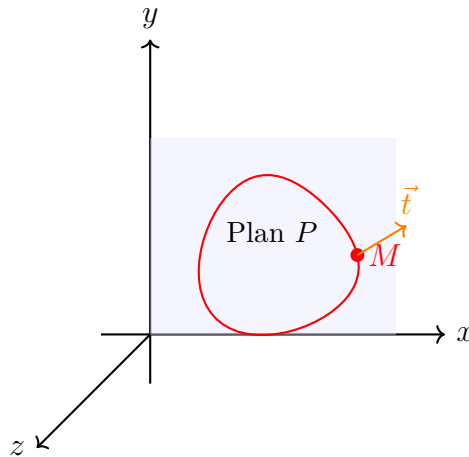




# Polycopié de Géométrie

*Géométrie affine, euclidienne, courbes et surfaces  
paramétrées*

Cours destiné aux étudiants de **Licence 2 Mathématiques**  
Département de Mathématiques



Réalisé par : Dr. Hamdi Zakaria

Année universitaire 2024 – 2025

# Introduction générale

Ce polycopié de géométrie est destiné aux étudiants de deuxième année Licence de Mathématiques de l'Université du 20 Août 1955 à Skikda.

L'objectif principal de ce cours est de fournir une présentation claire et progressive des notions fondamentales de la géométrie affine et euclidienne, ainsi que de leurs prolongements vers l'étude des courbes et des surfaces paramétrées. Ces outils constituent une base indispensable, aussi bien pour les mathématiques pures (algèbre, analyse, topologie) que pour leurs applications en physique, en mécanique et en sciences de l'ingénieur.

La première partie est consacrée à la **géométrie affine**, qui permet de formaliser les notions de points, droites, plans et barycentres, indépendamment de la mesure des longueurs ou des angles. Elle introduit les applications affines et les théorèmes fondamentaux qui organisent la structure de cet espace.

La deuxième partie aborde les **espaces affines euclidiens**, dans lesquels on enrichit la structure affine d'une métrique issue d'un produit scalaire. On y développe les notions de norme, distance, angle, projection orthogonale et isométries, qui sont essentielles dans la compréhension de la géométrie classique et moderne.

La troisième partie introduit les **courbes paramétrées** dans le plan, avec une attention particulière portée à leur étude locale et globale : points singuliers, tangentes, asymptotes, longueur d'arc et aires. Cette approche, fondée sur le calcul différentiel, permet d'analyser de manière fine le comportement géométrique des trajectoires.

Enfin, la quatrième partie est consacrée aux **surfaces paramétrées** de l'espace : définitions, vecteurs tangents, plan tangent, vecteurs normaux, formules d'aires et intégrales de surface. On y retrouve des exemples fondamentaux tels que la sphère, le cylindre, le cône, le parabolôïde, l'hélicoïde ou encore le tore.

Chaque chapitre est complété par des **travaux dirigés (TD)**, comprenant des exercices variés et des corrigés détaillés, afin de permettre à l'étudiant de consolider sa compréhension et de s'entraîner à la résolution de problèmes.

Nous espérons que ce support, clair et illustré, constituera un outil de référence pour les étudiants et les aidera à acquérir une maîtrise solide de la géométrie affine et euclidienne, ainsi que de l'étude des courbes et surfaces paramétrées.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Géométrie Affine</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction à la géométrie affine . . . . .	1
1.2	Structure d'un espace affine . . . . .	1
1.3	Sous-espaces affines . . . . .	4
1.4	Repères et coordonnées affines . . . . .	6
1.5	Barycentre . . . . .	8
1.6	Applications affines . . . . .	10
1.7	Théorèmes fondamentaux . . . . .	11
1.8	Orientation et convexité . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Espaces affines euclidiens</b>	<b>16</b>
2.1	Espaces vectoriels euclidiens . . . . .	16
2.2	Sous-espaces orthogonaux . . . . .	19
2.3	Espaces affines euclidiens . . . . .	21
2.4	Applications géométriques dans les espaces affines euclidiens . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Définitions fondamentales . . . . .	25
3.3	Outils différentiels : vitesse, angle, courbure . . . . .	27
3.4	Étude locale autour d'un point . . . . .	28
3.5	Longueur d'arc, aires et asymptotes . . . . .	29
3.6	Reparamétrisation et orientation . . . . .	30
3.7	Méthode complète d'étude d'une courbe . . . . .	30
3.8	Exemples . . . . .	30

<b>4</b>	<b>Surfaces paramétrées</b>	<b>34</b>
4.1	Introduction et définitions . . . . .	34
4.2	Plan tangent, vecteur normal, régularité . . . . .	35
4.3	Premier formulaire : $E, F, G$ et élément d'aire . . . . .	36
4.4	Exemples . . . . .	37
4.5	Changements de paramètres . . . . .	39
4.6	Intégrales de surface et champs . . . . .	39
<b>A</b>	<b>TD Géométrie affine</b>	<b>41</b>
A.1	Exercices . . . . .	42
A.2	Corrigés . . . . .	44
<b>B</b>	<b>TD Espaces affines euclidiens</b>	<b>51</b>
B.1	Exercices . . . . .	52
B.2	Corrigés . . . . .	55
<b>C</b>	<b>TD Courbes paramétrées</b>	<b>60</b>
C.1	Exercices . . . . .	61
C.2	Corrigés . . . . .	62
<b>D</b>	<b>TD Surfaces paramétrées</b>	<b>65</b>
D.1	Exercices . . . . .	66
D.2	Corrigés . . . . .	68

# Chapitre 1

## Géométrie Affine

### 1.1 Introduction à la géométrie affine

La géométrie affine est une généralisation de la géométrie euclidienne, centrée sur les notions d'alignement, de barycentre et de parallélisme, indépendamment de toute structure métrique. Dans un espace affine, on peut définir des droites, des plans, des sous-espaces, mais les concepts de distance, d'angle ou de norme sont absents.

La formalisation repose sur la relation entre points et vecteurs, via la structure d'un toreur.

### 1.2 Structure d'un espace affine

**Definition 1.1** (Action de groupe). *Soit  $G$  un groupe et  $E$  un ensemble. Une **action à gauche** de  $G$  sur  $E$  est une application :*

$$G \times E \longrightarrow E, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

*satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

- (Identité)  $\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$
- (Compatibilité)  $\forall g, h \in G, \forall x \in E, \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

**Definition 1.2** (Orbite et stabilisateur). *Soit  $x \in E$ . On définit :*

- L'**orbite** de  $x$  :  $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$
- Le **stabilisateur** de  $x$  :  $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$

**Definition 1.3** (Action simplement transitive). *Une action de  $G$  sur  $E$  est dite :*

- **Transitive** si  $G \cdot x = E$  pour tout  $x \in E$
- **Simple** si le stabilisateur  $G_x = \{1\}$  pour tout  $x \in E$
- **Simplement transitive** si elle est à la fois simple et transitive

**Exemple 1.1** (Actions géométriques, orbites, stabilisateurs et simple transitivité).

**(A) Action des translations du plan.** On considère le groupe additif  $G = (\mathbb{R}^2, +)$  agissant à gauche sur  $E = \mathbb{R}^2$  par

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad u \cdot x = x + u.$$

Identité:  $0 \cdot x = x$ . Compatibilité:  $(u + v) \cdot x = u \cdot (v \cdot x)$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}^2$  :

$$G \cdot x = \{x + u \mid u \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2 \quad (\text{action transitive}), \quad G_x = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid x + u = x\} = \{0\}.$$

Ainsi, l'action est **simplement transitive** (transitive et  $G_x = \{0\}$  pour tout  $x$ ).

**(B) Rotations du cercle unité.** Soit  $G = \text{SO}(2)$  (rotations du plan autour de l'origine) et  $E = \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ , avec l'action

$$\forall R \in \text{SO}(2), \forall x \in \mathbb{S}^1, \quad R \cdot x = Rx.$$

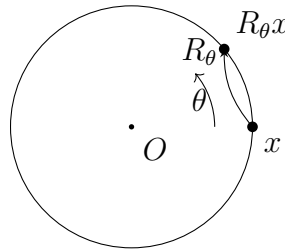
Identité:  $I \cdot x = x$ . Compatibilité:  $(R_1 R_2) \cdot x = R_1 \cdot (R_2 \cdot x)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$  :

$$G \cdot x = \mathbb{S}^1 \quad (\text{toute rotation envoie } x \text{ sur n'importe quel point du cercle),}$$

$$G_x = \{R \in \text{SO}(2) \mid Rx = x\} = \{I\}.$$

L'action est donc aussi **simplement transitive**.



**(C) Exemple (pour contraste).** Si l'on élargit le groupe à  $G = \text{O}(2)$  (rotations et réflexions) agissant sur  $E = \mathbb{S}^1$ , l'action reste transitive, mais pour un  $x \in \mathbb{S}^1$  on a

$$G_x = \{I, s\},$$

où  $s$  est la réflexion par rapport à la droite dirigée par  $x$ . Ainsi, l'action n'est pas simple (stabilisateur non trivial).

**Proposition 1.1** (Caractérisation). L'action de  $G$  sur  $E$  est **simplement transitive** si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \quad \exists! g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x$$

**Definition 1.4** (Espace affine). Un **espace affine**  $\mathcal{A}$  de direction vectorielle  $E$  est un ensemble non vide sur lequel le **groupe additif**  $(E, +)$  agit de façon **simplement transitive**.

Autrement dit, on a une application :

$$E \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (\vec{v}, P) \mapsto P + \vec{v}$$

vérifiant :

## 1.2 Structure d'un espace affine

---

1. (Identité)  $P + \vec{0} = P$
2. (Compatibilité)  $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$
3. (Transitivité et unicité)  $\forall P, Q \in \mathcal{A}, \exists! \vec{u} \in E$  tel que  $Q = P + \vec{u}$

**Notations** Si  $P, Q \in \mathcal{A}$ , on note :

$$\overrightarrow{PQ} := \vec{u} \quad \text{tel que } Q = P + \vec{u}$$

Cela définit une application  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow E$ ,  $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$ , qui vérifie :

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \quad (\text{relation de Chasles})$$

### Propriétés fondamentales

- Pour tout  $P \in \mathcal{A}$  et  $\vec{v} \in E$ , le point  $Q = P + \vec{v} \in \mathcal{A}$
- $P + \vec{v} = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$
- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

### Autre Interprétation

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ . Un espace affine de direction  $E$  est un ensemble  $\mathcal{A}$  muni d'une application :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow E, \quad (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$$

vérifiant les axiomes suivants :

- Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , l'application  $B \mapsto \overrightarrow{AB}$  est bijective de  $\mathcal{A}$  vers  $E$ .
- Pour tous  $A, B, C \in \mathcal{A}$ , on a la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Autrement dit,  $\mathcal{A}$  est un **torseur** sur  $E$ , c'est-à-dire un espace sur lequel  $E$  agit librement et transitivement. Cela signifie que :

- Pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et tout  $\vec{v} \in E$ , il existe un unique point  $B \in \mathcal{A}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ .  
On note alors  $B = A + \vec{v}$ .
- Pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB} \in E$  est bien défini et caractérise le déplacement de  $A$  vers  $B$ .

**Exemple 1.2** (Espace affine du plan euclidien). *On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^2$  muni de l'addition vectorielle. L'ensemble  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$  vu comme un plan muni de l'action*

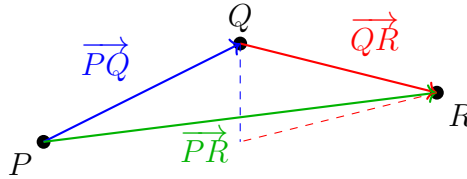
$$\forall \vec{v} \in E, \forall P \in \mathcal{A}, \quad P + \vec{v} = \text{translation du point } P \text{ par } \vec{v}$$

*est un espace affine de direction  $E$ .*

- **Identité** :  $P + \vec{0} = P$ .
- **Compatibilité** :  $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$ .
- **Transitivité simple** : pour tout  $P, Q \in \mathcal{A}$ , il existe un unique  $\vec{u}$  tel que  $Q = P + \vec{u}$ .

La notation  $\overrightarrow{PQ}$  désigne le vecteur  $\vec{u}$  tel que  $Q = P + \vec{u}$ , et la **relation de Chasles** est vérifiée :

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$



Relation de Chasles :  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

**Observation** : Cet exemple montre que l'espace affine  $(\mathcal{A}, E)$  est en fait un *torseur* sur  $E$  : les points ne possèdent pas de structure vectorielle par eux-mêmes, mais les vecteurs entre points sont bien définis.

**Remark 1.1.**

- Il n'existe pas d'origine canonique dans un espace affine.
- Deux points définissent un unique vecteur de déplacement.
- L'espace affine est une version *n* sans origine *z* d'un espace vectoriel.

**Exemple 1.3.**

- $\mathbb{R}^n$  muni de l'application  $\overrightarrow{AB} = B - A$  est un espace affine de direction  $\mathbb{R}^n$
- L'ensemble des solutions de  $Ax = b$ , avec  $\ker(A) \neq \{0\}$ , forme un sous-espace affine de direction  $\ker(A)$

### 1.3 Sous-espaces affines

**Definition 1.5.** Un sous-espace affine  $F \subset \mathcal{A}$  est une partie de l'espace affine telle qu'il existe un point  $A \in F$  et un sous-espace vectoriel  $F_0 \subset E$  (où  $E$  est la direction de  $\mathcal{A}$ ) tel que :

$$F = A + F_0 = \{A + \vec{v} \mid \vec{v} \in F_0\}$$

On dit que :

- $F_0$  est la **direction** de  $F$ ,
- $\dim(F) = \dim(F_0)$  est la **dimension** du sous-espace affine.

**Exemple 1.4** (Sous-espace affine dans le plan).

Considérons l'espace affine  $(\mathcal{A}, E)$  avec  $E = \mathbb{R}^2$ .

Prenons le point  $A = (0, 1)$  et la droite vectorielle  $F_0 = \mathbb{R}(1, 1) \subset E$ . Le sous-espace affine

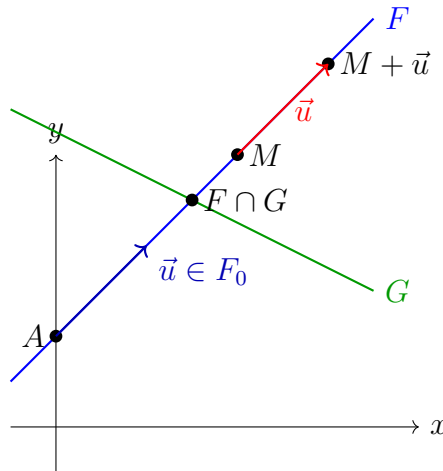
$$F = A + F_0 = \{A + t(1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

est une droite du plan, de direction  $F_0$ , passant par  $A$ . Sa dimension est  $\dim(F) = 1$ .

Vérification des propriétés :

### 1.3 Sous-espaces affines

- Stabilité par translation : si  $M \in F$  et  $\vec{u} \in F_0$ , alors  $M + \vec{u} \in F$ .
- Intersection : si  $G$  est un autre sous-espace affine de direction  $G_0$  qui coupe  $F$ , l'intersection  $F \cap G$  est un sous-espace affine de direction  $F_0 \cap G_0$ .



*Interprétation géométrique :*  $F$  est obtenu en traduisant le sous-espace vectoriel  $F_0$  au point  $A$ . Tout point de  $F$  s'obtient par  $A + \vec{v}$  avec  $\vec{v} \in F_0$ . Si un autre sous-espace  $G$  intersecte  $F$ , la direction de leur intersection est  $F_0 \cap G_0$ .

**Proposition 1.2** (Propriétés fondamentales).

**Stabilité par translation :** Si  $F$  est un sous-espace affine de direction  $F_0$ , alors pour tout vecteur  $u \in F_0$  et tout point  $M \in F$ , on a :

$$M + u \in F$$

**Intersection :** L'intersection de deux sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine dont la direction est  $F_0 \cap G_0$ , où  $F_0$  et  $G_0$  sont les directions respectives.

**Démonstration :** Soient  $F = A + F_0$  et  $G = B + G_0$ , et supposons que  $F \cap G \neq \emptyset$ . Soit  $M \in F \cap G$ . Alors :

$$F = M + F_0, \quad G = M + G_0 \Rightarrow F \cap G = M + (F_0 \cap G_0)$$

Donc  $F \cap G$  est un sous-espace affine de direction  $F_0 \cap G_0$ .

**Parallélisme :** Deux sous-espaces affines  $F, G$  sont dits **parallèles** si leurs directions sont égales :

$$\text{Dir}(F) = \text{Dir}(G)$$

On dit aussi que  $F$  est parallèle à  $G$  si  $\text{Dir}(F) \subset \text{Dir}(G)$ .

**Exemple 1.5.**

- Une droite affine dans  $\mathbb{R}^2$  :  $D = A + \mathbb{R}u$  est un sous-espace affine de dimension 1. Elle est parallèle à toute droite de direction  $\text{Vect}(u)$ .
- Un plan affine dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\Pi = A + \text{Vect}(u, v)$ , avec  $u, v$  non colinéaires. Il est de dimension 2.
- Une droite incluse dans un plan affine : Si  $D = A + \mathbb{R}u$  et  $\Pi = A + \text{Vect}(u, v)$ , alors  $D \subset \Pi$  et  $D$  est parallèle à  $\Pi$ .

**Illustration**

Soient deux plans affines dans  $\mathbb{R}^3$ , de même direction :

$$\Pi_1 = A + \text{Vect}(u, v), \quad \Pi_2 = B + \text{Vect}(u, v)$$

- Si  $\overrightarrow{AB} \notin \text{Vect}(u, v)$ , alors  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont **strictement parallèles** et n'ont pas d'intersection.
- Si  $\overrightarrow{AB} \in \text{Vect}(u, v)$ , alors  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  est un plan affine (éventuellement égal).

## 1.4 Repères et coordonnées affines

**Definition 1.6.** *Un repère affine dans un espace affine  $\mathcal{A}$  de direction vectorielle  $E$  est un  $(n + 1)$ -uplet  $(O; A_1, \dots, A_n)$ , où :*

- $O \in \mathcal{A}$  est appelé origine du repère,
- les vecteurs  $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$  forment une base de  $E$ .

**Definition 1.7** (Coordonnées affines). *Tout point  $M \in \mathcal{A}$  peut être exprimé de manière unique dans un repère affine  $(O; A_1, \dots, A_n)$  sous la forme :*

$$M = O + x_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + x_n \overrightarrow{OA_n}$$

Les scalaires  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  sont appelés les **coordonnées affines** de  $M$  dans ce repère.

**Propriétés**

- L'application  $M \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  est une bijection de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{K}^n$ .
- Les transformations affines changent les coordonnées de manière affine (voir plus loin).
- Le repère affine permet de définir des droites et plans affines via des équations vectorielles.

**Exemple 1.6** (Repère affine et coordonnées). *On considère l'espace affine  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$  de direction vectorielle  $E = \mathbb{R}^2$ .*

**Choix du repère affine :** *On prend  $O = (0, 0)$  comme origine, et  $A_1 = (2, 0)$ ,  $A_2 = (0, 1.5)$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{OA_1} = (2, 0)$  et  $\overrightarrow{OA_2} = (0, 1.5)$  forment une base de  $E$ . **Coordonnées affines d'un point :** *Pour  $M = (3, 1.5)$ , on cherche  $(x_1, x_2)$  tels que :**

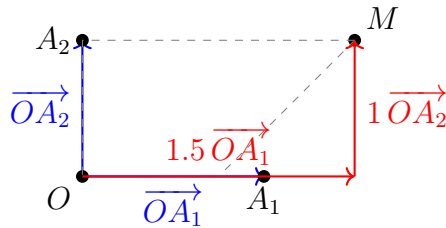
$$M = O + x_1 \overrightarrow{OA_1} + x_2 \overrightarrow{OA_2}.$$

*En coordonnées usuelles :*

$$(3, 1.5) = (0, 0) + x_1(2, 0) + x_2(0, 1.5),$$

*ce qui donne  $x_1 = 1.5$  et  $x_2 = 1$ .*

*Ainsi, les **coordonnées affines** de  $M$  dans ce repère sont  $(1.5, 1)$ .*



**Lecture :** Le point  $M$  est obtenu à partir de  $O$  en prenant 1.5 fois le vecteur  $\overrightarrow{OA_1}$  puis 1 fois le vecteur  $\overrightarrow{OA_2}$ . Cette décomposition est unique et définit ses coordonnées affines.

### Changement de repère affine

Soient deux repères affines :

$$R = (O; e_1, \dots, e_n), \quad R' = (O'; e'_1, \dots, e'_n)$$

Alors les coordonnées  $x$  de  $M$  dans  $R$  et  $x'$  dans  $R'$  sont liées par une **transformation affine** :

$$x' = Ax + b$$

où :

- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  est la matrice de passage entre les bases vectorielles  $(e_i)$  et  $(e'_i)$ ,
- $b \in \mathbb{K}^n$  correspond au vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  exprimé dans la base  $(e'_i)$ .

**Exemple 1.7.** Soit  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$  et le repère canonique  $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ , avec :

$$O = (0, 0), \quad A = (1, 0), \quad B = (0, 1)$$

Alors le point  $M = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$  s'écrit :

$$M = O + 2 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OB}$$

Ses coordonnées affines sont  $(2, 3)$  dans ce repère.

#### Remark 1.2.

- Les coordonnées affines permettent de faire des calculs vectoriels à partir d'un point de référence (origine).
- On peut toujours construire un repère affine localement adapté à un sous-espace affine.
- Un repère affine ne permet pas, en général, de mesurer des longueurs ni des angles (contrairement à un repère orthonormé dans un espace euclidien).

## 1.5 Barycentre

**Definition 1.8.** Soit un système pondéré  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1}^n$ , avec  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ , et  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ .

Le **barycentre** de ce système est le point  $G \in \mathcal{A}$  tel que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

On note :

$$G = \text{bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$$

**Remark 1.3.**

**Existence et unicité :** Le barycentre  $G$  existe et est unique, dès que  $\sum \lambda_i \neq 0$ . Il se trouve dans l'enveloppe affine des  $A_i$ .

**Formule vectorielle :** Si  $O \in \mathcal{A}$  est un point arbitraire, alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum \lambda_i} \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

### Propriétés fondamentales

- **Stabilité affine :** le barycentre appartient au plus petit sous-espace affine contenant les  $A_i$ .
- **Compatibilité affine :** toute application affine  $f$  envoie le barycentre sur le barycentre des images :
 
$$f(\text{bar}(A_i, \lambda_i)) = \text{bar}(f(A_i), \lambda_i)$$
- **Associativité :** on peut calculer un barycentre en deux étapes (barycentre de barycentres).
- **Indépendance du point origine :** la définition ne dépend pas du choix de  $O \in \mathcal{A}$ .

**Exemple 1.8** (Barycentre de trois points pondérés). On considère trois points du plan affine  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$  :

$$A(0,0), \quad B(4,0), \quad C(2,3)$$

avec les coefficients  $\lambda_A = 2$ ,  $\lambda_B = 1$  et  $\lambda_C = 3$ .

**Calcul du barycentre  $G$  :** La somme des coefficients est

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 2 + 1 + 3 = 6 \neq 0.$$

En choisissant  $O = (0,0)$  comme origine vectorielle, on applique la formule :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6} [2\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}].$$

## 1.5 Barycentre

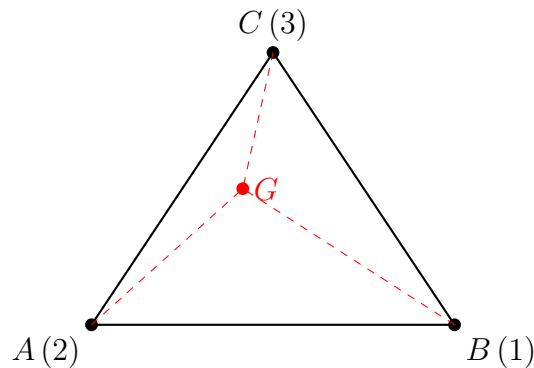
---

Comme  $\overrightarrow{OA} = (0, 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (4, 0)$  et  $\overrightarrow{OC} = (2, 3)$  :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6} [(0, 0) + (4, 0) + (6, 9)] = \frac{1}{6} (10, 9) = \left( \frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right).$$

Donc :

$$G \left( \frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right).$$



**Interprétation géométrique :**  $G$  se trouve à l'intérieur du triangle  $ABC$ , plus proche de  $C$  car le poids  $\lambda_C = 3$  est plus grand. Les poids influencent la position du barycentre : plus un point a un poids grand, plus  $G$  est attiré vers lui.

### Exemple 1.9.

— **Milieu d'un segment**  $[A, B]$  : barycentre de  $(A, 1), (B, 1)$  :

$$G = \frac{A + B}{2}$$

— **Centre de gravité d'un triangle**  $ABC$  : barycentre de  $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$  :

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

— **Système pondéré** : pour  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $\lambda = 2, \mu = 3$ , alors

$$G = \frac{2A + 3B}{5}$$

### Remark 1.4.

- Le barycentre affine est analogue au centre de masse, mais ne dépend d'aucune notion de norme ou distance.
- Il est fondamental dans les constructions géométriques : définition des milieux, des centres, et propriétés projectives.

## 1.6 Applications affines

**Definition 1.9.** Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux espaces affines de directions vectorielles respectives  $E$  et  $F$ . Une application  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est dite **affine** s'il existe :

- un point  $A \in \mathcal{A}$ ,
- une application linéaire  $f_0 : E \rightarrow F$ ,

telles que :

$$f(M) = f(A) + f_0(\overrightarrow{AM}) \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{A}$$

Cette définition est indépendante du choix du point  $A$ .

**Remark 1.5** (Caractérisation équivalente). L'application  $f$  est affine si et seulement si elle **préserve les barycentres**, c'est-à-dire :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(A_i), \quad \text{si } \sum \lambda_i = 1$$

### Propriétés fondamentales

- $f$  transforme tout sous-espace affine en un sous-espace affine.
- Elle conserve les alignements, les parallélismes, les barycentres et les rapports.
- Toute application affine  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  s'écrit sous la forme :

$$f(x) = Ax + b$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  et  $b \in \mathbb{K}^m$ .

- L'ensemble des applications affines forme un sous-groupe du groupe des applications  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

**Exemple 1.10** (Application affine en 2D : rotation + translation). On se place dans l'espace affine  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$  de direction  $E = \mathbb{R}^2$ . On définit :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = Ax + b$$

avec

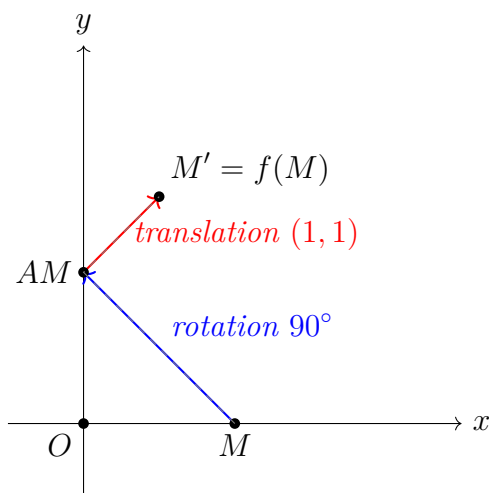
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{rotation d'angle } 90^\circ), \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{translation de vecteur } (1, 1)).$$

**Effet de  $f$  :** -  $A$  applique une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine  $O$  (dans le sens trigonométrique). -  $b$  translate ensuite tous les points de  $(1, 1)$ .

**Calcul sur un point  $M(2, 0)$  :**

$$f((2, 0)) = A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc  $M(2, 0)$  est envoyé sur  $M'(1, 3)$ .



### Propriétés observées :

- $f$  conserve les alignements, les rapports et les barycentres.
- L'image d'une droite est une droite.
- La composition d'une rotation et d'une translation est toujours une application affine.

### Exemple 1.11 (Application classiques).

- **Translation** :  $f(x) = x + v$ , avec  $v \in E$
- **Homothétie de centre**  $A$  et de rapport  $\lambda$  :

$$f(x) = A + \lambda(x - A)$$

- **Projection affine** : sur un sous-espace affine  $F$  parallèlement à une direction  $G$
- **Symétrie affine** : par rapport à une droite ou un plan affine

### Remark 1.6.

- Les applications affines généralisent les transformations géométriques usuelles sans utiliser de distance ni d'angle.
- Dans un repère affine, toute application affine est représentée par une matrice augmentée  $(A \mid b)$ .
- L'image d'une figure affine (triangle, segment, etc.) par une application affine conserve les rapports et barycentres.

## 1.7 Théorèmes fondamentaux

**Theorem 1.1** (Thalès (version affine)). *Trois droites parallèles coupant deux sécantes déterminent des segments proportionnels.*

**Interprétation affine** : Si trois droites parallèles rencontrent deux droites transversales, les longueurs affines des segments sont proportionnelles. Ce résultat découle directement de la linéarité des applications affines et de la conservation des rapports.

**Theorem 1.2** (Ceva (version affine)). Soit  $ABC$  un triangle, et soient  $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ . Alors les droites  $AD, BE, CF$  sont concourantes si et seulement si :

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

**Démonstration** : Cette condition exprime une conservation des barycentres pondérés. On peut l'obtenir par un calcul dans un repère affine adapté.

**Theorem 1.3** (Desargues affine (Forme faible)).

**Cas direct (implication)** : Soient  $p, q, r$  trois droites distinctes **concourantes** ou **parallèles**, et soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles tels que  $A, A' \in p, B, B' \in q, C, C' \in r$ . Si

$$(AB) \parallel (A'B') \quad \text{et} \quad (AC) \parallel (A'C'),$$

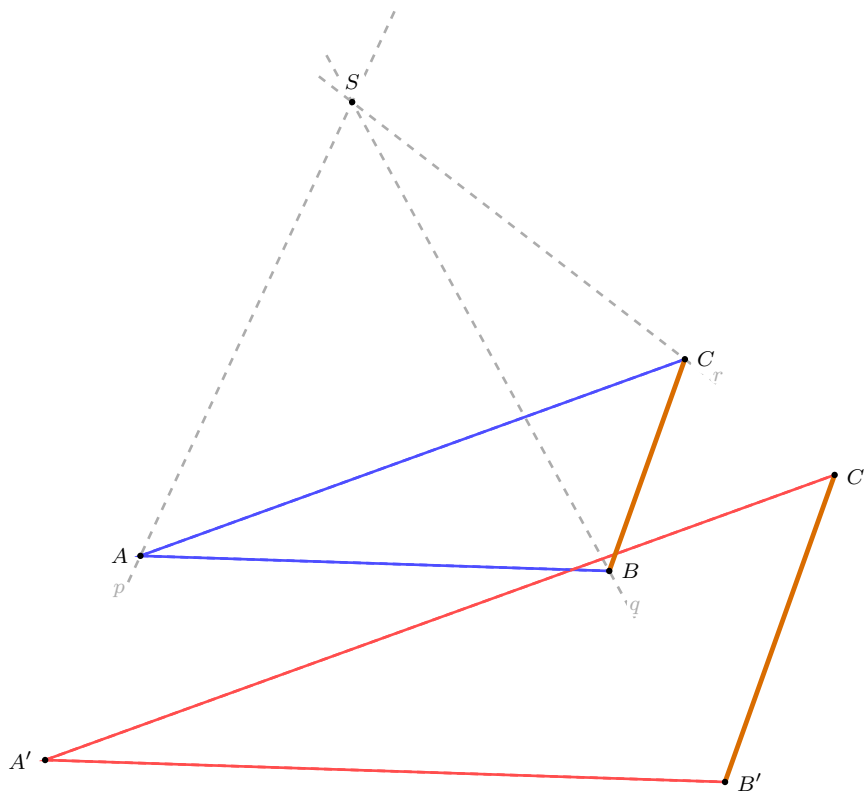
alors

$$(BC) \parallel (B'C').$$

**Cas réciproque** : Soient  $p, q, r$  trois droites distinctes et soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles tels que  $A, A' \in p, B, B' \in q, C, C' \in r$ . Si

$$(AB) \parallel (A'B'), \quad (BC) \parallel (B'C'), \quad (CA) \parallel (C'A'),$$

alors  $p, q, r$  sont **concourantes** ou **parallèles**.



**Theorem 1.4** (Pappus). Soient deux droites distinctes, et sur chacune trois points distincts :

$$A, B, C \quad \text{et} \quad A', B', C'$$

## 1.8 Orientation et convexité

---

Alors les points d'intersection des paires croisées :

$$X = AB' \cap A'B, \quad Y = AC' \cap A'C, \quad Z = BC' \cap B'C$$

sont alignés.

**Remarque :** Ce théorème se démontre en géométrie projective, mais il reste interprétable en affine si les intersections sont bien définies.

**Exemple 1.12** (Illustration du théorème de Pappus). On considère deux droites distinctes :

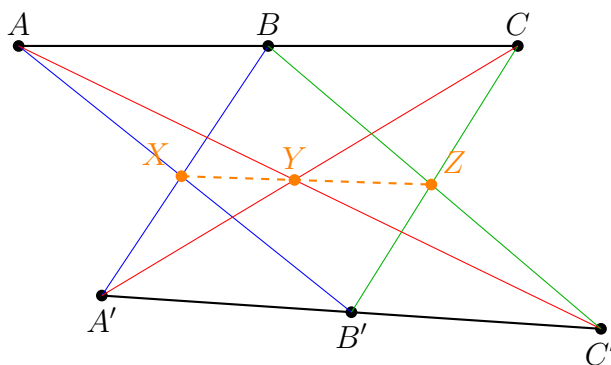
$$\text{droite } (ABC) \quad \text{et} \quad \text{droite } (A'B'C')$$

avec trois points distincts sur chacune :  $A, B, C$  sur la première, et  $A', B', C'$  sur la seconde.

On définit :

$$X = AB' \cap A'B, \quad Y = AC' \cap A'C, \quad Z = BC' \cap B'C.$$

Alors  $X, Y, Z$  sont alignés (droite de Pappus).



**Observation :** Même en géométrie affine, si les intersections sont définies, les trois points  $X, Y, Z$  sont toujours alignés. En géométrie projective, ce résultat est valable sans restriction sur les positions.

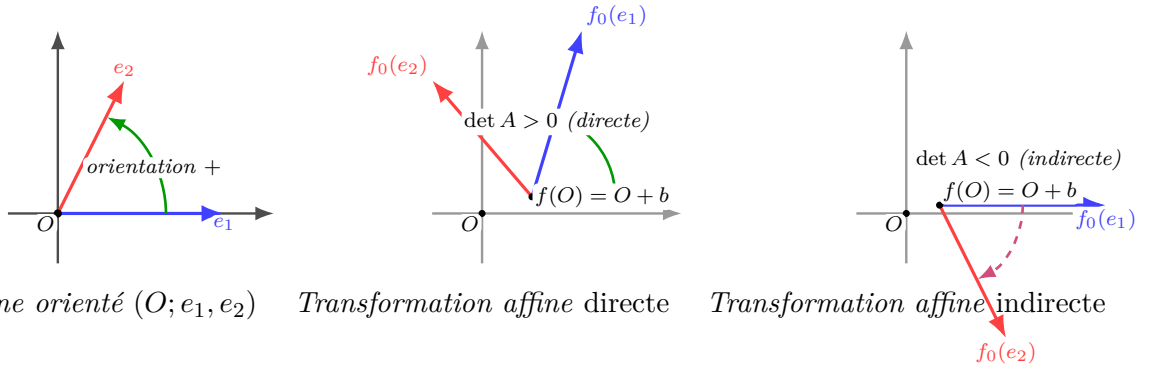
## 1.8 Orientation et convexité

**Definition 1.10.** Une **orientation** d'un espace affine  $\mathcal{A}$  est donnée par un repère affine orienté, c'est-à-dire une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de la direction  $E$ , orientée selon une convention fixée.

**Remark 1.7.** Cela permet de distinguer les transformations affines directes (qui conservent l'orientation) des indirectes (qui l'inversent).

**Exemple 1.13** (Orientation d'un espace affine et transformations directes/indirectes). On travaille dans le plan affine  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$  de direction  $E = \mathbb{R}^2$ . Un **repère affine orienté** est donné par un point  $O$  (origine) et une base  $(e_1, e_2)$  de  $E$ , munie de l'orientation trigonométrique (sens anti-horaire).

Une application affine  $f(x) = Ax + b$  est directe si  $\det A > 0$  (conserve l'orientation), indirecte si  $\det A < 0$  (inverse l'orientation).



Un repère affine orienté fixe un sens (ici anti-horaire). Une affine  $f(x) = Ax + b$  est directe si sa partie linéaire  $A$  conserve ce sens ( $\det A > 0$ ), et indirecte si elle l'inverse ( $\det A < 0$ ).

**Definition 1.11** (Convexité). Un ensemble  $C \subset \mathcal{A}$  est dit **convexe** si :

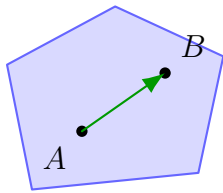
$$\forall A, B \in C, \quad [A, B] \subset C$$

où  $[A, B]$  désigne le segment affine reliant  $A$  et  $B$ .

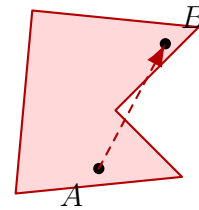
**Remark 1.8.**

- Tout sous-espace affine est convexe.
- Les polygones et polyèdres convexes sont convexes.
- L'intersection de convexes est convexe.

**Exemple 1.14** (Convexité et non-convexité).



Ensemble convexe



Ensemble non convexe

À gauche, l'ensemble est convexe : pour deux points  $A, B$  dans la figure, le segment  $[A, B]$  reste inclus. À droite, l'ensemble n'est pas convexe : le segment reliant  $A$  et  $B$  sort de la figure.

**Definition 1.12** (Coniques affines). Une **conique affine** est le lieu des points  $M \in \mathbb{R}^2$  vérifiant une équation quadratique de la forme :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

**Remark 1.9.** Les transformations affines permettent de réduire toute conique à une forme canonique :

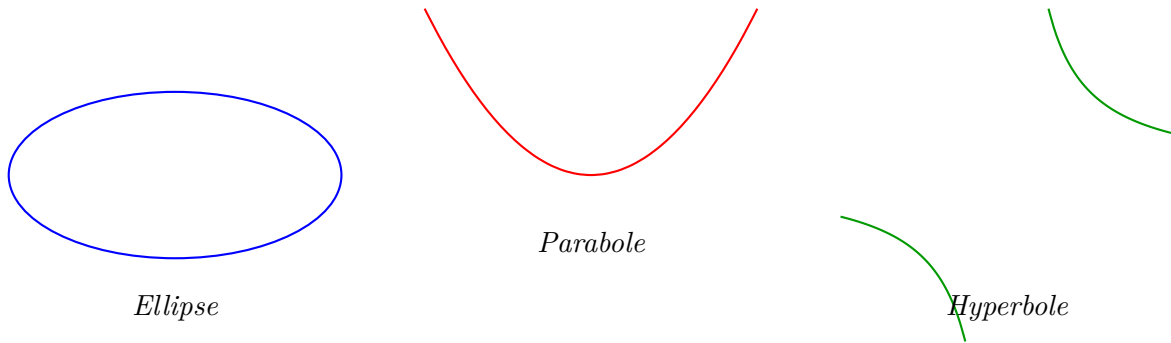
- ellipse, parabole ou hyperbole (classification affine)

## 1.8 Orientation et convexité

---

— la convexité du domaine délimité dépend de cette classification

**Exemple 1.15** (Exemples de coniques affines).



- Une ellipse délimite une région convexe. - Une parabole n'est pas fermée et sépare le plan en deux zones. - Une hyperbole a deux branches disjointes, non convexes dans leur ensemble.

**Conclusion** Les notions d'orientation et de convexité complètent la structure affine, en permettant une analyse géométrique fine sans faire intervenir la mesure. Elles sont fondamentales en optimisation, en géométrie algorithmique et en géométrie projective.

# Chapitre 2

## Espaces affines euclidiens

### 2.1 Espaces vectoriels euclidiens

**Definition 2.1** (Produit scalaire). Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute application bilinéaire, symétrique et définie positive :

$$(\cdot|\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x|y)$$

Telle que, pour tous  $x, y, z \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

- **Bilinéarité** :  $(x + \lambda y|z) = (x|z) + \lambda(y|z)$ ,  $(z|x + \lambda y) = (z|x) + \lambda(z|y)$
- **Symétrie** :  $(x|y) = (y|x)$
- **Définie positive** :  $(x|x) \geq 0$ , et  $(x|x) = 0 \iff x = 0$

**Norme et distance** On définit à partir du produit scalaire une norme naturelle :

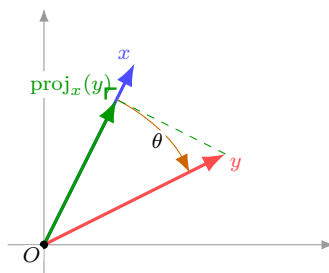
- **Norme** :  $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$
- **Distance** :  $d(x, y) := \|x - y\|$

**Remark 2.1.** cette distance rend  $E$  un espace métrique, et induit les notions usuelles de géométrie : sphère, boule, segment, etc.

**Definition 2.2** (Angle entre deux vecteurs). Soient  $x, y \in E$  deux vecteurs non nuls. L'angle  $\theta \in [0, \pi]$  entre eux est défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}$$

**Remark 2.2.**  $(x|y) = 0$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont orthogonaux. Le produit scalaire encode la notion de direction et de projection.



## 2.1 Espaces vectoriels euclidiens

**Exemple 2.1** (Produit scalaire de Frobenius sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ). Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,

$$(A|B) = \text{Tr}(A^T B) = \text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2 + 3 = 5.$$

### Inégalités fondamentales

- **Théorème (Cauchy-Schwarz)** :  $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , avec égalité si et seulement si  $x, y$  sont colinéaires.
- **Théorème (inégalité triangulaire)** :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (égalité ssi  $x, y$  sont colinéaires et de même sens)
- **Identité du parallélogramme** :  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

### Exemples de produits scalaires

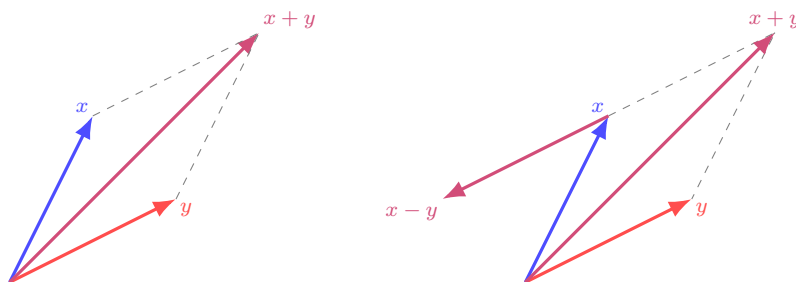
**Exemple 2.2** (Espace euclidien classique). Sur  $\mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique est :

$$(x|y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Il induit la norme euclidienne :  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

**Exemple 2.3** (Espace de matrices). Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut définir :

$$(A|B) := \text{Tr}(A^T B)$$



$$\text{Inégalité triangulaire : } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \cdot \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

### Bases orthogonales et orthonormées

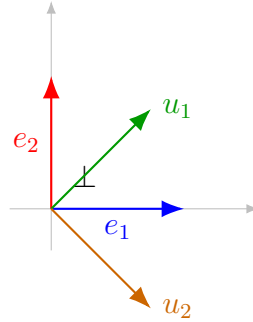
**Definition 2.3.** Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace euclidien. Une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est :

- **Orthogonale** si  $(e_i|e_j) = 0$  pour  $i \neq j$ , c.-à-d. les vecteurs sont deux à deux perpendiculaires.
- **Orthonormée** si  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ , c.-à-d. orthogonale et chaque vecteur est de norme 1.

**Exemple 2.4** (Exemple en dimension 2). Dans  $\mathbb{R}^2$ , la base canonique  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$  est orthonormée :

$$(e_1|e_2) = 0, \quad \|e_1\| = \|e_2\| = 1.$$

En revanche, les vecteurs  $u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)$  forment une base orthogonale (mais pas normalisée, car  $\|u_1\| = \|u_2\| = \sqrt{2}$ ).



### Théorème fondamental

**Theorem 2.1.** *Tout espace vectoriel euclidien de dimension finie admet une base orthonormée. Autrement dit, on peut toujours redresser une base quelconque pour obtenir une base orthonormée, via la méthode de Gram-Schmidt.*

**Méthode de Gram-Schmidt (orthonormalisation)** Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une famille libre de  $E$ . On construit une base orthonormée  $\{v_1, \dots, v_n\}$  par récurrence :

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad w_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k|v_i)v_i, \quad v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}, \quad k \geq 2.$$

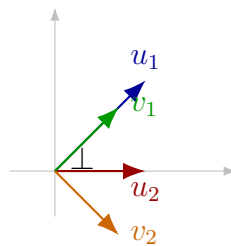
**Exemple 2.5** (Application en  $\mathbb{R}^2$ ). Soit  $u_1 = (1, 1), u_2 = (1, 0)$ .

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1),$$

$$w_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = (1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = (1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

On obtient donc la base orthonormée  $\{v_1, v_2\}$ .



**Remark 2.3.**

## 2.2 Sous-espaces orthogonaux

- Dans une base orthonormée, les coordonnées de tout vecteur  $y$  se calculent directement par  $y = \sum (y|e_i)e_i$ .
- Les bases orthonormées facilitent les projections orthogonales :  $\text{proj}_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)}(y) = \sum_{i=1}^k (y|e_i)e_i$ .
- Cette structure est fondamentale pour la géométrie, l'analyse numérique, et les applications (PCA, moindres carrés, etc.).

## 2.2 Sous-espaces orthogonaux

**Definition 2.4** (Orthogonalité de deux vecteurs). Soient  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  est orthogonal à  $y$ , noté  $x \perp y$ , si :

$$(x|y) = 0$$

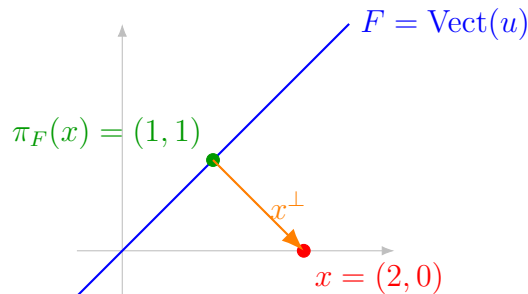
**Definition 2.5** (Orthogonal d'un sous-espace). Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. L'orthogonal de  $F$  est le sous-espace :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$$

**Exemple 2.6** (Projection sur une droite). Dans  $\mathbb{R}^2$ , soit  $F = \text{Vect}(u)$  avec  $u = (1, 1)$ . Pour  $x = (2, 0)$  :

$$\pi_F(x) = \frac{(x|u)}{\|u\|^2} u = \frac{2}{2}(1, 1) = (1, 1),$$

et donc  $x^\perp = x - \pi_F(x) = (1, -1)$ .



### Propriétés fondamentales

**Proposition 2.1** (Dimension de l'orthogonal). Soit  $E$  de dimension  $n$ , et  $F \subset E$  un sous-espace de dimension  $r$ . Alors :

$$\dim F^\perp = n - r$$

**Proposition 2.2** (Décomposition orthogonale).

$$E = F \oplus F^\perp$$

Autrement dit, tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de manière unique :

$$x = x_F + x^\perp, \quad \text{avec } x_F \in F, \quad x^\perp \in F^\perp$$

**Exemple 2.7.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , soit le plan  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ . Alors :

$$F^\perp = \text{Vect}(e_3)$$

### Projection orthogonale sur un sous-espace

**Definition 2.6.** La projection orthogonale  $\pi_F(x)$  d'un vecteur  $x \in E$  sur un sous-espace  $F \subset E$  est le vecteur  $x_F \in F$  tel que :

$$x - x_F \in F^\perp$$

**Proposition 2.3.** La projection orthogonale existe et est unique. Elle définit une application linéaire :

$$\pi_F : E \rightarrow F, \quad \text{linéaire, idempotente et auto-adjointe.}$$

**Exemple 2.8.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , projetons  $x = (1, 2)$  sur  $F = \text{Vect}((1, 1))$ . La projection est :

$$\pi_F(x) = \frac{(x|f)}{\|f\|^2} f = \frac{3}{2}(1, 1)$$

### Distance à un sous-espace

**Theorem 2.2.** Soit  $x \in E$ , et  $F \subset E$  un sous-espace. Alors la distance de  $x$  à  $F$  est :

$$d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\| = \|x^\perp\|$$

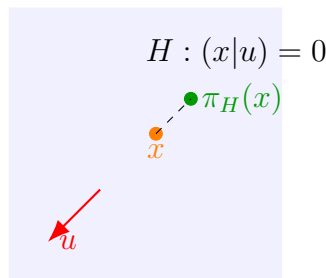
### Hyperplans orthogonaux

**Definition 2.7.** Un hyperplan orthogonal à un vecteur  $u \in E \setminus \{0\}$  est :

$$H = \{x \in E \mid (x|u) = \alpha\}$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha = 0$ , alors  $H$  est un sous-espace vectoriel (noyau d'une forme linéaire).

**Exemple 2.9** (En dimension 3). Dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $u = (0, 0, 1)$ , l'hyperplan  $H = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$  est le plan  $(xOy)$ .



**Remark 2.4.** L'orthogonalité permet de découper l'espace selon des directions mutuellement perpendiculaires.

La projection orthogonale est l'un des outils géométriques les plus fondamentaux en analyse, optimisation, et géométrie algorithmique.

On peut généraliser ces notions aux espaces hilbertiens (de dimension infinie) en analyse fonctionnelle.

## 2.3 Espaces affines euclidiens

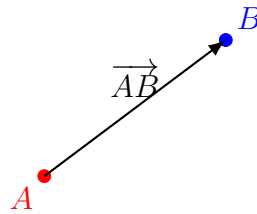
**Definition 2.8** (Espace affine euclidien). *Un espace affine euclidien  $\mathcal{A}$  est un espace affine dont l'espace vectoriel directeur  $E$  est muni d'un produit scalaire euclidien  $(\cdot|\cdot)$ .*

*Autrement dit, on dispose :*

- d'un espace affine  $\mathcal{A}$ ,
- d'un espace vectoriel directeur  $E$ ,
- et d'une structure euclidienne sur  $E$  permettant d'introduire norme, distance, angles.

**Definition 2.9** (Vecteur de déplacement et distance entre deux points). *Pour  $A, B \in \mathcal{A}$ , on note  $\overrightarrow{AB} \in E$ , et on définit :*

$$d(A, B) := \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB})}.$$



**Definition 2.10** (Distance d'un point à un sous-espace affine). *Soit  $F = A + F_0 \subset \mathcal{A}$ , où  $F_0 \subset E$  est la direction de  $F$ , et  $M \in \mathcal{A}$ . Alors :*

$$d(M, F) = \min_{X \in F} d(M, X) = \|\overrightarrow{AM} - \pi_{F_0}(\overrightarrow{AM})\|.$$

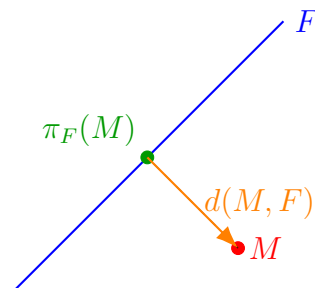
**Formules pratiques :**

- Distance point-droite dans  $\mathbb{R}^2$  : si  $D : ax + by + c = 0$  et  $M(x_0, y_0)$ ,

$$d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Distance point-plan dans  $\mathbb{R}^3$  : si  $P : ax + by + cz + d = 0$  et  $M(x_0, y_0, z_0)$ ,

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



**Definition 2.11** (Angle entre deux directions affines). Soient deux droites affines  $D_1 = A + \mathbb{R}u$  et  $D_2 = A + \mathbb{R}v$ . L'angle  $\theta$  est défini par :

$$\cos \theta = \frac{(u|v)}{\|u\|\|v\|}.$$

**Definition 2.12** (Orthogonalité entre sous-espaces affines). Deux sous-espaces affines  $F = A + F_0$ ,  $G = A + G_0$  sont dits orthogonaux si leurs directions sont orthogonales :

$$\forall u \in F_0, \forall v \in G_0, (u|v) = 0.$$

### Propriétés importantes

- Le produit scalaire reconstruit la géométrie métrique sans fixer d'origine.
- La barycentrie est compatible avec la structure euclidienne : le barycentre minimise les distances quadratiques.
- Les projections orthogonales sont linéaires et caractérisent les points les plus proches d'un sous-espace.

**Exemple 2.10** (Plan affine euclidien). Dans  $\mathbb{R}^2$ , muni du produit scalaire canonique :

- les distances sont usuelles,
- les droites  $D_1 = A + \mathbb{R}(1, 0)$  et  $D_2 = A + \mathbb{R}(0, 1)$  sont orthogonales,
- le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$  est :  $\{M \mid d(M, A) = r\}$ .

**Exemple 2.11** (Projection sur une droite). Soit  $D = A + \mathbb{R}u$ , et  $M \in \mathcal{A}$ . Alors :

$$Proj_D(M) = A + \frac{(\overrightarrow{AM}|u)}{\|u\|^2}u.$$

### Applications et remarques

- Cadre naturel pour l'étude des coniques, quadriques, isométries et similitudes.
- Utilisé en **optimisation** (moindres carrés = projection orthogonale).
- Permet d'analyser distances, angles et perpendiculaires dans une géométrie sans origine.

## 2.4 Applications géométriques dans les espaces affines euclidiens

**Definition 2.13** (Application affine). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux espaces affines de directions respectives  $E$  et  $F$ . Une application  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est dite affine s'il existe :

- une application linéaire  $L : E \rightarrow F$ ,
- un point  $B_0 \in \mathcal{B}$ ,

tels que pour tout  $M \in \mathcal{A}$  :

$$f(M) = B_0 + L(\overrightarrow{AM})$$

où  $A \in \mathcal{A}$  est un point fixé.

**Definition 2.14** (Isométrie affine). Une application affine  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  est une isométrie si :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

## 2.4 Applications géométriques dans les espaces affines euclidiens

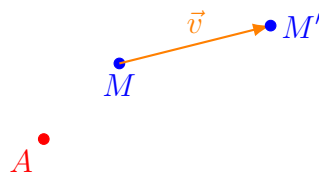
**Caractérisation**  $f$  est une isométrie  $\iff$  sa partie linéaire  $L$  est orthogonale :

$$(L(u)|L(v)) = (u|v), \quad \forall u, v \in E.$$

Autrement dit,  $L \in O(E)$ , le groupe orthogonal de  $E$ .

**Remark 2.5.** (Exemples classiques d'isométries)

- **Translation** :  $f(M) = M + \vec{v}$ .
- **Réflexion orthogonale** par rapport à un hyperplan  $H$ .
- **Rotation** autour d'un point  $O$  (dans le plan ou l'espace).
- **Symétrie centrale** :  $f(M) = 2A - M$ .



**Remark 2.6** (Propriétés des isométries).

- Conservent distances, angles, aires et volumes.
- Préservent la perpendicularité.
- L'ensemble des isométries de  $\mathbb{R}^n$  forme le groupe euclidien  $E(n)$ .

**Definition 2.15** (Similitudes affines).  $f$  est une similitude affine si :

$$\exists \lambda > 0, \quad d(f(A), f(B)) = \lambda \cdot d(A, B), \quad \forall A, B.$$

**Caractérisation** La partie linéaire  $L$  vérifie :

$$(L(u)|L(v)) = \lambda^2(u|v).$$

**Exemple 2.12.**

- **Homothétie de centre  $A$  et rapport  $\lambda$**  :

$$f(M) = A + \lambda \cdot \overrightarrow{AM}.$$

- **Rotation-homothétie** (similitude directe).
- **Inversion** (cas particulier en géométrie projective).

**Tableau comparatif**

	<b>Isométrie</b>	<b>Similitude</b>
Distance	Conservée	Multipliée par $\lambda$
Angles	Conservés	Conservés
Rapports de longueurs	Conservés	Conservés
Aires / volumes	Conservés	Multipliés par $\lambda^n$

**Théorèmes classiques**

**Theorem 2.3** (Invariance du barycentre). *Une isométrie affine préserve le barycentre pondéré.*

$$f(\text{bar}(\{(A_i, \lambda_i)\})) = \text{bar}(\{(f(A_i), \lambda_i)\}).$$

**Theorem 2.4** (Préservation de la perpendicularité). *si  $F \perp G$ , alors  $f(F) \perp f(G)$ .*

**Remark 2.7.**

- *Les isométries modélisent les mouvements rigides (mécanique, robotique).*
- *Les similitudes sont utilisées en optique (agrandissements), en cartographie et en vision par ordinateur.*
- *En traitement d'images, les transformations affines générales (combinaison de rotation, translation, homothétie, cisaillement) sont fondamentales pour la reconnaissance de formes.*

# Chapitre 3

## Courbes paramétrées

### 3.1 Introduction

En géométrie et en analyse, une courbe plane peut être décrite sous différentes formes :

- **Implication cartésienne** : une équation implicite  $F(x, y) = 0$  ;
- **Forme explicite** :  $y = f(x)$  (ou  $x = g(y)$ ) ;
- **Paramétrisation** :  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ .

La représentation paramétrée est particulièrement utile pour décrire des courbes non-fonctionnelles (cardioïde, lemniscate, spirales), pour l'étude dynamique (trajectoires) et pour les calculs différentiels (tangente, courbure, longueur d'arc, aire).

### 3.2 Définitions fondamentales

**Definition 3.1** (Courbe paramétrée). *On appelle courbe paramétrée toute application*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

où  $x, y$  sont au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

**Definition 3.2** (Régularité). *La courbe est régulière en  $t_0 \in I$  si  $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ . Dans ce cas, la tangente en  $M_0 = \gamma(t_0)$  est bien définie.*

**Definition 3.3** (Points particuliers). *Soit  $M_0 = \gamma(t_0)$ .*

- **Point simple** :  $\gamma'(t_0) \neq 0$  ;
- **Point multiple** :  $\exists t_1 \neq t_2$  tel que  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  ;
- **Point singulier** :  $\gamma'(t_0) = (0, 0)$ .

**Proposition 3.1** (Tangente en un point régulier). *Si  $\gamma$  est régulière en  $t_0$ , la tangente en  $M_0 = \gamma(t_0)$  a pour équation*

$$(X - x(t_0))y'(t_0) - (Y - y(t_0))x'(t_0) = 0.$$

**Exemple 3.1** (Parabole).  $\gamma(t) = (t, t^2)$ . On a  $\gamma'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$  pour tout  $t$ . Tous les points sont simples.

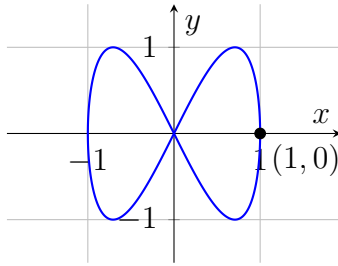


FIGURE 3.1 – Point multiple : la courbe repasse par  $(1,0)$  pour plusieurs valeurs de  $t$ .

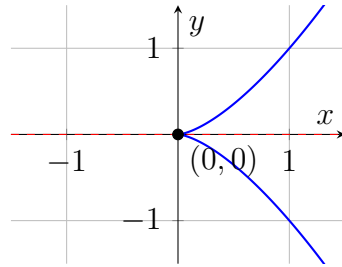


FIGURE 3.2 – Point singulier : cuspide en  $(0,0)$ , tangente horizontale.

## Réduction du domaine d'étude

Dans de nombreuses situations, l'étude complète d'une courbe paramétrée peut être simplifiée grâce à des symétries ou à des périodicités. On parle alors de **réduction du domaine d'étude** : il suffit d'analyser la courbe sur un intervalle restreint du paramètre, puis de déduire la forme globale par symétries ou translations.

**Definition 3.4** (Principe de réduction). Soit  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  définie sur  $I \subset \mathbb{R}$ .

- ▷ Si  $x(-t) = x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , la courbe est **symétrique par rapport à l'axe des abscisses**.
- ▷ Si  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = y(t)$ , la courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- ▷ Si  $x(-t) = -x(t)$  et  $y(-t) = -y(t)$ , la courbe est **symétrique par rapport à l'origine**.
- ▷ Si  $\gamma(t + T) = \gamma(t)$ , la courbe est **périodique** et l'étude peut être réduite à un intervalle de longueur  $T$ .

**Exemple 3.2** (Ellipse).

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} x(-t) &= a \cos(-t) = a \cos t = x(t), \\ y(-t) &= b \sin(-t) = -b \sin t = -y(t). \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $Ox$ . De plus,  $\gamma(t+\pi) = (-a \cos t, -b \sin t)$  : symétrie centrale. Il suffit donc d'étudier  $\gamma$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  pour reconstituer l'ellipse entière.

### 3.3 Outils différentiels : vitesse, angle, courbure

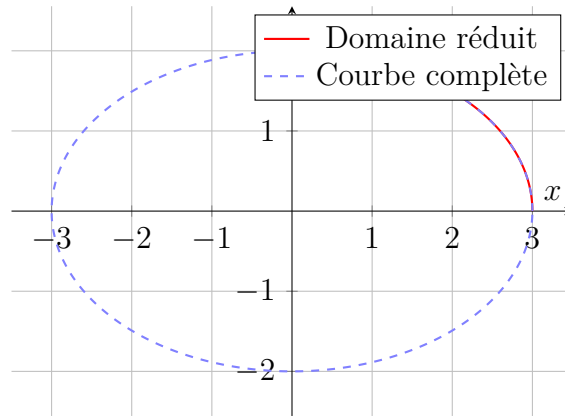


FIGURE 3.3 – Réduction du domaine : étude de l'ellipse limitée au quart supérieur droit.

**Exemple 3.3** (Cardioïde).

$$\gamma(t) = (1 - \cos t)(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

On vérifie que

$$\gamma(-t) = (1 - \cos(-t))(\cos(-t), \sin(-t)) = (1 - \cos t)(\cos t, -\sin t),$$

donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $Ox$ . Il suffit donc d'étudier la cardioïde sur  $[0, \pi]$ .

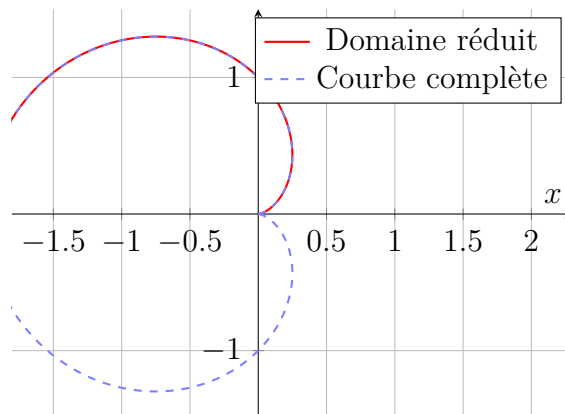


FIGURE 3.4 – Réduction du domaine d'étude de la cardioïde grâce à la symétrie axiale.

**Remark 3.1.** La réduction du domaine permet de diviser par 2, 4 ou davantage le travail de calcul (variations, tangentes, limites) en exploitant les invariances structurelles de la courbe.

### 3.3 Outils différentiels : vitesse, angle, courbure

**Definition 3.5** (Vitesse et accélération). La vitesse est  $v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ . L'accélération est  $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$ .

**Definition 3.6** (Angle de la tangente). Si  $\gamma'(t) \neq 0$ , on définit l'angle de la tangente par

$$\theta(t) = \text{atan2}(y'(t), x'(t)).$$

**Proposition 3.2** (Courbure signée). La courbure signée (orientation positive) est

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} = \frac{d\theta}{ds},$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne ( $ds = v(t) dt$ ).

**Remark 3.2.** Le vecteur tangent unitaire est  $T = \gamma'/\|\gamma'\|$  et le vecteur normal unitaire est  $N = R_{\pi/2}T$  (rotation d'angle  $+\pi/2$ ). Le centre de courbure est  $C = \gamma + \frac{1}{\kappa}N$  lorsque  $\kappa \neq 0$ .

### 3.4 Étude locale autour d'un point

#### Tangente aux points singuliers et développement vectoriel

Lorsque  $\gamma'(t_0) = (0, 0)$ , on cherche les plus petits ordres  $p < q$  tels que

$$(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0), \quad (x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0)) \text{ non colinéaire au précédent.}$$

En posant  $s = t - t_0$ , on a le développement

$$M(t) = M(t_0) + s^p \vec{v} + s^q \vec{w} + s^q \vec{\varepsilon}(s), \quad \|\vec{\varepsilon}(s)\| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0), \quad (3.1)$$

où  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont non colinéaires. La tangente est portée par  $\vec{v}$ .

#### Position par rapport à la tangente : critère de parité

**Proposition 3.3** (Classification par parité). Avec la notation ci-dessus :

- a)  $p$  impair,  $q$  impair : la courbe **traverse** sa tangente (inflexion stationnaire) ;
- b)  $p$  impair,  $q$  pair : la courbe reste du **même côté** (rebroussement d'une espèce) ;
- c)  $p$  pair,  $q$  impair : la courbe passe de **part et d'autre** (autre espèce) ;
- d)  $p$  pair,  $q$  pair : la courbe **rebrousse chemin** (cuspide).

**Remark 3.3** (Cas  $p = q$ ). Si les premiers ordres non nuls coïncident, écrire la tangente  $y - y_0 = m(x - x_0)$  et étudier le premier terme non nul de  $y - y_0 - m(x - x_0)$  : impair  $\Rightarrow$  traversée, pair  $\Rightarrow$  pas de traversée.

**Exemple 3.4** (Inflexion stationnaire).  $\gamma(t) = (t, t^3)$ . Tangente  $y = 0$ . La courbe traverse et change de convexité.

**Exemple 3.5** (Rebroussement).  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ . Ici  $p = 2$  (tangente horizontale),  $q = 3$  : passage de part et d'autre.

**Exemple 3.6** (Cuspide).  $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ .  $p = 2, q = 4$  : rebroussement sur la tangente.

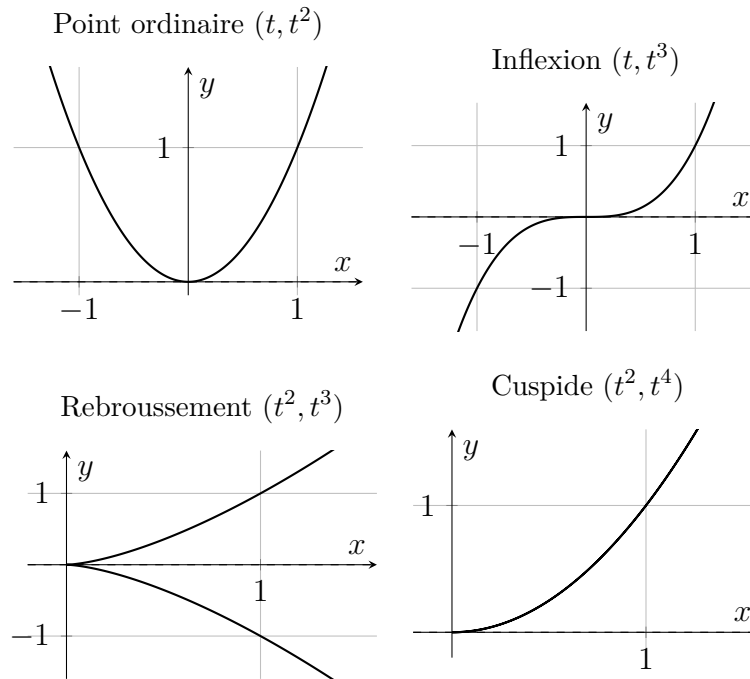


FIGURE 3.5 – Allures locales typiques selon la parité  $(p, q)$ .

## 3.5 Longueur d'arc, aires et asymptotes

### Longueur d'arc

Si  $\gamma \in \mathcal{C}^1$  et  $v = \|\gamma'\|$  est intégrable,

$$L_{[a,b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

### Aire balayée (formule de Green)

Si la courbe simple fermée  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , est orientée positivement,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt = \int_a^b x(t) y'(t) dt = - \int_a^b y(t) x'(t) dt.$$

### Asymptotes

**Proposition 3.4** (Critères pratiques). — Si  $t \rightarrow t_0$  et  $x(t) \rightarrow x_0$  alors que  $|y(t)| \rightarrow \infty$ , on a une **asymptote verticale**  $x = x_0$ .

— Si  $|x(t)| \rightarrow \infty$  et  $y(t) \rightarrow \ell$ , **asymptote horizontale**  $y = \ell$ .

— Si  $|x(t)| \rightarrow \infty$  et  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow m$ , alors  $y \sim mx + b$  avec  $b = \lim(y(t) - mx(t))$  (si la limite existe) : **asymptote oblique**.

### 3.6 Reparamétrisation et orientation

**Proposition 3.5** (Changement de paramètre). *Si  $\phi : J \rightarrow I$  est  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone, alors  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$  a la même image. Si  $\phi' > 0$ , l'orientation est conservée; si  $\phi' < 0$ , l'orientation est inversée.*

**Remark 3.4** (Paramétrisation par l'abscisse curviligne). *Lorsque  $v(t) > 0$ , on définit  $s(t) = \int_{t_0}^t v(u) du$ . La reparamétrisation  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$  vérifie  $\|\bar{\gamma}'(s)\| = 1$ .*

### 3.7 Méthode complète d'étude d'une courbe

Pour  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  sur  $I$  :

- 1) Domaine (interdits : divisions par zéro, racines, logs).
- 2) Symétries (parités  $x(\pm t), y(\pm t)$ , périodicité, invariances).
- 3) Points *critiques*  $x'(t) = 0, y'(t) = 0$  et points *singuliers*  $\gamma'(t) = 0$ .
- 4) Tangentes remarquables (verticales  $x'(t) = 0$ , horizontales  $y'(t) = 0$ , obliques via  $\theta$ ).
- 5) Étude locale aux singularités (développement (3.1) et parité).
- 6) Variations de  $x$  et  $y$  (tableaux de signes/variations).
- 7) Branches infinies et asymptotes (horiz., vert., obliques).
- 8) Tracé propre (points multiples, intersections d'axes, cohérence des limites).

### 3.8 Exemples

**Exemple 3.7** (Courbe rationnelle).  $x = t + \frac{1}{t}, y = \frac{t-1}{t+1}$  Domaine  $I = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ .

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}, \quad y'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} > 0 \text{ sur chaque intervalle de } I.$$

**Asymptotes.**

- $t \rightarrow 0^\pm : x(t) \rightarrow \pm\infty, y(t) \rightarrow -1 \Rightarrow y = -1$ .
- $t \rightarrow -1^\pm : y(t) \rightarrow \mp\infty$  et  $x(t) \rightarrow -2 \Rightarrow x = -2$ .
- $t \rightarrow \pm\infty : x(t) \sim t, y(t) \rightarrow 1 \Rightarrow y = 1$ .

### 3.8 Exemples

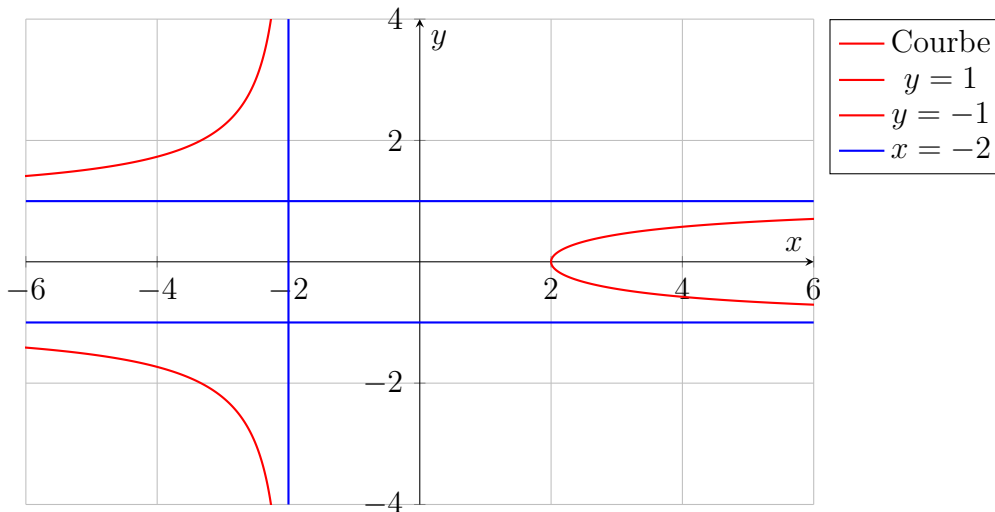


FIGURE 3.6 – Courbe  $x = t + 1/t$ ,  $y = (t - 1)/(t + 1)$  et ses asymptotes.

**Exemple 3.8** (Ellipse).

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0.$$

**Domaine.**  $I = [0, 2\pi]$ .

**Dérivées.**  $x'(t) = -a \sin t$ ,  $y'(t) = b \cos t$ . Vitesse  $v(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ .

**Symétries / Réduction.**

- $x(-t) = x(t)$ ,  $y(-t) = -y(t) \Rightarrow$  symétrie par rapport à  $Ox$ .
- $x(\pi - t) = -x(t)$ ,  $y(\pi - t) = y(t) \Rightarrow$  symétrie par rapport à  $Oy$ .
- $\gamma(t + \pi) = -\gamma(t) \Rightarrow$  symétrie centrale.
- $\Rightarrow$  Étude réduite à  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Aire et asymptotes.** Aire  $\mathcal{A} = \pi ab$ . Aucune asymptote (courbe bornée).

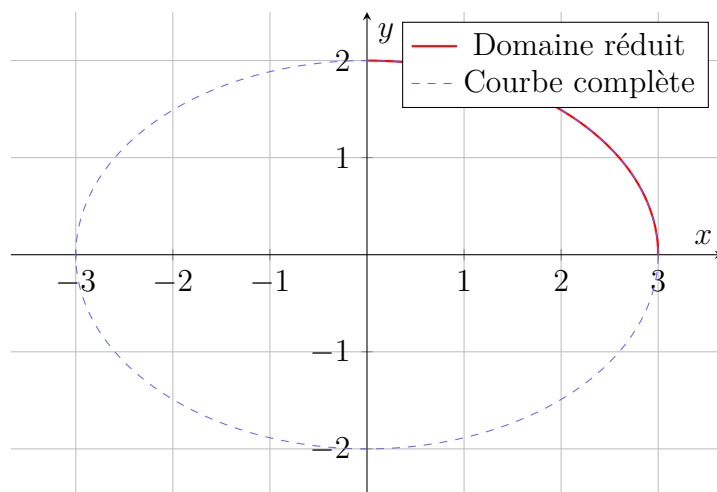


FIGURE 3.7 – Réduction de l'étude de l'ellipse au quart supérieur droit. (Ici  $a = 3$ ,  $b = 2$ .)

**Exemple 3.9** (Cycloïde (cuspides régulières en temps)).

$$\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad t \in \mathbb{R}, R > 0.$$

$\gamma'(t) = (R(1 - \cos t), R \sin t)$ . Aux  $t = 2k\pi$ ,  $\gamma'(t) = (0, 0)$  : points singuliers cuspides ( $p = 2, q = 3$ ).

**Exemple 3.10** (Cardioïde (étude détaillée)).

$$\gamma(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Symétrie par rapport à l'axe  $Ox$ . Au voisinage de  $t = 0$ , on a  $\gamma'(0) = (0, 0)$  et le développement montre  $p = 2, q = 4$  : cuspide à l'origine. Aire intérieure

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') dt = \frac{3\pi}{2}.$$

**Exemple 3.11** (Lemniscate de Bernoulli).

$$\gamma(t) = \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Domaine.**  $I = \mathbb{R}$  (le dénominateur  $1 + t^2 > 0$  toujours).

**Dérivées.**

$$x'(t) = \frac{-4t}{(1 + t^2)^2}, \quad y'(t) = \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}.$$

Zéros simultanés en  $t = 0$  ? Non :  $x'(0) = 0, y'(0) = 2$  (point régulier).  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = (0, 0)$   
 $\Rightarrow$  **point double** en l'origine.

**Symétries / Réduction.**

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t) \Rightarrow \text{symétrie par rapport à } Ox.$$

Étude possible sur  $[0, +\infty)$ .

**Aire / Asymptotes.** Courbe bornée, pas d'asymptote. Aire totale = somme des aires des deux lobes (calcul via Green possible).

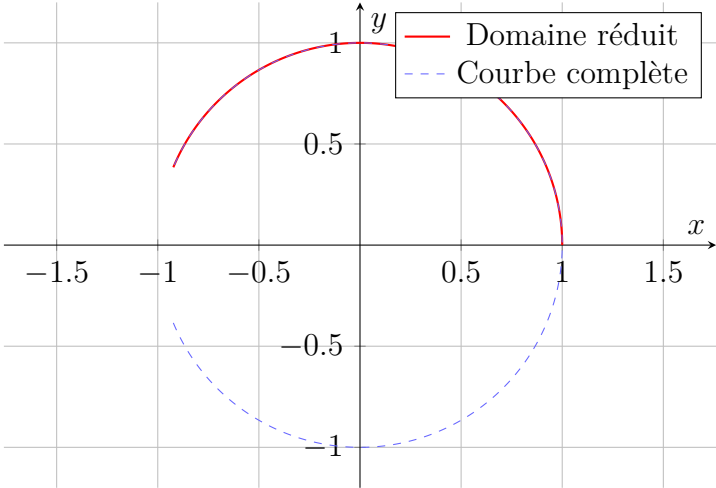


FIGURE 3.8 – Lemniscate de Bernoulli : point double en  $(0,0)$  et symétrie axiale.

# Chapitre 4

## Surfaces paramétrées

### 4.1 Introduction et définitions

L'étude des surfaces paramétrées constitue une extension naturelle des courbes paramétrées. Alors qu'une courbe est obtenue par une application d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^n$ , une surface est engendrée par une application d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^3$  :

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Ainsi, les surfaces paramétrées permettent de décrire de manière unifiée une grande variété d'objets géométriques (plans, sphères, cônes, surfaces de révolution, etc.). Elles constituent la base de nombreuses applications en géométrie différentielle, en physique (modèles de membranes, ondes, interfaces), et en infographie.

Dans ce qui vient, nous introduisons les notions fondamentales : vecteurs tangents, plan tangent, normale, élément d'aire, et calculs d'intégrales de surface.

**Definition 4.1** (Surface paramétrée, régularité). *Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert. Une **surface paramétrée** de  $\mathbb{R}^3$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$*

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

On dit que  $\sigma$  est **régulière** en  $(u_0, v_0) \in U$  si les vecteurs

$$\sigma_u(u_0, v_0) := \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \sigma_v(u_0, v_0) := \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

sont linéairement indépendants (i.e.  $\sigma_u \wedge \sigma_v \neq 0$ ).

**Remark 4.1.** *La condition de rang 2 garantit l'existence d'un plan tangent bien défini. Différentes paramétrisations peuvent décrire la même surface (changement de paramètres).*

**Exemple 4.1** (Graphe d'une fonction). *Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^1$ . Le graphe est  $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$  sur  $U = \Omega$ . On a*

$$\sigma_x = (1, 0, f_x), \quad \sigma_y = (0, 1, f_y), \quad \sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1).$$

## 4.2 Plan tangent, vecteur normal, régularité

**Exemple 4.2** (Plan affine). *Le plan d'équation  $ax + by + cz = d$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  peut être paramétré en isolant une variable. Par exemple si  $c \neq 0$  :*

$$\sigma(u, v) = \left(u, v, \frac{d-au-bv}{c}\right).$$

**Exemple 4.3** (Cylindre, cône, paraboloides).

- **Cylindre unité** (autour de l'axe  $z$ ) :  $\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .
- **Cône circulaire** :  $\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, ar)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- **Paraboloïde elliptique** :  $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ .
- **Selle (paraboloïde hyperbolique)** :  $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ .

**Exemple 4.4** (Sphère et tore).

- **Sphère de rayon  $R$**  :  $\sigma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ .
- **Tore** ( $R > r > 0$ ) :

$$\sigma(u, v) = \left((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v\right), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi].$$

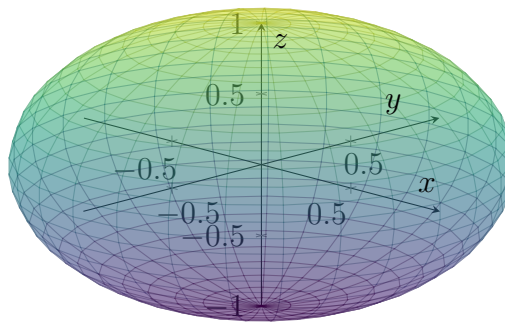


FIGURE 4.1 – Sphère unité paramétrée par  $(\theta, \varphi)$ .

## 4.2 Plan tangent, vecteur normal, régularité

**Definition 4.2** (Plan tangent et normal). *Au point  $M = \sigma(u_0, v_0)$  d'une surface régulière,*

$$T_M \Sigma = \text{Vect}(\sigma_u(u_0, v_0), \sigma_v(u_0, v_0)), \quad N(u_0, v_0) = \sigma_u \wedge \sigma_v.$$

*Une normale unitaire est  $n = \frac{N}{\|N\|}$  (l'orientation dépend du choix des paramètres).*

**Exemple 4.5** (Plan tangent à la sphère  $R = 1$ ). *Avec  $\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ ,*

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 0), \quad \sigma_\varphi = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi).$$

*Alors  $N = \sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \sigma(\theta, \varphi)$  (rayon sortant). Au pôle nord  $(0, 0, 1)$  (i.e.  $\varphi = 0$ ), le plan tangent est  $z = 1$ .*

**Exemple 4.6** (Graphes  $z = f(x, y)$ ). *Pour  $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , on a  $N = (-f_x, -f_y, 1)$  et l'équation du plan tangent en  $(x_0, y_0)$  :*

$$Z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f_y(x_0, y_0)(Y - y_0).$$

### 4.3 Premier formulaire : $E, F, G$ et élément d'aire

**Definition 4.3** (Vecteurs tangents et plan tangent). *Soit une surface paramétrée*

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \sigma(u, v).$$

*Les dérivées partielles  $\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$  et  $\sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$  sont des vecteurs tangents à la surface. Ils engendrent le **plan tangent** en  $\sigma(u, v)$ .*

**Definition 4.4** (Coefficients du premier formulaire fondamental). *On définit les produits scalaires suivants :*

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle, \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, \quad G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle.$$

*Ils s'interprètent comme :*

- $E = \|\sigma_u\|^2$  : longueur au carré du vecteur tangent selon  $u$ ,
- $G = \|\sigma_v\|^2$  : longueur au carré du vecteur tangent selon  $v$ ,
- $F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$  : mesure de l'angle entre  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$ .

**Remark 4.2.** *Les coefficients  $(E, F, G)$  constituent le **premier formulaire fondamental** (ou forme quadratique fondamentale) de la surface. C'est la métrique induite par  $\mathbb{R}^3$  sur la surface.*

**Proposition 4.1** (Formule de l'élément de longueur). *Pour un déplacement infinitésimal  $(du, dv)$  sur le domaine de paramétrisation, la longueur infinitésimale sur la surface est donnée par :*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

*C'est la première forme quadratique fondamentale.*

**Proposition 4.2** (Élément d'aire). *L'élément d'aire sur la surface est donné par :*

$$dS = \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

**Exemple 4.7** (Aire d'une surface de révolution). *Soit  $\sigma(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta)$ . Alors*

$$\sigma_x = (1, f'(x) \cos \theta, f'(x) \sin \theta), \quad \sigma_\theta = (0, -f(x) \sin \theta, f(x) \cos \theta).$$

*On obtient*

$$E = 1 + f'(x)^2, \quad F = 0, \quad G = f(x)^2,$$

*et donc*

$$dS = f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx d\theta.$$

*L'aire pour  $x \in [a, b]$  est*

$$\text{Aire} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

**Exemple 4.8** (Aire de la sphère de rayon  $R$ ). *Pour la paramétrisation sphérique  $\sigma(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$  :*

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 \varphi.$$

*On a donc*

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi, \quad \text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi R^2.$$

## 4.4 Exemples

**Exemple 4.9** (Aire d'un graphe  $z = f(x, y)$ ). Pour  $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , on obtient

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2,$$

doù

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Laire du graphe au-dessus de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est

$$\text{Aire} = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

## 4.4 Exemples

### 1) Hélicoïde

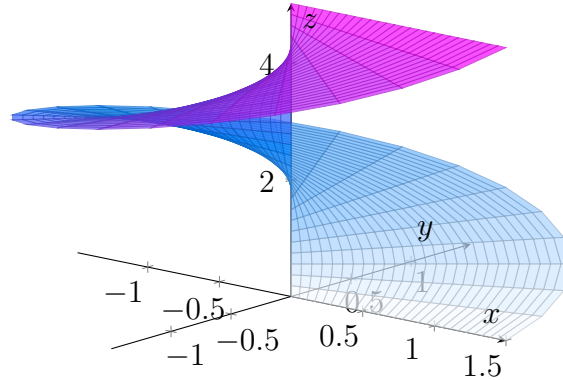


FIGURE 4.2 – Hélicoïde  $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$  (ici  $a = 0,8$ ).

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), \quad u \in [0, U], \quad v \in [0, 2\pi], \quad a \in \mathbb{R}.$$

On calcule

$$\sigma_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \sigma_v = (-u \sin v, u \cos v, a),$$

$$\begin{aligned} N = \sigma_u \wedge \sigma_v &= (\sin v \cdot a - 0 \cdot u \cos v, 0 \cdot (-u \sin v) - \cos v \cdot a, \cos v \cdot u \cos v - \sin v \cdot (-u \sin v)) \\ &= (a \sin v, -a \cos v, u). \end{aligned}$$

Alors  $\|N\| = \sqrt{a^2 + u^2}$ , et  $dS = \sqrt{a^2 + u^2} \, du \, dv$ . Aire d'une nappe  $u \in [0, U]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  :

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^U \sqrt{a^2 + u^2} \, du \, dv = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \left( u\sqrt{a^2 + u^2} + a^2 \ln \left( u + \sqrt{a^2 + u^2} \right) \right) \right]_0^U.$$

### 2) Tore

$$\sigma(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v).$$

On obtient  $E = \|\sigma_u\|^2 = (R + r \cos v)^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = \|\sigma_v\|^2 = r^2$ , donc  $\sqrt{EG - F^2} = r(R + r \cos v)$  et

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos v) \, du \, dv = (2\pi) \cdot (2\pi r R) = 4\pi^2 Rr.$$

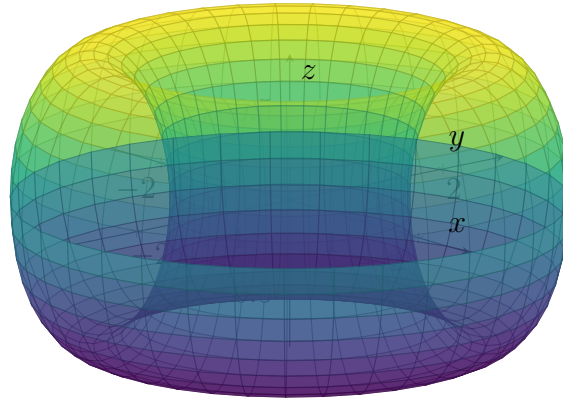


FIGURE 4.3 – Tore ( $R = 2$ ,  $r = 0,8$ ) :  $\sigma(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$ .

**3) Paraboloides  $z = x^2 + y^2$  restreint au disque  $x^2 + y^2 \leq \rho^2$**

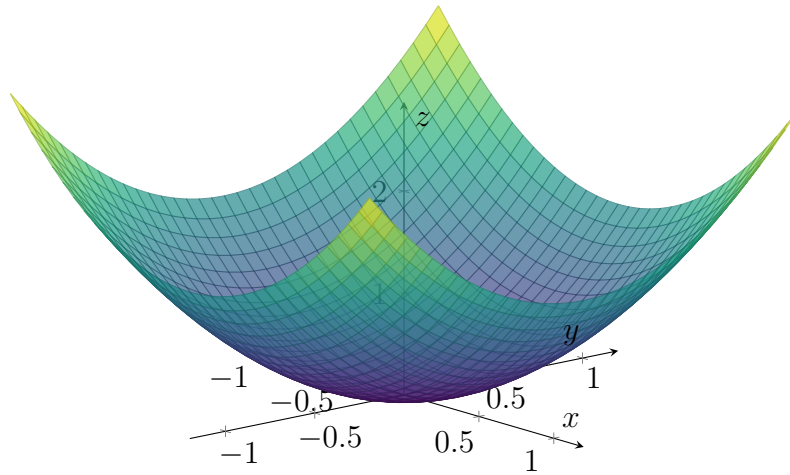


FIGURE 4.4 – Paraboloides elliptiques : graphe  $z = x^2 + y^2$  (aire sur un disque montrée dans le chapitre).

Paramétrisation polaire :  $\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$ ,  $0 \leq r \leq \rho$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .  $\sigma_r = (\cos \theta, \sin \theta, 2r)$ ,  $\sigma_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$ ,

$$\|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| = \sqrt{(1 + 4r^2)r^2} = r\sqrt{1 + 4r^2}, \quad \text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r\sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta.$$

Posons  $t = 1 + 4r^2$ ,  $dt = 8r dr$  :

$$\text{Aire} = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_1^{1+4\rho^2} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{12} \left[ (1 + 4\rho^2)^{3/2} - 1 \right].$$

**4) Cône  $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $r \in [0, \rho]$**

Paramétrisation  $\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, ar) \Rightarrow dS = \sqrt{a^2 + 1} r dr d\theta$ , donc

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \sqrt{a^2 + 1} r dr d\theta = \pi\rho^2 \sqrt{a^2 + 1}.$$

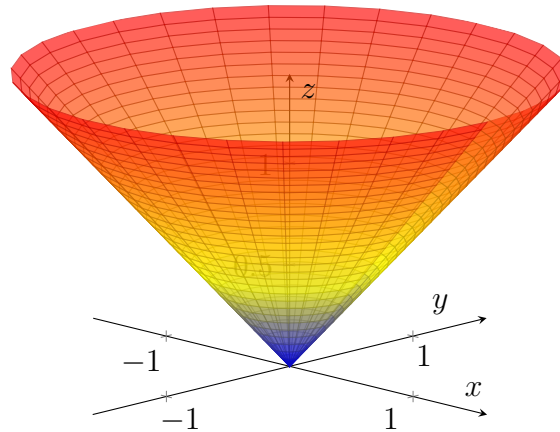


FIGURE 4.5 – Cône circulaire  $\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, ar)$  (ici  $a = 0,9$ ).

## 4.5 Changements de paramètres

**Proposition 4.3.** Si  $\phi : V \rightarrow U$  est un difféomorphisme ( $\mathcal{C}^1$  bijectif, jacobien non nul) et  $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \phi$ , alors

$$\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} ds dt = \sqrt{EG - F^2} |\det D\phi(s, t)| ds dt.$$

Les intégrales de surface ne dépendent pas du paramétrage (formule de changement de variables).

**Remark 4.3.** On choisit souvent des paramètres adaptés à la symétrie : sphériques pour une sphère, polaires pour surfaces radiales,  $(u, \theta)$  pour révolutions, etc.

## 4.6 Intégrales de surface et champs

Pour un champ scalaire  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_U f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv.$$

Pour un champ vectoriel  $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , le flux (avec normale orientée  $n$ ) s'écrit

$$\iint_{\Sigma} F \cdot n dS = \iint_U F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \wedge \sigma_v) du dv.$$

**Exemple 4.10** (Moment d'inertie en  $z$  d'une calotte sphérique  $z \geq h$ ). Sur la sphère  $R$ , avec densité uniforme  $\rho_s$ , le moment  $I_z = \iint_{\Sigma} \rho_s(x^2 + y^2) dS$ . En sphériques,  $x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \varphi$ ,  $dS = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ , et la calotte correspond à  $\varphi \in [0, \arccos(h/R)]$ . Ainsi

$$I_z = \rho_s \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(h/R)} R^2 \sin^2 \varphi \cdot R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi \rho_s R^4 \int_0^{\arccos(h/R)} \sin^3 \varphi d\varphi.$$

## Figures supplémentaires

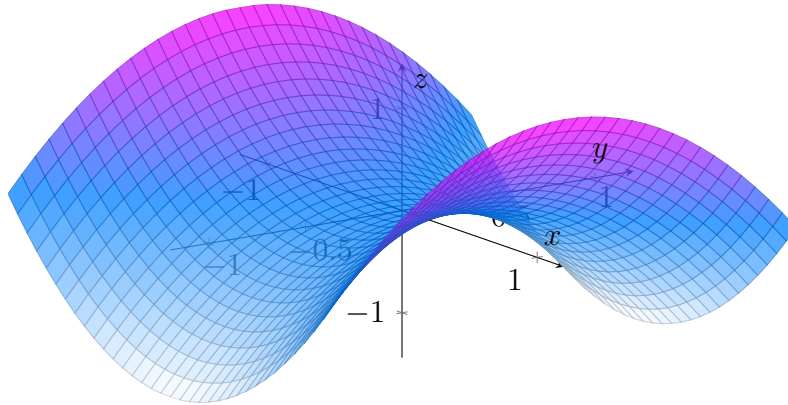


FIGURE 4.6 – Paraboloïde hyperbolique (surface à selle  $z$ ) :  $z = x^2 - y^2$ .

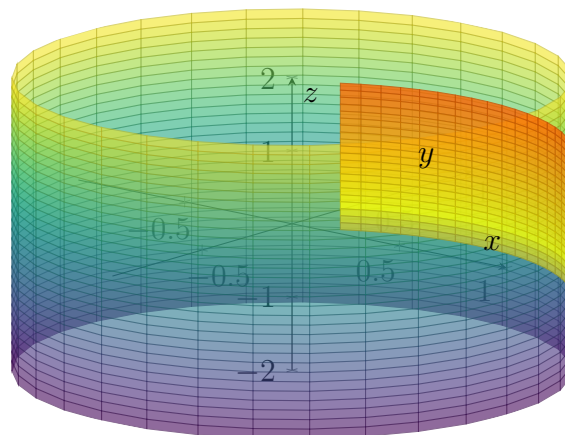


FIGURE 4.7 – Cylindre unité ; en surimpression, une bande  $\theta \in [\alpha, \beta]$ ,  $z \in [z_1, z_2]$ .

# Annexe A

## TD Géométrie affine

**Donnée** : un espace affine  $(\mathcal{A}, E)$ .

- 1) **Sous-espace affine** :  $F = A + F_0$ , direction vectorielle  $F_0$ ,  $\dim F = \dim F_0$ .
- 2) **Intersection** : si  $F = A + F_0$ ,  $G = B + G_0$  et  $F \cap G \neq \emptyset$ , alors  $F \cap G = M + (F_0 \cap G_0)$ .
- 3) **Repère affine** :  $M = O + \sum x_i \overrightarrow{OA_i}$ . Changement de repère :  $x' = Ax + b$ .
- 4) **Barycentre** :  $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum \lambda_i}$ .
- 5) **Application affine** :  $f(x) = Ax + b$ . Invariants : alignement, parallélisme, barycentres.
- 6) **Orientation** : directe si  $\det A > 0$ , indirecte si  $\det A < 0$ .
- 7) **Convexité** : intersection de demi-espaces affines  $\Rightarrow$  convexe.

Conique définie par  $Q(x, y) + L(x, y) + c = 0$ , avec  $Q$  quadratique et  $L$  linéaire.

- a) Étudier la matrice quadratique associée : rang et signature.
- b) Par translation, éliminer les termes linéaires.
- c) Par combinaison linéaire (changement affine), réduire à une forme canonique (ellipse, parabole, hyperbole).

## A.1 Exercices

### Exercice 1

Montrer que l'action  $(P, \vec{v}) \mapsto P + \vec{v}$  est simplement transitive. En déduire la relation de Chasles.

### Exercice 2

Montrer que  $F = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 3\}$  est un plan affine.

Déterminer un point  $A$ , la direction et la dimension.

### Exercice 3

Soient deux plans affines  $F$  et  $G$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Étudier les cas possibles : (a) intersection vide, (b) un point, (c) une droite, (d) un plan. Exemple :

$$F = (0, 1, 1) + \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \quad G = (1, 0, 0) + \text{Vect}\{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}.$$

### Exercice 4

Soit  $R = (O; A_1, A_2)$  avec  $\overrightarrow{OA_1} = (2, 0)$ ,  $\overrightarrow{OA_2} = (0, 1.5)$ .

Donner les coordonnées de  $M = (3, 1.5)$ .

Même question dans le repère  $R' = (O'; A'_1, A'_2)$  avec  $O' = (1, 0)$ ,  $\overrightarrow{O'A'_1} = (1, 1)$ ,  $\overrightarrow{O'A'_2} = (1, -1)$ .

### Exercice 5

Montrer que le barycentre  $\text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$  d'un triangle  $ABC$  est le centre de gravité. Calculer pour  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(2, 3)$ .

### Exercice 6

Soit  $f(x) = Ax + b$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Trouver l'image de la droite  $y = 2x + 1$  et les points fixes.

### Exercice 7

Soit  $h(O, k) : M \mapsto O + k\overrightarrow{OM}$ . Montrer que les droites restent parallèles et retrouver le théorème de Thalès.

### Exercice 8

Dans un triangle  $ABC$ , montrer que  $AD, BE, CF$  concourantes  $\iff \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ .  
 Puis démontrer Menelaüs : si une droite coupe  $[BC], [CA], [AB]$  alors  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$ .

## A.1 Exercices

---

### Exercice 9

Énoncer et démontrer les théorèmes de Desargues et Pappus dans un cadre affine, en donnant une illustration graphique.

### Exercice 10

Montrer que l'ensemble  $C = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  est convexe.

Soit  $S = \{(0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ . Déterminer l'enveloppe convexe de  $S$ .

### Exercice 11

Étudier la conique

$$C : x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 2y - 3 = 0.$$

La mettre sous forme canonique et la classer.

### Exercice 12

Déterminer toutes les applications affines envoyant le carré unité  $[0, 1]^2$  sur un parallélogramme donné  $ABCD$ .

## A.2 Corrigés

### Solution 1 :

a) *Vérification qu'il s'agit d'une action :*

- Identité : pour tout point  $P$ ,  $P + \vec{0} = P$ . Donc l'élément neutre est le vecteur nul.
- Compatibilité : pour  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ ,

$$(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}),$$

ce qui satisfait la condition d'action à gauche.

b) *Simplement transitive :*

- Transitive : soit  $P, Q \in \mathcal{A}$ . Posons  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ . Alors  $P + \vec{u} = Q$ . Donc on peut atteindre tout point  $Q$  à partir de  $P$ .
- Simple : si  $P + \vec{u} = Q = P + \vec{v}$ , alors  $\vec{u} = \vec{v}$ . L'élément qui envoie  $P$  sur  $Q$  est unique.

Ainsi l'action est bien **simplement transitive**.

**Relation de Chasles :** Soient  $P, Q, R \in \mathcal{A}$ . On veut relier  $\overrightarrow{PR}$  à  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{QR}$ . On a :

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P, \quad \overrightarrow{QR} = R - Q, \quad \overrightarrow{PR} = R - P.$$

En sommant :  $(Q - P) + (R - Q) = R - P = \overrightarrow{PR}$ . Donc

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$

### Solution 2 :

1. *Reconnaissance :* L'équation est linéaire en  $x, y, z$  avec constante 3. On reconnaît donc l'équation d'un **plan affine** de  $\mathbb{R}^3$ .

2. *Trouver un point particulier  $A$  :* On choisit  $y = 0, z = 0$ . Alors  $x = 3$ . Donc  $A = (3, 0, 0) \in F$ .

3. *Déterminer la direction  $F_0$  :* On prend la partie homogène de l'équation :  $x + 2y - z = 0$ . C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2. Pour trouver une base, on résout :

$$x = -2y + z.$$

On choisit : - si  $y = 1, z = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (-2, 1, 0)$ . - si  $y = 0, z = 1 \Rightarrow (1, 0, 1)$ .

Donc

$$F_0 = \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

4. *Conclusion :* On a

$$F = A + F_0 = (3, 0, 0) + \text{Vect}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

C'est un plan affine de dimension 2.

### Solution 3 :

1. *Paramétrisation de F* :

$$M = (x, y, z) = A + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1).$$

Donc

$$(x, y, z) = (\alpha, 1 + \beta, 1 + \alpha + \beta).$$

2. *Paramétrisation de G* :

$$M' = (x', y', z') = B + \gamma(1, 0, 1) + \delta(1, -1, 0).$$

Donc

$$(x', y', z') = (1 + \gamma + \delta, -\delta, \gamma).$$

3. *Cherchons l'intersection* : On égalise :

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \gamma + \delta, \\ 1 + \beta = -\delta, \\ 1 + \alpha + \beta = \gamma. \end{cases}$$

De la 2 :  $\delta = -1 - \beta$ . De la 3 :  $\gamma = 1 + \alpha + \beta$ . On remplace dans la 1 :  $\alpha = 1 + (1 + \alpha + \beta) + (-1 - \beta)$ . Simplifions :  $\alpha = 1 + 1 + \alpha + \beta - 1 - \beta = \alpha + 1$ . Donc égalité vraie. Pas de contradiction.

4. *Forme de l'intersection* : On obtient une famille de solutions : le système est compatible avec un paramètre libre. Par ex. prenons  $\alpha = 1, \beta = 0$ . Alors  $\gamma = 2, \delta = -1$ . Point commun :  $M = (1, 1, 2)$ .

De plus, les deux plans contiennent le vecteur  $(1, 0, 1)$ . Donc l'intersection est la droite

$$F \cap G = (1, 1, 2) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1).$$

### Solution 4 :

1. *Dans R* : On cherche  $(x_1, x_2)$  tel que :

$$(3, 1.5) = x_1(2, 0) + x_2(0, 1.5).$$

Équations :  $3 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = 1.5$ . Et  $1.5 = 1.5x_2 \Rightarrow x_2 = 1$ . Donc coordonnées dans  $R$  :  $(1.5, 1)$ .

2. *Dans R'* : On cherche  $(u, v)$  tel que :

$$(3, 1.5) = (1, 0) + u(1, 1) + v(1, -1).$$

$$\text{Équations : } \begin{cases} 3 = 1 + u + v \\ 1.5 = 0 + u - v \end{cases}.$$

Donc :  $u + v = 2, u - v = 1.5$ . En sommant :  $2u = 3.5 \Rightarrow u = 1.75$ . Puis  $v = 0.25$ .

Coordonnées dans  $R'$  :  $(1.75, 0.25)$ .

**Exercice 5 Barycentres et centre de gravité.**

1) **Interprétation comme centre de gravité.** On pose  $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ . Par définition,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{1+1+1}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

(Choix de  $O$  quelconque, le résultat est indépendant de  $O$ .) Alors

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{3}.$$

De même,  $\overrightarrow{BG} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{3}$ ,  $\overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{3}$ . La médiane issue de  $A$  est la droite reliant  $A$  au milieu  $M$  de  $[BC]$ , où  $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ . Alors  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}}{2}$ . On vérifie

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM},$$

donc  $G$  est sur la médiane ( $AM$ ) et la partage selon  $AG : GM = 2 : 1$ . Par cyclicité,  $G$  est l'intersection des trois médianes : c'est le **centre de gravité**.

2) **Coordonnées explicites.** Pour  $A(0, 0), B(4, 0), C(2, 3)$ ,

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \left( \frac{0+4+2}{3}, \frac{0+0+3}{3} \right) = (2, 1).$$

3) **Rapport 2 : 1 sur chaque médiane.** On a vu  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$ , donc  $AG : GM = 2 : 1$ . Idem depuis  $B$  et  $C$ .

**Exercice 6 Application affine  $f(x) = Ax + b$ .**

Donnée :  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (rotation  $+90^\circ$ ),  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1) **Image de la droite  $D : y = 2x + 1$ .** Paramétrer  $D$  par  $X(t) = (t, 2t + 1)$ . Alors

$$f(X(t)) = AX(t) + b = \begin{pmatrix} -2t - 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t + 1 \end{pmatrix}.$$

Éliminer  $t$  :  $x = -2t \Rightarrow t = -\frac{x}{2}$ , puis  $y = t + 1 = 1 - \frac{x}{2}$ . Donc  $f(D)$  est la droite  $\boxed{y = 1 - \frac{x}{2}}$ .

2) **Points fixes.** Résoudre  $x = Ax + b \Leftrightarrow (I - A)x = b$ , avec  $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$\det(I - A) = 2 \neq 0$ . Donc  $x = (I - A)^{-1}b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Unique point fixe :

$\boxed{(0, 1)}$ .

**Exercice 7 Homothéties et Thalès généralisé.**

1) **Définition et propriétés.**  $h(O, k) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $h(M) = O + k \overrightarrow{OM}$ . Pour  $M, N$ ,

$$\overrightarrow{h(M)h(N)} = k \overrightarrow{MN}.$$

Ainsi une droite est envoyée sur une droite parallèle si  $k \neq 0$  (vecteurs directeurs multipliés par  $k$ ).

2) **Rapport des longueurs orientées sur une même droite.** Si  $M, N$  sont alignés avec  $O$  (ou même si  $O \notin (MN)$ ), on a  $\frac{h(M)h(N)}{MN} = k$  (en longueurs orientées). Les rapports sur une même droite sont donc *préservés*.

3) **Thalès (cadre affine).** Dans un triangle  $ABC$ , soit une droite  $d$  coupant  $[AB]$  en  $M$  et  $[AC]$  en  $N$  et parallèle à  $BC$ . Considérons l'homothétie  $h(A, k)$  qui envoie  $B$  sur  $M$  :  $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ . Alors  $h$  envoie la droite  $(AC)$  sur une droite  $(AN)$  parallèle à  $(AC)$  et  $\overrightarrow{AN} = k \overrightarrow{AC}$ ; de plus, comme  $(BC) \parallel d$ , l'image de  $C$  est précisément  $N$ . D'où  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  et  $\frac{MN}{BC} = k$ . C'est la forme affine du théorème de Thalès.

**Exercice 8 Ceva et Menelaüs (preuves détaillées).**

**Ceva.** Dans le triangle  $ABC$ , soient

$$D \in [BC], \quad \frac{BD}{DC} = \lambda, \quad E \in [CA], \quad \frac{CE}{EA} = \mu, \quad F \in [AB], \quad \frac{AF}{FB} = \nu,$$

les rapports étant orientés. Écrivons  $D, E, F$  comme **barycentres** :

$$D = \frac{C + \lambda B}{1 + \lambda}, \quad E = \frac{A + \mu C}{1 + \mu}, \quad F = \frac{B + \nu A}{1 + \nu}.$$

La concourance de  $AD, BE, CF$  au point  $P$  est équivalente à l'existence de  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$  tels que

$$\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0},$$

avec  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  (normalisation affine). En imposant que  $P$  appartienne aux trois cevianes via les écritures ci-dessus, on obtient (calcul standard en coordonnées barycentriques, ou par un repère affine  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (0, 1)$ ) la condition nécessaire et suffisante

$$\boxed{\lambda \mu \nu = 1}.$$

*Esquisse en coordonnées.* Dans le repère  $A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1)$ ,  $D = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\lambda}\right)$ ,  $E = \left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right) + \left(\frac{1}{1+\mu}, 0\right) = \left(\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$ , etc. En écrivant les équations des droites  $AD, BE, CF$  et en résolvant leur système 2 à 2, la concourance force  $\lambda \mu \nu = 1$ .

**Menelaüs.** Une droite  $\Delta$  coupe (ou prolonge)  $[BC], [CA], [AB]$  en  $D, E, F$ . Alors (rapports orientés)

$$\boxed{\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1}.$$

*Preuve affine.* Placer un repère affine pour rendre  $\Delta$  horizontale,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (1, 0)$ , et  $A$  hors de  $\Delta$ . Paramétrer les intersections  $D = (t, 0)$ ,  $E = (u, 0) + (1 - u)A$ ,  $F$  de même. Le calcul des rapports dirigés sur chaque côté en fonction des paramètres conduit à l'égalité ci-dessus (ou utiliser une projection affine qui envoie le triangle sur un triangle rectangle où la relation se lit immédiatement, les rapports étant invariants par affinité).

### Exercice 9 Desargues et Pappus (cadre affine).

**Desargues (forme affine).** Deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont en *perspective* depuis un point  $S$  (les droites  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sont concourantes en  $S$ ). Supposons  $(AB) \parallel (A'B')$  et  $(AC) \parallel (A'C')$ . Montrer  $(BC) \parallel (B'C')$ .

*Preuve (affine).* Considérer l'affinité  $\Phi$  de direction  $\vec{d}$  (celle des droites issues de  $S$ ) qui envoie  $A \mapsto A'$  et  $B \mapsto B'$ . Comme  $\Phi$  préserve le parallélisme, on a  $\Phi((AC)) = (A'C')$  et  $\Phi((BC))$  est une droite parallèle à  $(B'C')$ . Or  $\Phi$  envoie la droite  $(C)$  (déterminée par les faisceaux depuis  $S$ ) sur  $(C')$ . Donc  $\Phi((BC)) = (B'C')$ , ce qui impose  $(BC) \parallel (B'C')$ .

**Pappus.** Deux droites distinctes portent  $A, B, C$  et  $A', B', C'$ . Définir  $X = AB' \cap A'B$ ,  $Y = AC' \cap A'C$ ,  $Z = BC' \cap B'C$ . Alors  $X, Y, Z$  sont alignés.

*Preuve par coordonnées affines.* Placer les deux droites en  $y = 0$  et  $y = 1$ . Écrire  $A = (a, 0)$ ,  $B = (b, 0)$ ,  $C = (c, 0)$ ,  $A' = (a', 1)$ ,  $B' = (b', 1)$ ,  $C' = (c', 1)$ . Calculer les équations des droites  $(AB')$ ,  $(A'B)$ , etc. et leurs intersections  $X, Y, Z$ . Un calcul direct (déterminants  $2 \times 2$ ) montre que les coordonnées de  $X, Y, Z$  satisfont une *même* équation linéaire en  $x, y$ , d'où l'alignement.

### Exercice 10 Convexité et enveloppe convexe.

**(a) Convexité de**  $C = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ . C'est une intersection de *trois demi-plans affines* (chacun convexe) :  $\{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\} \cap \{x + y \leq 1\}$ . L'intersection d'ensembles convexes est convexe, donc  $C$  est convexe. Géométriquement,  $C$  est le triangle (fermé) de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

**(b) Enveloppe convexe de**  $S = \{(0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ . Notons  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 0)$ ,  $P_3 = (1, 1)$ ,  $P_4 = (0, 2)$ . On observe que

$$P_3 = (1, 1) = \frac{1}{2}(2, 0) + \frac{1}{2}(0, 2) = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_4,$$

donc  $P_3$  est *déjà* dans le segment  $[P_2P_4]$ . Par ailleurs, le triangle  $\text{conv}\{P_1, P_2, P_4\}$  contient  $P_3$ . Donc l'enveloppe convexe est  $\boxed{\text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (0, 2)\}}$ , un triangle rectangle.

### Exercice 11 Conique : réduction affine complète. Conique

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 2y - 3 = 0.$$

**1) Matrice quadratique.** La partie quadratique est  $Q(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$ , associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  (de déterminant 0, rang 1).

**2) Changement linéaire adapté.** Posons

$$u = x + 2y, \quad v = y \quad (\text{indépendant de } u).$$

Alors  $x = u - 2v$ ,  $y = v$ . L'équation devient

$$u^2 - 6(u - 2v) + 2v - 3 = 0 \iff u^2 - 6u + 14v - 3 = 0.$$

**3) Traduction pour compléter le carré.** Complétons le carré en  $u$  :

$$u^2 - 6u = (u - 3)^2 - 9 \implies (u - 3)^2 + 14v - 12 = 0.$$

Isoler  $v$  :

$$14v = 12 - (u - 3)^2 \implies \boxed{v = \frac{6}{7} - \frac{1}{14}(u - 3)^2}.$$

C'est la forme canonique d'une **parabole** (rang 1), de sommet  $(u_0, v_0) = (3, \frac{6}{7})$ , *axe parallèle à l'axe des  $v$ .*

**4) Lecture en variables d'origine.** Rappel  $u = x + 2y$ ,  $v = y$ . Le sommet en  $(u, v) = (3, \frac{6}{7})$  correspond à

$$\begin{cases} y = v = \frac{6}{7}, \\ x = u - 2v = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}. \end{cases}$$

Donc le sommet en coordonnées initiales est  $(\frac{9}{7}, \frac{6}{7})$ . La *directrice* et le *foyer* se déterminent si besoin en comparant à la forme standard  $v = v_0 - \frac{1}{4p}(u - u_0)^2$  : ici  $\frac{1}{4p} = \frac{1}{14} \implies p = \frac{7}{2}$ . L'axe est la droite  $u = 3$  (soit  $x + 2y = 3$ ).

### Exercice 12 Affinités envoyant le carré unité sur un parallélogramme.

**But.** Déterminer toutes les applications affines  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  envoyant le carré  $[0, 1]^2$  sur un parallélogramme  $ABCD$  (dans l'ordre).

**1) Construction explicite.** On veut

$$f(0, 0) = A, \quad f(1, 0) = B, \quad f(0, 1) = D, \quad f(1, 1) = C.$$

Écrivons  $f(x, y) = Ax + b$  avec  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ , et  $x = (x, y)^\top$ . Des conditions  $f(0, 0) = A \cdot 0 + b = A$  (point) donnent directement  $b = A$  (ici surcharge de lettre : pour éviter l'ambiguïté, écrivons  $b = P$  comme point). Plus simple et standard en affine :

$$\boxed{f(x, y) = A + x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AD}}.$$

Alors

$$f(0, 0) = A, \quad f(1, 0) = A + \overrightarrow{AB} = B, \quad f(0, 1) = A + \overrightarrow{AD} = D,$$

et

$$f(1, 1) = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =: C,$$

qui définit précisément le quatrième sommet du parallélogramme  $(ABCD)$ .

**2) Unicité.** Si  $\tilde{f}$  est affine et coïncide avec  $f$  sur les trois points affinement indépendants  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ , alors  $\tilde{f} = f$  partout (déterminée par l'image d'un repère affine). Donc l'expression ci-dessus décrit *toutes* les affinités recherchées.

**3) Condition de non-dégénérescence.** Le parallélogramme est non dégénéré  $\iff$  les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont linéairement indépendants  $\iff \det[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AD}] \neq 0$ . Dans ce cas, la partie linéaire de  $f$  est inversible (affinité bijective de  $\mathbb{R}^2$  sur le plan).

**4) Matrice augmentée (lecture pratique).** En coordonnées canoniques,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} | & | \\ AB & AD \\ | & | \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A, \quad \text{avec } AB = B - A, \ AD = D - A.$$

Cette écriture est utile pour composer des affinités ou pour retrouver rapidement  $f^{-1}$  si besoin (quand  $\det[AB \ AD] \neq 0$ ).

# Annexe B

## TD Espaces affines euclidiens

**Cadre** : espace vectoriel euclidien  $(E, (\cdot|\cdot))$  ou espace *affine euclidien*  $(\mathcal{A}, E, (\cdot|\cdot))$ .

- 1) **Produit scalaire** : bilinéaire, symétrique, définie positive. Norme  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ , distance  $d(x, y) = \|x - y\|$ .
- 2) **Inégalités** : CauchySchwarz, triangulaire, identité du parallélogramme, polarisations.
- 3) **Bases ON** : GramSchmidt. Projections :  $\text{proj}_F(x) = \sum (x|e_i)e_i$  si  $(e_i)$  est ON de  $F$ .
- 4) **Orthogonal** :  $F^\perp = \{x \mid (x|y) = 0, \forall y \in F\}$ ,  $\dim F + \dim F^\perp = n$ ,  $E = F \oplus F^\perp$ .
- 5) **Affine euclidien** :  $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ . Distance pointsous-espace  $F = A + F_0$  :  $d(M, F) = \|\overrightarrow{AM} - \pi_{F_0}(\overrightarrow{AM})\|$ .
- 6) **Isométrie affine**  $f(M) = B_0 + L(\overrightarrow{AM})$  avec  $L \in O(E)$  (orthogonale) : conserve distances & angles.
- 7) **Similitude** :  $L$  tel que  $(Lu|Lv) = \lambda^2(u|v)$ ;  $d$  multipliées par  $\lambda$ ; aires/volumes par  $\lambda^n$ .
- 8) **Formules usuelles** :

$$- d(M, ax + by + c = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$- d(M, ax + by + cz + d = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Orthogonalisation** d'une famille libre  $(u_1, \dots, u_k)$  :

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad w_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} (u_j|v_i) v_i, \quad v_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}.$$

**Projection** sur  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$  *orthonormés* :

$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|v_i) v_i, \quad x = x_F + x^\perp, \quad x^\perp \in F^\perp.$$

**Isométrie affine** :  $f(M) = B_0 + L(\overrightarrow{AM})$ ,  $L \in O(E)$ , conserve  $d$ ,  $\angle$ , perpendicularité.  
**Similitude** :  $f(M) = B_0 + L(\overrightarrow{AM})$ ,  $(Lu|Lv) = \lambda^2(u|v)$ , conserve angles & rapports, multiplie longueurs par  $\lambda$ .

## B.1 Exercices

### Exercice 1

Dans un espace euclidien  $(E, (\cdot|\cdot))$ , démontrer :

- a) l'inégalité de CauchySchwarz;
- b) l'inégalité triangulaire;
- c) l'identité du parallélogramme;
- d) la *polarisation* :  $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .

### Exercice 2

Dans  $\mathbb{R}^3$  (scalaire canonique), soient  $x = (1, 2, 2)$  et  $y = (2, 1, 2)$ .

- a) Calculer  $\|x\|$ ,  $\|y\|$ , puis  $\cos \theta$  et l'angle  $\theta$  entre  $x$  et  $y$ .
- b) Projeter  $y$  sur la droite  $D = \mathbb{R}x$  puis décomposer  $y = y_D + y^\perp$ .

### Exercice 3

Dans  $\mathbb{R}^3$ , appliquer GramSchmidt à  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (0, 1, 1)$ . Donner une base orthonormée  $(v_1, v_2, v_3)$  et la matrice  $Q = [v_1 \ v_2 \ v_3]$  orthogonale.

### Exercice 4

- a) Dans  $\mathbb{R}^4$ , soit  $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ . Calculer  $F^\perp$  et ses dimensions.
- b) Vérifier  $E = F \oplus F^\perp$  en donnant la projection orthogonale de  $x = (1, 2, 3, 4)$  sur  $F$ .

### Exercice 5

Dans  $\mathbb{R}^n$ , si  $V = [v_1 \ \dots \ v_r]$  (colonnes) avec  $(v_i)$  ON, montrer que

$$P = \pi_F = VV^T$$

est la matrice de la projection sur  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ . Vérifier  $P^2 = P$ ,  $P^T = P$ .

*Application* : pour  $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , calculer  $P$ .

### Exercice 6

- a) Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $D : 3x - 4y + 5 = 0$ ,  $M(2, -1)$ . Calculer  $d(M, D)$  et le pied  $H$ .
- b) Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $P : 2x + y - 2z + 1 = 0$ ,  $M(1, 2, 0)$ . Calculer  $d(M, P)$  et le pied  $H$  sur  $P$ .

### Exercice 7

On veut approximer  $(b_1, b_2, b_3) = (1, 0, 1)$  par une combinaison  $\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1)$  au sens des moindres carrés (scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$ ). Écrire et résoudre les équations normales. Donner la meilleure approximation et l'erreur minimale.

### Exercice 8

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $F = A + F_0$  avec  $A = (1, 0, 1)$  et  $F_0 = \text{Vect}\{u = (1, 1, 0), v = (0, 1, 1)\}$ . Pour  $M = (2, 2, 0)$  :

- a) exprimer  $\overrightarrow{AM}$  dans la base ON de  $F_0$  obtenue par GramSchmidt ;
- b) calculer  $\pi_F(M)$  et  $d(M, F)$ .

### Exercice 9

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = Ax + b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que  $f$  est une isométrie affine et préciser sa nature (directe/indirecte).
- b) S'il existe, trouver le *centre*  $C$  tel que  $f(X) = C + R_\phi(X - C)$ .

### Exercice 10

Soit  $g(x) = \lambda R_\theta x + b$  avec  $\lambda > 0$ ,  $R_\theta$  rotation d'angle  $\theta \neq 0 [2\pi]$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ .

- a) Montrer que  $g$  est une similitude et déterminer (quand il existe) son centre  $S$ .
- b) Exemple numérique :  $\lambda = 2$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $b = (1, 0)^T$ . Calculer  $S$ .

### Exercice 11

Dans le plan, toute isométrie directe s'écrit  $f(x) = R_\phi x + t$ .

- a) Si  $\phi \neq 0$ , montrer l'existence et l'unicité de  $C$  tel que  $f(x) = C + R_\phi(x - C)$ . Donner  $C$  en fonction de  $R_\phi$  et  $t$ .
- b) Exemple :  $R_{\pi/2}$  et  $t = (1, 1)$ . Calculer  $C$ , puis  $f$  sous forme d'une rotation de centre  $C$ .

### Exercice 12

Dans  $\mathbb{R}^2$ , pour  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(1, 3)$  :

- a) déterminer le centre  $O$  du cercle circonscrit par intersection des médiatrices (argument affine euclidien) ;
- b) calculer  $R = d(O, A)$  ; vérifier  $d(O, B) = d(O, C) = R$ .

## B.2 Corrigés

### Exercice 1. Identités fondamentales.

a) **CauchySchwarz.** Pour  $x, y \in E$ , considérer  $p(t) = \|x - ty\|^2 = (x - ty|x - ty) = \|x\|^2 - 2t(x|y) + t^2\|y\|^2 \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Le discriminant  $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$  donne  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ , avec égalité ssi  $p$  a une racine double, i.e.  $x$  colinéaire à  $y$ .

b) **Inégalité triangulaire.**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Prendre la racine (quantités  $\geq 0$ ).

c) **Parallélogramme.** Développer :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)) + (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

d) **Polarisation.**

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x|y) \quad \Rightarrow \quad (x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

### Exercice 2. Angles et projections.

a)  $\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ ;  $\|y\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ .  $(x|y) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 4 = 8$ .  $\cos \theta = \frac{8}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$ , donc  $\theta = \arccos(8/9)$ .

b) Projection de  $y$  sur  $D = \mathbb{R}x$  :

$$y_D = \frac{(y|x)}{\|x\|^2}x = \frac{8}{9}x = \frac{8}{9}(1, 2, 2) = \left(\frac{8}{9}, \frac{16}{9}, \frac{16}{9}\right).$$

Composante orthogonale  $y^\perp = y - y_D = \left(2 - \frac{8}{9}, 1 - \frac{16}{9}, 2 - \frac{16}{9}\right) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right)$ . Vérification :  $(y^\perp|x) = 0$  (calcul direct).

### Exercice 3. GramSchmidt.

$u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (0, 1, 1)$ .

Étape 1.  $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ ;  $\|u_1\| = \sqrt{2}$ , donc  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ .

Étape 2.  $w_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1$ .  $(u_2|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Donc  $w_2 = (1, 0, 1) -$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ .  $\|w_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .

*Étape 3.*  $w_3 = u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2$ .  $(u_3|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  $(u_3|v_2) = (0, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{-1+2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . Donc

$$w_3 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}}v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Or  $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ . Donc  $w_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(-1, 1, 1)$ .  $\|w_3\| = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  $v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\frac{2}{3}(-1, 1, 1)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$ .

Conclusion : base ON

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),$$

et  $Q = [v_1 \ v_2 \ v_3]$  est orthogonale ( $Q^T Q = I$ ).

#### Exercice 4. Orthogonaux et projections.

**a)**  $F = \text{Vect}\{a, b\}$  avec  $a = (1, 1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 1, 0)$ . Chercher  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^\perp$  ssi  $(x|a) = 0$  et  $(x|b) = 0$  :

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0.$$

Paramétrage :  $x_2 = -x_1$ ,  $x_3 = -x_2 = x_1$ ,  $x_4$  libre. Donc  $F^\perp = \text{Vect}\{(1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ , de dimension 2. Ici  $\dim F = 2$ ,  $\dim F^\perp = 2$ ,  $\dim E = 4$ , OK.

**b)** Projection de  $x = (1, 2, 3, 4)$  sur  $F$ . On peut résoudre  $x_F = \alpha a + \beta b$  par orthogonalité de l'erreur à  $F$  :

$$(x - \alpha a - \beta b|a) = 0, \quad (x - \alpha a - \beta b|b) = 0.$$

Système :

$$(x|a) - \alpha(a|a) - \beta(b|a) = 0, \quad (x|b) - \alpha(a|b) - \beta(b|b) = 0.$$

Calculs :  $(x|a) = 1 + 2 = 3$ ,  $(x|b) = 2 + 3 = 5$ ,  $(a|a) = 2$ ,  $(b|b) = 2$ ,  $(a|b) = 1$ . Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Inverse :  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Donc  $x_F = \frac{1}{3}a + \frac{7}{3}b = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 0\right)$  et  $x^\perp = x - x_F = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 4\right) \in F^\perp$  (vérifier).

**Exercice 5. Matrice de projection.**

Si  $V = [v_1 \dots v_r]$  avec  $v_i$  ON, alors pour tout  $x$ ,  $V^T x = ((v_1|x), \dots, (v_r|x))^T$  et

$$Px = V(V^T x) = \sum_{i=1}^r (x|v_i) v_i = \pi_F(x).$$

Donc  $P = VV^T$ . Alors  $P^T = (VV^T)^T = VV^T = P$  et  $P^2 = V(V^T V)V^T = VI_r V^T = P$ .

*Application* :  $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Alors

$$P = VV^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ici  $V$  est orthogonale complète (base ON de  $\mathbb{R}^2$ ), la projection est l'identité.

**Exercice 6. Distances et pieds.**

a)  $D : 3x - 4y + 5 = 0$ ,  $M(2, -1)$ .

$$d(M, D) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 4 + 5|}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Vecteur normal  $n = (3, -4)$ . Le pied  $H$  sur  $D$  est  $M - \lambda n$  avec  $\lambda = \frac{3x_M - 4y_M + 5}{\|n\|^2} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ . Donc  $H = (2, -1) - \frac{3}{5}(3, -4) = (2 - \frac{9}{5}, -1 + \frac{12}{5}) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$  (vérifier dans  $D : 3 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{7}{5} + 5 = 0$ ).

b)  $P : 2x + y - 2z + 1 = 0$ ,  $M(1, 2, 0)$ . Normal  $n = (2, 1, -2)$ ,  $\|n\|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$ .  $\lambda = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 1}{9} = \frac{5}{9}$ .  $H = M - \lambda n = (1, 2, 0) - \frac{5}{9}(2, 1, -2) = (1 - \frac{10}{9}, 2 - \frac{5}{9}, 0 + \frac{10}{9}) = (-\frac{1}{9}, \frac{13}{9}, \frac{10}{9})$ . Distance  $d(M, P) = \|MH\| = \lambda \|n\| = \frac{5}{9} \cdot 3 = \frac{5}{3}$ .

**Exercice 7. Moindres carrés.**

On approxime  $b = (1, 0, 1)$  par  $A\alpha$  avec  $A = [u \ v]$ ,  $u = (1, 0, 1)$ ,  $v = (0, 1, 1)$ . Équations normales :  $A^T A x = A^T b$  avec  $x = (\alpha, \beta)^T$ .

$$A^T A = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} (u|b) \\ (v|b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , inverse  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Meilleure approximation  $Ax = \alpha u + \beta v = u = (1, 0, 1)$  (c'est exactement  $b$ ), erreur minimale  $\|b - Ax\| = 0$ .

**Exercice 8. Distance à un sous-espace affine.**

$A = (1, 0, 1)$ ,  $u = (1, 1, 0)$ ,  $v = (0, 1, 1)$ ,  $M = (2, 2, 0)$ . **GS sur  $F_0$ .**  $v_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ .  
 $w_2 = v - (v|v_1)v_1$ ,  $(v|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , donc  $w_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) =$   
 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ ,  $\|w_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .  $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .

**Décomposition de  $\overrightarrow{AM} = M - A = (1, 2, -1)$ .** Coefficients :  $(\overrightarrow{AM}|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ .  $(\overrightarrow{AM}|v_2) = (1, 2, -1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ .  
 Donc

$$\pi_{F_0}(\overrightarrow{AM}) = \frac{3}{\sqrt{2}}v_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}v_2 = \frac{3}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{6}(-1, 1, 2) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}, \frac{3}{2} - \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Alors  $\pi_F(M) = A + \pi_{F_0}(\overrightarrow{AM}) = (1, 0, 1) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , et

$$d(M, F) = \|\overrightarrow{AM} - \pi_{F_0}(\overrightarrow{AM})\| = \|(1, 2, -1) - \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)\| = \left\| \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\| = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Exercice 9. Isométrie affine et centre.**

**a)**  $A = R_\phi$  orthogonale, donc  $f$  est une isométrie affine directe ( $\det A = +1$ ).

**b)** S'il existe  $C$  tel que  $f(x) = C + R_\phi(x - C)$ , alors  $R_\phi C + b = C$ , i.e.  $(I - R_\phi)C = b$ .  
 Si  $\phi \neq 0$ ,  $I - R_\phi$  est inversible (dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\ker(I - R_\phi) = \{0\}$ ), d'où  $C = (I - R_\phi)^{-1}b$ .

Formule explicite :  $I - R_\phi = \begin{pmatrix} 1 - \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{pmatrix}$ ; son inverse existe pour  $\phi \neq 0$ . *Rem.*

Si  $\phi \equiv 0$ ,  $f$  est une translation de vecteur  $b$ , sans centre (ou tout point si  $b = 0$ ).

**Exercice 10. Similitude, centre et rapport.**

**a)**  $g(x) = \lambda R_\theta x + b$  est une similitude directe de rapport  $\lambda$  (angles conservés, longueurs  $\times \lambda$ ). Centre  $S$  (si  $\theta \neq 0$ ) tel que  $g(x) = S + \lambda R_\theta(x - S)$ . Condition  $S = \lambda R_\theta S + b \Rightarrow (I - \lambda R_\theta)S = b$ , donc  $S = (I - \lambda R_\theta)^{-1}b$  si  $I - \lambda R_\theta$  inversible (ici  $\lambda > 0$  et  $\theta \neq 0$  assurent l'inversibilité).

**b)**  $\lambda = 2$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $b = (1, 0)^T$ .  $R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , donc

$$I - 2R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 - 1 & +\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Inverse : } (I - 2R_{\pi/3})^{-1} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$S = (I - 2R_{\pi/3})^{-1}b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

**Exercice 11. Décomposition rotationtranslation.**

a)  $f(x) = R_\phi x + t$ ,  $\phi \neq 0$ . On cherche  $C$  tel que  $f(x) = C + R_\phi(x - C)$ . Condition  $R_\phi C + t = C \iff (I - R_\phi)C = t \iff C = (I - R_\phi)^{-1}t$  (unique).

b) Exemple :  $R_{\pi/2}$ ,  $t = (1, 1)$ .  $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I - R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , inverse  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Donc

$$C = (I - R_{\pi/2})^{-1}t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $f(x) = C + R_{\pi/2}(x - C)$  : rotation d'angle  $90^\circ$  de centre  $(0, 1)$ .

**Exercice 12. Cercle circonscrit.**

**Médiatrices.** Milieu  $M_{AB} = (2, 0)$ ; vecteur  $AB = (4, 0)$ , normal  $(0, 1)$ , médiatrice de  $[AB]$  :  $x = 2$ . Milieu  $M_{AC} = (0.5, 1.5)$ ; vecteur  $AC = (1, 3)$ , une normale est  $n_{AC} = (-3, 1)$ , donc équation  $(x - 0.5, y - 1.5) \cdot (-3, 1) = 0$ , i.e.  $-3(x - 0.5) + (y - 1.5) = 0$  :  $y = 3x$ .

Intersection :  $x = 2, y = 6$ . Donc  $O = (2, 6)$ . Rayon  $R = d(O, A) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$ . Vérif.  $d(O, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (6 - 0)^2} = 2\sqrt{10}$ ,  $d(O, C) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = 2\sqrt{10}$ .

□

# Annexe C

## TD Courbes paramétrées

**Donnée :**  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  sur  $I$ .

- 1) **Domaine** : interdits (zéros de dénominateurs, etc.).
- 2) **Symétries / périodicités** : parités de  $x, y, t \mapsto t + T$ .
- 3) **Vitesse**  $v = \|\gamma'\|$  et **tangente** :  $\gamma'(t_0) \neq 0 \Rightarrow$  tangente  $(X - x_0)y'(t_0) - (Y - y_0)x'(t_0) = 0$ .
- 4) **Singularités**  $\gamma'(t_0) = 0$  : développement vectoriel et **parité**  $(p, q)$ .
- 5) **Branches infinies & asymptotes** : limites de  $x(t), y(t), y(t)/x(t)$ .
- 6) **Longueur/aire** :  $L = \int \|\gamma'\| dt, \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt$ .
- 7) **Représentation** : points clés, tangentes remarquables, asymptotes, allure locale.

Si  $\gamma'(t_0) = 0$  et  $M(t) = M_0 + s^p \vec{v} + s^q \vec{w} + o(s^q)$ ,  $s = t - t_0$ ,  $p < q$ , alors :

$(p, q)$	Allure locale
impair, impair	traverse la tangente (inflexion stationnaire)
impair, pair	reste du même côté (rebroussement d'une espèce)
pair, impair	passé de part et d'autre (autre espèce)
pair, pair	rebrousse sur la tangente (cuspidé)

## C.1 Exercices

### Exercice 1

Pour chaque paramétrisation, déterminer la tangente en  $(0, 0)$  (si elle existe) et la nature du point via la parité  $(p, q)$ .

$$(a) (x, y) = (t^2, t^3), \quad (b) (t^2, t^4), \quad (c) (t^3, t^5), \quad (d) (t^4, t^7).$$

### Exercice 2

Étudier entièrement la courbe

$$x(t) = t + \frac{1}{t}, \quad y(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demandé : domaine, symétries, tangentes remarquables, points singuliers, asymptotes (horizontales/verticales/obliques), variations de  $x, y$ , et tracé soigné (avec les asymptotes).

### Exercice 3

On considère la cycloïde

$$\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0.$$

- Calculer  $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ .
- En déduire la longueur d'un *demi*-arche  $[0, \pi]$ , puis d'une arche complète  $[0, 2\pi]$ .

### Exercice 4

Pour la cardioïde

$$\gamma(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

calculer l'aire intérieure  $\mathcal{A}$  en utilisant la formule  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') dt$ .

### Exercice 5

- Pour la droite  $\gamma(t) = (at + b, ct + d)$  avec  $(a, c) \neq (0, 0)$ , construire une reparamétrisation  $\bar{\gamma}(s)$  telle que  $\|\bar{\gamma}'(s)\| = 1$ .
- Pour le cercle  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ , montrer que  $s = Rt$  est une abscisse curviligne et écrire  $\bar{\gamma}(s)$ .

### Exercice 6

Étudier les asymptotes de

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t}, \quad y(t) = \frac{2t^2 - 1}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Montrer qu'il existe une asymptote oblique et la déterminer (pente et ordonnée à l'origine). Donner un schéma de l'allure.

## C.2 Corrigés

### Exercice 1. Points singuliers et classification par parité.

**Méthode rappelée :** Si  $\gamma'(t_0) = 0$ , on cherche les plus petits ordres  $p < q$  tels que  $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$  et  $(x^{(q)}(t_0), y^{(q)}(t_0))$  non colinéaire. La tangente est portée par le terme d'ordre  $p$ . Parité de  $(p, q)$  : impair/impair  $\Rightarrow$  traverse ; pair/pair  $\Rightarrow$  cuspide ; pair/impair ou impair/pair  $\Rightarrow$  rebroussement (selon l'espèce).

- (a)  $(t^2, t^3)$  :  $p = 2, q = 3 \Rightarrow$  rebroussement (passe de part et d'autre) ; tangente horizontale.  
 (b)  $(t^2, t^4)$  :  $p = 2, q = 4 \Rightarrow$  cuspide sur la tangente horizontale.  
 (c)  $(t^3, t^5)$  :  $p = 3, q = 5 \Rightarrow$  traverse (inflexion stationnaire).  
 (d)  $(t^4, t^7)$  :  $p = 4, q = 7 \Rightarrow$  rebroussement (passe de part et d'autre).

### Exercice 2. Courbe rationnelle $x = t + \frac{1}{t}, y = \frac{t}{1+t^2}$ .

**Domaine :**  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . **Parités :**  $x(-t) = -x(t), y(-t) = -y(t) \Rightarrow$  symétrie centrale (origine).

**Dérivées :**

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}, \quad y'(t) = \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Les zéros communs  $t = \pm 1$  donnent des tangentes *obliques* (pente finie  $\frac{dy}{dx}$ ).

**Asymptotes :**  $\frac{y}{x} = \frac{(t/(1+t^2))}{(t+1/t)} = \frac{t^2}{(1+t^2)(t^2+1)} = \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \rightarrow 0$  quand  $|t| \rightarrow \infty \Rightarrow$  pas d'oblique à l'infini ; quand  $t \rightarrow 0^\pm, x \sim 1/t \rightarrow \pm\infty$  et  $y \sim t \rightarrow 0 \Rightarrow$  approche de l'axe  $y = 0$  sans être strictement une asymptote (on peut toutefois l'indiquer comme *direction*).

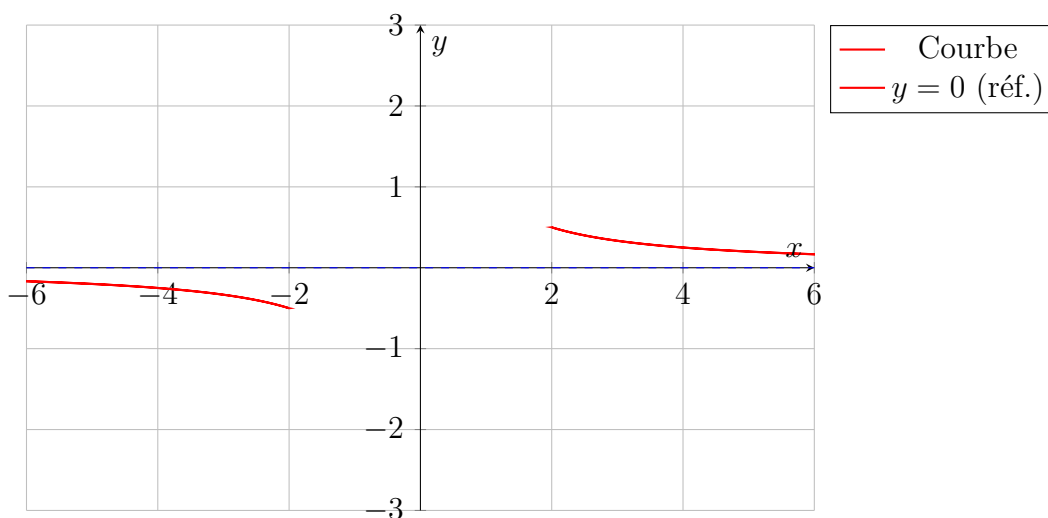


FIGURE C.1 – Ex. 2 Courbe  $x = t + \frac{1}{t}, y = \frac{t}{1+t^2}$ . Approche de  $y = 0$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Exercice 3. Longueur de la cycloïde.**

$$\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad \gamma'(t) = (R(1 - \cos t), R \sin t).$$

$$v(t) = \|\gamma'(t)\| = R\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2R \sin \frac{t}{2}.$$

$$[0, \pi] : L = 4R. \quad [0, 2\pi] : L = 8R.$$

**Exercice 4. Aire de la cardioïde.**

$$\gamma(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t).$$

$$\text{Formule de Green : } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt.$$

On obtient  $(xy' - yx') = (1 - \cos t)^2$ . Alors

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) - 2 \cos t \right) dt = \frac{3\pi}{2}.$$

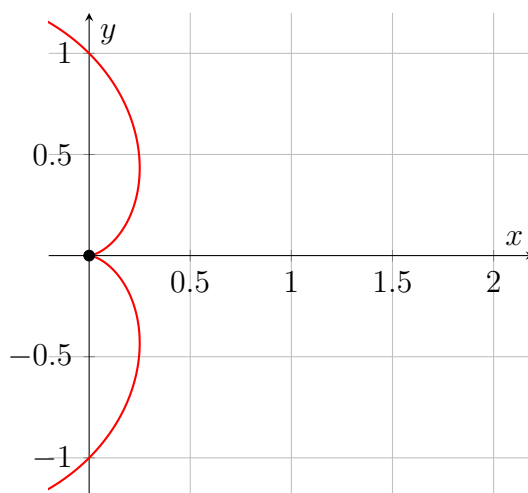


FIGURE C.2 – Ex. 4 Cardioïde  $\gamma(t) = (1 - \cos t)(\cos t, \sin t)$ . Aire intérieure =  $3\pi/2$ .

**Exercice 5. Reparamétrisation par abscisse curviligne.**

(a) Droite  $(at + b, ct + d) : v = \sqrt{a^2 + c^2}$ . Poser  $s = v(t - t_0) \Rightarrow t = t_0 + \frac{s}{v}$ . Alors

$$\bar{\gamma}(s) = (a(t_0 + s/v) + b, c(t_0 + s/v) + d) \text{ et } \|\bar{\gamma}'(s)\| = 1.$$

(b) Cercle  $(R \cos t, R \sin t) : \|\gamma'(t)\| = R \Rightarrow s = Rt$ .  $\bar{\gamma}(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R))$ ,  $\|\bar{\gamma}'(s)\| = 1$ .

**Exercice 6. Asymptote oblique.**

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t}, \quad y(t) = \frac{2t^2 - 1}{t}, \quad t \neq 0.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2t^2 - 1}{t^2 + 1} \rightarrow 2 \text{ quand } |t| \rightarrow \infty \Rightarrow \text{pente } m = 2.$$

$$b = \lim_{|t| \rightarrow \infty} (y - 2x) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - 1 - 2(t^2 + 1)}{t} = 0.$$

$\Rightarrow$  asymptote oblique  $y = 2x$ .

Près de  $t = 0 : x \sim 1/t, y \sim -1/t \Rightarrow$  direction  $y \approx -x$  loin de l'origine, mais l'asymptote véritable à l'infini reste  $y = 2x$ .

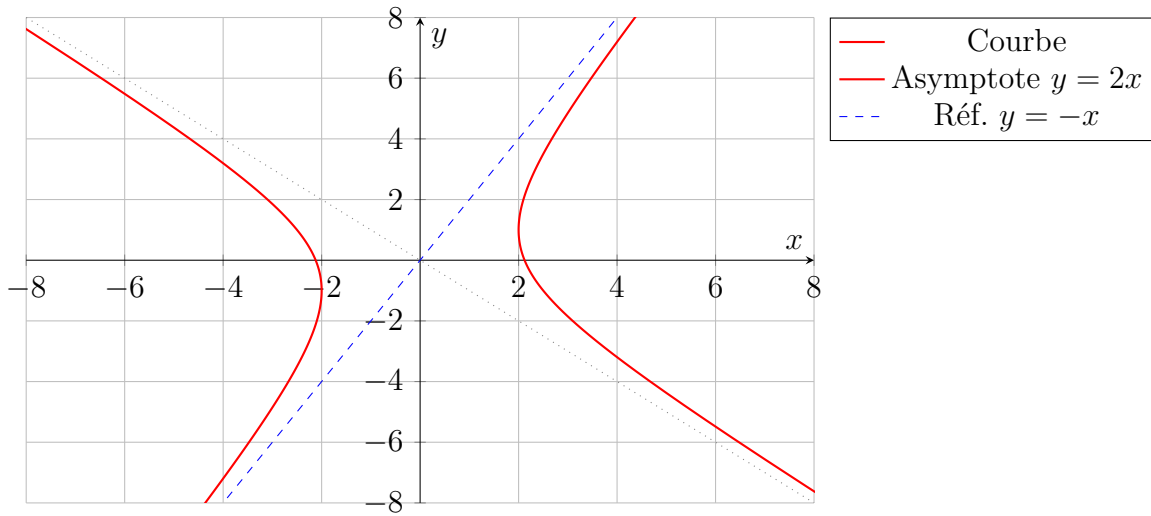


FIGURE C.3 – Ex. 6 Asymptote oblique  $y = 2x$ . Référence visuelle  $y = -x$  pour le comportement près de  $t = 0$ .

# Annexe D

## TD Surfaces paramétrées

Donnée :  $\sigma(u, v)$  sur  $U$ .

- 1) **Domaine & régularité** :  $U$  ouvert, vérifier  $\sigma_u \wedge \sigma_v \neq 0$ .
- 2) **Vecteurs tangents** : calculer  $\sigma_u, \sigma_v$  ; **plan tangent** via ces deux directions.
- 3) **Normal** :  $N = \sigma_u \wedge \sigma_v$  ; normale unitaire  $n = N/\|N\|$  si orientation nécessaire.
- 4) **Formulaire I** :  $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$ ,  $F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$ ,  $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$ .
- 5) **Elément d'aire** :  $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$ .
- 6) **Aire / intégrales** : Aire =  $\iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv$  ;  $\iint_{\Sigma} f dS = \iint_U f(\sigma) \sqrt{EG - F^2} du dv$ .
- 7) **Changement de paramètres** : utiliser jacobien  $|\det D\phi|$ .

Surface	Paramétrisation (exemple)
Plan $z = 0$	$\sigma(u, v) = (u, v, 0)$
Graphe $z = f(x, y)$	$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$
Cylindre unité	$\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$
Cône $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$	$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, ar)$
Sphère $R$	$\sigma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$
Tore ( $R > r$ )	$\sigma(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$
Révolution $y = f(x)$	$\sigma(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta)$
Hélicoïde	$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$

## D.1 Exercices

### Exercice 1

Soit  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  et  $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ .

- a) Calculer  $\sigma_x, \sigma_y$  et le vecteur normal  $N = \sigma_x \wedge \sigma_y$ ; donner  $n = N/\|N\|$ .
- b) Déterminer l'équation du plan tangent en  $M_0 = (1, 1, f(1, 1))$ .
- c) Établir  $E, F, G$  et l'élément d'aire  $dS$ .
- d) Calculer l'aire de la portion du graphe au-dessus de  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

### Exercice 2

On considère  $\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, ar)$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Vérifier la régularité et calculer  $\sigma_r, \sigma_\theta, N = \sigma_r \wedge \sigma_\theta$ .
- b) Trouver  $dS$  et l'aire de la nappe  $0 \leq r \leq \rho, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
- c) Calculer le flux de  $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$  à travers cette nappe.
- d) Interpréter le résultat du flux (indépendance par rapport à  $a$ ).

### Exercice 3

Soit la courbe  $y = f(x), f \geq 0$ , sur  $[a, b]$ , et sa rotation autour de l'axe  $Ox$ .

- a) Paramétrer  $\sigma(x, \theta)$  et établir  $dS$ ; démontrer

$$\text{Aire} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- b) Appliquer à  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$  sur  $[0, 1]$ ; calculer l'aire explicitement.
- c) Discuter la surface quand  $x \rightarrow +\infty$  : l'aire totale  $\int_0^\infty \dots$  est-elle finie ?

### Exercice 4

On pose  $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Calculer  $\sigma_u, \sigma_v$ , le normal  $N$  et  $dS$ .
- b) Calculer l'aire du ruban  $0 \leq u \leq U, 0 \leq v \leq 2\pi$ .
- c) Étudier l'intersection avec le cylindre unité  $x^2 + y^2 = 1$ ; décrire la courbe obtenue.

### Exercice 5

Sphère de rayon  $R > 0$  paramétrée par

$$\sigma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi].$$

- a) Calculer  $E, F, G$  et  $dS$ .
- b) Retrouver l'aire totale  $4\pi R^2$ .
- c) Calculer l'aire de la *zone sphérique* comprise entre  $\varphi = \varphi_1$  et  $\varphi = \varphi_2$ .
- d) Calculer le flux de  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  à travers la sphère (normale extérieure).

### Exercice 6

Tore de grands rayon  $R$  et petit rayon  $r$  :

$$\sigma(u, v) = \left( (R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v \right), \quad u, v \in [0, 2\pi].$$

- a) Calculer  $\sigma_u, \sigma_v$ , puis  $E, F, G$ .
- b) Déterminer  $dS$  et en déduire l'aire totale.
- c) (Bonus) En utilisant le théorème de Pappus, donner le volume du tore.

## D.2 Corrigés

### Exercice 1 (graphe).

(a)  $\sigma_x = (1, 0, 2x - y)$ ,  $\sigma_y = (0, 1, -x + 2y)$ ,

$$N = \sigma_x \wedge \sigma_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x - y \\ 0 & 1 & -x + 2y \end{vmatrix} = (-2x + y, x - 2y, 1) \times (-1)? \text{(vérifier signes)}.$$

Calcul soigné :

$$N = (0 \cdot (-x + 2y) - (2x - y) \cdot 1, (2x - y) \cdot 0 - 1 \cdot (-x + 2y), 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-2x + y, x - 2y, 1).$$

Alors  $n = \frac{(-2x + y, x - 2y, 1)}{\sqrt{(-2x + y)^2 + (x - 2y)^2 + 1}}$ .

(b) Plan tangent en  $(1, 1)$  (avec  $z_0 = f(1, 1) = 1$ ) via

$$Z - z_0 = f_x(1, 1)(X - 1) + f_y(1, 1)(Y - 1), \quad f_x = 2x - y, \quad f_y = -x + 2y.$$

$f_x(1, 1) = 1, f_y(1, 1) = 1 \Rightarrow Z - 1 = (X - 1) + (Y - 1)$ , donc

$$\boxed{Z = X + Y - 1}.$$

(c)  $E = \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle = 1 + (2x - y)^2$ ,  $F = \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle = (2x - y)(-x + 2y)$ ,  $G = 1 + (-x + 2y)^2$ .  
Alors  $dS = \sqrt{EG - F^2} dx dy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$  (identité classique des graphes).

(d) Sur  $Q = [0, 1]^2$  :

$$\text{Aire} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (2x - y)^2 + (-x + 2y)^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + 5x^2 + 5y^2 - 8xy} dx dy.$$

Pas de primitive élémentaire simple ; deux options :

- Encadrement numérique (autorisé) ;
- Changement orthogonal qui diagonalise la forme  $5x^2 + 5y^2 - 8xy$ , mais les bornes deviennent obliques.

Pour un TD : on laisse l'intégrale comme *forme finale*  $\boxed{\text{Aire} = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy}$ .

### Exercice 2 (cône).

(a)  $\sigma_r = (\cos \theta, \sin \theta, a)$ ,  $\sigma_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$ .

$$N = \sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & a \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-ar \cos \theta, -ar \sin \theta, r),$$

$\|N\| = r\sqrt{a^2 + 1}$ , Régularité :  $r > 0$  donne  $\|N\| > 0$ .

## D.2 Corrigés

---

(b)  $dS = \|N\| dr d\theta = r\sqrt{a^2 + 1} dr d\theta$ . Aire :

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r\sqrt{a^2 + 1} dr d\theta = \pi\rho^2\sqrt{a^2 + 1}.$$

(c) Flux de  $\mathbf{F} = (0, 0, 1)$  :

$$\mathbf{F}(\sigma) \cdot N = (0, 0, 1) \cdot (-ar \cos \theta, -ar \sin \theta, r) = r.$$

Donc

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r dr d\theta = \pi\rho^2.$$

(d) **Interprétation** : le flux vertical ne dépend pas de  $a$  ; il vaut l'aire du disque base  $\pi\rho^2$  (projection orthogonale sur  $z$ -plan).

### Exercice 3 (révolution).

(a)  $\sigma(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta)$  :

$$\sigma_x = (1, f' \cos \theta, f' \sin \theta), \quad \sigma_\theta = (0, -f \sin \theta, f \cos \theta),$$

$$\|\sigma_x \wedge \sigma_\theta\| = \sqrt{(f \cos \theta)^2 + (f \sin \theta)^2} \sqrt{1 + f'^2} = f\sqrt{1 + f'^2}.$$

Donc  $dS = f\sqrt{1 + f'^2} dx d\theta$  et

$$\boxed{\text{Aire} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}.$$

(b)  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$  sur  $[0, 1]$  :  $f' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$  ;  $\sqrt{1 + f'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 + x^2}} = \sqrt{\frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}}$ .

Alors  $f\sqrt{1 + f'^2} = \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}} = \sqrt{1 + 2x^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 2x^2} dx = 2\pi \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1 + 2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}x + \sqrt{1 + 2x^2}) \right]_0^1 \\ &= \pi\sqrt{3} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

(c) Pour  $[0, \infty)$  : l'intégrande  $\sim \sqrt{2}x$  quand  $x \rightarrow \infty$ , donc l'intégrale diverge. **Aire infinie.**

**Exercice 4 (hélicoïde).**

(a)  $\sigma_u = (\cos v, \sin v, 0)$ ,  $\sigma_v = (-u \sin v, u \cos v, a)$ ,

$$N = \sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & a \end{vmatrix} = (a \sin v, -a \cos v, u),$$

$\|N\| = \sqrt{a^2 + u^2}$ .

(b)  $dS = \sqrt{a^2 + u^2} du dv$ ; aire  $0 \leq u \leq U$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$  :

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^U \sqrt{a^2 + u^2} du dv = 2\pi \left[ \frac{1}{2} (u\sqrt{a^2 + u^2} + a^2 \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2})) \right]_0^U.$$

(c) Intersecter  $x^2 + y^2 = 1$  avec  $\sigma(u, v) : x^2 + y^2 = u^2 = 1 \Rightarrow u = 1$ . La courbe  $c(v) = (\cos v, \sin v, av) : c$ 'est une **hélice** sur le cylindre unité (projection circulaire, élévation linéaire en  $v$ ).

**Exercice 5 (sphère).**

(a)  $\sigma_\theta = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, 0)$ ,  $\sigma_\varphi = (R \cos \theta \cos \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \varphi)$ .

$$E = \|\sigma_\theta\|^2 = R^2 \sin^2 \varphi, \quad F = 0, \quad G = \|\sigma_\varphi\|^2 = R^2.$$

Donc  $dS = \sqrt{EG} = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$ .

(b) Aire :  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi R^2$ .

(c) Zone  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  :

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi R^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

(d) Flux de  $\mathbf{F} = (x, y, z)$ , normale extérieure  $n$  : Sur la sphère,  $n$  est radial unitaire et  $\|(x, y, z)\| = R$ , donc  $F \cdot n = R$ . Ainsi

$$\Phi = \iiint_{S^2} R dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

**Exercice 6 (tore).**

(a)  $\sigma_u = -(R + r \cos v) \sin u$ ,  $(R + r \cos v) \cos u$ ,  $0)$ ,

$$\sigma_v = (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, r \cos v).$$

Alors

$$E = \|\sigma_u\|^2 = (R + r \cos v)^2, \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0, \quad G = \|\sigma_v\|^2 = r^2.$$

(b)  $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv = r(R + r \cos v) du dv$ ,

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos v) du dv = (2\pi) \cdot (2\pi r R) = \boxed{4\pi^2 R r}.$$

(c) (Bonus) **Volume** (Pappus) : aire génératrice =  $\pi r^2$ , barycentre fait une trajectoire de longueur  $2\pi R$ , donc

$$\text{Vol} = (\pi r^2) \cdot (2\pi R) = 2\pi^2 R r^2.$$

□

# Bibliographie

- [1] E. Pedon, *Cours de Géométrie affine et euclidienne pour la Licence de Mathématiques*, Université de ReimsChampagne Ardenne, 2015. <https://pedon.perso.math.cnrs.fr/fichiers/enseignement/CoursGeoLicence.pdf>
- [2] M. Audin, *Geometry*, Springer, 2002. ISBN 3-540-43498-4.
- [3] Y. Kerbrat et J.-M. Braemer, *Géométrie des courbes et des surfaces*, Hermann, Paris, 1976. ISBN 2705658416.