

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de 20Aout 55 Skikda



Faculté de Technologie
Département de Sciences et Technologie

Spécialité : Mathématiques

Domaine : Maths-Infos

Polycopié sur le

Cours d'algèbre 4

Réalisé par : Dr. Souhila BOUDJEMA

Année universitaire 2022-2023

Table des matières

1	Formes linéaires. Dualité	5
1.1	Définitions	5
1.2	Base duale	6
1.3	Bidual	7
1.4	Orthogonalité	8
1.5	Transposée d'une application linéaire.	11
1.6	Hyperplan	11
1.7	Exercices	12
2	Formes bilinéaires et formes quadratiques	21
2.1	Forme bilinéaire	21
2.2	Matrice d'une forme bilinéaire	23
2.3	Formes bilinéaires symétriques, antisymétriques	25
2.4	Forme quadratique	26
2.5	Noyau et forme non dégénérée. Orthogonalité	26
2.6	Bases orthogonales	31
2.7	Recherche des bases orthogonales	32
	2.7.1 Méthode de Gauss.	32
	2.7.2 Méthode des dérivées partielles.	33
	2.7.3 Résultat des deux méthodes.	34
2.8	Classification des formes quadratiques	35
2.9	Endomorphisme orthogonal. Matrice orthogonale. Endomor- phisme adjoint	36
2.10	Exercices	38

3	Groupe orthogonal. Formes Hermitiennes	45
3.1	Groupe orthogonal	45
3.1.1	Endomorphisme orthogonal	45
3.2	Formes hermitiennes	46
3.2.1	Généralités	46
3.2.2	Orthogonalité. Noyau. Isotropes	48
3.2.3	Formes hermitiennes positives non dégénérée.	50
3.3	Exercices	50

Avant-propos

Ce cours est un document de base pour les étudiants de 2^{ème} année licence de mathématique. Il peut aussi être utilisé par les étudiants d'autres paliers aussi bien en sciences, sciences et techniques que ceux de biologie ou autres. Pour suivre ce cours, l'étudiant a besoin de connaître les notions de base de l'algèbre vues aux semestres précédents de la formation (Algèbre 1,2,3), en particulier, les notions d'espaces vectoriels, d'applications linéaires, de polynômes et de matrices.

Ce polycopie est basé sur trois parties

1. Formes linéaires et dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Groupe orthogonal. Formes hermitiennes.

CHAPITRE 1

Formes linéaires. Dualité

Soit E un K -espace vectoriel $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

1.1 Définitions

- **Une forme linéaire sur E** est une application linéaire de E dans K .
- L'espace des formes linéaires sur E est un K -espace vectoriel, noté E^* , on le nomme **dual de E** .
- **Exemple :**
 1. Les applications $f, g : K[X] \rightarrow K$ telles que $\forall P \in K[X] f(P) = P(0)$ et $g(P) = \int_{-1}^1 P(t)dt$, sont des formes linéaires.
 2. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, l'application $f : K^n \rightarrow K$ telle que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 \dots + a_nx_n,$$

est une formes linéaire sur K^n . Toute les formes linéaires sur K^n sont de cette forme.

En effet, soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base canonique de K^n , si f est une forme liéaire sur K^n , alors pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1)x_1 + f(e_2)x_2 \dots + f(e_n)x_n.$$

1.2 Base duale

Supposons que E est de dimension finie n , soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E , on définit n formes linéaires sur E , $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, de la manière suivante : $\forall j$ de 1 à n , il existe une forme linéaire et une seul f_j de E^* telle que

$$f_j(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker.}$$

On obtient ainsi une base $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de E^* que l'on nomme base duale de B , on a donc $\dim E = \dim E^*$. Les formes linéaires sur E on le note par une lettre surmontée d'une étoile : $x^* \in E^*$.

Pour la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E , la base duale de B se notera $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$, elle est définie par

$$e_j^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Exemple : $E = \mathbb{R}_n[X]$, $B = \{e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2, \dots, e_n = X^n\}$ a pour base duale $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$, où $f_i(P) = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ pour tout $P \in E$.

En effet, pour $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, on a d'après le développement de Taylor $P(0) = a_0, \frac{P'(0)}{1!} = a_1, \frac{P''(0)}{2!} = a_2, \dots, \frac{P^{(n)}(0)}{n!} = a_n$, donc $f_j(P)(X) = f_j(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0) = f_j(a_n e_n + a_{n-1} e_{n-1} + \dots + a_1 e_1 + a_0 e_0) = a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$, alors $f_j(P) = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$ pour tout j de 1 à n .

Proposition 1.1. Soit Λ, Γ deux bases de E et Λ^*, Γ^* les bases duales respectives. Alors on a

$$P_{\Lambda, \Gamma} = (P_{\Lambda^*, \Gamma^*}^{-1})^t,$$

où $P_{\Lambda, \Gamma}$ la matrice de passage de la base Λ vers Γ dans E et P_{Λ^*, Γ^*} la matrice de passage de la base Λ^* vers Γ^* dans E^* .

Exemple. $E = \mathbb{R}^3$, $\Lambda = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E , $\Gamma = \{b_1, b_2, b_3\}$ une base de E , $b_1 = (3, 2, 7)$, $b_2 = (3, 1, 5)$, $b_3 = (1, 3, 0)$. Donner la base duale de Γ .

Puisque $P_{\Lambda, \Gamma} = (P_{\Lambda^*, \Gamma^*}^{-1})^t$, alors $P_{\Lambda, \Gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{\Lambda^*, \Gamma^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 8 \\ 21 & 7 & 11 \\ 17 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

alors $(P_{\Lambda, \Gamma}^{-1})^t = \begin{pmatrix} 15 & 21 & 17 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & 11 & 9 \end{pmatrix}$. On alors $b_1^* = 15e_1^* + 21e_2^* + 17e_3^*$, $b_2^* = 5e_1^* + 7e_2^* + 6e_3^*$, $b_3^* = 8e_1^* + 11e_2^* + 9e_3^*$

1.3 Bidual

Définition 1.1. On appelle bidual de E , on le note E^{**} , l'espace dual de E^* . Si $\dim E < \infty$, on a $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$.

Fixons $x \in E$. Pour toute forme linéaire f de E^* , $f(x)$ est un scalaire dans K unique. On définit ainsi une application de E^* dans K , notée \tilde{x} :

$$\begin{aligned} \tilde{x} : E^* &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto \tilde{x}(f) = f(x). \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{x} \in E^{**}$, on définit une application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \tilde{x}, \end{aligned}$$

telle que pour tout $f \in E^*$

$$\varphi(x)(f) = \tilde{x}(f) = f(x).$$

Théorème 1.1. A tout $x \in E$, associons l'élément $\tilde{x} \in E^{**}$ défini par

$$\tilde{x}(f) = f(x), \quad \forall f \in E^*.$$

Alors l'application $\varphi : x \longmapsto \tilde{x}$ de E dans E^{**} est linéaire.

Si E est de dimension finie n , alors φ est un isomorphisme.

Démonstration

1. Montrant que $\forall x, y \in E, \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et $\forall x \in E \forall \alpha \in K, \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

En effet On a $\varphi(x+y) = \widetilde{(x+y)} \in E^{**}$, donc c'est une application linéaire de E^* dans K .

$\forall f \in E^* \quad (x+y)(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \tilde{x}(f) + \tilde{y}(f) = (\tilde{x} + \tilde{y})(f)$, donc $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$\varphi(\alpha x) = \widetilde{(\alpha x)} \in E^{**}$, donc c'est une application linéaire de E^* dans K .

$\forall f \in E^* \quad (\alpha x)(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \tilde{x}(f)$, donc $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

2. Pour la dimension finie et puisque $\dim E = \dim E^{**}$, pour montrer que φ est bijectif, il suffit de prouver que φ est injectif. ($\forall x, y \in E, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$)
 $\forall x, y \in E, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$ alors $\forall f \in E^*, f(x) = f(y)$

donc on a $f(x - y) = 0$. Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale de B , donc pour $f = e_i^*$, on a

$$e_i^*(x - y) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (*)$$

D'autre part

$$x - y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n,$$

donc

$$e_i^*(x - y) = \lambda_i \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (**)$$

De (*) et (**)

$$\lambda_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

d'où $x - y = 0$.

Définition 1.2. L'application φ se nomme morphisme canonique de E dans E^{**} .

Remarque 1.1. Dans le cas où la dimension de E est finie et à cause de l'isomorphisme φ , on identifie E et E^{**} , c-à-d

$$\forall x \in E \quad \tilde{x} = x \quad \text{et} \quad E^{**} = E$$

1.4 Orthogonalité

Définition 1.3. Soit E un K -espace vectoriel, E^* son dual. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est orthogonal à une forme linéaire y^* de E^* si $y^*(x) = 0$. On dit aussi que y^* est orthogonale à x , ou bien que x et y^* sont orthogonaux.

Exemple Soit $E = \mathbb{R}^2$ et considérons la y^* de E^* définie par

$$y^*(x) = ax_1 + bx_2,$$

(x_1, x_2) étant les coordonnées de x dans la base canonique de E , a et b deux nombres donnés. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les vecteurs $(\alpha b, -\alpha a)$ est orthogonale à y^* .

Propriété 1.1. Soit E un K -espace vectoriel et A une partie finie de E . Si y^* une forme linéaire orthogonale à tout vecteur de A , alors y^* est orthogonale à tout vecteur du $\langle A \rangle$ de E .

En effet : soit $A = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ une famille finie de E . Par hypothèse,

$$y^*(x_1) = 0 \quad y^*(x_2) = 0 \quad \dots, \quad y^*(x_p) = 0.$$

Alors, pour tous scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$,
 $y^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \dots + \alpha_p x_p) = \alpha_1 y^*(x_1) + \alpha_2 y^*(x_2), \dots + \alpha_p y^*(x_p) = 0$

Propriété 1.2. Soit E un K -espace vectoriel et B une partie finie de E^* . Si $x \in E$ soit orthogonale à tout forme linéaire de B , alors x est orthogonal à tout forme linéaire du $\langle B \rangle$ de E^* .

En effet : soit $B = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_q^*\}$ une famille finie de E^* . Par hypothèse,

$$y_1^*(x) = 0 \quad y_2^*(x) = 0 \quad \dots; y_q^*(x) = 0.$$

Alors, pour tous scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \in K$,

$$(\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* + \dots + \alpha_q y_q^*)(x) = \alpha_1 y_1^*(x) + \alpha_2 y_2^*(x) + \dots + \alpha_q y_q^*(x) = 0.$$

Remarque D'après les proposition précédentes on a

Définition 1.4. Soit E un K -espace vectoriel. Pour tout partie A de E , la partie de E^* :

$$A^\circ = \{y^* \in E^* \mid (\forall x \in A) y^*(x) = 0\},$$

se nomme sous-espace orthogonal à la partie A de E .

Définition 1.5. Soit E un K -espace vectoriel. Pour tout partie B de E^* , la partie de E :

$${}^\circ B = \{x \in E \mid (\forall y^* \in B) y^*(x) = 0\},$$

se nomme sous-espace orthogonal à la partie B de E^* .

Propriété 1.3. Soit E un K -espace vectoriel. Soit A et B deux partie de E et E^* respectives.

1. A° est un sous-espace vectoriel de E^* .
2. ${}^\circ B$ est un sous-espace vectoriel de E .

En effet :

1. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ et $\forall y_1^*, y_2^* \in A^\circ$, on a

$$(\forall x \in A) (\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*)(x) = \alpha_1 y_1^*(x) + \alpha_2 y_2^*(x) = 0.$$

donc $\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* \in A^\circ$.

2. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ et $\forall x_1, x_2 \in {}^\circ B$, on a

$$(\forall y^* \in B) y^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y^*(x_1) + \alpha_2 y^*(x_2) = 0.$$

donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in {}^\circ B$.

Remarque : D'après les propositions 1.1 et 1.2 on a

$$A^\circ \subset (\langle A \rangle)^\circ \quad \text{et} \quad {}^\circ B \subset {}^\circ(\langle B \rangle).$$

Propriété 1.4.

1. Pour toutes parties A_1 et A_2 de E . on a si $A_1 \subset A_2$ alors $A_2^\circ \subset A_1^\circ$.
2. Pour tout partie A finie de E on a $A^\circ = (\langle A \rangle)^\circ$.

En effet :

1. Si $y^* \in A_2^\circ$ alors $\forall x \in A_2$ on a $y^*(x) = 0$, en particulier $x \in A_1 \subset A_2$ on a $y^*(x) = 0$ donc $y^* \in A_1^\circ$.
2. Puisque $A \subset \langle A \rangle$ d'après 1 on a $\langle A \rangle^\circ \subset A^\circ$ et d'après la remarque précédente on a $A^\circ \subset \langle A \rangle^\circ$ d'où $\langle A \rangle^\circ = A^\circ$.

Propriété 1.5.

1. Pour toutes parties B_1 et B_2 de E^* . on a si $B_1 \subset B_2$ alors ${}^\circ B_2 \subset {}^\circ B_1$.
2. Pour tout partie B de E^* on a ${}^\circ B = {}^\circ(\langle B \rangle)$.

Propriété 1.6. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors on a, ${}^0(E^*) = \{0\}$.

Théorème 1.2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Pour toute base B^* de E^* , il existe une base et une seule B de E dont la duale est B^* .

Démonstration :

Existence.

On rappelle que l'isomorphisme canonique $\varphi : x \mapsto \tilde{x}$ vérifie, pour tout $x \in E$ et $y^* \in E^*$,

$$\tilde{x}(y^*) = y^*(x).$$

Soit $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ une base de E^* et $B^{**} = \{e_1^{**}, e_2^{**}, \dots, e_n^{**}\}$ sa base duale dans le bidual E^{**} . Posons $\varphi^{-1}(e_i^{**}) = e_i$ ($1 \leq i \leq n$). Alors la relation précédente donne, pour tous indices i et j :

$$e_i^{**}(e_j^*) = e_j^*(e_i).$$

Comme le premier membre vaut δ_{ij} , le second aussi et par conséquent $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E dont la duale est B^* .

Unicité.

Supposons qu'il existe une autre base $C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de E telle que

$$e_j^*(u_i) = \delta_{ij}.$$

Alors, on aura, pour tous i et j :

$$e_j^*(e_i - u_i) = 0,$$

d'où

$$e_i - u_i \in {}^\circ(B^*) = {}^\circ(\langle B^* \rangle) = {}^\circ(E^*) = \{0\}.$$

On obtient donc

$$e_i - u_i = 0, \quad (0 \leq i \leq n).$$

Conséquence. L'application qui, à toute base de E associe sa base duale, est une bijection de l'ensemble des bases de E sur l'ensemble des bases sur E^* .

1.5 Transposée d'une application linéaire.

Définition 1.6. Soit E et F deux K -espaces vectoriels, E^* et F^* leurs duaux et considérons une application linéaire f de E dans F . On définit ainsi une application ${}^t f : F^* \rightarrow E^*$ telle que pour tout $y^* \in F^*$ on a ${}^t f(y^*) = y^* \circ f$, que l'on nomme **transposée de f** .

Propriété 1.7. Pour toute f application linéaire de E vers F , on a ${}^t f$ est linéaire de F^* vers E^* .

Théorème 1.3. Soit E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finies, B et C des bases de E et F respectivement, B^* et C^* leurs duales dans E^* et F^* .

Pour toute f linéaire de E vers F , soit M_f sa matrice relative à B et C , et soit $M_{{}^t f}$ la matrice de ${}^t f$ relative à C^* et B^* , alors

$${}^t M_f = M_{{}^t f}.$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie comme suit $f(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 6x - 3y + z)$. La matrice de f par rapport à les bases canoniques B et Γ de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 est $M_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, donc la matrice de ${}^t f$ par rapport à Γ^* et B^* et ${}^t M_f = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.6 Hyperplan

Soit E un K -espace vectoriel.

Définition 1.7. H un sous-espace de E est un hyperplan si $\exists x_0 \notin H$ tel que $E = H \oplus Kx_0$

Définition 1.8. Pour E un K -espace vectoriel de dimension finie. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E , vérifiant $\dim H = \dim E - 1$

Théorème 1.4. Pour H un sous-espace vectoriel de E on a : H un hyperplan sur E si, et seulement si il existe $y^* \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\text{Ker } y^* = H$

Théorème 1.5. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E . Alors on a $\text{ker } \varphi = \text{ker } \psi$ si, et seulement si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

1.7 Exercices

Exercice 1 : Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, n . $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ sa base duale. Montrer que

1. $\forall x \in E$, on a $x = e_1^*(x)e_1 + e_2^*(x)e_2 + \dots + e_n^*(x)e_n$.
2. $\forall y^* \in E^*$, on a $y^* = y^*(e_1)e_1^* + y^*(e_2)e_2^* + \dots + y^*(e_n)e_n^*$.
3. Pour $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
— Montrer que la famille des polynômes $\mathcal{L} = (L_i)_{i=0..n}$, définis par

$$L_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}, \quad \forall i, 0 \leq i \leq n, \quad \text{est une base de } E.$$

- Déterminer la base duale de \mathcal{L} .
- On suppose que $K = \mathbb{R}$ et que $a_i \in [a, b]$, $\forall 0 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]; \quad \int_a^b P(t)dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(a_i).$$

Solution :

1. $\forall x \in E$, on a $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$, donc

$$e_i^*(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e_i^*(e_1) + \lambda_2 e_i^*(e_2) + \dots + \lambda_i e_i^*(e_i) + \dots + \lambda_n e_i^*(e_n).$$

Puisque $e_i^*(e_i) = 1$ et $e_i^*(e_j) = 0$ pour $i \neq j$ alors

$$e_i^*(x) = e_i^*(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_i, \quad \forall i,$$

d'où

$$x = e_1^*(x)e_1 + e_2^*(x)e_2 + \dots + e_n^*(x)e_n.$$

2. $\forall y^* \in E^*$, on a $y^* = b_1 e_1^* + b_2 e_2^* + \dots + b_n e_n^*$, donc

$$\forall x \in E, \forall y^*(x) = b_1 e_1^*(x) + b_2 e_2^*(x) + \dots + b_i e_i^*(x) + \dots + b_n e_n^*(x),$$

pour $x = e_i$ on a $y^*(e_i) = b_i$ donc

$$y^* = y^*(e_1)e_1^* + y^*(e_2)e_2^* + \dots + y^*(e_n)e_n^*$$

3. Pour $L_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ on a

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i \\ 0, & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

— On a $\text{Card}\mathcal{L} = n + 1 = \dim E$, il suffit de montrer qu'il est libre.

Pour $\sum_{j=0}^n \lambda_j L_j = 0$, l'évaluation en a_k pour $0 \leq k \leq n$, donne $\lambda_k = 0$.

— Soit $P \in E$, alors $E = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_j$, et on a $L_j^*(P) = \lambda_j$ d'après la première question. D'autre part on a $P(a_j) = \lambda_j$ donc

$$L_j^*(P) = P(a_j) \quad \forall P \in E.$$

— Pour $K = \mathbb{R}$, et soit $\varphi \in E^*$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_a^b P(t) dt \end{aligned}$$

On a d'après la question 2

$$\varphi = \sum_{i=0}^n \varphi(L_i) L_i^*,$$

et donc pour $P \in E$

$$\varphi(P) = \sum_{i=0}^n \varphi(L_i) L_i^*(P) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(a_i), \quad \text{avec } \alpha_i = \int_a^b L_i(t) dt.$$

Exercice 2 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que l'application φ_A de $\mathcal{M}_n(K)$ vers K , définie par $\varphi_A(X) = \text{tr}(AX)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.
2. On note f l'application de $\mathcal{M}_n(K)$ vers $(\mathcal{M}_n(K))^*$, définie par $f(A) = \varphi_A$.
 - Justifier la linéarité de f . Montrer que $\text{Ker } f = \{0_{\mathcal{M}_n(K)}\}$.
 - En déduire que f est un isomorphisme, puis conclure $(\mathcal{M}_n(K))^*$.

[Indication pour partie 2 : Calculer $\varphi_A(E_{ij})$, pour tout i, j . Les matrices E_{ij} sont les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$ définies comme suit : la colonne $k \neq j$ de E_{ij} est nulle et la colonne j a tous ses termes nuls sauf celui en ligne i qui vaut 1]

Solution :

1. L'application φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K) : \forall X, Y \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\forall \alpha \in K$ on a

$$\varphi_A(X + \alpha Y) = \text{tr}(A(X + \alpha Y)) = \text{tr}(A(X)) + \alpha \text{tr}(A(Y)) = \varphi_A(X) + \varphi_A(Y).$$

2. On note f l'application de $\mathcal{M}_n(K)$ vers $(\mathcal{M}_n(K))^*$, définie par $f(A) = \varphi_A$.
 - la linéarité de $f : \forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\forall \alpha \in K$

$$f(A + \alpha B)(X) = \varphi_{A + \alpha B}(X),$$

d'où

$$\text{tr}(A + \alpha B(X)) = \text{tr}(A(X)) + \alpha \text{tr}(B(X)) \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(K),$$

et donc

$$f(A + \alpha B) = \varphi_A + \alpha \varphi_B = f(A) + \alpha f(B).$$

Soit $A \in \text{Ker } f$, donc $f(A) = 0$ d'où $\varphi_A(X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour $X = E_{ij}$, donc AX est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles à part la $j^{\text{ième}}$ colonne qui égale à la $i^{\text{ième}}$ colonne de A d'où

$$\varphi_A(E_{ij}) = \text{tr}(AE_{ij}) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{ji} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \forall i, j$$

donc $\text{Ker } f = \{0_{\mathcal{M}_n(K)}\}$.

— Puisque f est injective de $\mathcal{M}_n(K)$ vers $(\mathcal{M}_n(K))^*$ et

$$\dim \mathcal{M}_n(K) = \dim \mathcal{M}_n(K)^*,$$

donc f est bijective d'où f est un isomorphisme.

On a $\forall \psi \in (\mathcal{M}_n(K))^*$, $\exists A \in \mathcal{M}_n(K)$ unique telles que $\psi = f(A) = \varphi_A$, d'où

$$\mathcal{M}_n(K)^* = \{\varphi_A, A \in \mathcal{M}_n(K)\}.$$

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\Gamma = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ et $\Gamma^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ sa base duale. Soit $\Lambda^* = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^*(P) = P(0), \quad f_2^*(P) = P'(0), \quad f_3^*(P) = P(1), \quad \forall P \in E.$$

1. Déterminer Γ^* . Déterminer les coordonnées de f_1^*, f_2^*, f_3^* dans la base Γ^* .
2. Montrer que Λ^* est une base de E^* .
3. Déterminer $\Lambda = \{f_1, f_2, f_3\}$ une base de E , dont $\Lambda^* = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ est sa base duale.
4. Soit le sous-espace $F = \{P \in E, P(0) + P'(0) + P(1) = 0\}$.
— Motrer que F est un hyperplan.
— Donner la dimension de F .

Solution :

1. $\Gamma^* \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ sont des formes linéaires donc on cherche $e_i^*, i = \overline{1, 3}$ telle que

$$e_i^* : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto e_i^* = ?$$

Pour $P \in E$ on a $P(X) = a + bX + cX^2$, donc

$$e_i^*(P)(X) = e_i^*(a + bX + cX^2) = ae_i^*(1) + be_i^*(X) + ce_i^*(X^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} e_1^*(P)(X) &= ae_1^*(e_1) + be_1^*(e_2) + ce_1^*(e_3) = a \\ e_2^*(P)(X) &= ae_2^*(e_1) + be_2^*(e_2) + ce_2^*(e_3) = b \\ e_3^*(P)(X) &= ae_3^*(e_1) + be_3^*(e_2) + ce_3^*(e_3) = c \end{aligned}$$

Les coordonnées de f_1^* , f_2^* , f_3^* dans la base Γ^* sont :

$$f_1^*(P)(X) = P(0) = a = e_1^*(P)(X),$$

$$f_2^*(P)(X) = P'(0) = b = e_2^*(P)(X),$$

et

$$f_3^*(P)(X) = P(1) = a + b + c = (e_1^* + e_2^* + e_3^*)(P)(X)$$

2. Λ^* est une base de E^* : On a $Card\Lambda^* = 3 = dim E^*$, donc il suffit de montrer que Λ^* est libre.

$$\lambda_1 f_1^* + \lambda_2 f_2^* + \lambda_3 f_3^* = 0 \Rightarrow \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \lambda_3 (e_1^* + e_2^* + e_3^*) = 0,$$

d'où

$$(\lambda_1 + \lambda_3)e_1^* + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2^* + \lambda_3 e_3^* = 0.$$

Puisque $\Gamma^*\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ est libre donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

3. $\Lambda = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E dont $\Lambda^* = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ est sa base duale, donc on a

$$P_{\Gamma\Lambda} = {}^t P_{\Gamma^*\Lambda^*}^{-1},$$

où $P_{\Gamma\Lambda}$ est la matrice de passage de Γ vers Λ , et $P_{\Gamma^*\Lambda^*}$ est la matrice de passage de Γ^* vers Λ^* . Donc

$$P_{\Gamma^*\Lambda^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\Gamma^*\Lambda^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$${}^t P_{\Gamma^*\Lambda^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} f_1(X) &= (1.e_1 + 0.e_2 - e_3)(X) = 1 - X^2 \\ f_2(X) &= (0.e_1 + 1.e_2 - e_3)(X) = X - X^2 \\ f_3(X) &= (0.e_1 + 0.e_2 + e_3)(X) = X^2 \end{aligned}$$

4. Soit le sous-espace $F = \{P \in E, P(0) + P'(0) + P(1) = 0\}$.
 — Si on pose $\psi(X) = (f_1 + f_2 + f_3)(X)$, donc on a ψ est une forme linéaire non nulle de E vers \mathbb{R} alors

$$F = \ker \psi = \{P \in E, \psi(P) = 0\}$$

est un hyperplan.

- $\dim F = \dim \mathbb{R}_2[X] - 1 = 2$.

Exercice 4 :

- Montrer que pour toute partie B non vide de E^* , on a ${}^\circ B = \bigcap_{y^* \in B} \ker y^*$.
 — Soit A_1, A_2 deux un sous-espaces vectoriels de E un K -espace vectoriel et B_1, B_2 un sous-espaces vectoriels de E^* Montrer que :
1. Si $A_1 \subset A_2$ alors $A_2^\circ \subset A_1^\circ$. Si $B_1 \subset B_2$ alors ${}^\circ B_2 \subset {}^\circ B_1$.
 2. $A_1 \subset ({}^\circ A_1)^\circ$. $B_1 \subset ({}^\circ B_1)^\circ$.
 3. $(A_1^\circ + A_2^\circ) \subset (A_1 \cap A_2)^\circ$. $({}^\circ B_1 + {}^\circ B_2) \subset ({}^\circ (B_1 \cap B_2))$.
 4. $(A_1^\circ \cap A_2^\circ) = (A_1 + A_2)^\circ$. $({}^\circ B_1 \cap {}^\circ B_2) = ({}^\circ (B_1 + B_2))$.
 5. $\{0_E\}^\circ = E^*$, $E^\circ = \{0_{E^*}\}$
 6. Si $\dim E$ est fini, ${}^\circ \{E^*\} = \{0_E\}$.

Solution :

- Pour $x \in {}^\circ B$ on a

$$\forall y^* \in B, y^*(x) = 0 \iff \forall y^* \in B, x \in \ker y^* \iff x \in \bigcap_{y^* \in B} \ker y^*,$$

d'où on a ${}^\circ B = \bigcap_{y^* \in B} \ker y^*$.

- Soit A_1, A_2 deux un sous-espaces vectoriels de E un K -espace vectoriel et B_1, B_2 un sous-espaces vectoriels de E^* Montrer que :
1. Soit ${}^\circ B_2 = \{x \in E, \forall y^* \in B_2, y^*(x) = 0\}$ on a pour $x \in {}^\circ B_2$, $\forall y^* \in B_2, y^*(x) = 0$ et puisque $B_1 \subset B_2$, donc $\forall y^* \in B_1, y^*(x) = 0$ d'où $x \in {}^\circ B_1 = \{x \in E, \forall y^* \in B_1, y^*(x) = 0\}$. Alors on a ${}^\circ B_2 \subset {}^\circ B_1$.

2. On a

$$A_1^\circ = \{y^* \in E^*, \forall x \in A_1 \ y^*(x) = 0\}$$

et donc

$${}^\circ(A_1^\circ) = \{x \in E, \forall y^* \in A_1^\circ, \ y^*(x) = 0\},$$

d'où $\forall x \in A_1$, et $\forall y^* \in A_1^\circ$ on a $y^*(x) = 0$, alors $x \in {}^\circ(A_1^\circ)$, et donc $A_1 \subset {}^\circ(A_1^\circ)$.

On a

$${}^\circ(B_1) = \{x \in E, \forall y^* \in B_1, \ y^*(x) = 0\}$$

et donc

$$({}^\circ B_1)^\circ = \{y^* \in E^*, \forall x \in {}^\circ B_1 \ y^*(x) = 0\},$$

d'où $\forall y^* \in B_1$, et $\forall x \in {}^\circ B_1$ on a $y^*(x) = 0$, alors $y^* \in ({}^\circ B_1)^\circ$, et donc $B_1 \subset ({}^\circ B_1)^\circ$.

3. Comme $A_1 \cap A_2 \subset A_k$ pour $k = 1, 2$ on a donc

$$A_k^\circ \subset (A_1 \cap A_2)^\circ,$$

et

$$(A_1^\circ + A_2^\circ) \subset (A_1 \cap A_2)^\circ.$$

4. Comme $A_k \subset A_1 + A_2$ pour $k = 1, 2$ on a donc

$$(A_1 + A_2)^\circ \subset A_k^\circ,$$

et donc

$$(A_1 + A_2)^\circ \subset A_1^\circ \cap A_2^\circ.$$

D'autre part on a $\forall y^* \in A_1^\circ \cap A_2^\circ$ on a $\forall x \in A_1 \ y^*(x) = 0$ et $\forall x \in A_2 \forall y^*(x) = 0$ donc pour $x_1 + x_2 \in A_1 + A_2$ on a $y^*(x_1 + x_2) = y^*(x_1) + y^*(x_2) = 0$, d'où $y^* \in (A_1 + A_2)^\circ$. d'où $(A_1^\circ \cap A_2^\circ) = (A_1 + A_2)^\circ$.

5. On a $\{0_E\}^\circ = \{y^* \in E^*, \ y^*(0) = 0\}$, puisque $\forall y^* \in E^*$ forme linéaire on a $y^*(0) = y^*(x - x) = y^*(x) - y^*(x) = 0$,

$$\{0_E\}^\circ = \{y^* \in E^*, \ y^*(0) = 0\} = E^*.$$

On a $E^\circ = \{y^* \in E^*, \forall x \in E \ y^*(x) = 0\}$ d'où $y^* = 0$ alors

$$E^\circ = \{0_{E^*}\}.$$

6. Soit $B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ est une base de E et $B^* = \{b_1^*, b_2^* \dots b_n^*\}$ est sa base duale. Donc on a

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots x_n b_n,$$

avec $x_i = b_i^*(x)$, pour tout $i = \overline{1, n}$.

$\forall x \in {}^\circ\{E^*\}$, on a $y^*(x) = 0$ pour tout $y^* \in E^*$, donc pour $y^* = b_i^*$ pour tout $i = \overline{1, n}$, on a

$$b_i^*(x) = 0, \text{ d'où } x = 0 \text{ et } {}^\circ\{E^*\} = \{0_{E^*}\}.$$

Exercice 5 : Soit E et F deux K -espaces vectoriels, E^* et F^* leurs duaux et considérons une application linéaire f de E dans F . Soit l'application : ${}^t f : F^* \rightarrow E^*$ telle que pour tout $y^* \in F^*$ on a ${}^t f(y^*) = y^* \circ f$. Montrer que

1. ${}^t f$ est linéaire de F^* vers E^* .
2. Pour G un K -espace vectoriel et g application linéaire de F dans G , on a ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.
3. Pour $E = F$ on a ${}^t Id_E = Id_{E^*}$. Si f est bijective alors ${}^t f$ est bijective et on a $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$.
4. Si $\dim E < \infty$ et $\dim F < \infty$ on a $\text{Ker}({}^t f) = (\text{Im} f)^\circ$.

Solution :

1. ${}^t f$ est linéaire de F^* vers E^* : $\forall y_1^*, y_2^* \in F^*, \forall \lambda \in K$, on a

$${}^t f(y_1^* + \lambda y_2^*) = (y_1^* + \lambda y_2^*) \circ f = y_1^* \circ f + \lambda y_2^* \circ f = {}^t f(y_1^*) + \lambda {}^t f(y_2^*).$$

2. Pour $z^* \in G^*$ on a ${}^t(g \circ f)(z^*) = z^* \circ (g \circ f) = (z^* \circ g) \circ f = {}^t f(z^* \circ g) = {}^t f({}^t g(z^*)) = {}^t f \circ {}^t g(z^*)$.
3. Pour $E = F$ on a $\forall y^* \in E^*$

$${}^t Id_E(y^*) = y^* \circ Id_E = y^* = Id_{E^*}.$$

Si f est bijective, donc il existe f^{-1} bijective tel que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E,$$

donc

$${}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t Id_E,$$

alors

$${}^t f^{-1} \circ {}^t f = {}^t f \circ {}^t f^{-1} = {}^t Id_E = Id_{E^*}.$$

Par conséquent ${}^t f$ est bijective et on a

$${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}.$$

4. Si $\dim E < \infty$ et $\dim F < \infty$ on a $\text{Ker}({}^t f) = \{z^* \in F^*, {}^t f(z^*) = 0\}$
et $\text{Im} f^\circ = \{z^* \in F^*, \forall y \in \text{Im} f \ z^*(y) = 0\}$.

Soit $z^* \in \text{Ker}({}^t f) \iff {}^t f(z^*) = 0$ et donc $z^* \circ f = 0 \iff \forall x \in E$
on a $z^*(f(x)) = 0 \iff z^* \in \text{Im} f^\circ$. alors on a $\text{Ker}({}^t f) = (\text{Im} f)^\circ$.

Formes bilinéaires et formes quadratiques

2.1 Forme bilinéaire

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur un même corps K .

Définition 2.1. *On dit que f est une **application bilinéaire** de $E \times F$ dans G si elle vérifie les axiomes suivants :*

— $\forall x, x' \in E$ et $\forall y, y' \in F$:

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x' + y),$$

$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x + y').$$

— $\forall x \in E$ et $\forall y \in F \forall \lambda \in K$:

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),$$

$$f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

En d'autres termes, f est bilinéaire si, et seulement si, pour tout y fixé dans F , l'application partielle $f_y : x \mapsto f(x, y)$ de E dans G est linéaire, et pour tout x fixé dans E , l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x, y)$ de F dans G est linéaire. L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G se note $\mathcal{L}(E, F; G)$.

Lorsque $G = K$, toute application bilinéaire se nomme **forme bilinéaire**.

Exemple 2.1. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$

$$E = C^0([a, b], \mathbb{R}).$$

On définit la relation b sur E par

$$\forall f, g \in E : b(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Il est clair que cette relation est bien une application car

$$\forall f, g \in E : |b(f, g)| < +\infty.$$

De plus pour tout f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 éléments de E et pour tout λ et μ deux éléments de \mathbb{R} , le calcul fournit

$$b(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda b(f_1, g) + \mu b(f_2, g).$$

donc b est linéaire par rapport à la première variable.

$$b(f, \lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda b(f, g_1) + \mu b(f, g_2).$$

donc b est linéaire par rapport à la seconde variable.

Exemple 2.2. Soit E un K -espace vectoriel et E^* son dual, l'application $f : E \times E^* \rightarrow K$, telle que $f(x, y^*) = y^*(x)$ est une forme bilinéaire pour tout $(x, y^*) \in E \times E^*$.

Théorème 2.1. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F; G)$, muni de deux lois

$$- \forall f, g \in \mathcal{L}(E, F; G),$$

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y), \quad \forall (x, y) \in E \times F,$$

$$- \forall f \in \mathcal{L}(E, F; G), \forall \alpha \in K$$

$$(\alpha f)(x, y) = \alpha f(x, y), \quad \forall (x, y) \in E \times F,$$

possède une structure d'espace vectoriel sur K .

2.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimensions finie n et p , f une forme bilinéaire définie sur $E \times F$. $B = \{ e_1, \dots, e_n \}$ une base de E et $C = \{ u_1, \dots, u_p \}$ une base de F , donc pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^p y_j u_j.$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F; K)$ et à cause de la bilinéarité,

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^p y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f(e_i, u_j) x_i y_j.$$

On pose

$$a_{ij} = f(e_i, u_j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Définition 2.2. La matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(K)$, se nomme matrice de la forme bilinéaire f relative aux bases B et C .

, Réciproquement à toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(K)$ correspond une forme bilinéaire f , par $f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} x_i y_j$.

Exemple 2.3. Soient $E = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel, $\{ e_i \}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f une forme bilinéaire définie sur E par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E : \quad b(X, Y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_3 y_3 - x_1 y_3.$$

La base canonique vaut

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et le calcul fournit

$$\begin{aligned} b(e_1, e_1) &= 0, & b(e_1, e_2) &= 1, & b(e_1, e_3) &= -1, \\ b(e_2, e_1) &= 1, & b(e_2, e_2) &= 0, & b(e_2, e_3) &= 0, \\ b(e_3, e_1) &= 0, & b(e_3, e_2) &= 0, & b(e_3, e_3) &= 2, \end{aligned}$$

ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F; K)$ Soit X et Y les matrices colonnes des coordonnées de $x \in E$ et $y \in F$ dans

les bases B et C , alors on a

$$f(x, y) = {}^t X.A.Y.$$

Propriété 2.2 (Formule de changement des bases). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F; K)$, B et B' deux base de E et C et C' deux base de F . Soit M la matrice de f relative à B et C et M' la matrice de f relative à B' et C' Alors

$$M' = {}^t P M Q, \quad (2.1)$$

avec P c'est la matrice de passage de la base B vers B' et Q c'est la matrice de passage de la base C vers C' .

Exemple 2.4. On considère la forme bilinéaire de l'exemple 2.3 page 23. On veut déterminer la matrice associée à cette forme dans la base B' formée par les vecteurs

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a déjà la matrice associée à f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , de plus la matrice de passage de la base canonique à la base B' vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$${}^t P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

il suffit d'utiliser la formule (2.1 page 24 pour avoir la matrice associée dans la base B'

$$M' = {}^t P M P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

finalemant

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Formes bilinéaires symétriques, antisymétriques

Définition 2.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E; K)$. On dit que

1. La forme f est une forme symétrique si

$$\forall X, Y \in E : f(X, Y) = f(Y, X).$$

2. La forme f est une forme anti-symétrique si

$$\forall X, Y \in E : f(X, Y) = -f(Y, X).$$

Exemple 2.5. Vu la forme bilinéaire donnée par l'Exemple 2.1 page 22 et vu le fait que

$$\forall f, g \in E : \int_a^b f(t) g(t) dt = \int_a^b g(t) f(t) dt,$$

on conclut que

$$\forall f, g \in E : b(f, g) = b(g, f),$$

donc cette forme est bien une forme symétrique.

Exemple 2.6. La forme f de $K^2 \times K^2$ vers K définie par $f((x_1, y_1), (x_1, y_1)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ est une forme antisymétrique.

On note par $\mathcal{L}_s(E; K)$, l'espace des formes bilinéaires symétrique et $\mathcal{L}_a(E; K)$, l'espace des formes bilinéaires antisymétrique.

Propriété 2.3. On a :

1. $\mathcal{L}_s(E; K)$ et $\mathcal{L}_a(E; K)$ sont des sous-espaces vectoriels sur $\mathcal{L}(E; K)$.
2. Pour K n'est pas de caractéristique 2, on a
 - $\mathcal{L}(E; K) = \mathcal{L}_s(E; K) \oplus \mathcal{L}_a(E; K)$.
 - $\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = -f(y, x) \iff \forall x \in E, f(x, x) = 0$.
3. Si E est de dimension finie on a
 - $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ si, et seulement si la matrice A de f par rapport à n'importe quelle base est une matrice symétrique ($A = {}^t A$).
 - $f \in \mathcal{L}_a(E; K)$ si, et seulement si la matrice A de f par rapport à n'importe quelle base est une matrice antisymétrique ($A = -{}^t A$).

2.4 Forme quadratique

Définition 2.4 (Forme quadratique, Forme pôlaire). Soit E un K -espace vectoriel et soit Q une application de E dans K . On dit que Q est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique S définie sur E telle que

$$\forall X \in E : Q(X) = S(X, X).$$

La forme bilinéaire symétrique S s'appelle la forme pôlaire associée à la forme quadratique Q .

Propriété 2.4 (Unicité et détermination de la forme pôlaire). Soit E un K -espace vectoriel et Q une forme quadratique sur E . Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique S définie sur E telle que

$$\forall X \in E : Q(X) = S(X, X),$$

de plus la forme S est définie par l'expression

$$\forall X, Y \in E : S(X, Y) = \frac{1}{2} [Q(X + Y) - Q(X) - Q(Y)]. \quad (2.2)$$

Définition 2.5. Pour E un K -espace vectoriel de dimension finie. On appelle une matrice de la forme quadratique Q relative à une base B de E , la matrice de la forme pôlaire de Q par rapport à la base B .

2.5 Noyau et forme non dégénérée. Orthogonalité

Dans le cadre des formes bilinéaire symétrique, les application

$$\begin{array}{l} G_f : E \longrightarrow E^* \\ y \longmapsto f(., y) \end{array}, \quad \begin{array}{l} D_f : E \longrightarrow E^* \\ x \longmapsto f(x, .) \end{array},$$

sont égaux et linéaire, et on note $\tilde{f} = D_f = G_f$

Définition 2.6. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

1. Le noyau de f est le noyau de D_f ou G_f , c'est-à-dire

$$\text{Ker}(f) = \{ X \in E / \forall Y \in E : f(X, Y) = 0 \}.$$

Ou

$$\text{Ker}(f) = \{ Y \in E / \forall X \in E : f(X, Y) = 0 \}.$$

2. La forme f est non dégénérée si et seulement si

$$\text{Ker}(f) = \{0\}.$$

Définition 2.7. Soit Q une forme quadratique sur E un K -espace vectoriel. On appelle noyau de Q , le noyau de sa forme polaire.

Exemple 2.7. On veut déterminer le noyau de la forme bilinéaire b définie sur $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\forall f, g \in E : b(f, g) = f(0)g(0).$$

Par définition

$$\text{Ker}(b) = \{g \in E / \forall f \in E : b(f, g) = 0\},$$

donc si g est un élément du noyau de b alors

$$\forall f \in E : f(0)g(0) = 0,$$

ce qui donne que

$$g(0) = 0,$$

finalement

$$\text{Ker}(b) = \{g \in E : g(0) = 0\},$$

on remarque que $\text{Ker}(b) \neq \{0\}$, donc b est dégénérée.

Définition 2.8 (Orthogonalité). Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un K -espace vectoriel E , et x, y deux vecteurs de E et A un sous ensemble non vide de E . Alors

1. On dit que les deux vecteurs x et y sont orthogonaux relative à f si

$$f(x, y) = 0.$$

2. On appelle l'orthogonal de A relative à f , et on le note A^\perp , le sous ensemble de E défini par

$$A^\perp = \{y \in E / \forall x \in A : f(x, y) = 0\}.$$

Exemple 2.8. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel, et soit l'application bilinéaire symétrique f définie sur E par

$$\forall P, Q \in E : f(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t) dt,$$

et soit F le sous ensemble de E défini par

$$F = \{ Q \in E : \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \alpha x^2 + \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \},$$

on veut déterminer l'orthogonal de F par rapport à la forme f . Alors pour $Q \in F^\perp$, on a

$$\forall P \in F : f(P, Q) = 0 \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha X^2 + \beta X, Q) = 0,$$

on utilise la bilinéarité de f , en particulier sa linéarité par rapport à sa première variable on a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha f(X^2, Q) + \beta f(X, Q) = 0 \Rightarrow f(X^2, Q) = 0, f(X, Q) = 0,$$

or $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ donc

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

ce qui donne

$$a f(X^2, X^3) + b f(X^2, X^2) + c f(X^2, X) + d f(X^2, 1) = 0,$$

$$a f(X, X^3) + b f(X, X^2) + c f(X, X) + d f(X, 1) = 0,$$

alors le calcul fournit

$$3b + 5d = 0, \quad 3a + 5c = 0,$$

donc

$$Q(X) = a \left(X^3 - \frac{3}{5} X \right) + b \left(X^2 - \frac{3}{5} \right), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

ainsi

$$A^\perp = \left\langle X^3 - \frac{3}{5} X, X^2 - \frac{3}{5} \right\rangle.$$

Lemme 2.1. Soient E un K -espace vectoriel, f une forme bilinéaire symétrique définie sur E et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie. Alors le vecteur $w \in F^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à une base de F .

Exemple 2.9. On considère l'exemple 2.8 page 27 dans lequel on a déterminé l'orthogonal de l'ensemble

$$F = \{ Q \in E : \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \alpha x^2 + \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \},$$

il est clair que cet ensemble est un sous espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_3[X]$ et que la famille

$$B = \{ X^2, X \},$$

est une base de F , ainsi l'orthogonale de F est défini par

$$F^\perp = \{ w \in E : f(X^2, w) = f(X, w) = 0 \},$$

et le calcul conduit au même résultat que dans l'exemple 2.8.

Proposition 2.1. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un K -espace vectoriel E et A un sous ensemble non vide de E . Alors l'orthogonal de A est un sous espace vectoriel de E .

Proposition 2.2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension quelconque et soit f une forme bilinéaire symétrique définie sur E , alors les assertions suivantes sont vraies.

1. $\{0\}^\perp = E$.
2. $E^\perp = \text{Ker}(f)$.
3. $\forall B \subset E, B \neq \emptyset : \text{Ker}(f) \subset B^\perp$.

Proposition 2.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique définie sur E et F un sous espace vectoriel de E . Alors

1. $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim (F \cap \text{Ker}(f))$.
2. $F^{\perp\perp} = F + \text{Ker}(f)$.

Définition 2.9 (Orthogonalité par rapport à une forme quadratique). On dit que deux vecteurs sont orthogonaux par rapport à une forme quadratique Q , s'ils sont orthogonaux par rapport à sa forme polaire S .

Définition 2.10 (Vecteur isotrope). Soit E un K - espace vectoriel et Q une forme quadratique sur E , on dit que v est un vecteur isotrope si

$$Q(v) = 0.$$

L'ensemble des vecteurs isotropes de Q est appelé le cône isotrope, est noté

$$\mathcal{I}(Q) = \{ X \in E : Q(X) = 0 \}.$$

Exemple 2.10. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit la forme quadratique Q définie sur E par

$$\forall p \in E : Q(p) = p'(0)p(0),$$

et on veut déterminer le cône isotrope de cette forme, alors soit $Q(p) = 0$ donc

$$p'(0)p(0) = 0,$$

or p est un polynôme donc

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad p'(x) = \sum_{k=1}^m k a_k x^{k-1},$$

alors il est simple de voir que

$$p'(0) p(0) = a_1 a_0$$

donc

$$p \in \mathcal{I}(Q) \iff p(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^k \text{ et } a_1 a_0 = 0.$$

Remarque 2.1 (Importante). *Contrairement au noyau dans le cas général le cône isotrope n'est pas un sous espace vectoriel.*

Lemme 2.2. *Soit E un K -espace vectoriel et Q une forme quadratique sur E . Alors*

$$\text{Ker}(Q) \subset \mathcal{I}(Q).$$

En effet, pour f la forme polaire de Q , alors

$$\text{Ker}(Q) = \{x \in E \mid \forall y \in E \ f(x, y) = 0\}.$$

Soit $x \in \text{Ker}Q$ alors

$$\forall y \in E \ f(x, y) = 0.$$

Pour $x = y$, alors $f(x, x) = Q(x) = 0$ donc $x \in \mathcal{I}(x)$.

Exemple 2.11. *Soit $E = \mathbb{C}^2$ et $f \in \mathcal{L}(E; K)$ tels que*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad \forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in E^2.$$

Alors on a

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

$$\text{Ker}f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2 \ f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0\},$$

alors on a

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2,$$

donc

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0.$$

D'où

$$\text{Ker}Q = \text{Ker}f = \{(0, 0)\}, \text{ alors } f \text{ est non dégénérée.}$$

Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(Q) &= \{(x_1, x_2) \in E \mid Q(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in E \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \\ &= \{x_1(1, i) \text{ ou } x_1(1, -i), \quad x_1 \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Donc on a pas toujours

$$\mathcal{I}(Q) \subset \text{Ker}(Q).$$

Définition 2.11 (Sous espaces isotropes). Soient E un K -espace vectoriel, F un sous espace vectoriel de E et Q une forme quadratique définie sur E . On dit que F est un sous espace isotrope de E si

$$F \cap F^\perp \neq \{0\} . \quad (2.3)$$

2.6 Bases orthogonales

Définition 2.12 (Base orthogonale). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , f une forme bilinéaire symétrique et B une base de E avec

$$B = \{ e_1 , \dots , e_n \} .$$

Alors

1. On dit que B est une base orthogonale de E si

$$\forall i, j = 1 \dots n, i \neq j : f(e_i, e_j) = 0 .$$

2. On dit que B est normalisée si

$$\forall i = 1 \dots n : f(e_i, e_j) = 1 .$$

3. On dit que B est orthonormée si elle est à la fois orthogonale et normalisée

$$\forall i, j = 1 \dots n : f(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j , \\ 0 & \text{Si } i \neq j . \end{cases}$$

Remarque 2.2 (Utile). Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E un K -espace vectoriel de dimension finie n et B une base de E . M une matrice de f relative à B , alors

1. M est diagonale si et seulement si B est orthogonale.
2. M admet que des 1 sur son diagonale si et seulement si B est normalisée.
3. $M = I_n$ si et seulement si B est orthonormée.

Théorème 2.2 (Existence des bases orthogonales). Soit E un K - espace vectoriel de dimension finie n et soit f une forme bilinéaire symétrique sur E . Alors E admet des bases orthogonales par rapport à la forme f .

2.7 Recherche des bases orthogonales

2.7.1 Méthode de Gauss.

Cette méthode s'applique uniquement lorsque la forme quadratique admet dans son expression au moins un terme carré. Soit \mathbb{R}^3 vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel et Q une forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

On considère un terme carré quelconque par exemple x_1^2

1. On ordonne suivant le paramètre x_1

$$Q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2}_{\text{Termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3.$$

2. On écrit les termes en x_1 comme le début d'un carré

$$Q(x) = \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\text{Termes en } x_1} - x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3.$$

3. On obtient le carré d'une forme linéaire et des termes qui ne contiennent pas x_1

$$Q(x) = (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3}_{\text{Terme ne contient pas } x_1}.$$

4. On refait le même travail sur les termes qui ne contiennent pas x_1 par exemple sur le terme en x_2

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2}_{\text{Terme en } x_2} \\ &= (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{(x_2 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 + 5x_3^2}_{\text{Terme en } x_2} \end{aligned}$$

5. On continue l'opération jusqu'à la disparition de tous les termes sous la forme $x_i x_j$, pour $i \neq j$

$$Q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2.$$

Cette méthode est utile par contre elle ne peut être utilisée que si dans toutes les étapes il y a au moins un terme carré dans le cas contraire il faut utiliser la méthode qui sera traitée dans la prochaine sous-section.

2.7.2 Méthode des dérivées partielles.

Cette méthode s'applique lorsque la forme quadratique n'admet aucun terme carré dans son expression. Soit $E = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit la forme quadratique Q définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3.$$

1. On choisit un terme sous la forme Kx_kx_l avec $K \neq 0$. Dans notre cas on prend

$$5x_1x_2.$$

2. On calcule les dérivées partielles

$$\ell_1(x) = \partial_{x_k}Q(x), \quad \ell_2(x) = \partial_{x_l}Q(x).$$

Dans notre cas on a

$$\ell_1(x) = \partial_{x_1}Q(x) = 5x_2 + 6x_3, \quad \ell_2(x) = \partial_{x_2}Q(x) = 5x_1 + 3x_3.$$

3. On écrit Q sous la forme

$$\forall x \in E : Q(x) = \frac{1}{K} \partial_{x_k}Q(x) \partial_{x_l}Q(x) + \text{Terme Correctif}.$$

Dans notre cas on a

$$\forall x \in E : Q(x) = \frac{1}{5} (5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3) - \frac{18}{5}x_3^2.$$

4. On aura une écriture de la forme

$$\forall x \in E : Q(x) = \frac{1}{K} \ell_1(x) \ell_2(x) + \text{Terme Correctif},$$

puisque

$$(\ell_1 + \ell_2)^2 = \ell_1^2 + 2\ell_1\ell_2 + \ell_2^2, \quad (\ell_1 - \ell_2)^2 = \ell_1^2 - 2\ell_1\ell_2 + \ell_2^2,$$

alors

$$4\ell_1\ell_2 = (\ell_1 + \ell_2)^2 - (\ell_1 - \ell_2)^2.$$

$$\ell_1 \equiv \partial_k Q, \quad \ell_2 \equiv \partial_l Q,$$

pour avoir la forme finale

$$\forall x \in E : Q(x) = \frac{1}{4K} (\ell_1 + \ell_2)^2 - \frac{1}{4K} (\ell_1 - \ell_2)^2 + \text{Terme Correctif}.$$

Dans notre cas on aura

$$\forall x \in E : Q(x) = \frac{1}{20} (5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20} (5x_1 - 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^3.$$

5. Si dans le terme correctif on a un terme sous la forme $x_i x_j$ avec $i \neq j$, on refait les mêmes étapes au niveau de ce terme, si on a un mélange des termes carrés et des termes sous la forme $x_i x_j$ avec $i \neq j$ on refait la méthode de Gauss au niveau de ce terme. Lorsqu'il ne reste que des termes carrés la procédure s'achève.

Proposition 2.4. *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et Q une forme quadratique définie sur E satisfaisant les deux méthodes (Gauss + des dérivées partielles) donc elle peut être écrite sous la forme*

$$\sum_{k=1}^p a_k P_k(x)^2, \quad p \leq n,$$

avec P_k des applications linéaires. Alors la famille

$$P_1, \dots, P_p,$$

est libre.

2.7.3 Résultat des deux méthodes.

Dans les deux méthodes précédentes la forme finale de l'application Q c'était

$$a_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + a_p \tilde{x}_p^2, \quad (2.4)$$

telle que dans le cas général

$$p \leq \dim E.$$

Alors on peut écrire un système qui transforme x_i en \tilde{x}_j , en effet

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

alors soit la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

Tel que

$$r = \text{rg}(Q)$$

et p est un entier qui ne dépend que de la forme de Q et non de la base.

Définition 2.14 (Signature d'une forme quadratique). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et soit Q une forme quadratique sur E telle que sa réduction de Sylvester est donnée par l'équation (2.6). On appelle signature de la forme Q et on la note $\text{sign}(Q)$ le couple

$$\text{sign}(Q) = (p, r - p).$$

Lemme 2.3. Soit Q une forme quadratique sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n . Alors on a les assertions suivantes

1. Q est définie positive si et seulement si

$$\text{sign}(Q) = (n, 0).$$

2. Q est non dégénérée si et seulement si

$$\text{sign}(Q) = (p, n - p).$$

Remarque 2.3 (Importante). La détermination de la réduction de Sylvester d'une forme quadratique se fait en utilisant un mélange de la méthode de Gauss et de la méthode des dérivées partielles.

Pour la forme $Q(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ sur $E = \mathbb{R}^3$. Elle se réduit en

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2,$$

dans la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

elle est de signature

$$\text{sign}(Q) = (2, 0),$$

2.9 Endomorphisme orthogonal. Matrice orthogonale. Endomorphisme adjoint

Soit E un espace vectoriel sur le corps K de caractéristique différente de 2.

Définition 2.15. Soit $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme f -orthogonal (ou orthogonal relativement à f) si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(u(x), u(y)) = f(x, y).$$

Définition 2.16. Soit $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ non dégénérée, soit G l'ensemble des endomorphisme f -orthogonal, alors (G, \circ) est appelé le groupe f -orthogonal (ou le groupe orthogonal relativement à f).

Théorème et Définition 2.1. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$. Pour tout endomorphisme u sur E , il existe un endomorphisme unique u^* sur E tel que

1. $\forall (x, y) \in E^2 \quad f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$
2. $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \forall \alpha, \beta \in K$
 - $(\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*$
 - $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
 - $(u^*)^* = u, \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^*, \det u = \det u^*$
 - Si u inversible, u^* est inversible et on a $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

u^* se nomme **endomorphisme adjoint** de u relativement à f . Si $u = u^*$ on dit que u^* **endomorphisme auto-adjoint** de u .

Théorème et Définition 2.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors on a l'équivalence des propriétés suivantes

1. ${}^t A \cdot A = I_n$.
2. $A \cdot {}^t A = I_n$.
3. $A^{-1} = {}^t A$.

La matrice A se nomme **matrice orthogonale**.

Théorème 2.4. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ non dégénérée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une base orthonormale de E , alors on a l'équivalence des propriétés suivantes

1. u est un endomorphisme f -orthogonal.
2. La matrice de u par rapport à la base B est une matrice orthogonale.

Propriété 2.5. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ non dégénérée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit ϕ la forme quadratique de f . Alors on a

1. u est un endomorphisme f -orthogonal $\Rightarrow u$ est un automorphisme
2. $u^* \circ u = \operatorname{Id}_E \Leftrightarrow u \circ u^* = \operatorname{Id}_E \Leftrightarrow u$ inversible et $u^* = u^{-1}$.
3. u est un endomorphisme f -orthogonal $\Leftrightarrow u^* \circ u = \operatorname{Id}_E \Leftrightarrow \phi(u(x)) = \phi(x)$.
4. u est un endomorphisme f -orthogonal $\Rightarrow \det u = \pm 1$.

2.10 Exercices

Exercice 1 : Soit l'espace Soit l'application f de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ vers \mathbb{R} , donnée par :

$$f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P}(1)\mathcal{Q}'(1), \quad \forall(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathbb{R}_2[X]^2.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire.
2. Donner la matrice B de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
 f est-elle symétrique ? Anti-symétrique ?
3. Déterminer la forme quadratique, ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ vers \mathbb{R} telle que $\phi(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}, \mathcal{P})$.
4. Donner la forme pôlaire, \mathcal{S} , de ϕ .
5. Donner la décomposition de Sylvester de ϕ et la signature de ϕ .
6. ϕ est-elle définie positive ? ϕ est-elle non dégénérée ?
7. Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par
 $F := \{ \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] / \mathcal{P}(X) = aX^2 + b, \text{ telque } a, b \in \mathbb{R} \}$,
relativement à ϕ .
8. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}_2[X]$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{S}(\lambda X^2 + 1, (X - 1)\mathcal{P}(X)) = 0$$

Solution :

Soit l'application f de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ vers \mathbb{R} , donnée par :

$$f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P}(1)\mathcal{Q}'(1), \quad \forall(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in \mathbb{R}_2[X]^2.$$

1. f est une forme bilinéaire. pour tout , $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$, éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et pour tout λ élément de \mathbb{R} , le calcul fournit

$$f(\mathcal{P}_1 + \lambda\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1) = f(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1) + \lambda f(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1).$$

donc f est linéaire par rapport à la première variable.

$$f(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1 + \lambda \mathcal{Q}_2) = f(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1) + \lambda f(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_2).$$

donc f est linéaire par rapport à la seconde variable.

2. La matrice B de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vaut $\{1, X, X^2\}$, la matrice associée à f vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Pour voir si elle est symétrique ou anti-symétrique, on remarque que la matrice associée n'est pas symétrique et n'est pas anti-symétrique donc f elle ne peut être symétrique ni anti-symétrique.
4. La forme quadratique, ϕ de $\mathbb{R}_2[X]$ vers \mathbb{R} telles que $\phi(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}, \mathcal{P})$. Vue que $\mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ donc il existe a, b et c dans \mathbb{R} telle que $\mathcal{P}(X) = aX^2 + bX + c$, ce qui donne

$$\Phi(\mathcal{P}) = 2a^2 + b^2 + 3ab + 2ac + bc,$$

5. La forme bilinéaire, \mathcal{S} , de ϕ .

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \frac{1}{2} [\Phi(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) - \Phi(\mathcal{P}) - \Phi(\mathcal{Q})],$$

ce qui donne

$$\forall \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_2[X] : \mathcal{S}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}(1)\mathcal{Q}(1) + \mathcal{Q}(1)\mathcal{P}(1)].$$

6. La forme réduite de Sylvester

$$\left(b + \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}c\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c\right)^2.$$

La signature de ϕ est $(1, 1)$.

7. ϕ n'est pas définie positive et elle est dégénérée.
8. L'orthogonale de sous espaces vectoriel

$$F := \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(X) = aX^2 + b, \text{ telque } a, b \in \mathbb{R}\},$$

relativement à ϕ est

$$F^\perp = \{Q \in \mathbb{R}_2[X] / \forall P \in F : \mathcal{S}(P, Q) = 0\},$$

Donc pour $\mathcal{P} \in F$, on a

$$\mathcal{S}(aX^2 + b, \mathcal{Q}) = 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

donc , $\forall a, b \in \mathbb{R} : \mathcal{S}(aX^2 + b, \mathcal{Q}) = 0,$

alors

$$\forall \mathcal{Q} \in F^\perp \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{S}(X^2, \mathcal{Q}) = 0 \\ \mathcal{S}(1, \mathcal{Q}) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Q}'(1) + 2\mathcal{Q}(1) = 0 \\ \mathcal{Q}'(1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Q}(1) = 0 \\ \mathcal{Q}'(1) = 0 \end{cases}$$

Pour $\mathcal{Q}(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$

On a

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha, \\ \beta = -2\alpha \end{cases}$$

Donc

$$F^\perp = \text{Vect} \langle X^2 - 2X + 1 \rangle .$$

9. On veut résoudre l'équation

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathcal{S}(\lambda X^2 + 1, (X - 1)\mathcal{P}(X)) = 0,$$

ce qui revient à dire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \mathcal{S}(X^2, (X - 1)\mathcal{P}(X)) + \mathcal{S}(1, (X - 1)\mathcal{P}(X)) = 0,$$

donc

$$\mathcal{S}(X^2, (X - 1)\mathcal{P}(X)) = 0, \quad \mathcal{S}(1, (X - 1)\mathcal{P}(X)) = 0,$$

en conclusion

$$(X - 1)\mathcal{P}(X) \in F^\perp$$

ce qui donne que pour certain $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(X) = aX^2 + bX + c$

$$(X - 1)\mathcal{P}(X) = \gamma(X^2 - 2X + 1), \iff a = 0, b = \gamma, c = -\gamma$$

alors

$$\mathcal{P}(X) = \gamma(X - 1).$$

Exercice 2 Soient \mathbf{E} un \mathbb{K} - espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur \mathbf{E} , et $\mathcal{A} \subset \mathbf{E}$. On désigne par \mathcal{A}^\perp l'orthogonale de \mathcal{A} relativement à la forme φ .

1. Montrer que

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbf{E}, (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp .$$

2. Montrer que si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive alors

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbf{E}, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp.$$

Solution

1. On veut montrer que

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbf{E}, (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp,$$

donc

$$\begin{aligned} y \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp &\implies \forall x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} : \varphi(x, y) = 0, \\ &\implies [\forall x \in \mathcal{A} : \varphi(x, y) = 0], [\forall x' \in \mathcal{B} : \varphi(x', y) = 0], \\ &\implies \forall x + x' \in \mathcal{A} + \mathcal{B} : \varphi(x + x', y) = 0, \\ &\implies y \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp. \end{aligned}$$

2. On veut montrer que si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive alors

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbf{E}, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp,$$

donc

$$\begin{aligned} y \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp &\implies \forall x \in \mathcal{A} + \mathcal{B} : \varphi(x, y) = 0, \\ &\implies \forall x_a \in \mathcal{A}, \forall x_b \in \mathcal{B} : \varphi(x_a + x_b, y) = 0, \\ &\implies \forall x_a \in \mathcal{A}, \forall x_b \in \mathcal{B} : \overbrace{\varphi(x_a, y)}^{\geq 0} + \overbrace{\varphi(x_b, y)}^{\geq 0} = 0, \\ &\implies \forall x_a \in \mathcal{A} : \varphi(x_a, y) = 0, \forall x_b \in \mathcal{B} : \varphi(x_b, y) = 0, \\ &\implies \forall x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} : \varphi(x, y) = 0, \\ &\implies y \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp. \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit E un K -espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ et ϕ la forme quadratique associée à f , alors on a

1. $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2\phi(x) + 2\phi(y).$
2. $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) - \phi(x - y) = 4f(x, y).$
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K \phi(\lambda x) = \lambda^2 \phi(x).$

Solution : $\forall (x, y) \in E^2$

On a

$$\begin{cases} \phi(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) \\ \phi(x - y) = f(x - y, x - y) = f(x, x) - f(x, y) - f(y, x) + f(y, y) \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) + 2f(x,y) \dots (1) \\ \phi(x-y) = \phi(x) + \phi(y) - 2f(x,y) \dots (2) \end{cases}$$

1. $(1) + (2) \iff \forall(x, y) \in E^2, \phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x) + 2\phi(y)$.
2. $(1) - (2) \iff \forall(x, y) \in E^2, \phi(x+y) - \phi(x-y) = 4f(x,y)$.
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K \phi(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 f(x, x) = \lambda^2 \phi(x)$.

Exercice 4 : Soit l'espace $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a - d = 0 \right\}$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit la forme bilinéaire f de $V \times V$ vers \mathbb{R} par $f(M, N) = \text{tr}(MJN)$ pour tout $(M, N) \in V \times V$.

1. Calculer $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
 $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
 f est-elle symétrique, antisymétrique?
2. Montrer que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de V .
3. Trouver la matrice de f par rapport à la base B .
4. Déterminer la forme quadratique, ϕ de f .
5. Donner la décomposition de Sylvester de ϕ .
6. Soit le sous-espace vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a - b = 0 \right\}$ de V . Déterminer F^\perp relativement à ϕ .
7. Calculer $F \cap F^\perp$. F est-elle isotrope.

Solution :

1. On a

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}(MJN) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$$

et

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

f elle n'est pas symétrique Puisque il existe deux éléments $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f(X, Y) \neq f(Y, X)$. et elle n'est pas antisymétrique puisque il existe deux éléments $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f(X_1, Y_1) \neq -f(Y_1, X_1)$.

2. La matrice de f par rapport à la base $B = \{b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$:

$$\begin{array}{lll} f(b_1, b_1) = 0 & f(b_1, b_2) = 1 & f(b_1, b_3) = 1 \\ f(b_2, b_1) = 1 & f(b_2, b_2) = 0 & f(b_2, b_3) = -1 \\ f(b_3, b_1) = 1 & f(b_3, b_2) = 1 & f(b_3, b_3) = 0 \end{array}$$

d'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La forme quadratique, ϕ de f : On a $\phi(M) = f(M, M) = \text{tr}(MJM)$ pour tout $M \in V$, donc

$$f(M, M) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

4. La décomposition de Sylvester de ϕ : On a pour tout $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $\phi(M) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. On applique la méthode des dérivées partielles on obtient,

$$\phi(M) = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x) \right] \right] + \text{terme correctif} = \frac{1}{2} (2x_2 + 2x_3)(2x_1) + 0,$$

$$\phi(M) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} (\ell_1 + \ell_2)^2 - \frac{1}{4} (\ell_1 - \ell_2)^2 \right] = \frac{1}{8} (2x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{8} (-2x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2.$$

donc

$$\phi(M) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} (2x_1 + 2x_2 + 2x_3) \right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} (-2x_1 + 2x_2 + 2x_3) \right)^2 = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2.$$

5. On a $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a - b = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, donc

$$F^\perp = \left\{ N \in V, \forall M \in F, S(M, N) = \frac{f(M, N) + f(N, M)}{2} = 0 \right\},$$

d'où

$$S\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N\right) = 0 \iff \alpha S\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N\right) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

donc $S\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N\right) = 0$, on cherche $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$, on trouve

$$N = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in F \cap F^\perp$ alors on a

$$\begin{cases} b = c = 0 \\ c = -b \end{cases} \iff b = c = 0,$$

donc

$$F \cap F^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

d'où

$$F \cap F^\perp \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

alors F est isotrope.

Exercice 6 : Soit E un K -espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ et u une application de E vers E . On suppose que $x = 0$ est le seul vecteur isotrope de f et on suppose qu'on a : $\forall (x, y) \in E^2, f(u(x), u(y)) = f(x, y)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme sur E .
2. Montrer que u est injective.

Groupe orthogonal. Formes Hermitiennes

3.1 Groupe orthogonal

E un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique différente de 2.

3.1.1 Endomorphisme orthogonal

Définition 3.1. Soit $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dira que u est un endomorphisme f -orthogonal (ou orthogonal relativement à f) si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(u(x), u(y)) = f(x, y).$$

Définition 3.2. Soit $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ non dégénérée, soit G l'ensemble des endomorphismes f -orthogonaux, alors (G, \circ) est appelé le groupe f -orthogonal (ou le groupe orthogonal relativement à f)

Théorème et Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie. Pour tout endomorphisme u de E , il existe un endomorphisme unique u^* sur E tel que

1. $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(u(x), y) = f(x, u^*(y)).$
2. $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \forall \alpha, \beta \in K$
 - a) $(\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*.$
 - b) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*.$

c) $(u^*)^* = u$, $\det u = \det u^*$. Si u inversible, alors u^* est inversible et on a

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

u^* se nomme **endomorphisme adjoint de u** .

Théorème et Définition 3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors on a l'équivalence des propriétés suivantes

1. ${}^t A A = I_n$.
2. $A {}^t A = I_n$.
3. $A^{-1} = {}^t A$.

Une matrice qui vérifie les propriétés précédentes se nomme **matrice orthogonale**.

Théorème 3.1. Soit E un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie. $f \in \mathcal{L}_s(E; K)$ non dégénérée et $u \in \mathcal{L}(E)$. soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une base orthogonale de E , alors on a

u est un endomorphisme f -orthogonal \iff La matrice A de u par rapport à la base $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est une matrice orthogonale.

3.2 Formes hermitiennes

3.2.1 Généralités

Soit E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{C} .

Définition 3.3. f une application de E vers F . On dit que f est une **application semi-linéaire** si on a

1. $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Si $F = \mathbb{C}$ on dit que f est une **forme semi-linéaire**.

Définition 3.4. Soit une application de $E \times F$ vers \mathbb{C} . On dit que f est une **forme sesquilinéaire** si $\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a :

1. $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$.
2. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$
3. $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$.
4. $f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y)$.

Remarque 3.1. Une forme sesquilinéaire si, et seulement si

1. $f(x, \cdot)$ est une forme semi-linéaire, pour x fixé.
2. $f(\cdot, y)$ est une forme linéaire, pour y fixé.

Définition 3.5. soit f une forme sesquilinéaire de $E \times E$ vers \mathbb{C} . On dit que f est une **forme hermitienne** sur E si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

Une conséquence immédiate de la définition est la suivante :

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) = \overline{f(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.6. On appelle **forme quadratique hermitienne** associée à la forme hermitienne f , l'application ϕ de E dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = f(x, x).$$

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension n , f une forme hermitienne sur E et $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une base de E . Soit $A = (\alpha_{ij})$ la matrice de f par rapport à B est donnée par

$$\alpha_{ij} = f(a_i, a_j), \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

Puisque

$$\alpha_{ji} = f(a_j, a_i) = \overline{f(a_i, a_j)} = \overline{\alpha_{ij}},$$

donc

$${}^t A = \overline{A}, \quad \text{où } \overline{A} = \overline{\alpha_{ij}}.$$

Définition 3.7. On dit que une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une **matrice hermitienne** si ${}^t A = \overline{A}$.

Soit f une forme hermitienne, A la matrice de f dans une base B de E , on a

$$f(x, y) = {}^t X \cdot A \cdot \overline{Y},$$

où X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base B et Y est le vecteur colonne des coordonnées de y dans la base B .

Théorème 3.2. f est une forme hermitienne si, et seulement si sa matrice par rapport à une base de E est hermitienne

3.2.2 Orthogonalité. Noyau. Isotropes

De nombreux résultats de l'étude des formes bilinéaires symétriques faites au chapitre 2 vont appliquer aux formes hermitiennes avec très peu ou quelque fois pas de changement.

f forme hermitienne sur E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n .

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x, y) = 0 \iff f(y, x) = \overline{f(x, y)} = 0.$$

1. Si l'une des conditions $f(x, y) = 0$ ou $f(y, x) = 0$, on dit que x, y sont orthogonaux.
2. Le sous-espace orthogonal à F , un sous-espace de E , est donné par

$$F^\perp = \{x \in E, \quad \forall y \in F, \quad f(x, y) = 0\}.$$

3. Un vecteur $x \in E$ est isotrope relativement à f si $f(x, x) = 0$
4. F un sous-espace isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.
5. On appelle base orthogonale de E par rapport à f toute base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E telle que

$$f(e_i, e_j) = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Par rapport à une telle base, la matrice $A = (a_{ij})$ de f est diagonale, et on a

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i \overline{y_i}, \quad \forall (x, y) \in E^2.$$

et la forme quadratique associée,

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2.$$

6. On appelle base orthogonale de E par rapport à f toute base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E telle que

$$\begin{cases} f(e_i, e_j) = 0 & \text{pour } 1 \leq i < j \leq n \\ f(e_i, e_i) = 1 & \text{pour } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Par rapport à une telle base, la matrice $A = (a_{ij})$ de f est la matrice unité, et on a

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}, \quad \forall (x, y) \in E^2,$$

et la forme quadratique associée est

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

7. Puisque $x \mapsto f(\cdot, x)$ est semi-linéaire de E dans E^* , on peut associer à E les deux lois, une interne (addition) et une externe notée $*$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda * x = \bar{\lambda} \cdot x \end{aligned}$$

Alors $(E, +, *)$ est un \mathbb{C} espace vectoriel. On le nomme sous-espace conjugué de E et on le note \overline{E} .

8. L'application

$$\begin{aligned} \widehat{f} : E &\longrightarrow \overline{E^*} \\ x &\longmapsto \widehat{f}(x) = f(\cdot, x), \end{aligned}$$

est une application linéaire.

9. On appelle noyau de la forme hermitienne f , le noyau de \widehat{f} . La forme hermitienne f est non dégénérée si

$$\text{Ker } f = \text{Ker } \widehat{f} = \{x \in E, \forall y \in E, f(x, y) = 0\} = \{0\}.$$

10. Pour E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , et pour f une forme hermitienne sur E et A la matrice de f par rapport à n'importe quelle base de E , On a l'équivalence des propriétés suivantes

a) f non dégénérée.

b) $\forall x \in E, f(x, x) = 0 \implies x = 0$

c) $\forall y \in E, f(y, y) = 0 \implies y = 0$

d) L'application $\widehat{f} : E \longrightarrow \overline{E^*}$, définie par $\widehat{f}(x) = f(\cdot, x)$ pour tout $x \in E$, est un isomorphisme.

e) $\det A \neq 0$.

11. Le rang d'une forme hermitienne f sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie E est le rang de l'application linéaire \widehat{f} .

12. Pour ϕ la forme quadratique hermitienne associée à f une forme hermitienne du rang r , s'il existe deux bases orthogonales relativement à f par rapport à laquelle

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^q |x_i|^2 - \sum_{i=q+1}^r |x_i|^2,$$

et

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{q'} |x'_i|^2 - \sum_{i=q'+1}^r |x'_i|^2,$$

on a alors $q = q'$.

$(q, r - q)$ est la signature de la forme hermitienne.

3.2.3 Formes hermitiennes positives non dégénérée.

E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n .

Définition 3.8. Une forme hermitienne f sur E est dite positive si

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) \geq 0.$$

On dit dans ce cas aussi que la forme quadratique hermitienne ϕ associée à f est positive

Théorème 3.3. Soit f une forme hermitienne positive sur E alors on a

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x) \cdot f(y, y), \quad \text{Inégalité de Schwartz.}$$

3.3 Exercices

Exercice 1 : Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le \mathbb{C} - espace vectoriel des matrices carrées et soit

l'application \mathcal{L} définie par

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \text{Tr}(\mathcal{A} {}^t \overline{\mathcal{B}}).$$

— Montrer que \mathcal{L} est une forme hermitienne sur \mathbb{E} .

[En utilisant les propriétés suivantes : $\forall C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC) \quad {}^t(CD) = {}^t D {}^t C]$$

Solution :

Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le \mathbb{C} - espace vectoriel des matrices carrées, et soit l'application \mathcal{L} définie par

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \text{Tr}(\mathcal{A} {}^t \overline{\mathcal{B}}).$$

— \mathcal{L} représente une forme hermitienne sur \mathbb{E} .

On utilise les propriétés de la trace, produit et la transposée des matrices on peut conclure que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{E}$ les propriétés suivantes sont vraies

(1 - a) Linéarité par rapport à la première variable

$$\mathcal{L}(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \lambda \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

(1 - b) Semi-linéarité par rapport à la deuxième variable

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B} + \lambda \mathcal{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \overline{\lambda} \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{C}).$$

(1 - c) $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{A})}$.

Bibliographie

- [1] E.Azoulay et J.Avignant *Mathématiques*, Tome 4, Algèbre.
- [2] V.Prasolov *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*,
- [3] A. Doneddu *Algèbre et Géométrie*, Tome 7, vuibert, Paris, 1986.