية 1.5.2 (الشرط اللازم)
لتكن الدالة:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

قابلة للتفاضل مرتين.
إذا كان x^* حل أصغري محلي لـ f فإن: $H_f(x^*)$ نصف معرفة موجبة.

البرهان 15 f قابلة للتفاضل مرتين، اذا نكتب منشور تايلور من الدرجة الثانية

$$f(x)=f(x^*)+\nabla^t f(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}(x-x^*)^t H_f(x^*)(x-x^*)+\|x-x^*\|^2\varepsilon(x-x^*)$$

بوضع $x=x^*+th$ أي كذلك $x-x^*=th$ نجد:

$$\begin{aligned} f(x^*+th) &= f(x^*)+\nabla^t f(x^*)th+\frac{1}{2}(th)^t H_f(x^*)th+\|th\|^2\varepsilon(th) \\ &= f(x^*)+\nabla^t f(x^*)th+\frac{1}{2}t^2h^t H_f(x)h+t^2\|h\|^2\varepsilon(th) \end{aligned}$$

حسب المعطيات لدينا $\nabla f(x^*)=0$ و $f(x^*+th)\geq f(x^*)$

اذا

$$\frac{1}{2}t^2h^t H_f(x^*)h+t^2\|h\|^2\varepsilon(th)\geq 0$$

أي

$$\frac{1}{2}h^t H_f(x^*)h+\|h\|^2\varepsilon(th)\geq 0$$

لما $t\to 0$ نجد

$$\frac{1}{2}h^t H_f(x^*)h\geq 0$$

أي

$$\frac{1}{2}\langle H_f(x^*)h,h\rangle\geq 0$$

و بالتالي $H_f(x^*)$ نصف معرفة موجبة.

نظرية 2.5.2 (الشرط الكافي)
لتكن الدالة

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

القابلة للتفاضل مرتين.
إذا كانت x^* نقطة حرجة وكانت $H_f(x^*)$ معرفة موجبة فإن x^* حل أصغري محلي لـ f.

البرهان 16 f قابلة للتفاضل مرتين، اذا نكتب منشور تايلور من الدرجة الثانية

$$f(x)=f(x^*)+\nabla^t f(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}(x-x^*)^t H_f(x^*)(x-x^*)+\|x-x^*\|^2\varepsilon(x-x^*)$$

علما أن $\nabla f(x^*)=0$، لأن x^* نقطة حرجة، و عليه نكتب

$$f(x)-f(x^*)=\frac{1}{2}(x-x^*)^t H_f(x^*)(x-x^*)+\|x-x^*\|^2\varepsilon(x-x^*) \tag{16.2}$$

بوضع $x - x^* = th$ من أجل $t \neq 0$، نجد

$$f(x^* + th) - f(x^*) = \frac{1}{2} t^2 h^t H_f(x^*) h + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th) \quad (17.2)$$

و بما أن $H_f(x^*)$ معرفة موجبة $(h^t H_f(x^*) h > 0)$، نكتب

$$\frac{1}{2} t^2 h^t H_f(x^*) h + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th) > t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th)$$

و منه

$$f(x^* + th) - f(x^*) > t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th)$$

لما $t \to 0$ نتحصل على

$$f(x^* + th) - f(x^*) > 0 \quad (18.2)$$

أي

$$f(x^* + th) > f(x^*) \quad (19.2)$$

و هو ما يعني أن x^* حل أصغري.

تعريف 1.5.2
نقول عن التابع القابل للتفاضل مرة واحدة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ أنه **اهليليجي** أو **ناقصي** *(elliptique)* إذا وجد $\alpha > 0$ بحيث:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \quad (20.2)$$

كذلك اذا كان f قابلا للتفاضل مرتين على $\mathbb{R}^n$ فإنه اهليليجي اذا و فقط اذا وجد $\alpha > 0$ بحيث

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ \langle H_f(x) y, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2 \quad (21.2)$$

مبرهنة 1.5.2 اذا كان التابع $f \in C^1(\mathbb{R})$ في $\mathbb{R}$ اهليليجيا، فإن f محدب تماما و قسري، و المسألة (P) تقبل حلا وحيدا.

البرهان 17 يكفي استعمال عبارة النشر المحدود و متباينة الاهليليجية (20.2).

ملاحظة 1.5.2 كذلك اذا تحققت المتباينة (21.2) نقول أن f **محدب بقوة** (محدب بالمطلق).

قضية 1.5.2 (خواص التوابع المحدبة بقوة)
إذا كان التابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدبا بقوة من أجل عدد ثابت $m > 0$، فإن:

1- f محدب تماما.

2- من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}^n$: $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2}||y - x||^2$

3- f قسري.

4- f يقبل حلا أصغريا عاما وحيدا $\hat{x}$.

5- من أجل كل $x \in \mathbb{R}^n$

$$||x - \hat{x}|| \leq \frac{2}{m}||\nabla f(x)||$$

البرهان 18

1- بما أن المصفوفة $H_f(x)$ معرفة موجبة من أجل كل $x \in \mathbb{R}^n$، فإن f محدب تماما (حسب النظرية 2.9.1).

2- من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}^n$، و حسب النشر المحدود لتايلور-ماكلورين يوجد $z \in]x, y[$ بحيث:

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(z)(y - x), y - x \rangle \qquad (22.2)$$

بتطبيق خاصية أو متباينة التحدب المطلق (21.2) على آخر حد بالطرف الثاني من المعادلة (22.2) نجد المتراجحة المطلوبة.

3- بأخذ $x = 0$ بالمتباينة السابقة نحصل على

$$f(y) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), y \rangle + \frac{m}{2}||y||^2$$

من البديهي أن الطرف الثاني لهذه المتراجحة يمثل تابعا قسريا، ما يعني أن f قسري.

4- f تابع محدب تماما و قسري، فهو يقبل اذا حلا أصغريا عاما وحيدا.

مثال 1.5.2

لتكن الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ والمعرفة بـ :

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - xy$$

لنبحث عن النقط الحرجة لـ f مع تحديد طبيعتها:

لدينا:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -2y - x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f.

لدينا مصفوفة هس

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

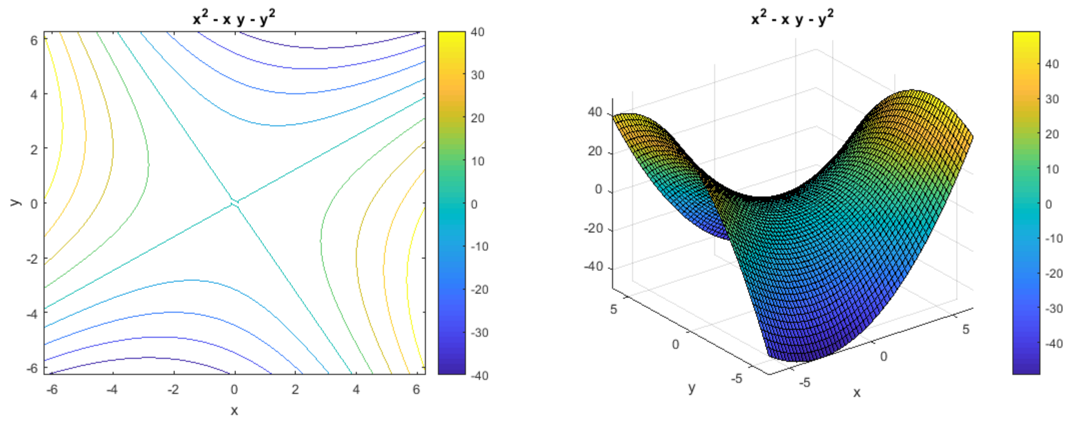
وعند النقطة $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

حيث

$$\det H_f(0,0) = -5 < 0$$

أي أن القيمتين الذاتيتين لـ H_f مختلفتين في الإشارة و بالتالي النقطة $(0,0)$ نقطة سرج.



شكل 5.2: سطح ومنحنيات المستوي للدالة f

مثال 2.5.2

لتكن الدالة $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ :

$$h(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

لنبحث عن النقط الحرجة لـ h مع تحديد طبيعتها. لدينا:

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4(x-y) \\ 4y^3 + 4(x-y) \end{pmatrix}$$

اذا

$$\nabla h(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^3-4(x-y)=0 \\ 4y^3+4(x-y)=0 \end{cases}$$

بجمع هاتين المعادلتين طرفا الى طرف نجد:

$$x^3+y^3=0 \Rightarrow x=-y$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} 4x^3-8x=0 &\implies 4x(x^2-2)=0 \\ &\implies x=0 \vee x=\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

ومنه النقط الحرجة لـ h هي: $(0,0)$، $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$،$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
لدينا:

$$H_h(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

1) عند النقطة $(0,0)$:

$$H_h(0,0)=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(H_h-\lambda I)=0 &\implies \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix}=0 \\ &\implies (-4-\lambda)^2-4^2=0 \\ &\implies \lambda(-\lambda-8)=0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-8 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه لا يمكن الحكم على النقطة $(0,0)$.

2) عند النقطة $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$:

$$H_h(\sqrt{2},-\sqrt{2})=\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

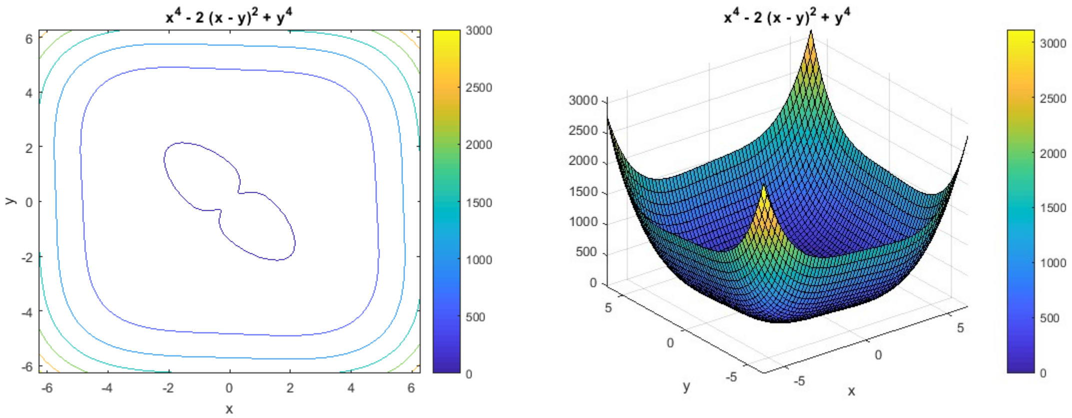
$$\det(H_h-\lambda I)=\begin{vmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (20-\lambda)^2 - 4^2$$
$$= (-\lambda+16)(-\lambda+24)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1' = 16 & > 0 \\ \lambda_2' = 24 & > 0 \end{cases}$$

ومنه النقطة $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ هي حل أصغري تام (مطلق) لـ h.

3) وكذلك بنفس الطريقة نجد أن النقطة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ تمثل حلا أصغريا تاما (مطلقا) لـ h. والقيمة الأصغرية هي:

$$h(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = h(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$$



شكل 6.2: سطح ومنحنيات المستوي للدالة h

الأمثلية دون قيود

التمرين الأول أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

❶ المجموعة $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$ محدبة.

❷ مركب دالتين محدبتين يمثل دالة محدبة.

❸ من أجل m دالة $f_1, f_2, \ldots, f_m$ محدبة على $\mathbb{R}^n$، فإن دالة الحد الأعلى

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\} \end{array}$$

غير محدبة.

التمرين الثاني لتكن المجموعة المحدبة $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و الدالة $f : \Omega \to \mathbb{R}$. بين أن f محدبة اذا و فقط اذا كان أعلى بيانها $epi(f)$ محدب في $\mathbb{R}^{n+1}$.

$(epi(f) = \{(x,z) \colon x \in \Omega \wedge z \in \mathbb{R} \wedge z \geq f(x)\})$

التمرين الثالث أدرس تحدب أو تقعر الدوال التالية

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; D = \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz, \; D = \mathbb{R}^3 \qquad h(x_1,x_2) = -2x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2, \; D = \mathbb{R}^2$$

التمرين الرابع ليكن التابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$، حيث $f \in \mathcal{C}^2(D_r(\hat{x},\hat{y}))$، و H_f مصفوفة هس المرفقة بالتابع f .

بفرض أن $\nabla f(\hat{x},\hat{y}) = (0,0)$، بين أن:

❶ إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ و $\det H_f(\hat{x},\hat{y}) > 0$، فإن $(\hat{x},\hat{y})$ حل أصغري محلي و تام.

❷ إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ و $\det H_f(\hat{x},\hat{y}) > 0$، فإن $(\hat{x},\hat{y})$ حل أعظمي محلي و تام.

❸ إذا كان $\det H_f(\hat{x},\hat{y}) < 0$، فإن $(\hat{x},\hat{y})$ لا تمثل حل أصغري محلي و لا أعظمي محلي.

❹ إذا كان $\det H_f(\hat{x},\hat{y}) = 0$، لا يمكن استنتاج شيء، و الدراسة يجب أن تستمر، و النقطة $(\hat{x},\hat{y})$ يمكن أن تكون حلا أمثليا كما يمكن أن لا تكون كذلك.

التمرين الخامس أدرس قسرية (la coercivité) التوابع التالية:

❶ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

❷ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث $g(x) = < a, x > + b, \;\; a, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$

❸ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ حيث $h(x,y,z) = xyze^{-x-y-z}$

ف. ساسي f.saci@univ-skikda.dz

التمرين السادس

ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 3xy$$

1) أدرس قسرية f، ماذا تستنتج؟

2) عين النقط الحرجة ثم بيّن طبيعتها.

التمرين السابع

لتكن الدالة

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\|^4 - \langle b, x\rangle \end{array}$$

حيث $\|.\|$ ترمز للنظيم الإقليدي و $b = (0,4)^T$ شعاع من $\mathbb{R}^2$.

❶ بين أن $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ و كذلك

$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \nabla f(x) = 4\|x\|^2 x - b$ و $\nabla^2 f(x) = 8xx^T + 4\|x\|^2 I_2$، حيث I_2 تمثل المصفوفة الحيادية في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

❷ بين أن f دالة محدبة.

❸ برهن وجود نقطة حدية صغرى واحدة على الأقل لـ f على $\mathbb{R}^2$.

❹ بحل معادلة أولر Euler أوجد النقط الحدية الصغرى لـ f على $\mathbb{R}^2$.

التمرين الثامن

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

❶ بين وجود الثنائية $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$ حيث: $f(x,y) \geq \alpha\|(x,y)\|^2 + \beta$

❷ استنتج أن المسألة $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \quad (\mathcal{P})$ تقبل حلا.

❸ هل الدالة f محدبة على $\mathbb{R}^2$ ؟

❹ حدد النقط الحرجة لـ f مبرزا طبيعتها.

الفصل الثالث

الخوارزميات

1.3 مفاهيم عامة

تعريف 1.1.3

تعرف الخوارزمية بواسطة تطبيق $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ممّا يسمح بتوليد متتالية عناصر تكرارية من $\mathbb{R}^n$، و يكتب الشكل العام لهذه الخوارزمية كالتالي:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ معطى}, & k = 0 \\ \text{و} & \\ x_{k+1} = A(x_k), & k = k+1 \end{cases}$$

1.1.3 تقارب الخوارزمية

نقول عن خوارزمية معينة أنها **متقاربة** إذا كانت المتتالية $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ المولدة بالخوارزمية تتقارب نحو $x^* \in \mathbb{R}^n$، أي:

$$\|x_k - x^*\| \to 0$$

من أجل k كبير بالقدر الكافي.

ملاحظة 1.1.3

تسمى القيمة $\|x_k - x^*\|$ بهامش خطأ الخوارزمية ونرمز لها بالرمز e_k.

2.1.3 سرعة التقارب

لتكن المتتالية $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ المولدة بالخوارزمية والمتقاربة نحو $x^* \in \mathbb{R}^n$. نعرّف أنواع التقارب كالتالي:

1) تقارب **خطي**: إذا وجد $\lambda \in]0,1[$ بحيث: $\lim\limits_{k\to\infty} \sup \frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|} = \lambda < 1$

2) تقارب **فوق خطي**: إذا كان $\lim\limits_{k\to\infty} \sup \frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|} = 0$

3) تقارب **فوق خطي من الرتبة** p: إذا كان $\lim\limits_{k\to\infty} \sup \frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|^p} < +\infty$، من أجل $p > 1$

ملاحظة 2.1.3

1) إذا كان: $\lim\limits_{k\to\infty} \sup \frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|^2} < +\infty$ فإن التقارب **تربيعي** (فوق خطي من الرتبة 2).

2) إذا كان: $\frac{\|x_{k+1}-x^*\|}{\|x_k-x^*\|} < \alpha_k \to 0$ ، حيث α_n متتالية هندسية فإن التقارب هندسي.

3) التقارب فوق خطي من الرتبة p يستلزم التقارب فوق خطي الذي يستلزم التقارب الخطي.

3.1.3 خوارزميات النزول

نسمي خوارزمية النزول (التصغير) كل خوارزمية تحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} x_0 \text{ معطى} \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \\ f(x_{k+1}) < f(x_k) \end{cases}$$

حيث:

- d_k شعاع انحدار الدالة f .
- α_k خطوة الخوارزمية عند التكرار k.

ملاحظة 3.1.3

تصنيف الخوارزميات يرتكز أساسا على كيفية اختيار كل من شعاع الانحدار و الخطوة.

2.3 طريقة التدرج

نعبّر عن هذه الطريقة أو الخوارزمية بالشكل العام التالي

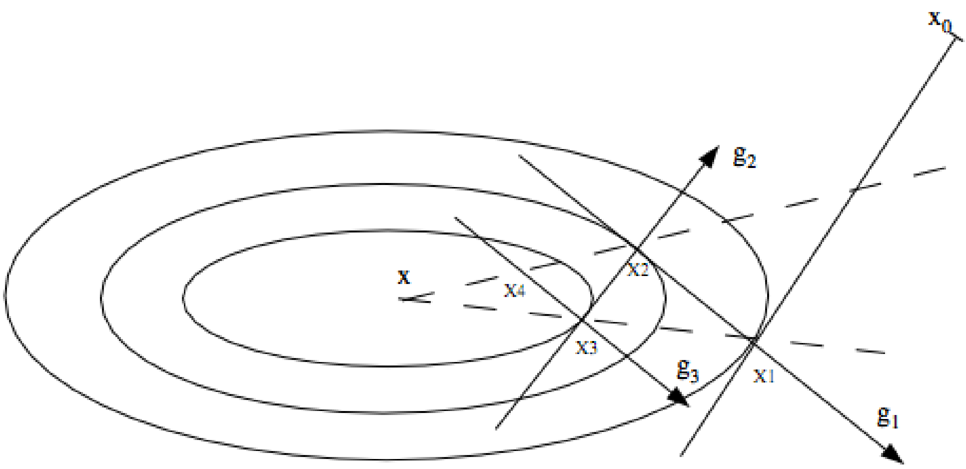
$$\begin{cases} x_0 \text{ معطى} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+^*, \quad -\nabla f(x_k) = d_k \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \\ f(x_{k+1}) < f(x_k) \end{cases}$$

حيث $d_k = -\nabla f(x_k)$ يمثل شعاع الانحدار المختار و منه تستمد هذه الطريقة اسمها. يمكن حوصلة مراحل هذه الخوارزمية كما يلي:

1) المرحلة الابتدائية: من أجل $k=0$ نختار كلا من الخطوة $\alpha_0 > 0$ ونقطة البدء x_0، و هامش الخطأ ε.

2) المرحلة الأساسية: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

3) معيار التوقف: إذا كان $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$، نتوقف
وإلا نضع: $k = k+1$ ونعود للمرحلة 2 من جديد.



شكل 1.3: نموذج بياني لخوارزمية التدرج

ملاحظة 1.2.3 يمكن توظيف أو اعتماد معايير توقف مختلفة و حسب الحاجة، نذكر على سبيل المثال

$$\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < \varepsilon$$

أو

$$\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)\| < \varepsilon$$

تعريف 1.2.3
نقول عن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ أنه تابع ليبتشيزي إذا وجد $M > 0$ بحيث:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| \qquad (1.3)$$

ملاحظة 2.2.3
التابع $\nabla f(.)$ ليبشيتزي واهليليجي.

نظرية 1.2.3 (نظرية التقارب)
ليكن التابع $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ من الصنف C^1، اذا كان M و β معاملي ليبشيتزية و اهليليجية $\nabla f(.)$ على الترتيب بحيث:

$$0 < a < \alpha_k < b < \frac{2\beta}{M^2}$$

فإن طريقة التدرج تتقارب هندسيا نحو النقطة الحدية الأصغرية لـ f:

$$\exists \delta > 0 : \quad \|x_{k+1} - x^*\| \leq \delta \, \|x_k - x^*\|$$

البرهان 19 لنعتبر النقطة x^* حلا أصغريا للمسألة $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$، أي:

$$\lim_{k \to \infty} x_{k+1} = x^*$$

وكذلك: $\nabla f(x^*) = 0$
لدينا:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= (x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) - x^* \\ &= x_k - x^* - \alpha_k \left(\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\right) \end{aligned}$$

و بالتالي:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|^2 - 2\alpha_k \left\langle x_k - x^*, \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) \right\rangle$$

بتوظيف ليبشيتزية و اهليليجية ∇f نجد

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 M^2 \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \beta \|x_k - x^*\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha_k \beta + \alpha_k^2 M^2) \|x_k - x^*\|^2 \end{aligned}$$

نفرض الآن التابع

$$\begin{aligned} g : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \alpha_k &\mapsto 1 - 2\alpha_k \beta + M^2 \alpha_k^2 \end{aligned}$$

و بما أن $a < \alpha_k < b$ فإن

$$g(\alpha_k) \leq \max\{g(a), g(b)\}$$

لدينا

$$g'(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{\beta}{M^2}$$

أي $\alpha_k = \frac{\beta}{M^2}$ حاد لـ g.

باستعمال متراجحة كوشي شوارتز نجد

$$\beta\|x-y\|^2 \leq \langle \nabla f(x)-\nabla f(y), x-y\rangle \leq \|\nabla f(x)-\nabla f(y)\| . \|x-y\| \\ \leq M\|x-y\|^2$$

اذا

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y : \beta < M$$

و لدينا

$$g(0) = g(\frac{2\beta}{M^2}) = 1$$

أي أن

$$0 \leq g(\alpha_k) \leq 1, \quad \forall \alpha_k \in \left]0, \frac{2\beta}{M^2}\right[$$

بفرض $\delta = \max\{g(a), g(b)\}$ و $a, b \in \left]0, \frac{2\beta}{M^2}\right[$، نكتب

$$g(\alpha_k) \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1$$

و بالتالي

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2 \leq \delta\|x_k-x^*\|^2, \forall k \in \mathbb{N}$$

أي

$$\|x_{k+1}-x^*\| \leq \delta\,\|x_k-x^*\| \leq \delta^2\,\|x_{k-1}-x^*\| \leq \cdots \leq \delta^k\,\|x_0-x^*\|$$

ما يعني أن خوارزمية التدرج تتقارب هندسيا نحو النقطة x^*.

ملاحظة 3.2.3

1) في حالة f تربيعية و A مصفوفة نصف معرفة موجبة فإنه يتم استعمال القيم الذاتية بأخذ:

$$\beta = \lambda_{\min} \wedge M = \lambda_{\max}$$

2) في التطبيق العددي يتم أخذ α صغير جدا للتأكد من صحة التقارب، لكن التقارب في هذه الحالة جد بطيء.

3) يتم الحصول على طريقة التدرج بخطوات متغيرة إذا تم تغيير الخطوة α_k عند كل تكرار k.

1.2.3 خوارزمية التدرج بخطوة ثابتة

بوضع $\alpha_k = \alpha$، حيث α ثابت تصبح الخوارزمية من الشكل:

$$\begin{cases} \text{معطى } x_0 \\ x_{k+1} = x_k - \alpha\nabla f(x_k) \\ f(x_{k+1}) < f(x_k) \end{cases}$$

مثال 1.2.3

لنطبق طريقة التدرج بخطوة ثابتة لإيجاد الحل الأصغري للدالة $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$f_1(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 3x - y + 4$$

مع أخذ: $\alpha = \frac{1}{8}$ ، $x_0 = (0,0)$

لدينا:

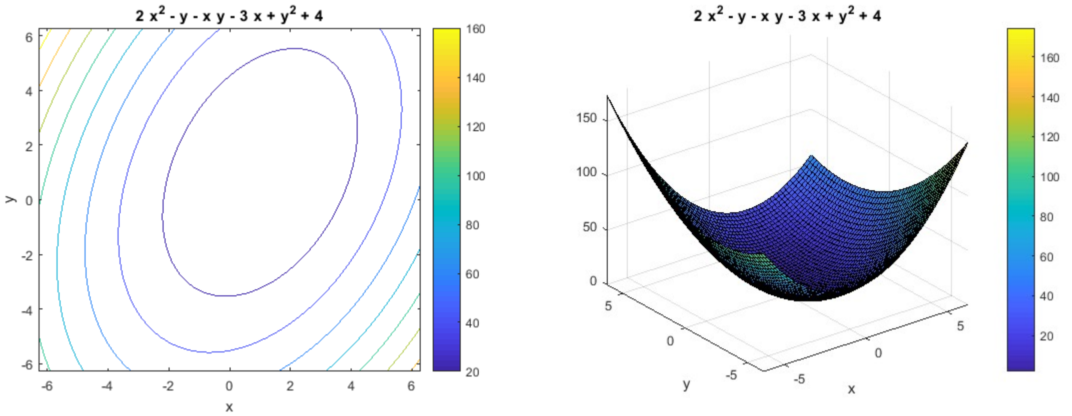
$$\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - y - 3 \\ 2y - x - 1 \end{pmatrix}$$

و $H_{f_1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة معرفة موجبة ($\lambda_1 = 1.5858$, $\lambda_2 = 4.4142$).

و ليكن $x^* = (x^*, y^*)$ حل أصغري لـ f_1 أي $\nabla f_1(x^*) = 0$

$$\begin{cases} 4x^* - y^* - 3 = 0 \\ 2y^* - x^* - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^* = 1 \\ y^* = 1 \end{cases}$$

ومنه الحل الأصغري المعين بطريقة مباشرة هو $x^* = (1,1)$ حيث القيمة الأصغرية تمثل $f_1(1,1) = 2$.



شكل 2.3: سطح ومنحنيات المستوى للدالة f_1

خوارزمية التدرج بخطوة ثابتة تكتب على الشكل:

المرحلة الإبتدائية:

$X_0 = (0,0)$ ، $\alpha = \frac{1}{8}$

المرحلة الأساسية: من أجل $k \geq 0$ ، $d_k = -\nabla f(x_k)$ و $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$

لدينا $d_0 = -\nabla f_1(0,0) = -(-3,-1) = (3,1)$
ومنه نكتب التكرار الأول

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha d_0 \\ &= (0,0) + \frac{1}{8}(3,1) \\ &= \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

حيث $f_1\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) = 3$ و $\nabla f_1(X_1) = (-\frac{13}{8}, -\frac{9}{8}) \neq (0,0)$ ما يعني أن الخوارزمية لم تتقارب، و نستمر بنفس الطريقة بالانتقال للتكرار الثاني.

2.2.3 خوارزمية التدرج بخطوة مثلى

بتحديد $\alpha_k = \alpha_k^*$، حيث α_k^* الخطوة المثلى التي تحقق القيمة الأصغرية لـ : $f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$، و نكتب خوارزمية التدرج كما يلي

$$\begin{cases} x_0 \text{ معطى} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k^* \nabla f(x_k) \\ f(x_{k+1}) < f(x_k) \end{cases}$$

ويتم تحديد α_k^* بواسطة البحوث الخطية الدقيقة أو غير الدقيقة.

1.2.2.3 البحث الخطي الدقيق

ترتكز هذه الطريقة على دراسة التابع أحادي المتغير

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ &\mapsto \mathbb{R} \\ \alpha_k &\to \Phi(\alpha_k) = f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \end{aligned}$$

ما يمكن من استنتاج α_k^* حل المسألة

$$(P_1): \quad \min_{\alpha_k \in \mathbb{R}_+} \Phi(\alpha_k)$$

نظرية 2.2.3
إذا كان التابع f قابلا للتفاضل، فإن شعاع الانحدار d_k يحقق

$$d_{k+1}^t . d_k = 0$$

البرهان 20
لنضع $\Phi(\alpha) = f(x_k + \alpha_k^* d_k), \alpha > 0$
و منه

$$\Phi'(\alpha) = \nabla^t f(x_k + \alpha_k d_k).d_k$$

ليكن α_k^* حل أصغري لـ Φ أي

$$\Phi'(\alpha_k^*) = 0$$

أي

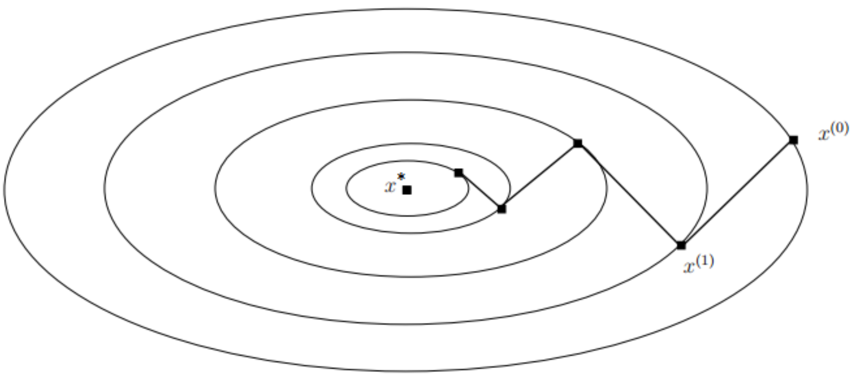
$$\nabla^t f(x_k + \alpha_k d_k).d_k = 0$$

و منه

$$\nabla^t f(x_{k+1}).d_k = 0$$

ما يعني أن

$$d_{k+1}^t.d_k = 0$$



شكل 3.3: رسم توضيحي لتعامد الأشعة المتعاقبة

وهو ما يبين بهذه الطريقة أن كل شعاعي تدرج متتابعين، متعامدين مثنى مثنى.

مثال 2.2.3
لنطبق طريقة التدرج بـ **خطوة مثلى** لإيجاد الحل الأصغري للتابع

$$f_1(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 3x - y + 4$$

حيث $x_0 = (0,0)$ لدينا: $\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - y - 3 \\ 2y - x - 1 \end{pmatrix}$

لحساب الخطوة المثلى من أجل $k = 0$ نعتبر التابع أحادي المتغير

$$\Phi(\alpha) = f_1(x_k + \alpha d_k)$$

الخطوة α^* هي الحل الأمثلي لـ Φ اذا و فقط اذا كان $\nabla\Phi(\alpha^*) = 0$
علما أن

$$\nabla\Phi(\alpha^*) = \nabla f_1(x_k + \alpha^* d_k).d_k$$

أي من أجل $k = 0$

$$\begin{aligned}\nabla\Phi(\alpha^*) &= \nabla f_1(x_0 + \alpha^* d_0)d_0\\ &= \begin{pmatrix}11\alpha^* - 3\\ -\alpha^* - 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\\ &= 32\alpha^* - 10\end{aligned}$$

اذا $\nabla\Phi(\alpha^*) = 0$ اذا وفقط اذا كان $\alpha^* = \frac{5}{16}$، و عليه نجد

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + \alpha^* d_0\\ &= (0,0) - \frac{5}{16}(-3,-1)\\ &= \left(\frac{15}{16}, \frac{5}{16}\right)\end{aligned}$$

حيث $\nabla f_1(\frac{15}{16}, \frac{5}{16}) = (\frac{7}{16}, -\frac{21}{16}) \neq (0,0)$ و القيمة الأصغرية هي: $f_1(\frac{15}{16}, \frac{5}{16}) = 2.4375$، و نستمر بنفس الطريقة في التكرار الموالي لأن الخوارزمية لم تتقارب بعد، لكن تعتبر النتيجة مثلى مقارنة بتلك المحصلة بالمثال 1.2.3.

2.2.2.3 البحث الخطي غير الدقيق

هنالك عدة طرق للبحث الخطي غير الدقيق، و منها البحث الخطي لـ "wofle" الذي يعتمد على تحديد الخطوة α_k التي تحقق العلاقتين:

$$\begin{cases} h_k(\alpha) \leq h_k(0) + c_1 {h'}_k(0)\\ \text{و}\\ h_k(\alpha) \geq c_2 {h'}_k(0)\end{cases}$$

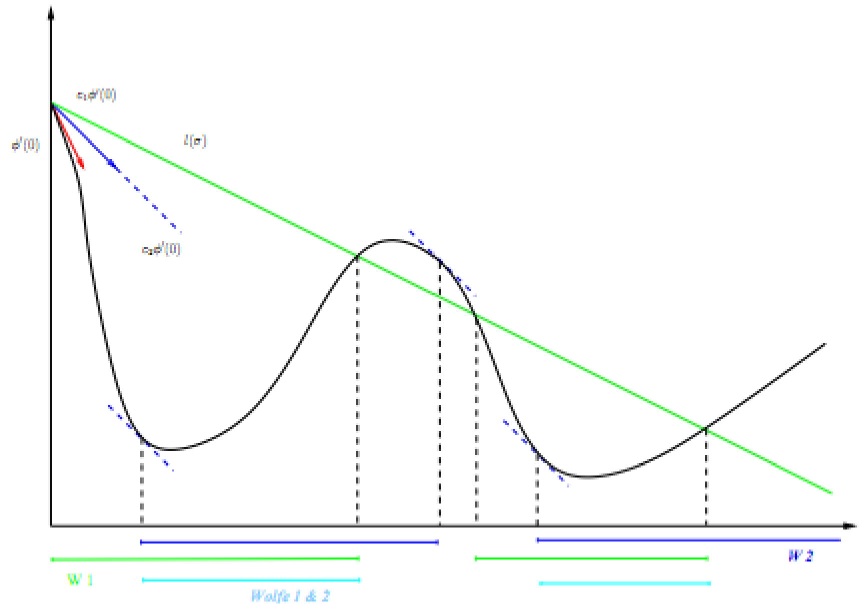
وتعرف خوارزمية "wofle" بالشكل:

1) $\alpha = 1$ (مثلا بأخذ: $\alpha_- = \alpha_+ = 0$)، $0 < c_1 < c_2 < 1$.

2) إذا كان: $h_k(\alpha) \leq h_k(0) + c_1\alpha {h'}_k(0)$ و $h_k(\alpha) \geq c_2 {h'}_k(0)$ نتوقف.

3) وإلا:
- إذا كان: $h_k(\alpha) > h_k(0) + c_1\alpha h_k'(0)$، نضع: $\alpha = \alpha_+$.
- إذا كان: $h_k(\alpha) \le h_k(0) + c_1\alpha h_k'(0)$ و $h_k(\alpha) < c_2 h_k'(0)$ نضع: $\alpha = \alpha_-$.

4) نختار قيمة جديدة لـ α:
- إذا كان: $\alpha_+ = 0$ نبحث عن $\alpha > \alpha_-$ (مثلا بأخذ: $\alpha = 2\alpha_-$).
- إذا كان: $\alpha_+ > 0$ نبحث عن $\alpha \in]\alpha_-, \alpha_+[$ (مثلا بأخذ: $\alpha = \frac{\alpha_- + \alpha_+}{2}$).
- ونرجع الى 2.



شكل 4.3: مخطط قاعدة وولف

3.2.3 طريقة التدرج المترافق

تعريف 2.2.3 لتكن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ متناظرة و معرفة موجبة، و الشعاعان $x, y \in \mathbb{R}^n$.
نقول أن x و y مترافقين بالنسبة للمصفوفة A ($A-$مترافقان) إذا كان:

$$x^t A y = 0$$

ملاحظة 4.2.3

1) تستعمل طريقة التدرج المترافق لحل مسائل الأمثلية غير المقيدة والأنظمة الخطية كبيرة الحجم.

2) إذا كانت جملة الأشعة $S = \{d_0, d_1, \ldots, d_k\}$ مترافقة فهي مستقلة خطيا.

1.3.2.3 طريقة التدرج المترافق في حالة دالة تربيعية

لتكن $\{d_0, d_1, \ldots, d_k\}$ جملة أشعة A–مترافقة.
نسمي طريقة التدرج المترافق التربيعية كل طريقة تكرارية لدالة تربيعية محدبة تماما متعلقة بـ n متغير و معرفة بالشكل:

$$q(x) = \frac{1}{2}x^t Ax + b^t x + c \text{ , } x, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$$

حيث: A مصفوفة متناظرة و معرفة موجبة.
خوارزمية التدرج المترافق تعطى كالتالي:

$$\begin{cases} x_0 \text{ معطى} \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \end{cases}$$

حيث α_k خطوة مثلى و الأشعة $\{d_0, d_1, \ldots, d_k\}$ q–مترافقة.
لنضع: $g_k = \nabla q(x_k)$.

- حساب α_k

لدينا α_k تحقق القيمة الأصغرية لـ q وفق شعاع الانحدار d_k من أجل التكرار k، ومنه:

$$q'(\alpha_k) = d_k^t \nabla q(x_{k+1}) = 0$$

أي

$$d_k^t (Ax_{k+1} + b) = 0$$

اذا

$$d_k^t A(x_k + \alpha_k d_k) + d_k b = 0$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\alpha_k = -\frac{d_k^t (Ax_k + b)}{d^t{}_k A d_k}$$

- بناء الاتجاهات A– مترافقة

يمكن توليد اتجاهات $d_0, d_1, ..., d_k$ A–مترافقة بواسطة أشعة مستقلة خطيا $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k$ باستعمال تعامد غراهم شميت من أجل: $0 \leq i \leq k$
حيث: $d_0, d_1, ..., d_k$ تكافئ $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k$.
ومنه يمكن كتابة d_{i+1} على الشكل التالي:

$$d_{i+1} = \xi_{i+1} + \sum_{m=0}^{i} \xi_{(i+1)m} d_m$$

وفي الحالة التربيعية نأخذ:

$$\{\xi_0 = -\nabla q(x_0), ..., \xi_{n-1} = -\nabla q(x_{n-1})\}$$

بحيث تتوقف الطريقة لما: $\nabla q(x_k) = 0$.

ونكتب: $d_{k+1} = -\nabla q(x_{k+1}) + \beta_{k+1} d_k$

حيث يتم اختيار المعاملات β_{k+1} بحيث تكون جميع الاتجاهات والأشعة السابقة مترافقة.

$$\begin{aligned} d_{k+1}^t A d_k = 0 &\Rightarrow (-\nabla q(x_{k+1}) + \beta_{k+1} d_k)^t A d_k = 0 \\ &\Rightarrow -\nabla^t q(x_{k+1}) A d_k + \beta_{k+1} d_k^t A d_k = 0 \\ &\Rightarrow \beta_{k+1} = \frac{g_{k+1}^t A d_k}{d_k^t A d_k} \end{aligned}$$

الآن، يمكن تلخيص مراحل خوارزمية التدرج المترافق كالتالي:

1) من أجل $k = 0$ نختار نقطة البدء x_0، و نضع

$$g_0 = \nabla q(x_0) = A x_0 + b$$
$$d_0 = -g_0$$

2) إذا كانت: $g_k = 0$، نتوقف $(x^* = x_k)$.

3) وإلا نأخذ $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$، حيث:

$$\alpha_k = \frac{-d_k^t g_k}{d_k^t A d_k}$$

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_{k+1} d_k, \quad \beta_{k+1} = \frac{g_{k+1}^t A d_k}{d_k^t A d_k}$$

وبوضع: $k = k + 1$ نعود للمرحلة الثانية من جديد.

نظرية 3.2.3 (نظرية التقارب)
من أجل كل $x_0 \in \mathbb{R}^n$، المتتالية $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ المولدة من خوارزمية التدرج المترافق تتقارب بتكرار n كحد أقصى نحو x^*.

ملاحظة 5.2.3
لتكن:

$$y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$$

توجد عدة صيغ للمعامل β_{k+1} نذكر منها

- التدرج المترافق لـ" *Hestenes-Stiefel* " :

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_{k+1}^t y_k}{d_k^t y_k}$$

- التدرج المترافق لـ"*Fletcher-Reeves*" :

$$\beta_k^{FR} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}$$

- التدرج المترافق لـ " *Daniel* ":

$$\beta_k^{D} = \frac{g_{k+1}^t \nabla^2 f(x_k) d_k}{d_k^t \nabla^2 f(x_k) d_k}$$

- التدرج المترافق لـ :"*Polak-Ribière-Polyak*"

$$\beta_k^{PRP} = \frac{g_k^t y_k}{\|g_{k-1}\|^2}$$

- التدرج المترافق لـ :"*Fletcher*"

$$\beta_k^{CD} = -\frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^t g_{k-1}}$$

مثال 3.2.3

لنطبق طريقة التدرج المترافق لإيجاد الحل الأصغري للدالة f_2 المعرفة بـ:

$$f_2(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + x - y$$

من أجل: $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

لدينا: $\nabla f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 1 \\ 2y + 2x - 1 \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = H_{f_2}(x, y)$ **مصفوفة معرفة موجبة و متناظرة.**

خوارزمية التدرج المترافق تكتب على الشكل:

1) من أجل $k = 0$:

$$d_0 = -\nabla f_2(x_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) عند $k=1$: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ولدينا: $\nabla q(x_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ ومنه شرط التوقف غير محقق.

3) لما $k=2$:

$$\beta_0 = \frac{\|\nabla f_2(x_1)\|^2}{\|\nabla f_2(x_0)\|^2} = 1$$

ولدينا:

$$d_1 = -\nabla f_2(X_1) + \beta_0 d_0$$

$$d_1 = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\alpha_1 = \frac{(1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{(0,2)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{4}$$

$$\Phi(\alpha) = 4\alpha^2 - 2\alpha - 1$$

$$X_2 = x_1 + \alpha_1 d_1$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = x^*$$

أي أن المتتالية $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو الحل الأمثلي x^* بعد تكرارين فقط.

2.3.2.3 طريقة التدرج المترافق في حالة دالة كيفية

في الحالة العامة تتمثل مراحل خوارزمية التدرج المترافق في

1) المرحلة الإبتدائية: نحدد النقطة الإبتدائية $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و هامش الخطأ ε صغير بالقدر الكافي.

$$g_0 = \nabla f(x_0), \quad d_0 = -g_0$$

2) المرحلة الأساسية: نحسب $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

حيث تعين α_k بطريقة البحث الخطي، بينما

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 1 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 2. \end{cases}$$

فيما يمكن استعمال معامل **فلتشر-ريفيز** $\beta_k = \frac{||g_k||^2}{||g_{k-1}||^2}$

3) مرحلة معيار التوقف: اذا كان $||g_k|| \leq \varepsilon$ نتوقف، وإلا نعود للمرحلة الثانية من جديد بوضع $k = k + 1$

4.2.3 طريقة نيوتن

لتكن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة من الصنف C^2.
باستعمال نشر تايلور من الدرجة الثانية بجوار النقطة x_k نكتب

$$f(x) = f(x_k) + \nabla^t f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^t H_f(x_k)(x - x_k) + \varepsilon||x - x_k||^2$$

و نضع: $q(x) = f(x_k) + \nabla^t f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^t H_f(x_k)(x - x_k)$

إذا كان x_{k+1} حل أمثلي لـ q فإن

$$\nabla q(x_{k+1}) = 0$$

أي

$$\nabla f(x_k) + H_f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

بفرض أن المصفوفة $H_f(x_k)$ قابلة للقلب نجد:

$$x_{k+1} = x_k - H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$$

وبالتالي يمكن تقديم طريقة نيوتن كمايلي:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + d_k \\ d_k = -H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k) \end{cases}$$

حيث d_k اتجاه انحدار الدالة f عند النقطة x_k لأن:

$$d_k = -H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k) \implies \nabla f(x_k) = -d_k H_f(x_k)$$

و منه

$$\begin{aligned}\langle d_k, \nabla f(x_k)\rangle &= \langle d_k, -d_k H_f(x_k)\rangle \\ &= -d_k^t H_f(x_k) d_k < 0\end{aligned}$$

لأن H_f معرفة موجبة.

1.4.2.3 الخوارزمية

1) $k = 0$، نختار x_0 نقطة البدء و هامش الخطأ $\varepsilon > 0$.

2) إذا كان: $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ نتوقف.

3) و إلا نحسب: $x_{k+1} = x_k - H_k^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$

و نضع $k \to k+1$ ثم نعود الى المرحلة 2.

ملاحظة 6.2.3

- خوارزمية نيوتن تمثل خوارزمية انحدار بخطوة ثابتة تساوي 1.
- إذا كان التابع f تربيعيا، محدبا تماما، فإن الخوارزمية تتقارب في تكرار واحد.

نظرية 4.2.3 (نظرية التقارب)
ليكن التابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ حيث $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$، و $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ بحيث $H^{-1}(\hat{x})$ موجودة. لنعتبر x_0 نقطة ابتدائية جد قريبة من $\hat{x}$ بحيث يمكن كتابة

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+^* : cc'||x_0 - \hat{x}|| < 1$$

و كذلك:

1- $||H^{-1}(x)|| < c$

2- $||\nabla f(\hat{x}) - \nabla f(x) - H(x - \hat{x})|| < c'||x - \hat{x}||$ من أجل كل x يحقق $||x - \hat{x}|| < ||x_0 - \hat{x}||$.

في هذه الحالة، تتقارب خوارزمية نيوتن بطريقة تربيعية (فوق خطية من الرتبة الثانية) نحو الحل $\hat{x}$.

ملاحظة 7.2.3 يمكن تلخيص سلبيات هذه الطريقة في:

- طريقة نيوتن فعالة من أجل المسائل ذات الأبعاد الصغيرة حيث لا يصعب حساب المصفوفة H_f ومقلوبها في كل خطوة، بينما تزداد صعوبة ذلك في حالة الأبعاد الكبيرة.
- الشعاع $d_k = -H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$ لا يمثل دوما شعاع انحدار (مثلا في حالة التوابع الخطية حيث تنعدم المشتقات الجزئية الثانية).
- إختيار نقطة ابتدائية بعيدة عن الحل يؤدي لتباعد الخوارزمية.

مثال 4.2.3

لنطبق طريقة نيوتن لإيجاد الحل الأصغري للدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$f(x,y)=2x^2+y^2+2xy+x-y, \qquad x_0=(0,0)$$

لدينا: $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}4x+2y+1\\2y+2x-1\end{pmatrix}$ و $H_f=\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}$

لنحسب القيم الذاتية للمصفوفة H_f

$$\det(H_f-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\2&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+4$$

إذا $det(H_f-\lambda I)=0\Rightarrow\lambda^2-6\lambda+4=0$

أي $\lambda_{\min}=3-\sqrt{5}>0$ ،$\lambda_{\max}=3+\sqrt{5}>0$. ما يعني أن المصفوفة H_f معرفة موجبة.

لدينا: $H_f^{-1}=\begin{pmatrix}{}^1/_2&-{}^1/_2\\-{}^1/_2&1\end{pmatrix}$ و $\nabla f(x_0)=(1,-1)$

ومنه شعاع الإنحدار يمثل:

$$d=-H_f^{-1}\nabla f(x_0)=\begin{pmatrix}-1\\{}^3/_2\end{pmatrix}$$

$$x_1=x_0-H_f^{-1}\nabla f_2(x_0)=\begin{pmatrix}-1\\{}^3/_2\end{pmatrix}=\hat{x}, \qquad (\nabla f(\hat{x})=0_{\mathbb{R}^2})$$

وبالتالي خوارزمية نيوتن تتقارب نحو الحل الأصغري بعد تكرار واحد ($k=1$).

ملاحظة 8.2.3

1- تقارب خوارزمية نيوتن محلي أي أنه مرتبط باختيار x_0 في جوار الحل x^*، ولتفادي التباعد يمكن إضافة المعامل $\alpha_k>0$ (خطوة البحث)في طريقة نيوتن كما يلي:

$$x_{k+1}=x_k-\alpha_k H_f^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$$

حيث: α_k الخطوة المثلى.

2- لمعالجة سلبيات خوارزمية نيوتن توجد عدة طرق تمثل تعديلات مختلفة لهذه الخوارزمية، مثلا بالطريقة الشبه نيوتينية يتم تعويض المصفوفة H_f^{-1} بمصفوفة أخرى تقريبية.

الأمثَلة دون قيود

التمرين الأول

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ متناظرة و معرفة موجبة، $0 < \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_1$ القيم الذاتية لـ A، $x \in \mathbb{R}^n$ و $\hat{x}$ حل جملة المعادلات $Ax = b$ بطريقة التدرج ذات الخطوة الثابتة. نأخذ الخوارزمية التالية من أجل ثابت حقيقي α:

$$\begin{cases} x_0, \ r_0 = b - Ax_0 \\ x_{k+1} = x_k + \alpha r_k \\ r_k = b - Ax_k \end{cases}$$

❶ ليكن $e_k = x_k - \hat{x}$ ، حيث $k \geq 0$ ، بين أن $e_k = (I - \alpha A)^k e_0$.

❷ بين أن الخوارزمية تتقارب إذا و فقط إذا كان $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$.

❸ بين أن الإختيار الأمثل لـ α هو: $\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

التمرين الثاني

❶ ليكن الشعاع $\hat{x}$ حيث تعطى دالة $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدبة على كرة مركزها $\hat{x}$. بين أن $\hat{x}$ نقطة حدية أصغرية محلية لـ f إذا و فقط إذا كانت نقطة حدية أصغرية محلية لـ f على طول كل خط يشمل $\hat{x}$. (أي، من أجل كل $d \in \mathbb{R}^n$، التابع g المعرف بـ $g(\alpha) = f(\hat{x} + \alpha d)$، يقبل $\hat{\alpha} = 0$ كحد أصغري محلي).

❷ لنعتبر التابع غير المحدب $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x_1, x_2) = (x_2 - px_1^2)(x_2 - qx_1^2)$ حيث p و q قيمتين سلميتين مع $0 < p < q$، و $\hat{x} = (0,0)$. أثبت أن $f(y, my^2) < 0$ من أجل $y \neq 0$ و $p < m < q$، ما يعني أن $\hat{x}$ ليست نقطة حدية أصغرية محلية لـ f رغم كونها نقطة حدية أصغرية محلية لها على طول كل خط يشمل $\hat{x}$.

التمرين الثالث

لتكن الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 - x_2 + 4$$

❶ بين وجود $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ وحيد بحيث $\hat{x} = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ ثم حدد إحداثياته.

❷ أحسب التكرار الأول المستخرج من خوارزمية التدرج بخطوة ثابتة بأخذ الخطوة $\alpha = \frac{1}{2}$، و كذلك الآخر باستعمال خوارزمية التدرج بخطوة مثلى، حيث $x^{(0)} = (0,0)$.

التمرين الرابع ليكن التابع $f(x,y)=x^2+y^4$ ، النقطة $(x_k,y_k)=(1,1)$ عند التكرار k، الإتجاه $d_k=-\nabla f(x_k,y_k)$، و المعاملات $\rho=0.1$، $\sigma=0.3$، $a_0=0$، $b_0=10^{99}$، $\alpha_0=1$

❶ عين الخطوة المثلى α_k باستعمال البحث الخطي الدقيق.

❷ أذكر مختلف مراحل خوارزمية **وولف**.

❸ عين مجال وولف $[\mu_1,\mu_2]$.

❹ عين خطوة وولف.

التمرين الخامس

لتكن الدالة $f(x)=\frac{1}{2}x^tAx-b^tx$ ، حيث $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة و معرفة موجبة، و $x,\ b\in\mathbb{R}^n$. الخطوة α_k محصلة بحث خطي دقيق.

❶ عدد مراحل التدرج المترافق التربيعي بالتفصيل.

❷ بين أنه من أجل كل k: $g_k^td_{k-1}=0$.

❸ بين أن d_k تمثل اتجاه انحدار.

❹ إذا كان $\beta_k=\frac{g_{k+1}^tAd_k}{d_k^tAd_k}$ ، بين أن $\beta_k=\beta_k^{HS}=\beta_k^{PRP}=\beta_k^{FR}=\beta_k^{CD}$، $(g_{k+1}^t=g_k=0)$.

علما أن: $\beta_k^{HS}=\frac{g_{k+1}^t(g_{k+1}-g_k)}{d_k^t(g_{k+1}-g_k)},\ \beta_k^{PRP}=\frac{g_{k+1}^t(g_{k+1}-g_k)}{\|g_k\|^2},\ \beta_k^{FR}=\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2},\ \beta_k^{CD}=-\frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^t(g_{k-1})}$

التمرين السادس

لتكن المسألة: $$(\mathcal{P})\qquad \min_{x\in\mathbb{R}^2} x_1-x_2+2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

❶ هل تقبل المسألة $(\mathcal{P})$ حلا؟

❷ انطلاقا من النقطة الإبتدائية $x^{(0)}=(0,0)$، عين حل المسألة $(\mathcal{P})$:

1. باستعمال طريقة التدرج المترافق.

2. باستعمال طريقة نيوتن.

ف. ساسي f.saci@univ-skikda.dz

التمرين 02 من السلسلة الأولى

1) لدينا

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}\\
&= \lim_{k\to 0}\frac{k}{k}\\
&= 1
\end{aligned}$$

2) لندرس قابلية تفاضل f عند $(0,0)$، لدينا

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}\\
&= \cos\theta\sin\theta,\ \forall\theta\in\mathbb{R}\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

اذا f غير قابل للتفاضل عند النقطة $(0,0)$.

التمرين 05 من السلسلة الأولى

1) $$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -400(x_2-x_1^2)x_1-2(1-x_1)\\ 200(x_2-x_1^2)\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\qquad \nabla f(b) = \begin{pmatrix}396\\200\end{pmatrix}$$

2) بما أن

$$d^t\nabla f(b) = \begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}396\\200\end{pmatrix} = 592\ >\ 0$$

فإن الاتجاه d لا يمثل اتجاه انحدار عند النقطة b.

التمرين 06 من السلسلة الأولى

1) لدينا

$$\nabla T(x,y) = e^{-\frac{1}{20}(x^2+y^2+z^2)}\begin{pmatrix} 2x^2-20 \\ 2xy \\ 2xz \end{pmatrix}$$

ما يعني أن معدل تغير درجة الحرارة عند النقطة $(0,0,0)$ في اتجاه شعاع الوحدة $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ يمثل

$$u^t \nabla T(0,0,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{20}{\sqrt{3}}$$

(2

$$u^t \nabla T(x,y,z) = ||u^t||.||\nabla T(x,y,z)||.\cos\theta$$

حيث θ الزاوية المحصورة ما بين شعاع الوحدة u و الشعاع ∇T.

و بالتالي من الواضح أن القيمة الأعظمية لمقدار تغير T تحقق لمّا يأخذ الحد $\cos\theta$ أكبر قيمة ممكنة ألا وهي الواحد ما يعني أن $\theta = 0$ أي لمّا يكون u موازي لـ ∇T و له نفس اتجاهه.

بالإضافة لذلك من خلال توظيف متباينة كوشي-شوارتز نجد

$$|u^t.\nabla T(x,y,z)| \leq ||u^t||.||\nabla T(x,y,z)|| = ||\nabla T(x,y,z)||$$

ما يبين أن مقدار التغيير لـ T عند نقطة كيفية و في أي اتجاه لا يتجاوز طويلة شعاع التدرج عند نفس النقطة.

التمرين 08 من السلسلة الأولى

لدينا

$$f(1,1) = 3$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}$$

إذا $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ و كذلك

$$H_f(x,y) = \Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

و بالتالي نكتب عبارة النشر المحدود لتايلور من الدرجة الثانية

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,1)+\nabla^t f(1,1)(x-1,y-1)+\frac{1}{2}(x-1,y-1)^t H_f(1,1)(x-1,y-1) \\ &\quad +\|(x-1,y-1)\|^2\,\varepsilon(x-1,y-1) \\ &= 3+3(x-1)+3(y-1)+\frac{1}{2}[2(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+2(y-1)^2] \\ &\quad +\|(x-1,y-1)\|^2\,\varepsilon(x-1,y-1) \end{aligned}$$

حيث $\|(x-1,y-1)\|^2\,\varepsilon(x-1,y-1)=0$ لما $(x,y)\to(1,1)$

التمرين 09 من السلسلة الأولى

1) المصفوفة

متناظرة، ما يعني أن قيمها الذاتية حقيقية و أشعتها الذاتية تشكل أساسا متعامدا و منتظما حيث $\beta=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$

$$Av_i=\lambda_i v_i,\quad \langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,n}$$

و من أجل كل $x\in\mathbb{R}^n$

$$x=\sum_{i=1}^n x_i v_i,\quad Ax=\sum_{i=1}^n x_i A v_i=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2,\quad \langle Ax,x\rangle=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

و بالتالي

$$\min\lambda_i\sum_{i=1}^n x_i^2\le\langle Ax,x\rangle\le\max\lambda_i\sum_{i=1}^n x_i^2$$

2) من أجل كل $h\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h),x+h\rangle-\langle b,x+h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle+\langle Ax,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle-\langle b,x\rangle-\langle b,h\rangle \\ &= f(x)+\langle Ax-b,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle \end{aligned}$$

لنضع $\varepsilon(h)=\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle/||h||$، اذا

$$|\langle Ah,h\rangle|\le||A||||h||^2\implies\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}|\varepsilon(h)|=0$$

و منه

$$df(x).h=\langle Ax-b,h\rangle,\quad \text{و}\quad \nabla f(x)=Ax-b$$

التمرين 01 من السلسلة الثانية

1) صحيح
2) خطأ
3) خطأ

التمرين 03 من السلسلة الثانية

من خلال حساب و دراسة طبيعة مصفوفة هس نجد

1) f تابع محدب تماما.
2) g تابع محدب.
3) h تابع مقعر.

التمرين 05 من السلسلة الثانية

1) لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ما يعني أن التابع f غير قسري.
2) $g(x) = \langle a, x\rangle + b, \quad a, x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}$

- إذا كان $a = 0$، فإن $g(x) = b$ ما يعني أنه تابع ثابت و بالتالي فهو غير قسري.
- إذا كان $a \neq 0$، نعتبر المتتالية $x_k = -ka_{i_0}e_{i_0}$ حيث a_{i_0} إحدى مركبات a، $1 \le i_0 \le n$ و e_{i_0} من أشعة الأساس. لما $k \to +\infty$ نجد $||x_k|| \to +\infty$ و كذلك

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} g(x_k) &= \lim_{k\to+\infty} (-ka_{i_0}\langle a, e_{i_0}\rangle) \\ &= \lim_{k\to+\infty} (-ka_{i_0}^2) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

اذا g غير قسري.

3) لتكن المتتالية $s_k(0, 0, k)$، من أجل $k \to +\infty$ نجد $||s_k|| \to +\infty$ و كذلك $\lim_{k\to+\infty} h(s_k) = 0$ ما يعني أن h غير قسري.

التمرين 06 من السلسلة الثانية

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 3xy, \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

1) دراسة قسرية التابع f: لدينا

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4-3xy \\ &= x^4+y^4(1-\frac{3xy}{x^4+y^4}) \end{aligned}$$

من أجل كل متتالية (x_k,y_k) حيث

$$\lim_{k\to+\infty}||(x_k,y_k)||=+\infty$$

نعلم أن

$$\lim_{||(x_k,y_k)||\to+\infty}\frac{3x_ky_k}{x_k^4+y_k^4}=0$$

و بالتالي

$$\lim_{||(x_k,y_k)||\to+\infty}f(x_k,y_k)=+\infty$$

ما يعني أن f قسري. بالإضافة الى ذلك التابع f مستمر لأنه عبارة عن كثير حدود، و عليه نستنتج أن f يقبل نقطة حدية صغرى واحدة على الأقل.

(2

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} 4x^3-3y \\ 4y^3-3x \end{pmatrix}$$

لدينا

$$\nabla f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} 4x^3-3y=0 \\ 4y^3-3x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(\frac{256}{27}y^8-3)=0 \\ x=\frac{4}{3}y^3 \end{cases}$$

و منه نستنتج أن النقط الحرجة هي $A=(0,0),\quad B(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\quad C(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

ولدينا مصفوفة هس

$$H_f=\begin{pmatrix} 12x^2 & -3 \\ -3 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

حيث

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفة غير معرفة لأن

$$det(H_f(A)=-9<0),\quad \lambda_1=-3,\quad \lambda_2=3$$

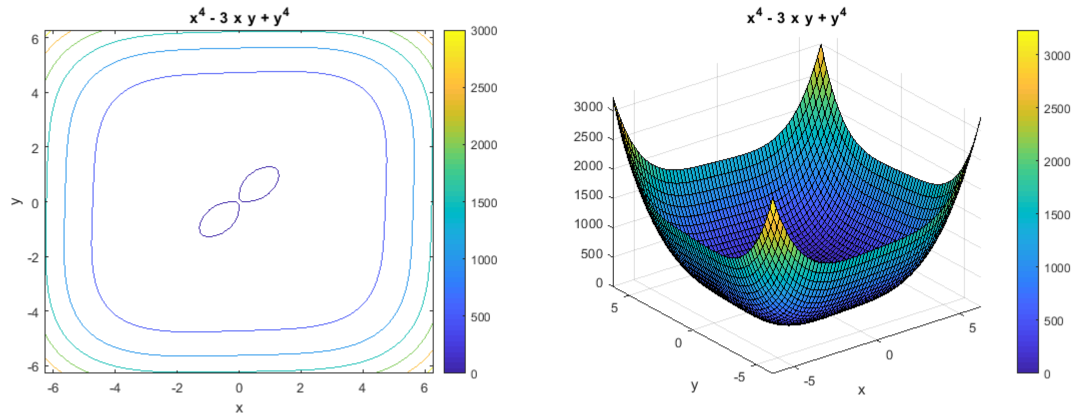
ما يعني أن النقطة A نقطة سرج.

$$H_f(B) = H_f(C) = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

مصفوفة معرفة موجبة لأن

$$det(H_f(0,0) = 72 > 0), \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

ما يعني أن النقطتين B و C نقطتين حديتين أصغريتين لـ f حيث $f(B) = f(C) = -\frac{9}{8}$.



شكل 5.3: سطح ومنحنيات المستوى للدالة f

التمرين 07 من السلسلة الثانية

1) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 4x_2$ تمثل دالة كثير حدود ما يعني أنها من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ و منه نكتب كذلك $f \in \mathcal{C}^2$

و لدينا

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left((x_1^2 + x_2^2)^2\right) = 2(x_1^2 + x_2^2)2x_i, \quad i = 1, 2$$

اذا

$$\nabla(x_1^2 + x_2^2)^2 = 4||x||^2 x, \qquad \nabla(\langle b, x\rangle) = b$$

و منه

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= 4||x||^2 x - b \\ &= \begin{pmatrix} 4(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ 4(x_1^2 + x_2^2)x_2 - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و كذلك

$$
\begin{aligned}
H_f(x) &= \begin{pmatrix} 8x_1^2+4(x_1^2+x_2^2) & 8x_1x_2 \\ 8x_1x_2 & 8x_2^2+4(x_1^2+x_2^2) \end{pmatrix} \\
&= 4(x_1^2+x_2^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\
&= 4||x||^2 I_2 + 8xx^t
\end{aligned}
$$

2) يكفي تبيان أن

$$\langle H_f(x)h, h\rangle \geq 0, \qquad \forall x, h \in \mathbb{R}^2$$

لدينا

$$
\begin{aligned}
\langle H_f(x)h, h\rangle &= 8\langle xx^t h, h\rangle + 4||x||^2\langle I_2 h, h\rangle \\
&= 8\langle x^t h, x^t h\rangle + 4||x||^2\langle h, h\rangle \\
&= 8||x^t h||^2 + 4||x||^2||h||^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

و بالتالي f محدبة.

3) بما أن f محدبة، يتبقى تبيان أنها قسرية على $\mathbb{R}^2$. لدينا $|\langle b, x\rangle| \leq ||b||||x||$ اذا

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq ||x||^4 - ||b||||x|| \\
&\geq ||x||^4(1 - \frac{||b||}{||b||^3})
\end{aligned}
$$

علما أن

$$\lim_{||x||\to+\infty} ||x||^4(1 - \frac{||b||}{||b||^3}) = +\infty$$

و بالمقارنة نستنتج أن

$$\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ما يثبت قسرية f.

مما سبق نستنتج وجود نقطة حدية صغرى واحدة على الأقل لـ f.

4) لنحل معادلة أولر

$$\begin{aligned}\nabla f(x) = 0 \quad &\iff \quad 4||x||^2 x - b = 0 \\ &\iff \quad 4||x||^2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{cases} 4||x||^2 x_1 = 0 \\ 4||x||^2 x_2 = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

نعلم أن $||x|| \neq 0$، و بالتالي نجد من المعادلة الأولى $x_1 = 0$
و بتعويض ذلك في المعادلة الثانية نجد

$$\begin{aligned}4x_2^2 x_2 = 4 \quad &\iff \quad x_2^3 = 1 \\ &\iff \quad x_2 = 1\end{aligned}$$

و منه توجد نقطة حدية صغرى وحيدة هي

$$\hat{x} = (0, 1)$$

التمرين 01 من السلسلة الثالثة

1) بما أن $e_k = x_k - \hat{x}$ فإن

$$\begin{aligned}e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x} \\ &= (x_k + \alpha r_k) - \hat{x} \\ &= (x_k - \hat{x}) + \alpha r_k \\ &= e_k + \alpha r_k \\ &= e_k + \alpha(b - Ax_k) \\ &= e_k + \alpha(b - A(e_k + \hat{x})) \\ &= e_k + \alpha(\underbrace{b - A\hat{x}}_{=0} - Ae_k) \\ &= e_k - \alpha A e_k \\ &= (I - \alpha A)e_k\end{aligned}$$

بالبرهان بالتراجع نستنتج المطلوب.

2) القول أن e_k يتقارب نحو 0 يكافئ قول أن القطر الطيفي لـ $I - \alpha A$ أصغر تماما من 1.

القيم الذاتية لـ $I-\alpha A$ تمثل $(1-\alpha\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$، حيث $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ القيم الذاتية لـ A مرتبة بترتيب تصاعدي.
وعليه نكتب

$$\max_{i=1,\dots,n}|1-\alpha\lambda_i|<1$$

أي

$$-1<1-\alpha\lambda_1\leq\cdots\leq 1-\alpha\lambda_{n-1}\leq 1-\alpha\lambda_n<1$$

و عليه يجب أن تكون $\alpha>0$ لأن القيم الذاتية $\lambda>0$، لهذا نكتب

$$-\frac{2}{\alpha}<-\lambda_1\leq\cdots\leq-\lambda_{n-1}\leq-\lambda_n$$

أي

$$\frac{2}{\alpha}>\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq\lambda_n$$

و بالتالي نجد

$$0<\alpha<\frac{2}{\lambda_1}$$

3) الإختيار الأمثل لـ α يكون لما يأخذ القطر الطيفي $\rho(I-\alpha A)$ أصغر قيمة.

$$\rho(I-\alpha A)=\max\{|1-\alpha\lambda_1|,|1-\alpha\lambda_n|\}$$

هندسيا يمكن الاستنتاج أن $\min\max\{|1-\alpha\lambda_1|,|1-\alpha\lambda_n|\}$ يتحقق لما $-1+\alpha\lambda_1=1-\alpha\lambda_n$ ما يعني أن $\alpha=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$

التمرين 03 من السلسلة الثالثة

(1

$$\nabla f=\begin{pmatrix}4x_1-x_2-3\\2x_2-x_1-1\end{pmatrix},\qquad H_f=\begin{pmatrix}4&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

حيث $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4>0$, $det(H_f)=9>0,$ ما يعني أن المصفوفة H_f معرفة موجبة. و بالتالي المسألة $\min\limits_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2}f(x_1,x_2)$ تقبل حلا وحيدا.

$$\nabla f=0_{\mathbb{R}^2}\implies(x_1,x_2)=(1,1)$$

2) خوارزمية التدرج بخطوة ثابتة تكتب على الشكل

$$\begin{cases}x_0\ \text{معطى}\\ d_k=-\nabla f(x_k)\\ x_{k+1}=x_k+\alpha d_k\\ f(x_{k+1})<f(x_k)\end{cases}$$

بالتكرار الأول لدينا

$$d_0 = -\nabla f(0,0) = -(-3,-1) = (3,1)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha d_0 \\ &= (0,0) + \frac{1}{2}(3,1) \\ &= (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

حيث $f(x_1) = 3$

خوارزمية التدرج بخطوة مثلى تكتب على الشكل

$$\begin{cases} \text{معطى } x_0 \\ d_k = -\nabla f(x_k) \\ \text{تعيين الخطوة } \alpha_k \text{ حيث} \\ f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k + \alpha d_k), \quad \forall \alpha > 0 \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \end{cases}$$

بالتكرار الأول لدينا الشعاع

$$d_0 = -\nabla f(0,0) = -(-3,-1) = (3,1)$$

الخطوة α_0 تمثل الحل الأصغري للتابع أحادي المتغير $\Phi(\alpha) = f(x_0 + \alpha_0 d_0)$ و هي بالتالي كذلك حل المعادلة $\Phi'(\alpha) = 0$

لدينا حسب نظرية مشتق مركب دالتين

$$\Phi'(\alpha) = \nabla f(x_0 + \alpha_0 d_0) d_0 = \begin{pmatrix} 11\alpha - 3 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 32\alpha - 10$$

و منه

$$\alpha_0 = \frac{5}{16}$$

و بالتالي $x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = (\frac{15}{16}, \frac{5}{16})$

حيث $f(x_1) = 2.4375$ و هذه النتيجة أحسن من سابقتها.

التمرين 04 من السلسلة الثالثة

1) نعلم أن $\alpha^* \in]0,\infty[$ تمثل الحل الأصغري للتابع أحادي المتغير

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= f((x_0,y_0)+\alpha d_0)\\ &= f(-2\alpha+1,-4\alpha+1)\\ &= (-2\alpha+1)^2+(-4\alpha+1)^4\\ &= 256\alpha^4-256\alpha^3+100\alpha^2-20\alpha+2\end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1024\alpha^3-768\alpha^2+200\alpha-20=0\\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \simeq 0.34539\end{aligned}$$

حيث $\Phi'(\alpha) < 0$ من أجل $\alpha < 0.34539$ و $\Phi'(\alpha) > 0$ من أجل $\alpha > 0.34539$، كذلك $\Phi''(0.34539) > 0$ ما يعني أن $\alpha^* = 0.34539$ تمثل الخطوة المثلى.

2) راجع الدرس.

3) بحل متراجحتي خوارزمية وولف نجد

$$\mu_1 \simeq 0.10898, \qquad \mu_2 \simeq 0.5$$

أي

$$[\mu_1,\mu_2]=[0.1,0.5]$$

حيث نلاحظ أن $\alpha^* = 0.34539 \in [\mu_1,\mu_2]$

4) بتطبيق خوارزمية وولف و باستعمال المعطيات نجد

$$\alpha_{Wolfe}=0.5$$

الأمثلية دون قيود

التمرين الأول باستعمال الماتلاب Matlab حل جمل المعادلات الخطية التالية اذا ما أمكن ذلك

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3 & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & = 4 \\ 6x_1 + 4x_2 & = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 4y - z & = 2 \\ x - 5y + 6z & = 1 \\ -x + 4z - 5 & = 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني

❶ باستعمال الماتلاب، أنشئ سحابة نقط منتظمة (maillage) في مجالات أحادية أو ثنائية البعد؟

❷ كيف يمكن تعريف متغيّر بواسطة الماتلاب ؟

❸ باستعمال نافذة المساعدة ≪ help ≫، حدّد عمل أوامر الماتلاب التالية:

- syms
- surf
- contour
- contourf
- pcolor
- contour3
- surfc
- mesh
- meshc
- meshz
- quiver
- subplot
- figure
- hold on
- hold off
- colorbar
- ezsurf
- ezcontour

التمرين الثالث باستعمال الماتلاب عيّن المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى و الثانية، شعاع التدرج و مصفوفة هس لكل من الدوال:

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \quad D = \mathbb{R}^2 \qquad g(X) = x_1^4 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3), \quad D = \mathbb{R}^3$$
$$h(x,y) = \ln(x) + \ln(y), \quad D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \qquad k(X) = x^2 + y^3 + xyz, \quad D = \mathbb{R}^3$$

التمرين الرابع ليكن التابع $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$، باستعمال الماتلاب:

❶ عيّن شعاع التدرج و مصفوفة هس للتابع f.

❷ حدّد النقاط الحرجة للتابع f مبينا طبيعتها.

❸ أرسم سطح و منحنيات المستوى للتابع f.

التمرين الخامس لتكن التوابع

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 10[\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)], \qquad g(x,y) = (1-x)^2 + 100(y - x^2)^2$$
$$h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad I(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

❶ أرسم الأسطح الممثلة للتوابع السابقة، ثم استنتج اذا ما كانت محدبة.

❷ باستعمال منحنيات المستوى حدّد بطريقة تقريبية النقط الحرجة.

❸ عيّن بطريقة تحليلية النقط الحدية الصغرى.

الأمثلية دون قيود

التمرين الأول

1. ماذا تعني علبة الأدوات الخاصة بالماتلاب toolbox de Matlab ؟
2. عرّف ماهية عمل أوامر الماتلاب التالية

   fmincon. quadprog, fminimax, fminsearch, fminunc, fminbnd,
3. كيف نستطيع استظهار قائمة خيارات الأوامر السابقة ؟

التمرين الثاني

1. لتكن الدالتين $f(x) = cos(x)$ و $g(x) = sin(x)$. استعمل الأمر fminbnd من أجل تحديد النقط الحدية الصغرى لـ f و g على المجال $[0, 2\pi]$.
2. أعد نفس العملية باستعمال علبة الأدوات **toolbox** الخاصة بالأمثلية.

التمرين الثالث حدّد النقط الحدية الصغرى للدوال التالية باستعمال الأمر fminunc أو fminsearch:

$$\begin{aligned} f(x) &= 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, && \text{avec } x^0 = (2, 5) \\ g(x) &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2, && \text{avec } x^0 = (1, 2, 3) \\ h(x) &= e^{x_1+x_2+1} - e^{-x_1-x_2-1} + e^{-x_1-1}, && \text{avec } x^0 = (1, 1) \\ k(x) &= x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^4 \, e^{-(x_1+x_2+x_3+x_4)}, && \text{avec } x^0 = (3, 4, 0.5, 1) \end{aligned}$$

التمرين الرابع ليكن التابع المعرّف على $\mathbb{R}^3$ بـ

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + 3x - y + 2z$$

❶ بيّن أن f يقبل نقطة حدّية أصغرية عامة على $\mathbb{R}^3$.

❷ أكتب f على الشكل

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t H x + b^t x$$

حيث $x = (x, y, z)^t$ ، المصفوفة H و الشعاع b يطلب تعيينهما.

❸ عيّن بطريقة تحليليّة النقطة الحدّية الصغرى لـ f.

❹ استعمل الأمر quadprog من أجل تحديد النقطة الحدّية الصغرى لـ f $[x, fval] = \text{quadprog}(H, b)$

الأمثلية دون قيود

التمرين الأول لتكن مسألة الأمثلية

$$(P): \qquad \min_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} x_1^2+2x_2^2$$

❶ عيّن تحليليا $(\hat{x_1},\hat{x_2})$ حل المسألة (P).

❷ أذكر مراحل **خوارزمية التدرج بخطوة ثابتة**.

❸ حل المسألة (P) باستعمال **خوارزمية التدرج بخطوة ثابتة** مستعملا النقطة الابتدائية $x^0=(2,1)$، و كل من الخطوات $\alpha=0.002$، $\alpha=99$ و $\alpha=0.1$ و معيار التوقف $\|\nabla f\|\leq 10^{-5}$.

❹ ماذا تستنتج ؟

التمرين الثاني ليكن التابع التربيعي

$$f(x)=x_1^2+2x_2^2$$

❶ طبق خوارزمية **التدرج بخطوة مثلى** من أجل تحديد النقطة الحدية الصغرى لـ f مستعملا النقطة الابتدائية $x^0=(2,1)$ و معيار التوقف $\|\nabla f\|\leq 10^{-5}$

❷ وضح بيانيا مسار النقط المتتابعة x^k.

التمرين الثالث لتكن المسألة

$$(P'): \qquad \min_{x\in\mathbb{R}^2}(x_1-\tfrac{3}{2}x_2)^2+(x_2-2)^2+3$$

❶ أرسم منحنيات المستوى الخاصة بدالة الهدف (objective function).

❷ حل المسألة (P') باستعمال خوارزمية **التدرج المترافق** (Fletcher-Revees) انطلاقا من النقطة الابتدائية $x^0=(0.5,0.5)$ مع الأخذ بعين الاعتبار معيار التوقف $\|f(x^{k+1})-f(x_k)\|\leq 10^{-6}$.

التمرين الرابع لتكن دالة روزنبروك **Rosenbrock** ذات n متغير

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}100(x_j^2-x_{j+1})^2+(x_j-1)^2$$

من أجل $n=2$

❶ أدرس تحدب f.

❷ أرسم سطح و منحنيات مستوى f.

❸ أكتب برنامج ماتلاب لنمذجة خوارزمية **نيوتن** التي تبحث عن النقطة الحدية الصغرى $\hat{x}$ لـ f انطلاقا من النقطة الابتدائية $x^0=(-1,0)$، و بمراعاة معيار التوقف $\|\nabla f\|\leq 10^{-6}$.

❹ أرسم مسار النقط المتتابعة x^k المحثل عليها من الخوارزمية السابقة.

❺ طبق خوارزمية التدرج المترافق على الدالة f مع أخذ نفس المعطيات السابقة و علّم على منحنيات المستوى مسار النقط x^k.

المراجع العلمية

[1] C.P. López, Matlab optimization techniques. Springer, .2014

[2] E-K. P. CHONG, S-H. ZAK, An Introduction to Optimization. Second Edition, Wiley-lnterscience Publication, .2001

[3] J.C. Gilbert, Éléments d'optimisation dffiérentiable, théorie et algorithmes, notes de cours. École nationale supérieure de techniques avancées, Paris, .2007

[4] J. Nocedal-S.J. Wright, Numerical optimization.Springer, New york, Second edition, .2006

[5] J-F. Bonnans, J-C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizàbal, Optimisation Numérique, Aspects théoriques et pratiques, Springer, .1997

[6] M. Bergounioux, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod, Paris, .2001

[7] P. Venkataraman, Applied Optimization with Matlab. Wiley-Interscience publication, .2002

[8] R. Benzine, Optimisation convexe, Optimisation sans contraintes. Notes de cours, université Badji Mokhtar Annaba, .2007

[9] S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex optimization. Cambridge university press, .2004