REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 20 AOUT 55 DE SKIKDA
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN MATHEMATIQUES DE L'ECOLE DOCTORALE

OPTION

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Intitulé **:**

Analyse Mathématique et Numérique d'un Modèle Structuré en Age non Linéaire

Présenté par : **Djalal BOUCENNA**

Soutenu devant le jury

PRESIDENT	**F. REBBANI**	**Prof.**	**U.B.M. ANNABA**
RAPPORTEUR	**M. KOUCHE**	**M.C**	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEUR	**A. NOUAR**	**M.C**	**U. SKIKDA**
EXAMINATEUR	**N.BOUSSETILA**	**M.C**	**U. GUELMA**

Année universitaire 2013/2014

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents

A mes frères et mes sœurs

A toute ma famille

A tous mes amis

A tous ceux qui m'ont aidé et m'ont encouragé

de près ou de loin durant mes années d'études

Remerciements

Je voudrais exprimer ma reconnaissance tout d'abord à mon encadreur Dr. M KOUCHE pour le sujet qu'il ma proposé. Je voudrais remercier le professeur F. REBBANI pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider ce jury. Je voudrais remercier également le Dr. A. NOUAR et le Dr. N.BOUSSETILA. d'avoir accepté de faire partie du jury

Abstract

In this work we are interested to study existence and unicity of solution to an age strcutured system arising in population dynamics. In the first part we give a formulation of our problem in some functional space. The solution is then obtained as a fixed point of some operator by using the contraction maping Theorem. In the second part we prove regularity of solution by proving that under some hypotheses on the parameters of the model the solution obtained as a fixed point is C^1 with respect to time t and age a. Finaly in the last part we give a numerical method to approximate the solution of our problem. By adapting the method of finite difference schemes we propose a numerical scheme and we give the convergence analysis of this scheme.

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un système structuré en âge intervenant en dynamique des populations. Dans le premier chapitre on établit une formulation fonctionnelle du problème dans un certain espace fonctionnel et on montre que la solution est un point fixe d'un certain opérateur. Le Théorème de l'application contractante nous donne le point fixe recherché.

Dans le second chapitre on utilise la théorie des semi-groupe pour montrer que la solution obtenue dans la première partie est de classe C^1 par rapport à au temps et à l'âge. Dans le troisième et dernier chapitre on s'intéresse à la discrétisation de la solution. En s'inspirant de la méthode des différences finis on propose un schéma numérique et on montre que ce schéma et consistant. En introduisant la notion de stabilité de seuil M_h on montre que schéma est stable. Enfin on montre que me schéma numérique proposé est convergent.

Table des matières

Introduction

En dynamique des populations les modèles continue les plus simples ne font intervenir que la densité de population (nombre d'individus par unité de temps) ce qui suppose que ces individus sont ‹‹interchangeables››. Pour construire des modèles plus précis il est donc nécessaire de tenir compte d'autres paramètres importants tel que la répartition spatiale de la population ou l'âge de ces individus. Par exemple en épidémiologie les individus constituant la population infectée ont des taux de reproduction et des capacités de survie différentes selon leurs âges. Dans ce cas précis l'âge est un paramètre important pour modéliser la dynamique d'une telle population, on dit alors que cette population est structurée en âge.

La théorie mathématique des systèmes structurés en âge est une branche importante de la théorie plus générale des systèmes dynamiques [15-16]. Ces systèmes jouent un rôle majeur dans la modélisation en écologie, en démographie, épidémiologie etc. De nombreux modèles simplifient l'analyse mathématique en supposant que le taux de mortalité ainsi que tous les paramètres du modèle qui dépendent de l'age sont bornés amenant automatiquement à la possibilité de l'immortalité! D'autres modèles plus réalistes imposent un âge maximum qui ne peut être atteint en supposant que le taux de mortalité devient non borné à cet âge. Les premiers systèmes structurés en age linéaires ont été proposés par Lotka [20, 21], Makendrick [23] et Malthus [22]. Gurtin et MacCamy [14] ont proposés l'un des premier système structuré en age non linéaire en supposant que le taux de fécondité et de mortalité dépendent de la taille de la population totale, qui est elle meme une intégrale de la densité de l'âge. Ils ont montré que la solution du système converge vers son point d'équilibre non trivial.

Dans les modèles classiques des systèmes structurés en age on suppose que la solution u est fonction du temps t et de l'age a des individus composant la population. $u(a,t)$ représente donc le nombre d'individus de la population d'age a à l'instant t. La population totale à l'instant t d'age compris entre a_1 et a_2 est donc

$$\int_{a_1}^{a_2} u(a,t)da,$$

et la population totale à l'instant t est

$$\int_{0}^{a_m} u(a,t)da,$$

où on a supposé que a_m est l'age maximal de la population. En supposant que le taux de mortalité $m(a)$ de cette population est fonction de l'age a, le terme de mortalité devient donc $-m(a)u(a,t)$. A chaque instant t et pour les individus d'age a la croissance de la population est donnée par le terme u_t+u_a qui représente la somme des populations qui ont atteint le nombre u_t par effet de la croissance et celle qui ont atteint l'age a par effet du veillissement. Le principe de conservation de la population nous permet d'écrire:

$$u_t + u_a = -m(a)u(a,t). \tag{0.1}$$

Si on note par $\alpha(a)$ le taux de fertilité de la population d'age a, le nombre des naissances à l'instant t prevenant de la population d'age a dépend linéairement de la population $u(a,t)$ et est donnée par $\alpha(a)u(a,t)$. Le nombre total des naissance c'est à dire de tous les individus d'age 0 à l'instant t est donc

$$u(0,t) = \int_0^{a_m} \alpha(a)u(a,t)da. \tag{0.2}$$

De plus si on note par u_0 la distribution initiale de la population on a alors la donnée initiale:

$$u(a,0) = u_0(a), \tag{0.3}$$

où u_0 est une fonction non-négative et intégrable sur $[0,a_m]$. Le problème (0.1)-(0.3) décrit donc la dynamique d'une population structurée age et a été proposé pour la première fois par Makendrick [23].

Le système (0.1)-(0.2) est linéaire en u, la solution u de (0.1) converge donc soit vers son point d'équilibre trivial 0 ou bien vers ∞ ce qui n'est pas une description réaliste de la croissance d'une population. D'un point de vu mathématique il est nécéssaire de remplacer l'équation (0.1) par une équation non linéaire. D'un point de vu biologique et par analogie avec les modèles Malthusien on suppose que les taux de fertilité et de mortalité dépendent à la fois de l'age a et également de la population totale $P(t) = \displaystyle\int_0^{a_m} u(a,t)da$ à l'instant t. Gurtin et MacCamy [14] ont donc proposé le modèle suivant:

$$\begin{aligned} &u_t + u_a = -m(a,P(t))u(a,t), && a \in [0,a_m], \quad t > 0, \\ &u(0,t) = \int_0^{a_m} \alpha(a,P(t))u(a,t)da, && t > 0 \\ &u(a,0) = u_0(a), && a \in [0,a_m]. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Gurtin et MacCamy ont montré que pour toute $u_0 \in L^1(0,a_m)$ et $u_0 \geq 0$ le problème (0.1)-(0.3) admet une solution positive unique et globale pour

$t > 0$. Bien d'autres modèles ont été proposés généralisant le modèle (0.4) de Gurtin et MacCamy tels par exemple ceux incorporant un terme de diffusion pour tenir compte de la répartition spatiale de la population (voir Iannelli [15]).

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité du système structuré en age suivant:

$$\begin{cases} u_a + u_t = -(m(a) + \mu(a, I_\mu(t), t)u, & 0 < a < a_m,\ t > 0, \\ u(0,t) = \int\limits_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t)u(a,t)da, & t \geq 0, \\ u(a,0) = u_0(a) & 0 \leq a \leq a_m, \\ I_s(t) = \int\limits_0^{a_m} \gamma_s(a)u(a,t)da, & t \geq 0, s = \mu, \alpha. \end{cases} \tag{0.5}$$

Ce système a été proposé par Angulo et al. [5] pour décrire la dynamique d'une population structuré age. Dans ce modèle les auteurs supposent que le taux de mortalité est composé de la somme de deux termes: le premier terme $m(a)$ représente la mortalité dite "intrinséque" ou propre à la population u et un deuxième terme $\mu(a, I_\mu(t), t)$ qui dépend de la population totale à travers le terme $I_\mu(t)$ et du temps t afin de tenir compte de la périodicité induite par l'effet de changement des saisons. Les auteurs supposent également que la mortalité $m(a)$ est non bornée au voisinage de a_m en supposant que $\int\limits_0^{a_m} m(\delta)d\delta = +\infty$ ceci afin "d'empecher" la population u d'atteindre l'age maximal a_m. De meme il est supposé que le taux de fertilité $\alpha(a, I_\alpha(t), t)$ dépend de la population totale à travers le terme $I_\alpha(t)$ et aussi du temps t.

Dans le premier chapitre du mémoire on établit des conditions portant sur les paramètres du système sous lesquelles le problème (0.5) admet une solution. La méthode consiste à donner une formulation intégrale du probème dans un certain espace fonctionnel et d'utiliser le Théorème de l'application contractante afin d'obtenir la solution comme point fixe d'un certain opérateur. Des conditions sont également établit pour avoir l'unicité ainsi que la globalité de la solution.

Dans le second chapitre on utilise la théorie générale des semi-groupes pour montrer la régularité de la solution. En effet on montre que la solution obtenue dans le premièr chapitre comme étant un point fixe est de classe C^1 par rapport à t et de classe C^1 par rapport à a et vérifie le système (0.5).

Dans le troisième et dernier chapitre on détaille une schéma numérique proposée par Angulo et al. [5] pour construire une solution approchée de la solution du probème (0.5). Ce schéma numérique est inspiré de la méthode des différences finis adaptée au système (0.5). On montre dans un premier temps que le schéma numérique est consistant. On introduit ensuite la notion de stabilité de seuil M_h et on montre que le schéma numérique proposé et stable. Enfin on démontre la convergence du schéma numérique.

Chapitre 1
Existence et Unicité

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un système structuré en age intervenant en dynamique des populations. L'approche consiste à donner une formulation fonctionnelle du problème dans un espace fonctionnel adéquat puis de ramener la solution à un point fixe d'un certain opérateur. On montre alors que l'opérateur en question est une application contractante. L'unicité de la solution est également prouvé sous certaines hypothèses sur les paramètres du système. Enfin on donne un résultat assurant la globalité de la solution.

1.1 Existence

Notre objectif dans ce paragraphe est l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système structuré en âge suivant:

$$\begin{cases} u_a + u_t = -(m(a) + \mu(a, I_\mu(t), t)u, & 0 < a < a_m,\ t > 0, \\ u(0,t) = \int\limits_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t)u(a,t)da, & t \geq 0, \\ u(a,0) = u_0(a) & 0 \leq a \leq a_m, \\ I_s(t) = \int\limits_0^{a_m} \gamma_s(a)u(a,t)da, & t \geq 0, s = \mu, \alpha. \end{cases} \tag{P1}$$

où $\gamma_u,\ \gamma_\alpha$, m, μ, α, u_0, satisfont les conditions suivantes

(H1) $\gamma_u,\ \gamma_\alpha \in C^2([0, a_m])$

(H2) $m \in C^2[0, a_m), m \geq 0, \int\limits_0^{a_m} m(\delta)d\delta = +\infty$

(H3) $\mu \in C^2([0, a_m] \times [-\bar{\varepsilon}, P(T) \left\|\gamma_\mu\right\|_\infty + \bar{\varepsilon}] \times [0, T])$

où $P(T) = P_0 \exp\left(t \left\|\alpha\right\|_\infty\right), \mu \geq 0$

(H4) $\alpha \in C^2([0, a_m] \times [-\bar{\varepsilon}, P(T) \left\|\gamma_\alpha\right\|_\infty + \bar{\varepsilon}] \times [0, T]), \alpha \geq 0$

(H5) $u_0 \in C^2([0,a_m]),\ u_0 \geq 0,\ u_0(0) = \int\limits_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(0), 0)u_0(a)da$

et $\lim\limits_{a \longrightarrow a_m} u_0(a) \exp \int\limits_0^{a_m} m(s)ds < +\infty.$

Ecrivons la solution sous la forme

$$u(a,t) = \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,t), \tag{1.1}$$

on obtient alors

$$\frac{\partial u}{\partial t}(a,t) = \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) \frac{\partial v}{\partial t}(a,t) \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a}(a,t) \quad &= \quad -m(a)\exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,t) \\ &\quad + \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) \frac{\partial v}{\partial a}(a,t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

De (1.2) et (1.3) on déduit

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t}(a,t) + \tfrac{\partial u}{\partial a}(a,t) = \quad & \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) \tfrac{\partial v}{\partial t}(a,t) \\ . \qquad & + \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) \left[-m(a)v(a,t) + \tfrac{\partial v}{\partial a}(a,t)\right] \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(a,t) + \frac{\partial u}{\partial a}(a,t) = -(m(a) + \mu(a, I_\mu(t), t))u(a,t),$$

alors

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) \left[\tfrac{\partial v}{\partial t}(a,t) - m(a)v(a,t) + \tfrac{\partial v}{\partial a}(a,t)\right] \\ &= -[m(a) + \mu(a, I_\mu(t), t)] \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,t). \end{aligned}$$

On obtient l'équation suivante en v

$$\frac{\partial v}{\partial t}(a,t) + \frac{\partial v}{\partial a}(a,t) = -\mu(a, I_\mu(t), t)v(a,t),$$

avec la condition initiale en $a = 0$

$$u(0,t) = \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,t)da.$$

D'aprés (1.1), on a

$$u(0,t) = v(0,t),$$

il vient donc

$$v(0,t) = \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,t)da,$$

de plus la condition initiale donne

$$u(a,0) = \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,0) = u_0(a),$$

d'où

$$v(a,0) = \exp\left(\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u_0(a).$$

Remarquons que $v(a,0)$ est bornée car

$$\lim_{a \longrightarrow a_m} u_0(a) \exp \int_0^{a_m} m(s)ds < +\infty.$$

Finalement, on obtient la nouvelle formulation du problème

$$\begin{cases} u_t + u_a = -(\mu(a, I_\mu(t), t))u, & 0 < a < a_m, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u(a,t)da, & t \geq 0, \\ u(a,0) = \exp\left(\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u_0(a), & 0 \leq a \leq a_m, \\ I_s(t) = \int_0^{\alpha_m} \gamma_s(a) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u(a,t)da, & t \geq 0, \qquad s = \mu, \alpha. \end{cases} \tag{P2}$$

Remarque 1.1. L'existence et l'unicité du probléme (P1) est ramené à l'existence et l'unicité du problème (P2).

Notre but est de donner une formulation intégrale du problème (P2). Définissons les deux fonctions suivantes:

$$\begin{array}{rccl} F: & L^1([0,a_m]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & u(.,t) & \mapsto & F(u(.,t)), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} G: & L^1([0,a_m]) & \rightarrow & L^1([0,a_m]) \\ & u(.,t) & \mapsto & G(u(.,t)). \end{array}$$

où

$$G(u(.,t))(a) = -\mu(a, I_\mu(t), t) u(a,t),$$

$$F(u(.,t)) = \int_0^{\alpha_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma) d\sigma\right) u(a,t)\, da. \qquad (1.4)$$

Il est clair que les deux fonctions F et G sont bien définies. Le problème (P2) est donc équivalent a le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t + u_a & = G(u(.,t))(a) \quad 0 < a < a_m, \quad t > 0, \\ u(0,t) & = F(u(.,t)) \qquad\qquad\qquad\qquad t \geq 0, \\ u_0(a,0) & = u_0(a) \qquad\qquad 0 \leq a \leq a_m. \end{cases}$$

Lemme 1.1. *La solution de (P2) est la solution de la formulation intégrale suivante:*

$$u(a,t) = \begin{cases} F(u(.,t-a)) + \int_{t-a}^{t} G(u(.,s))(s+a-t) ds, & 0 \leq a < t, \\ u_0(a-t) + \int_0^t G(u(.,s))(s+a-t) ds, & t \leq a < a_m. \end{cases} \qquad ((P3))$$

Preuve. Posons $a - t = c,\ t_c = \max(0, -c)$, et $w_c(t) = u(t+c, t)$,où c est une constante. On a

$$\tfrac{d}{dt} w_c(t) = G(u(.,t))(t+c), \quad t \geq t_c,$$

en intégrant on obtient

$$\int_{t_c}^{t} \frac{d}{dt} w_c(t)\, dt = \int_{t_c}^{t} G(u(.,s))(s+c)\, ds. \qquad (1.5)$$

Si $a < t$, on a $t_c = -c$, d'après (1.5) il vient

$$w_c(t) = w_c(-c) + \int_{-c}^{t} G(u(.,s))(s+c)\,ds. \tag{1.6}$$

Si $a \geq t$, on a $t_c = 0$, on a une seconde fois à partir de (1.13)

$$w_c(t) = w_c(0) + \int_{0}^{t} G(u(.,s))(s+c)\,ds. \tag{1.7}$$

Les relations (1.6) et (1.7) nous donne

$$w_c(t) = \begin{cases} w_c(-c) + \int_{-c}^{t} G(u(.,s))(s+c)\,ds & 0 \leq a < t, \\ w_c(0) + \int_{0}^{t} G(u(.,s))(s+c)\,ds & t \leq a \leq a_m. \end{cases}$$

alors

$$u(a,t) = \begin{cases} u(0,t-a) + \int_{t-a}^{t} G(u(.,s))(s+a-t)ds, & 0 \leq a < t, \\ u(a-t,0) + \int_{0}^{t} G(u(.,s))(s+a-t)ds, & t \leq a < a_m. \end{cases}$$

puisque $u(0,t-a) = F(u(.,t-a))$ on obtient finalement,

$$u(a,t) = \begin{cases} F(u(.,t-a)) + \int_{t-a}^{t} G(u(.,s))(s+a-t)ds, & 0 \leq a < t, \\ u_0(a-t) + \int_{0}^{t} G(u(.,s))(s+a-t)ds, & t \leq a < a_m. \end{cases}$$

1.2 Unicité

Dans ce paragraphe on va montrer l'unicité de la solution du problème (P1). Dans tout la suite de ce paragraphe on fera l'hypothèse suivante:

(H6) Il existe deux fonctions continues et croissantes $c_1 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, et $c_2 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, telles que pour tout $t, s \in [0,T]$, on a

$$|F(u(.,t)) - F(u(.,s))|_{\mathbb{R}} \leq c_1(r)\,\|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1},$$

$$|G(u(.,t)) - G(u(.,s))|_{\mathbb{R}} \leq c_2(r)\,\|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1},$$

où $\|u(.,t)\|_{L^1} \leq r$ et $\|u(.,s)\|_{L^1} \leq r$ pour tout $t \in [0,T]$.

Lemme 1.2. *Soit $b \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}$ alors l'opérateur de translation donné par*

$$\begin{array}{rccc} T_h: & L^1([0,b]) & \rightarrow & L^1([0,b]) \\ & \phi & \mapsto & T_h(\phi), \end{array}$$

où

$$T_h(\phi)(a) = \begin{cases} \phi(a+h), & \max(0,-h) \leq a \leq b-h \ \textit{et}\ h < b, \\ 0 & \textit{sinon}, \end{cases}$$

est continue.

Preuve. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1([0,b])$ telle que ϕ_n converge vers ϕ. Alors,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow \|\phi_n - \phi\|_{L^1} = \int_0^b |\phi_n(a) - \phi(a)| < \varepsilon. \quad (1.9)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|T_h(\phi_n) - T_h(\phi)\|_{L^1} &= \int_{\max(0,-h)}^{b-h} |T_h(\phi_n)(a) - T_h(\phi)(a)|\, da \\ &\leq \int_{-h}^{b-h} |\phi_n(a+h) - \phi(a+h)|\, da \\ &\leq \int_0^b |\phi_n(a) - \phi(a)|\, da. \end{aligned} \quad (1.10)$$

En combinant (1.9) et (1.10) on déduit que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow \|T_h(\phi_n) - T_h(\phi)\|_{L^1[0,a_m]} < \varepsilon,$$

c'est-à-dire T_h est un opérateur continu. ■

On aurra besoin a le lemme suivants dont la preuve est donnée dans [4]. Définissons l'espace

$$L_T = \{u : [0,T] \longmapsto L^1[0,a_m] \text{ telle que } u \text{ est continue sur } [0,T]\}$$

meuni de la norme $\|u\|_{L_T} = \sup\limits_{0\leq t\leq T} \|u(.,t)\|_{L^1}$

Lemme 1.3. *Soient $T > 0$, et $u \in L_T$, alors il existe un unique élément u de $L^1((0,a_m) \times (0,T), \mathbb{R}$, satisfaisant*

$$\forall t \in [0,T],\ u(a,t) = u(t)(a),$$

Pour tout $a \in [0,a_m]$. De plus

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(t)\|_{L^1[0,a_m]}\, dt &= \int_0^T \left(\int_0^{a_m} |u(t)(a)|\, da \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_0^{a_m} |u(a,t)|\, da \right) dt \\ &= \int_0^{a_m} \left(\int_0^T |u(a,t)|\, dt \right) da. \end{aligned}$$

Soient $T > 0$, $u \in L_T$, et $\Gamma_T = \{(c,s) \mid -s < c < a_m\}$. Alors
(i) La fonction $t \mapsto G(u(.,t)) \in L^1$ prend ses valeurs dans L_T, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,T], \quad G(u(.,t) \in L_T.$$

(ii) Il existe $H \in L^1((0,a_m) \times (0,T), \mathbb{R})$ telle que

$$\forall \in [0,a_m]\,, \quad \forall t \in [0,T], \quad H(a,t) = G(u(.,t))(a).$$

(iii) Il existe $K \in L^1(\Gamma_T, \mathbb{R})$ telle que

$$K(c,s) = H(s+c,s), \quad \forall (c,s) \in \Gamma_T.$$

De plus

$$\int_0^T \left[\int_{-s}^{a_m} K(c,s)dc \right] ds = \int_{-T}^{a_m} \left[\int_{\max(0,-c)}^T K(c,s)ds \right] dc,$$

C'est-à-dire

$$\int_0^T \left[\int_{-s}^{a_m} G(u(.,s))(s+c)dc \right] ds = \int_{-T}^{a_m} \left[\int_{\max(0,-c)}^T G(u(.,s))(s+c)ds \right] dc.$$

Le théorème suivant réduit l'étude l'unicité de la solution du problème (P2) à celle de (P3).

Théorème 1.1. *(unicité) Si les deux fonctions, F et G associées au problème (P2), données par (1.4) satisfont (H6), et $u_0 \in L^1[0, a_m]$,* alors *il existe $T > 0$, et $u \in L_T$, tels que u est une solution unique du problème (P3).*

Preuve. Pour démontrer le Théorème 1.1 on va montrer l'unicité de la solution puisque l'exisitence est déjà prouvé par le Lemme 1.1.
Puisque $u_0 \in L^1[0, a_m]$ alors il existe $r > 0$, telle que $\|u_0\|_{L^1[0,a_m]} \leq r$.
On choisit $r > \frac{1}{2}$, et $T > 0$, vérifiant

$$T\left(c_1(2r) + c_2(2r) + \frac{|F(0)| + \|G(0)\|}{2r}\right) + \frac{1}{2} \leq 1. \tag{1.11}$$

Définissons l'ensemble M par

$$M = \left\{u \in L_T \mid u(.,0) = u_0 \ , \|u\|_{L_T} \leq 2r\right\}.$$

Montrons que M est fermée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite dans M telle que u_n converge vers u simplement, quand $n \to +\infty$. Montrons que $u \in M$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in L_T$, $\forall a \in [0, a_m]$, $u_n(a, 0) = u_0(a)$, et $\|u_n\|_{L_T} \leq 2r$.
Comme $u_n \to u$, quand $n \to +\infty$, alors

$$u(a, 0) = u_0(a) \quad \forall a \in [0, a_m].$$

avec $\|u\|_{L_T} \leq 2r$. Il reste à montrer la continuité de u sur $[0, T]$, c'est-à-dire que

$$\begin{gathered}\forall t \in [0, T],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0,\ \forall s \in [0, T],\ \text{tels que} \\ \text{si } |t - s| < \sigma,\ \text{alors } \|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1} < \varepsilon.\end{gathered}$$

Puisque $u_n \to u$, quand $n \to +\infty$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0;\ n > n_0,\ \|u_n - u\|_{L_T} < \frac{\varepsilon}{3},$$

c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n > n_0, \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(.,t) - u(.,t)\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.12}$$

La continuité de u_n sur $[0, T]$ entraine

$$\begin{gathered}\forall t \in [0, T],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma_n > 0,\ \forall s \in [0, T] : \forall s, t :\ |t - s| < \sigma_n \\ \text{alors } \|u_n(.,t) - u_n(.,s)\|_{L^1} < \tfrac{\varepsilon}{3}.\end{gathered} \tag{1.13}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left\| u\left(.,t\right)-u\left(.,s\right)\right\|_{L^1} &\leq \left\| u\left(.,t\right)-u_n\left(.,t\right)\right\|_{L^1} \\ &+\left\| u_n\left(.,t\right)-u_n\left(.,s\right)\right\|_{L^1} \\ &+\left\| u_n\left(.,t\right)-u\left(.,s\right)\right\|_{L^1}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

alors pour $n > n_0$, prenons $\sigma = \sigma_n$, tel que $|t-s| < \sigma$. D'après (1.12),(1.13) et (1.14) on obtient que $\left\| u\left(.,t\right)-u\left(.,s\right)\right\|_{L^1} < \varepsilon$, ce qui nous donne la continuité de u sur $[0,T]$.
Finalement, on déduit que $u \in M$. D'où M est un ensemble fermé.
Définissons l'application K par

$$\begin{aligned} K\ &: M \rightarrow M \\ &u \mapsto Ku, \end{aligned}$$

tel que

$$Ku\left(a,t\right)=\begin{cases} F\left(u\left(.,t-a\right)\right)+\int\limits_{t-a}^{t} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)ds & 0 \leq a \leq t, \\ u_0\left(a-t\right)+\int\limits_{0}^{t} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)ds & t \leq a \leq a_m. \end{cases}$$

Montrons que l'application K est strictement contractante.
1) Montrons que l'application K prend ses valeur dans M c-à-d pour tout $u \in M$ alors $Ku \in M$.
Soit $u \in M$ montrons que Ku est bornée par rapport a la norme de L_T. Soit $t \in [0,T]$, d'aprés le Lemme 1.3 on obtient que

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{a_m} \left|Ku\left(a,t\right)\right| da &\leq \int\limits_0^{t} \Big[\left|F\left(u\left(.,t-a\right)\right)\right| \\ &+\int\limits_{t-a}^{t} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| ds\Big] da \\ &+\int\limits_{t}^{a_m} \Big[\left|u_0\left(a-t\right)\right| \\ &+\int\limits_{0}^{t} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| ds\Big] da \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_m} |Ku(a,t)|\, da &\leq \int_0^t |F(u(.,s))|\, ds + \int_0^{a_m} |u_0(a)|\, da \\
&+ \int_0^t \left[\int_{t-s}^t |G(u(.,s))(s+a-t)|\, da \right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\int_t^{a_m} |G(u(.,s))(s+a-t)|\, da \right] ds \\
&\leq \int_0^t |F(u(.,s))|\, ds + \int_0^{a_m} |u_0(a)|\, da \\
&+ \int_0^t \left[\int_0^{a_m} |G(u(.,s))(a)|\, da \right] ds \\
&\leq \int_0^t |F(u(.,s)) - F(0)|\, ds + \int_0^t |F(0)| \\
&+ \int_0^t \|G(u(.,s)) - G(0)\|\, ds \\
&+ \int_0^t \|G(0)\|\, ds + \int_0^{a_m} |u_0(a)|\, da,
\end{aligned}$$

d'autre part l'hypothèse H6 entraine

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_m} |Ku(a,t)|\, da &\leq c_1(2r) \int_0^t \|u(.,s)\|_{L^1}\, ds + \int_0^t |F(0)|\, ds + \\
&\|u_0\|_{L^1} + \int_0^t \|G(0)\|\, ds + c_2(2r) \int_0^t \|u(.,s)\|_{L^1}\, ds \\
&\leq c_1(2r)\, t2r + c_2(2r)\, t2r + t\, |F(0)| + t\, \|G(0)\| + r \\
&\leq 2r \left[t \left(c_1(2r) + c_2(2r) + \frac{|F(0)| + \|G(0)\|}{2r} \right) + \frac{1}{2} \right],
\end{aligned} \tag{1.15}$$

d'après (1.11) on obtient que $\forall t \in [0,T]$, $Ku(.,t) \in L^1$ et $\|Ku(.,t)\|_{L^1} \leq 2r$, alors $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \|Ku(.,t)\|_{L^1} \leq 2r$. D'où $\|Ku\|_{L_T} \leq 2r$.

Définissons l'application Ku_T, par

$$\begin{aligned}
Ku_T : [0,T] &\to L^1 \\
t &\mapsto Ku(.,t)\,.
\end{aligned}$$

Pour démontrer que $Ku \in M$, il suffit de montrer que pour $u \in M$, Ku_T est continue.

Soit $u \in M$, et $0 \leq t < \hat{t} \leq T$, alors

$$\begin{aligned}
\left\| Ku(.,t) - Ku\left(.,\hat{t}\right)\right\|_{L^1} & \leq \int\limits_0^t \Big| F\left(u\left(.,t-a\right)\right) - F\left(u\left(.,\hat{t}-a\right)\right) \\
& + \int\limits_{t-a}^{t} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right) ds \\
& - \int\limits_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right) ds \Big| \, da \\
& + \int\limits_t^{\hat{t}} \Big| u_0\left(a-t\right) - F\left(u\left(.,\hat{t}-a\right)\right) \\
& + \int\limits_0^t G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right) ds \\
& - \int\limits_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right) ds \Big| \, da \\
& + \int\limits_{\hat{t}}^{a_m} \Big| u_0\left(a-t\right) - u_0\left(a-\hat{t}\right) \\
& + \int\limits_0^t G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right) ds \\
& - \int\limits_0^{\hat{t}} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right) ds \Big| \, da,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

posons

$$\begin{aligned}
j_1 &= \int\limits_0^t \Big| F(u(.,t-a)) + \int\limits_{t-a}^{t} G(u(.,s))(s+a-t)ds - \\
& \quad F(u(.,\hat{t}-a) - \int\limits_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \Big| \, da,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_2 &= \int\limits_t^{\hat{t}} \Big| u_0(a-t) + \int\limits_0^t G(u(.,s))(s+a-t)ds - \\
& \quad F(u(.,\hat{t}-a)) - \int\limits_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \Big| \, da,
\end{aligned}$$

et

$$j_3 = \int_{\hat{t}}^{a_m} \left| u_0(a-t) + \int_0^t G(u(.,s))(s+a-t)ds - \right.$$
$$\left. u_0(a-\hat{t}) - \int_0^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \right| da.$$

Donc, il suffit de prouver que $j_1, j_2, j_3 \to 0$ quand $\left|t-\hat{t}\right| \to 0$.On a,

$$\begin{aligned} j_1 \leq & \int_0^t \left|F(u(.,t-a)) - F(u(.,\hat{t}-a)\right| da + \\ & \int_0^t \left| \int_{t-a}^t G(u(.,s))(s+a-t)ds \right. \\ & \left. - \int_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \right| da, \end{aligned} \tag{1.17}$$

d'après l'hypothèse (H6), pour $u \in L_T$ on obtient que

$$\begin{aligned} F_T: \ & [0,T] \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto F\left(u\left(.,t\right)\right), \end{aligned}$$

est uniformément continue. De plus l'ensemble $\{F\left(u\left(.,s\right)\right) \ , 0 \leq s \leq T\}$ est compact, donc si $\left|t-\hat{t}\right| \longrightarrow 0$, on a

$$\int_0^t \left|F(u(.,t-a)) - F(u(.,\hat{t}-a)\right| da \longmapsto 0. \tag{1.18}$$

D'après les Lemmes 1.3 pour $0 < \hat{t} - t < t$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left| \int_{t-a}^t G(u(.,s))(s+a-t)ds - \int_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \right| da \\ & \leq \int_0^{\hat{t}-t} \left[\int_{t-a}^t \left|G(u(.,s))(s+a-t)\right| ds + \int_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} \left|G(u(.,s))(s+a-\hat{t})\right| ds \right] da \\ & + \int_{\hat{t}-t}^t \left| \left[\int_{t-a}^{\hat{t}-a} \left|G(u(.,s))(s+a-t)\right| ds \right.\right. \\ & + \int_{\hat{t}-a}^t \left|G(u(.,s))(s+a-t) - G(u(.,s))(s+a-\hat{t})\right| ds \\ & \left. + \int_t^{\hat{t}} \left|G(u(.,s))(s+a-\hat{t})\right| ds \right] da \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left| \int_{t-a}^{t} G(u(.,s))(s+a-t)ds - \int_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \right| da \\
&\leq \int_{\hat{t}-t}^{t} \left[\int_0^{\hat{t}-t} \left| G\left(u\left(.,s\right)\right)(b) \right| db \right] ds \\
&+ \int_0^{\hat{t}-t} \left\| G\left(u\left(.,s\right)\right) \right\|_{L^1} ds + \int_t^{\hat{t}} \left\| G\left(u\left(.,s\right)\right) \right\|_{L^1} ds \\
&+ \int_{\hat{t}-t}^{t} \left[\int_{\hat{t}-t}^{s} \left| G\left(u\left(.,s\right)\right)(b) - G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(b+t-\hat{t}\right) \right| db \right] ds,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

d'un autre coté on a d'après H6, pour $u \in L_T$, on a

$$G_T : \quad \begin{aligned} [0,T] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto G\left(u\left(.,t\right)\right) \end{aligned}$$

est uniformément continue avec l'ensemble, $\{G\left(u\left(.,s\right)\right)\ ,0 \leq s \leq T\}$ est compacte d'ou

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\hat{t}-t} \left\| G\left(u\left(.,s\right)\right) \right\|_{L^1} ds \to 0 \text{ quand } \left|t-\hat{t}\right| \to 0, \\ \displaystyle\int_t^{\hat{t}} \left\| G\left(u\left(.,s\right)\right) \right\|_{L^1} ds \to 0 \text{ quand } \left|t-\hat{t}\right| \to 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

D'après H6 et le Lemme 1.2 on obtient que la translation est uniformément continue sur le compact $\{G\left(u\left(.,s\right)\right)\ ,0 \leq s \leq T\}$ alors

$$\int_{\hat{t}-t}^{t} \left[\int_{\hat{t}-t}^{s} \left| G\left(u\left(.,s\right)\right)(b) - G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(b+t-\hat{t}\right) \right| db \right] ds \to 0 \tag{1.21}$$

quand $\left|t-\hat{t}\right| \to 0$ et d'après le Lemme 1.2 et le Théorème de la convergence de lebesgue on a

$$\int_0^{\hat{t}-t} \left| G\left(u\left(.,s\right)\right)(b) \right| db \to 0 \text{ quand } \left|t-\hat{t}\right| \to 0, \tag{1.22}$$

de (1.17)-(1.22) on déduit que

$$j_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad \left|t-\hat{t}\right| \to 0. \tag{1.23}$$

Montrons que $j_2 \to 0$ quand $\left|t-\hat{t}\right| \to 0$. On a

$$\begin{aligned} j_2 &= \int\limits_t^{\hat{t}} \left| u_0(a-t) + \int\limits_0^t G(u(.,s))(s+a-t)ds - \right. \\ & \left. F(u(.,\hat{t}-a)) - \int\limits_{\hat{t}-a}^{\hat{t}} G(u(.,s))(s+a-\hat{t})ds \right| da \\ &\leq \int\limits_0^{\hat{t}-t} |u_0\,(a)|\, da + \int\limits_0^{\hat{t}-t} \left[\int\limits_0^t |G(u(.,s))(s+c)|\, ds \right] dc + \\ & \int\limits_0^{\hat{t}-t} |F(u(.,s))|\, ds + \int\limits_{t-\hat{t}}^0 \left[\int\limits_{-c}^{\hat{t}} |G(u(.,s))(s+c)|\, ds \right] dc, \end{aligned} \tag{1.24}$$

d'après H6 on a

$$\int\limits_0^{\hat{t}-t} |F(u(.,s))|\, ds \to 0 \quad \text{quand} \quad |t-t| \to 0, \tag{1.25}$$

et d'après le Lemme 1.3 on a $\int\limits_0^t |G(u(.,s))(s+c)|\, ds$ et $\int\limits_{-c}^{\hat{t}} |G(u(.,s))(s+c)|\, ds$ sont intégrables. paraport a c. Le théorème de la convergence de lebesgue entraine,que si $\left|t-\hat{t}\right| \longrightarrow 0$,

$$\int\limits_0^{\hat{t}-t} \left[\int\limits_0^t |G(u(.,s))(s+c)|\, ds \right] dc = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^{\hat{t}-t} |G(u(.,s))(s+c)|\, ds \right] dc \to 0, \tag{1.26}$$

et

$$\int\limits_{t-\hat{t}}^0 \left[\int\limits_{-c}^{\hat{t}} |G(u(.,s))(s+c)|\, ds \right] dc \leq \int\limits_0^{\hat{t}} \left[\int\limits_{t-\hat{t}}^0 |G(u(.,s))(s+c)|\, ds \right] dc \to 0, \tag{1.27}$$

Alors de (1.24)-(1.27) on déduit que

$$j_2 \to 0 \quad \text{quand} \quad \left|t-\hat{t}\right| \to 0. \tag{1.28}$$

Montrons que $j_3 \to 0$ quand $\left|t-\hat{t}\right| \to 0$. Des Lemmes 1.3 et 1.4 on a

$$\begin{aligned}
j_3 \ \le\ & \int_{\hat{t}}^{a_m} \left|u_0\left(a-t\right)-u_0\left(a-\hat{t}\right)\right| \ da \\
& +\int_{\hat{t}}^{a_m}\left[\int_0^t \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)-G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right)\right| ds\right] da \\
& +\int_{\hat{t}}^{a_m}\left[\int_t^{\hat{t}} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right) ds\right|\right] da \\
\le\ & \int_0^{a_m} \left|u_0\left(a+\hat{t}-t\right)-u_0\left(a\right)\right| \ da \\
& +\int_0^{t}\left[\int_{\hat{t}}^{a_m} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)-G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right)\right| ds\right] da \\
& +\int_t^{\hat{t}} \left\|G\left(u\left(.,s\right)\right)\right\|_{L^1} ds,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

D'après le Lemme 1.2 entraine

$$\int_0^{a_m} \left|u_0\left(a+\hat{t}-t\right)-u_0\left(a\right)\right| \ da \ \to 0 \ \text{ quand } \ \left|t-\hat{t}\right| \to 0, \tag{1.30}$$

et d'après H6 il vient

$$\int_0^{t}\left[\int_{\hat{t}}^{a_m} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)-G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-\hat{t}\right)\right| da\right] ds \to 0, \tag{1.31}$$

et

$$\int_t^{\hat{t}} \left\|G\left(u\left(.,s\right)\right)\right\|_{L^1} ds \to 0, \tag{1.32}$$

quand $\left|t-\hat{t}\right| \to 0$. les relations (1.29)-(1.32) impliquent

$$j_3 \to 0 \ \text{ quand } \left|t-\hat{t}\right| \to 0. \tag{1.33}$$

Les reations (1.23), (1.28) et (1.33) entrainent que l'application Ku_T est continue, donc $\forall u \in M,\ Ku \in M$. K est bien défini.

Montrons que l'application K est strictement contractante.
Soit $t \in \ [0.T]$, on a

$$
\begin{aligned}
\left\| Ku_1(.,t) - Ku_2(.,t) \right\|_{L^1} \quad & \leq \int_0^t \left| F(u_1(.,t-a)) \right. \\
& + \int_{t-a}^{t} G\left(u_1(.,s)\right)(s+a-t)\, ds \\
& - F\left(u_2(.,t-a)\right) \\
& - \left. \int_{t-a}^{t} G\left(u_2(.,s)\right)(s+a-t)\, ds \right| da \\
& + \int_t^{a_m} \left| u_0(a-t) \ - \ u_0(a-t) \right. \\
& + \int_0^t G\left(u_1(.,s)\right)(s+a-t)\, ds \\
& - \left. \int_0^t G\left(u_2(.,s)\right)(s+a-t)\, ds \right| da,
\end{aligned}
$$

ceci implique que

$$
\begin{aligned}
\left\| Ku_1(.,t) - Ku_2(.,t) \right\|_{L^1} \quad & \leq \int_0^t \left| F\left(u_1(.,t-a)\right) - F\left(u_2(.,t-a)\right) \right| da \\
& + \int_0^t \left[\int_{t-a}^{t} \left| G\left(u_1(.,s)\right)(s+a-t) \right. \right. \\
& - \left. \left. G\left(u_2(.,s)\right)(s+a-t)\, ds \right| \right] da \\
& + \int_t^{a_m} \left[\int_0^t \left| G\left(u_1(.,s)\right)(s+a-t) \right. \right. \\
& - \left. \left. G\left(u_2(.,s)\right)(s+a-t)\, ds \right| \right] da
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\left\| Ku_1(.,t) - Ku_2(.,t) \right\|_{L^1} \quad & \leq \int_0^t \left| F\left(u_1(.,s)\right) - F\left(u_2(.,s)\right) \right| ds \\
& + \int_0^t \left[\int_{t-s}^{a_m} \left| G\left(u_1(.,s)\right)(s+a-t) \right. \right. \\
& - \left. \left. G\left(u_2(.,s)\right)(s+a-t) \right| da \right] ds \\
& \leq c_1(2r) \int_0^t \left\| u_1(.,s) - u_2(.,s) \right\|_{L^1} ds \\
& + c_2(2r) \int_0^t \left\| u_1(.,s) - u_2(.,s) \right\|_{L^1} ds \\
& \leq t(c_1(2r) + c_2(2r)) \ \left\| u_1(.,s) - u_2(.,s) \right\|_{L_T}.
\end{aligned}
$$

Comme
$$\begin{aligned}&T\left(c_1\left(2r\right)+c_2\left(2r\right)\right)\\&\leq T\left[c_1\left(2r\right)+c_2\left(2r\right)+\frac{\left|F\left(0\right)\right|+\left|\left|G\left(0\right)\right|\right|}{2r}\right]\end{aligned}$$

et de (1.11) on a

$$T\left(c_1\left(2r\right)+c_2\left(2r\right)+\frac{\left|F\left(0\right)\right|+\left|\left|G\left(0\right)\right|\right|}{2r}\right)\leq\frac{1}{2},\ \forall t\in\left[0,t\right],$$

alors pour tout $t\in\left[0,T\right]$,

$$\left\|K\left(u_1\left(.,t\right)\right)-K\left(u_2\left(.,t\right)\right)\right\|_{L^1}\leq\frac{1}{2}\left\|u_1-u_2\right\|_{L_T},$$

il en résulte que

$$\left\|K\left(u_1\right)-K\left(u_2\right)\right\|_{L_T}\leq\frac{1}{2}\left\|u_1-u_2\right\|_{L_T}.$$

Donc K est strictement contractante de M vers M. D'après le Théorème de point fixe, il existe $u\in M$ et unique tel que $Ku=u$. Alors u est une solution unique de (P3) sur $\left[0,T\right]$. ■

Théorème 1.2. *Les deux fonctions F et G associées au problème (P2) satisfont (H6). De plus il exist $T>0$ et une unique fonction $u\in L_T$ telle que u est une solution du problème (P2).*

Preuve. Montrons qu'il existe deux fonctions continues et croissantes

$c_1:[0,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ et $c_2:[0,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ telles que

$$|F(u(.,t))-F(u(.,s))|\leq c_1(r)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1},$$

et

$$\left\|G(u(.,t))-G(u(.,s))\right\|_{L^1}\leq c_2(r)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1}$$

où $\left\|u(.,t)\right\|_{L^1}\leq r, \left\|u(.,s)\right\|_{L^1}\leq r,\ \forall t,s\in[0,T]$.

Soit $t, s \in [0,T]$, tel que $\|u(.,s)\|_{L^1} \leq r$, $\|u(.,t)\|_{L^1} \leq r$, alors

$$\begin{aligned}
&|F(u(.,t)) - F(u(.,s))|_{\mathbb{R}} \\
&= \left| \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma \right) u(a,t)da \right. \\
&\left. - \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(s), s) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma \right) u(a,s)da \right| \\
&\leq \int_0^{a_m} |\alpha(a, I_\alpha(t), t)u(a,t)da - \alpha(a, I_\alpha(s), s)u(a,t)da| \\
&+ \int_0^{a_m} |\alpha(a, I_\alpha(s), s)u(a,t)da - \alpha(a, I_\alpha(s), s)u(a,s)da| \\
&\leq \int_0^{a_m} |\alpha(a, I_\alpha(t), t) - \alpha(a, I_\alpha(s), s)| \, |u(a,t)| \, da \\
&+ \int_0^{a_m} |\alpha(a, I_\alpha(s), s)| \, |u(a,t) - u(a,s)| \, da,
\end{aligned} \tag{1.34}$$

d'après la condition (H3) il existe $c_1 > 0$ telle que

$$|\alpha(a, I_\alpha(t), t) - \alpha(a, I_\alpha(s), s)| \leq c_1 |I_\alpha(t) - I_\alpha(s)|, \tag{1.35}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|I_\alpha(t) - I_\alpha(s)| &= \left| \int_0^{a_m} \gamma_\alpha(a)u(a,t)da - \int_0^{a_m} \gamma_\alpha(a)u(a,s)da \right| \\
&\leq \int_0^{a_m} |\gamma_\alpha(a)| \, |u(a,t) - u(a,s)| \, da,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

donc de (H1) et (1.36) il existe $c_2 > 0$ telle que

$$|I_\alpha(t) - I_\alpha(s)| \leq c_2 \|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1}, \tag{1.37}$$

En combinant (1.35),et (1.37) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{a_m} |\alpha(a, I_\alpha(t), t) - \alpha(a, I_\alpha(s), s)| \, |u(a,t)| \, da \\
&\leq \int_0^{a_m} c_1 c_2 \|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1} |u(a,t)| da \\
&\leq c_1 c_2 r \|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

D'après (H3) il existe $c_3 > 0$, tel que $|\alpha(a, I_\alpha(s), s)| \leq c_3$, alors

$$\int_0^{a_m} |\alpha(a, I_\alpha(s), s)| \, |u(a,t) - u(a,s)| \, da \ \leq c_3 \|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1}, \tag{1.39}$$

de (1.34),(1.38) et (1.39) on trouve

$$|F(.,t)-F(.,s)|_{\mathbb{R}} \leq (c_1c_2r+c_3)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1}.$$

Par conséquent, pour $\left\|u(.,t)\right\|_{L^1} \leq r$ et $\left\|u(.,s)\right\|_{L^1} \leq r$ il existe une fonction continue et croissante

$$\begin{aligned} c_1 : \quad & [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[\\ & r \longmapsto cr+c, \end{aligned}$$

telle que

$$|F(.,t)-F(.,s)|_{\mathbb{R}} \leq c_1(r)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1}, \forall t,s \in [0,T].$$

Montrons maintenant qu'il existe $c_2(r)$, une fonction continue et croissante de $[0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ telle que

$$\left\|G(u(.,t))-G(u(.,s))\right\|_{L^1} \leq C_2(r)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1} \quad \forall t,s \in [0,T].$$

Pour $\left\|u(.,t)\right\|_{L^1} \leq r,\ \left\|u(.,s)\right\|_{L^1} \leq r$, on a

$$\begin{aligned} \left\|G(u(.,t))-G(u(.,s))\right\|_{L^1} &= \int_0^{a_m} |\mu(a,I_\mu(t),t)u(a,t) \\ & -\mu(a,I_\mu(s),s))u(a,s)|da. \end{aligned}$$

De même ils existent $c_4, c_5, c_6 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} & \int_0^{a_m} |\mu(a,I_\mu(t),t))u(a,t)-\mu(a,I_\mu(s),s))u(a,s)|da \\ & \leq (c_4c_5r+c_6)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1}, \end{aligned}$$

alors si $\left\|u(.,t)\right\|_{L^1} \leq r$ et $\left\|u(.,s)\right\|_{L^1} \leq r$ il existe une fonction continue et croissante

$$\begin{aligned} c_2 : \quad & [0,\infty[\to [0,\infty[\\ & r \mapsto cr+c, \end{aligned}$$

telle que $\forall t,s \in [0,T]$

$$\left\|G(u(.,t))-G(u(.,s))\right\|_{L^1} \leq c_2(r)\left\|u(.,t)-u(.,s)\right\|_{L^1}.$$

Finalement on déduit que les deux fonctions F et G données par (1.4) satisfont (H6). De plus d'après la condition (H5) il existe $r > 0$ telle que

$\|u_0\|_{L^1} \leq r$. D'après le Théorème 1.1, ils existent $T > 0$ et une unique $u \in L_T$ solution du problème (P2). De plus d'après la Remarque 1.1, on déduit qu'il existe $T > 0$, et une unique $u \in L_T$ solution du problème (P1) telle que $u(a,t) = \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) v(a,t)$, où $v(a,t)$ est la solution du problème (P2).

1.3 Positivité de la solution

Notre but dans ce paragraghe est de montrer que la solution du (P1) est positive. Définissons

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

$$L_+^1 [0, a_m] = \{\phi \in L^1 \mid \phi(a) \geq 0 \ \forall a \in [0, a_m]\},$$

$$L_{T_+} [0, a_m] = \{u \in L_T \mid u(.,t) \in L_+^1 \ \forall t \in [0,T]\}.$$

Dans la suite du paragraphe on fera l'hypothèse suivantes

(H7). (i) Si $u(.,t) \in L_+^1$ alors $F(u(.,t))$ ses valeurs sont dans $\mathbb{R}_+$

(ii) Il existe une fonction croissante $c_3 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $\forall u(.,t) \in L_+^1$, $\|u(.,t)\|_{L_+^1} \leq r$, alors

$$G(u(.,t)) + c_3(r)\, u(.,t) \in L_+^1.$$

Proposition 1.1. *Soient $T > 0$, et $u \in L_T$, si u est une solution de (P3) sur $[0,T]$, alors u vérifie*

$$\begin{cases} (i) \ \lim\limits_{h \to 0} \displaystyle\int_0^{a_m - h} \left|h^{-1}\left[u(a+h, t+h) - u(a,t)\right] - G(u(.,t))(a)\right| da = 0, \\ (ii) \ \lim\limits_{h \to 0} h^{-1} \displaystyle\int_0^h |(u(a,t+h) - F(u(.,t))| \, da = 0, \\ (iii) \ u(a,0) = u_0(a). \end{cases} \tag{1.40}$$

sur $[0,T]$.

Preuve. Soit u une solution de (P3), on va montrer que u vérifie (1.40).

Pour $t = 0$, on a $u(.,0) = u_0$, $\forall a \in [0, a_m]$, donc *(iii)* vérifiée.

Il reste à montrer que u vérifie *(i) et (ii).* Soit $0 < t < T$, et $0 < h < T - t$, d'après les Lemmes 1.3 on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{a_m-h} \left| h^{-1}\left[u(a+h, t+h) - u(a,t)\right] - G(u(.,t))(a)\right| da \\
&= \int_0^{a_m-h} \left| h^{-1} \int_t^{t+h} \left[G(u(.,s))(s+a-t) - G(u(.,t))(a)\right] ds \right| da \\
&\leq h^{-1} \int_t^{t+h} \left[\int_0^{a_m-h} \left|(G(.,s))(s+a-t) - G(u(.,t))(a)\right| da \right] ds \\
&\leq h^{-1} \int_t^{t+h} \left[\int_0^{a_m-h} \left|(G(.,s))(s+a-t) - G(u(.,t))(s+a-t)\right| da \right. \\
&+ \left. \int_0^{a_m-h} \left|(u(.,t))(s+a-t) - G(u(.,t))(a)\right| da \right] da \\
&\leq \sup_{t \leq s \leq t+h} \left[\int_0^{a_m} \left|(G(.,s))(a) - G(u(.,t))(a)\right| da \right. \\
&+ \left. \int_0^{a_m-h} \left|(u(.,t))(s+a-t) - G(u(.,t))(a)\right| da \right],
\end{aligned}$$

or quand $h \to 0$, $(s \to t)$ on a

$$\int_0^{a_m} \left|(G(.,s))(a) - G(u(.,t))(a)\right| da = \left\| G(u(.,s)) - G(u(.,t)) \right\|_{L^1},$$

d'après le Théorème 1.2 on a

$$\left\| G(u(.,s)) - G(u(.,t)) \right\|_{L^1} \to 0 \text{ quand } h \to 0, \tag{1.41}$$

d'autre part, le Lemme 1.2 nous donne quand $h \to 0$,

$$\int_0^{a_m-h} \left|G(u(.,t))(s+a-t) - G(u(.,t))(a)\right| da \to 0. \tag{1.42}$$

En combinant (1.41) et (1.42) on obtient

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{a_m-h} \left|\left[u(a+h, t+h) - u(a,t)\right] - G(u(.,t))(a)\right| da = 0,$$

D'où *(i)*
Il reste à montrer *(ii)*, c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_0^h |u(a,t+h) - F(u(.,t))|\,da = 0.$$

Soit $0 < t < T$ et $0 < h < T - t$, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_0^h |u(a,t+h) - F(u(.,t))|\,da \\
&\leq \lim_{h\to 0} h^{-1}\int_0^h |F(u(.,t+h-a)) - F(u(.,t))|\,da \\
&+\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_0^h \left[\int_{t+h-a}^{t+h} |G(u(.,s))(s+a-t-h)|\,ds\right] da.
\end{aligned}$$

Posons

$$K_1 = h^{-1}\int_0^h |F(u(.,t+h-a)) - F(u(.,t))|\,da,$$

et

$$K_2 = h^{-1}\int_0^h \left[\int_{t+h-a}^{t+h} |G(u(.,s))(s+a-t-h)|\,ds\right] da.$$

Le Théorème 1.2 entraine que F_T est uniformément continue sur $[0,T]$, d'où

$$\begin{aligned}
K_1 &= h^{-1}\int_0^h |F(u(.,t+h-a)) - F(u(.,t))|\,da \\
&\leq \sup_{0\leq a\leq h} |F(u(.,t+h-a)) - F(u(.,t))| \to 0,
\end{aligned}$$

quand $h \to 0$,donc

$$K_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0. \tag{1.43}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
K_2 &= h^{-1}\int_0^h \left[\int_{t+h-a}^{t+h} |G(u(.,s))(s+a-t-h)|\,ds\right] da \\
&= h^{-1}\int_t^{t+h} \left[\int_{t+h-s}^{h} |G(u(.,s))(s+a-t-h)|\,da\right] ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} K_2 &\leq h^{-1} \int_t^{t+h} \left[\int_0^{s-t} |G(u(.,s))(a)|\, da \right] ds \\ &\leq \sup_{t\leq s\leq t+h} \int_0^{s-t} |G(u(.,s))(a)|\, da, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{s\to t} \int_0^{s-t} |G(u(.,s))(a)|\, da &\leq \lim_{s\to t} \Big[\|G(u(.,s)) - G(u(.,t))\|_{L^1} \\ &\quad + \int_0^{s-t} |G(u(.,t))(a)|\, da \Big]. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.2 il vient

$$\|G(u(.,s)) - G(u(.,t))\|_{L^1} \to 0 \text{ quand } s \to t,$$

et

$$\int_0^{s-t} |G(u(.,t))(a)|\, da \to 0 \text{ quand } s \to t,$$

donc

$$K_2 \to 0 \text{ quand } h \to 0, \tag{1.44}$$

de (1.43) et (1.44) on déduit que

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_0^h |u(a,t+h) - F(u(.,t))|\, da = 0.$$

D'où (ii) il en resulte que u vérifie (1.40) sur $[0,T]$.
Dans ce paragraphe on va montrer que si u vérifie (1.40) alors u est unique.

Proposition 1.2. *Soient $T > 0$, $r > 0$ et $u, \hat{u} \in L_T$ satisfaisont (1.40), et*

$$u(a.0) = u_0(a), \ \hat{u}(a.0) = \hat{u}_0(a), \ \|u\|_{L_T} \leq r \quad et \quad \|\hat{u}\|_{L_T} \leq r.$$

Alors $\forall t \in [0,T]$

$$\|u(.,t) - \hat{u}(.,t)\|_{L^1} \leq \exp((c_1(2r) + c_2(2r))t) \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1}.$$

Preuve. Soit $0 \leq t \leq T$, on définit $v(t)$ par

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^{a_m-h} |u(a,t) - \hat{u}(a,t)|\, da \\ &= \int_{-t}^{a_m-t-h} |u(t+c,t) - \hat{u}(t+c,t)|\, dc, \end{aligned}$$

soit $0 < h < T-t$, on a

$$\begin{aligned} h^{-1}[v(t+h) - v(t)] &\leq h^{-1} \int_{-t-h}^{-t} |u(t+h+c,t+h) - \hat{u}(t+h+c,t+h)|\, dc \\ &+h^{-1} \int_{-t}^{a_m-t-h} [|u(t+h+c,t+h) - \hat{u}(t+h+c,t+h)| \\ &- |u(t+c,t) - \hat{u}(t+c,t)|]\, dc \\ &\leq h^{-1} \int_0^h |u(a,t+h) - \hat{u}(a,t+h)|\, da \\ &+h^{-1} \int_0^{a_m-h} [|u(a+h,t+h) - \hat{u}(a+h,t+h)| - \\ &|u(a,.h) - \hat{u}(a,.h)|]\, da, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} h^{-1}[v(t+h) - v(t)] &\leq h^{-1} \int_0^h [|u(a,t+h) - F(u(.,t))| \\ &+ |F(u(.,t)) - F(\hat{u}(.,t)| \\ &+ |F(\hat{u}(.,t) - \hat{u}(a,t+h)|]\, da \\ &+ \int_0^{a_m-h} |h^{-1}\ [u(a+h,t+h) - u(a,t)] \\ &- G(u(.,t))(a)|\, da \\ &+ \int_0^{a_m} |G(u(.,t))(a) - G(\hat{u}(.,t))(a)|\, da \\ &+ \int_0^{a_m-h} |G(\hat{u}(.,t))(a) \\ &- h^{-1}\ [\hat{u}(a+h,t+h) - \hat{u}(a,t)]|\, da, \end{aligned} \tag{1.45}$$

comme u, $\hat{u}$ satisfont (1.40) sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}\int\limits_0^h |u(a,t+h) - F(u(.,t))|\, da = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}\int\limits_0^h |\hat{u}(a,t+h) - F(\hat{u}(.,t))|\, da = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0} \int\limits_0^{a_m-h} |h^{-1}[u(a+h,t+h) - u(a,t)] - G(u(.,t))(a)|\, da = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0} \int\limits_0^{a_m-h} |G(\hat{u}(.,t))(a) - h^{-1}[\hat{u}(a+h,t+h) - \hat{u}(a,t)]|\, da = 0, \end{cases} \tag{1.46}$$

de (1.45) et (1.46) on déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\sup h^{-1}[v(t+h) - v(t)] \ \leq \ & |F(u(.,t)) - F(\hat{u}(.,t)| + \\ & \int\limits_0^{a_m} |G(u(.,t))(a) - G(\hat{u}(.,t)(a)|\, da. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.1 on trouve

$$\lim_{h\to 0}\sup h^{-1}[v(t+h) - v(t)] \leq [c_1(r) + c_2(r)] \left\| u(.,t) - \hat{u}(.,t) \right\|_{L^1},$$

alors d'après,([4], Proposition 2.3, page 38) on obtient $\forall t \in [0,T]$

$$\left\| u(.,t) - \hat{u}(.,t) \right\|_{L^1} \leq \exp(c_1(r) + c_2(r)\, t) \ \left\| u_0 - \hat{u}_0 \right\|_{L^1}.$$

Théorème 1.3. *Ils existent $T > 0$ et $u \in L_T$, tels que u vérifie (1.40) sur $[0,T]$ et u est unique*

Preuve. D'après le Théorème 1.2, il existe $T > 0$ et $u \in L_T$ solution unique de (P3), de la Proposition 1.1 on a u satisfait (1.40), il suffit alors de montrer que u est unique. Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2, telles que $u_1(a.0) = u_0(a)$ et $u_2(a.0) = u_0(a)$, $\forall a \in [0,a_m]$, d'après la proposition 1.2 on a $\forall t \in [0,T]$,

$$\left\| u_1(.,t) - u_2(.,t) \right\|_{L^1} \leq \exp[(c_1(r) + c_2(r))t] \left\| u_0 - u_0 \right\|_{L^1} = 0,$$

alors

$$\forall t \in [0,T],\ u_1(.,t) = u_2(.,t), (u_1 = u_2).$$

Donc u satisfait (1.40) et u est unique.

Remarque 1.2. D'après la Proposition 1.2 et le Théorème 1.3, on déduit que si u est une solution du (P2), alors u satisfait (1.40), et de plus u est unique.

Proposition 1.3. *Soit $T > 0$, $u \in L_T$, tel que u est une solution de (P3) sur $[0, T]$, et soit $\hat{T} > 0$, $\hat{u} \in L_{\hat{T}}$, tel que $\forall t \in \left[0, \hat{T}\right]$,*

$$\hat{u}(a.t) = \begin{cases} F(\hat{u}(., t-a)) + \int\limits_0^a G(\hat{u}(., s+t-a))(s)\, ds & a \in [0, t], \\ u(a-t, T) + \int\limits_{a-t}^a G(u(., s+t-a))(s)\, ds & a \in]t, a_m]. \end{cases} \tag{1.47}$$

On définit l'extention de $u(., t)$ sur $[0, T+\hat{T}]$ par: $u(., t) = \hat{u}(., t-T)$, $T < t \leq T+\hat{T}$, alors $u \in L_{T+\hat{T}}$ et u est une solution de ((P3)) sur $\left[0, T+\hat{T}\right]$.

Preuve Montrons que $u \in L_{T+\hat{T}}$. On a $u \in L_T$ et pour $T < t \leq T+\hat{T}$, $u(., t) = \hat{u}(., t-T)$. Comme $\hat{u} \in L_{\hat{T}}$ alors $\forall t \in \left[T, T+\hat{T}\right]$, $\hat{u}(., t-T) \in L_{\hat{T}}$. D'où $u \in L_{T+\hat{T}}$.

Montrons que u est une solution de (P3) sur $[0, T+\hat{T}]$. On a u est une solution de (P3) sur $[0, T]$, donc pour démontrer que u est une solution de (P3) sur $[0, T+\hat{T}]$ il suffit de montrer que u est une solution de (P3) sur $[T, T+\hat{T}]$. Soit $t \in [T, \hat{T}+T]$, $a \in [0, t-T]$ alors $a \leq t-T$, et d'après (1.47) on trouve

$$\begin{aligned} u(a.t) &= \hat{u}(a, t-T) \\ &= F(\hat{u}(., t-T-a)) + \int\limits_0^a G(\hat{u}(., s+t-T-a))(s)\, ds \\ &= F(u(., t-a)) + \int\limits_{t-a}^t G(u(., s))(s+a-t)\, ds, \end{aligned}$$

par suite

$$u \text{ est une solution de (P3) pour } a \in [0, t-T]. \tag{1.48}$$

Soit

$$a \in (t-T.t] \Longrightarrow t-T < a \leq t,$$

de (1.47) on a

$$\begin{aligned} u\,(a.t) &= \hat{u}\,(a.t-T) = u\,(a-t+T,T) \\ &+ \int\limits_{a-t+T}^{a} G\,(\hat{u}\,(.,s+t-T-a))\,(s)\,ds, \end{aligned} \tag{1.49}$$

et comme

$$a \leq t \Rightarrow a-t+T \leq T,$$

alors

$$u\,(a-t+T,T) = F\,(u\,(.,t-a)) + \int\limits_{t-a}^{T} G\,(u(.,s))(s+a-t)\,ds, \tag{1.50}$$

de (1.49) et (1.50) on obtient

$$\begin{aligned} u\,(a.t) &= \hat{u}\,(a.t-T) = F(u\,(.,t-a)) \\ &+ \int\limits_{t-a}^{T} G\,(u(.,s))(s+a-t)\,ds + \\ &\int\limits_{a-t+T}^{a} G\,(u\,(.,s+t-a))\,(s)\,ds \\ &= F\,(u\,(.,t-a)) + \int\limits_{t-a}^{T} G\,(u(.,s))(s+a-t)\,ds + \\ &\int\limits_{T}^{t} G\,(u(.,s))(s+a-t)\,ds \\ &= F(u\,(.,t-a)) + \int\limits_{t-a}^{t} G\,(u(.,s))(s+a-t)\,ds, \end{aligned}$$

donc pour $a \in (t-T.t\,]$, on a

$$u\,(a.t) = F\,(u\,(.,t-a)) + \int\limits_{t-a}^{t} G\,(u(.,s))(s+a-t)\,ds$$

alors

$$u \text{ est une solution de (P3) pour } a \in (t-T,t]. \tag{1.51}$$

De (1.48) et (1.51) on déduit que

$$u \text{ est une solution de (P3) pour } a \in [0,t]\,. \tag{1.52}$$

Il reste à montrer que u est une solution de (P3) pour $a \in (t, a_m]$.
Soit $a \in (t, a_m]$, alors $a > t,\ a\ > t - T$, d'aprés (1.47) on a

$$\begin{aligned} u\left(a.t\right) &= \hat{u}\left(a, t-T\right) = u\left(a-t+T, T\right) \\ &+ \int\limits_{a-t+T}^{a} G\left(u\left(., s+t-T-a\right)\right)\left(s\right) ds, \end{aligned} \tag{1.53}$$

mais on a $a - t + T > T$, alors

$$u\left(a-t+T, T\right) = u_0\left(a-t\right) + \int\limits_{0}^{T} G\left(u(., s)\right)(s+a-t)\, ds. \tag{1.54}$$

De (1.53) et (1.54) on obtient

$$\begin{aligned} u\left(a.t\right) &= \hat{u}\left(a, t-T\right) \\ &= u_0(a-t) + \int\limits_{0}^{T} G\left(u(., s)\right)(s+a-t)\, ds \\ &+ \int\limits_{a-t+T}^{a} G\left(u\left(., s+t-a\right)\right)\left(s\right) ds, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} u\left(a.t\right) &= u_0(a-t) + \int\limits_{0}^{T} G\left(u(., s)\right)(s+a-t)\, ds + \\ & \int\limits_{T}^{t} G\left(u., s)\right)(s+a-t)\, ds \\ &= u_0(a-t) + \int\limits_{0}^{t} G\left(u(., s)\right)(s+a-t)\, ds, \end{aligned}$$

donc

$$u \text{ est une solution de (P3) pour } a \in (t, a_m]. \tag{1.55}$$

De (1.52) et (1.55) on déduit que

$$u \text{ est une solution de (P3) pour } a \in [0, a_m] \text{ et } t \in [0, T + \hat{T}].$$

■

Théorème 1.4. *Soient $T > 0,\ u \in L_T$, si u satisfait (1.40).alors u est une solution de (P3) sur $\left[0, T\right]$.*

Preuve. Soit u vérifiant (1.40) sur $[0,T]$ alors d'après le Théorème 1.1 il existe $\hat{T} \in [0,T]$ et $\hat{u} \in L_{\hat{T}}$ solution de (P3) sur $\left[0,\hat{T}\right]$. D'prés la Proposition 1.1 on obtient que $\hat{u}$ vérifie (1.40) sur $[0,\hat{T}]$. D'autre part d'après le Théorème 1.3, $\hat{u}$ est la restriction de u sur $[0,\hat{T}]$, car si u vérifie (1.40), alors u est unique.Définissons $T_1 = \sup A$ où

$$\begin{aligned} A \;\; = \;\; & \Big\{ \hat{T} \in [0.T], \quad \text{tel que il existe } \;\hat{u} \in L_{\hat{T}} \;\text{ et }\; \hat{u} \\ & \qquad \text{est une solution de (P3) sur } [0,\hat{T}] \Big\}, \end{aligned}$$

et u_1 par

$$\begin{array}{rrcl} u_1 : & [0,T_1[& \to & L^1 \\ & t & \mapsto & u_1(.,t), \end{array}$$

pour $t \in [0,T_1[,\;\; u_1(.,t) = \hat{u}(.,t)$ où $\hat{T} \in A$. D'après la Proposition 1.1 et le Théorème 1.3 u_1 est une restriction de u sur $[0,T_1[$, et comme u est continue sur $[0,T_1]$, alors $u_1 \in L_{T_1}$. D'autre part la continuité de F et G entraine que u_1 est une solution de (P3) sur $[0,T_1]$. Donc il reste à montrer que $T_1 = T$. Supposons que $T_1 < T$ et posons $v_0 = u_1(.,T_1)$, alors d'après le Théorème 1.1 il existe $T_2 \in [0,T-T_1]$, et $v \in L_{T_2}$, solution de (P3) sur $[0,T_2]$. D'après la Proposition 1.3, l'extention de u_1 sur $[0,T_1+T_2]$ donnée par $u_1(.,t) = v(.,t-T_2)$, pour $T_1 < t \leq T\;_1 + T_2$ satisfait $u_1 \in L_{T_1+T_2}$ est une solution de (P3) sur $[0,T_1+T_2]$. D'après la Proposition 1.1 on a l'extention de u_1 vérifie (1.40) sur $[0,T_1+T_2]$. Du Théorème 1.3 on déduit que l'extention de u_1 est une restriction de u sur $[0,T_1+T_2]$, ceci est une contradiction avec la définition de T_1. Alors $T_1 = T$. D'où u est une solution de (P3) sur $[0,T]$. ■

Remarque 1.3. D'après la proposition 1.1 et le Théorème 1.4 on remaque que, u est une solution du problème (P2) si et selment si u satisfait (1.40) sur $[0,T]$ de plus le théorème 1.4 reste vrai pour $T = +\infty$.

Notre but dans ce paragraphe est de montrer la positivité de la solution local du problème (P2).

Théorème 1.5. *Les deux fonctions F et G associeés au probème (P2) données par (1.4), satisfont (H7).*

Preuve. Soit $u(.,t) \in L^1_+$, on a

$$F(u(.,t)) = \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t) \exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u(a,t)\, da,$$

(H4), nous donne

$$\forall u(.,t) \in L^1_+, \quad F(u(.,t)) \in \mathbb{R}_+. \tag{1.56}$$

Soit $u(.,t) \in L^1_+$, tel que $\|u(.,t)\|_{L^1} \leq r$, on a

$$G(u(.,t))(a) = -\mu(a, I_\mu(t), t))u(a,t),$$

d'après (H3), on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que $-\mu(a, I_\mu(t), t))u(a,t) \geq -c(u(a,t))$. Prenons $c_3(r) = c + 1$, alors $\forall a \in [0, a_m]$

$$\begin{aligned} G(u(.,t))(a) + c_3(r)u(a,t) &= -\mu(a, I_\mu(t), t))u(a,t) \\ &\quad +(c+1)u(a,t) \\ &\geq u(a,t) \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

donc il existe une fonction croissante

$$\begin{aligned} c_3(r): \quad [0,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ r &\longmapsto c+1, \end{aligned}$$

telle que $\forall u(.,t) \in L^1_+$, et $\|u(.,t)\|_{L^1} \leq r$

$$G(u(.,t)) + c_3(r)u(.,t) \in L^1_+, \tag{1.57}$$

de (1.56) et (1.57) on déduit que F et G satisfont (H7).

Théorème 1.6. *Si l'hypothèse (H7) est satisfait et soient* $u_0 \in L^1_+$,(il existe $r > 0$, $\|u_0\|_{L^1} \leq r$), et $\alpha = c_3(2r)$. *Alors il existe* $T > 0$, *et une unique fonction* $u \in L_{T_+}$,*vérifiant* $\forall t \in [0, T]$,

$$u(a,t) = \begin{cases} e^{-\alpha a} F(u(.,t-a)) \\ + \int_{t-a}^{t} e^{-(t-s)\alpha} (G + \alpha I)(u(.,s))(s+a-t)\, ds, & a \in [0,t], \\ e^{-\alpha a} u_0(a-t) \\ + \int_0^t e^{-(t-s)\alpha} (G + \alpha I)(u(.,s))(s+a-t)\, ds, & a \in [t, a_m]. \end{cases} \tag{1.58}$$

Preuve. On a $u_0 \in L^1_+$ alors il existe $r > 0$ tel que $\|u_0\| \leq r$. Choisissons T où

$$T\left[c_1(2r) + c_2(2r) + c_3(2r) + \left(\frac{|F(0)| + \|G(0)\|}{2r}\right)\right] + 1/2 \leq 1,$$

prenons M sous ensemble de L_{T_+} tel que

$$M = \left\{u \in L_{T_+} \mid u(.,0) = u_0, \quad \|u\|_{L_T} \leq 2r\right\},$$

et définissons la fonction K de M vers M par

$$Ku(a,t) = \begin{cases} e^{-\alpha a} F(u(.,t-a)) \\ + \int\limits_{t-a}^{t} e^{-(t-s)\alpha} (G + \alpha I)(u(.,s))(s+a-t)\,ds, & a \in [0,t], \\ e^{-\alpha a} u_0(a-t) \\ + \int\limits_{0}^{t} e^{-(t-s)\alpha} (G + \alpha I)(u(.,s))(s+a-t)\,ds, & a \in [t, a_m]. \end{cases}$$

De la démonstration du Théorème 1.1, on peut déduire que M est un sous ensemble fermé de L_{T_+} et l'application K de M vers M est strictement contractante. Alors, d'après le Théorème du point fixe, il existe une fonction u et unique de M telle que $Ku = u$. Donc il existe $T > 0$ et une unique fonction $u \in L_{T_+}$ qui satisfait (1.58) sur l'intervalle $[0,T]$ ■

Proposition 1.4. *Soient $\alpha > 0$, $T > 0$ et $u \in L_{T+}$, où*

$$u(a,t) = \begin{cases} e^{-\alpha a} F(u(.,t-a)) \\ + \int\limits_{t-a}^{t} e^{-(t-s)\alpha} (G + \alpha I)(u(.,s))(s+a-t)\,ds, & a \in [0,t], \\ e^{-\alpha a} u_0(a-t) \\ + \int\limits_{0}^{t} e^{-(t-s)\alpha} (G + \alpha I)(u(.,s))(s+a-t)\,ds, & a \in [t, a_m]. \end{cases} \tag{1.59}$$

Alors u vérifie (ii) et (iii) de la relation (1.40) et de plus pour tout $t \in [0,T]$ et

$$\lim_{h \to 0^+} \int\limits_{0}^{a_m - h} \left| h^{-1}\left[u(a+h, t+h) - u(a,t)\right] - G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t)\,da \right| = 0. \tag{1.60}$$

Preuve Il est cliar que u vérifie *(ii)* et *(iii)* (même démonstation de la Proposition 1.1). Il reste à montere que u vérifie (1.60).

Soit $t \in [0, T]$ et $0 < h < T - t$, alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^{a_{m-h}} \left|h^{-1}\left[u(a+h,t+h) - u(a,t)\right]\right. \\
&\left.- G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t)\right| da \\
&= \int_0^{t} \left|h^{-1}\left[u(a+h,t+h) - u(a,t)\right]\right. \\
&\left.- G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t)\right| da + \\
&+ \int_t^{a_{m-h}} \left|h^{-1}\left[u(a+h,t+h) - u(a,t)\right]\right. \\
&\left.- G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t)\right| da.
\end{aligned}$$

Posons

$$H_1 = \int_0^{t} \left|h^{-1}\left[u(a+h,t+h) - u(a,t)\right] - G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t)\right| da,$$

et

$$H_2 = \int_t^{a_{m-h}} \left|h^{-1}\left[u(a+h,t+h) - u(a,t)\right] - G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t)\right| da,$$

pour démontrer l'égalité (1.60) on va montre que $H_1 \to 0$ et $H_2 \to 0$ quand $h \to 0$. On a

$$\begin{aligned}
H_1 \;=\;& \int_0^{t} \Big[\Big|[h^{-1}(e^{-\alpha h} - 1) + \alpha]e^{-\alpha a}F(u(.,t-a)) \\
& + [h^{-1}(e^{-\alpha h} - 1) + \alpha]\int_{t-a}^{t} e^{-(t-s)\alpha}G(u(.,s))(s+a-t)\,ds \\
& + h^{-1}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)\alpha}G(u(.,s))(s+a-t)\,ds - G(u(.,t))(a)\Big|\Big]\,da \\
\leq\;& \left|h^{-1}(e^{-\alpha h} - 1) + \alpha\right| \left[\int_0^{t} e^{-\alpha a}\left|F(u(.,t-a))\right| da\right. \\
& \left. + \int_0^{t}\left[\int_{t-a}^{t} e^{-(t-s)\alpha}\left|G(u(.,s))(s+a-t)\right| ds\right] da\right] \\
& + h^{-1}\int_t^{t+h}\left[\int_0^{t} \left|e^{-(t+h-s)\alpha}G(u(.,s))(s+a-t)\,ds\right.\right. \\
& \left.\left. - G(u(.,t))(a)\right| da\right] ds,
\end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned} K_1 &= \left|h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha\right| \left[\int_0^t e^{-\alpha a}\left|F(u\left(.,t-a\right))\right| da + \right. \\ & \left. \int_0^t \left[\int_{t-a}^t e^{-(t-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| ds\right] da\right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_2 &= h^{-1}\int_t^{t+h}\left[\int_0^t \left|e^{-(t+h-s)\alpha}G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)ds \right.\right. \\ & \left.\left. -G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)\right| da\right] ds, \end{aligned}$$

comme

$$\int_0^t e^{-\alpha a}\left|F(u\left(.,t-a\right))\right| da \leq \int_0^t \left|F(u\left(.,t-a\right))\right| da,$$

d'après le Théorme 1.2, il existe $M>0$ tel que

$$\int_0^t \left|F(u\left(.,t-a\right))\right| da \leq M. \tag{1.61}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\int_{t-a}^t e^{-(t-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| ds\right] da \\ & \leq \int_0^t \left[\int_{t-s}^t \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| da\right] ds \\ & \leq \int_0^t \left[\int_0^s \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(b\right)\right| db\right] ds, \end{aligned}$$

d'apès le Théorème 1.2 il existe $M^{'}>0$ tel que

$$\int_0^t \left[\int_0^s \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(b\right)\right| db\right] ds \leq M^{'}. \tag{1.62}$$

de plus on a

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha = 0 \ \text{ quand } \ h \to 0. \tag{1.63}$$

De (1.61)-(1.63) on déduit que

$$K_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0. \tag{1.64}$$

De même

$$\begin{aligned}
K_2 &= h^{-1} \int_t^{t+h} \left[\int_0^t \left| e^{-(t+h-s)\alpha} G(u(.,s))(s+a-t) - G(u(.,t))(a) \right| da \right] ds \\
&\leq \sup_{t \leq s \leq t+h} \left[\int_0^t \left| e^{-(t+h-s)\alpha} G(u(.,s))(s+a-t) \right. \right. \\
&\quad \left. - \, G(u(.,t))(s+a-t) \right| da \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t+h-s)\alpha} \left| G(u(.,t))(s+a-t) - G(u(.,t))(a) \right| da \, + \\
&\quad \left. \int_0^t \left| e^{-(t+h-s)\alpha} - 1 \right| \left| G(u(.,t))(a) \right| da \right],
\end{aligned}$$

d'après le Théorème 1.2, le Lemme 1.2 on obtient

$$K_2 \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0. \tag{1.65}$$

Les relations (1.64) et (1.65) entrainent

$$H_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0. \tag{1.66}$$

Il reste à montrer que

$$H_2 \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0.$$

On a

$$H_2 = \int_t^{a_m - h} \left| h^{-1} \left[u(a+h, t+h) - u(a,t) \right] - G(u(.,t))(a) + \alpha u(a,t) \right| da$$

alors on obtient que

$$\begin{aligned}
H_2 &= \int_t^{a_m - h} \left| \left[h^{-1}(e^{-\alpha h} - 1) + \alpha \right] e^{-at} u_0(a-t) \right. \\
&\qquad + \left[h^{-1}(e^{-\alpha h} - 1) + \alpha \right] \int_0^t e^{-(t-s)\alpha} G(u(.,s))(s+a-t) \, ds \\
&\qquad \left. + h^{-1} \int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)\alpha} G(u(.,s))(s+a-t) \, ds - G(u(.,t))(a) \right| da,
\end{aligned}$$

d'après le lemme 1.3 on trouve

$$\begin{aligned}
H_2 &\leq \left|h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha\right| \int_t^{a_m-h} \left|e^{-at}u_0(a-t)\right| da \\
&+ \left|h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha\right| \int_t^{a_m-h} \left[\int_0^t e^{-(t-s)\alpha} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| ds\right] \\
&+ h^{-1}\int_t^{t+h} \left[\int_t^{a_m-h} \left|e^{-(t+h-s)\alpha} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right.\right. \\
&- \left.\left. G\left(u\left(.,t\right)\right)(a)\right|\right] da ds,
\end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left|h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha\right| \int_t^{a_m-h} \left|e^{-at}u_0(a-t)\right| da, \\
K_2 &= \left|h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha\right| \int_t^{a_m-h} \left[\int_0^t e^{-(t-s)\alpha} \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right| ds\right], \\
K_3 &= h^{-1}\int_t^{t+h} \left[\int_t^{a_m-h} \left|e^{-(t+h-s)\alpha} G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right.\right. \\
&- \left.\left. G\left(u\left(.,t\right)\right)(a)\right| da\right] ds,
\end{aligned}$$

comme $u_0 \in L^1$ et

$$\lim_{h\to 0}\left|h^{-1}(e^{-\alpha h}-1)+\alpha\right| = 0, \tag{1.67}$$

et

$$\int_t^{a_m-h} e^{-at}\left|u_0(a-t)\right| da \leq \int_0^{a_m} \left|u_0(a)\right| da = \left\|u_0\right\|_{L^1},$$

alors il existe $M > 0$ tel que

$$\int_t^{a_m} e^{-at}\left|u_o(a-t)\right| da \leq M.$$

Donc

$$K_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0. \tag{1.68}$$

D'après les Lemmes 1.3, on a

$$\begin{aligned}
&\int_t^{a_m-h}\left[\int_0^t e^{-(t-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right|ds\right]\\
&\leq \int_t^{a_m-h}\left[\int_0^t \left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right|ds\right]da\\
&\leq \int_0^t\left[\int_t^{a_m}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(b\right)\right|db\right]ds,
\end{aligned}$$

et du Théorème 1.2 il existe $M^{'}>0$ tel que

$$\int_t^{a_m-h}\left[\int_0^t e^{-(t-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right|ds\right]da\leq M^{'}. \tag{1.69}$$

(1.66) et (1.68) entrainent

$$K_2\rightarrow 0 \ \text{ quand } \ h\rightarrow 0. \tag{1.70}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
K_3 &= h^{-1}\int_t^{t+h}\left[\int_t^{a_m-h} e^{-(t+h-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right.\right.\\
&\quad -\left.\left. G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)da\right|\right]ds\\
&\leq \sup_{t\leq s\leq t+h}\int_t^{a_m-h} e^{-(t+h-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,s\right)\right)\left(s+a-t\right)\right.\\
&\quad \left.-G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(s+a-t\right)\right|da\\
&\quad +\int_t^{a_m-h} e^{-(t+h-s)\alpha}\left|G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(s+a-t\right)-G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)\right|da\\
&\quad +\int_t^{a_m-h}\left|\left(e^{-(t+h-s)\alpha}-1\right)\right|\left|G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)\right|da,
\end{aligned}$$

de nouveau, du Théorème 1.2, le Lemme 1.2 donnent

$$K_3\rightarrow 0 \text{ quand } h\rightarrow 0. \tag{1.71}$$

De (1.68), (1.70) et (1.71) on déduit que

$$H_2\rightarrow 0 \text{ quand } h\rightarrow 0. \tag{1.72}$$

Finalment de (1.66) et (1.72) impliqaent

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^{a_m-h} \left|h^{-1}\left[u\left(a+h,t+h\right)-u\left(a,t\right)\right]-G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)+\alpha u\left(a,t\right)\right| da = 0.$$

La proposition suivante réduit l'étude la positivité local de la solution du problème (P2) à celle de (P3).

Proposition 1.5. *Il existe $T > 0$, et une fonction $u \in L_{T_+}$, satisfait la relation (1.40) où bien u solution de (P3).*

preuve. D'après le Théorème 1.6 il existe $T > 0$ et $u \in L_{T_+}$ donnée par (1.58) pour tout $t \in [0.T]$. On prend $G = G + \alpha I$ dans (1.59), on obtient que u satisfait (ii) et (iii). De plus si on prend $G = G + \alpha I$ dans (1.60) on obtient u satisfait (i). Par conséquent, il existe $T > 0$ et $u \in L_{T_+}$ tels que u satisfait (1.40) où bien u est une solution du problème (P3).

Remarque 1.4. D'après la proposition 1.5, nous remarquons qu'il existe $T > 0$ et $u \in L_{T+}$, tels que u est une solution du problème (P2).

Définition 1.3. On dit que l'intervalle $[0, T_{u_0}[$ est un intervalle maximal de l'éxistence de la solution du problème (P3), si et selment si pour tout $T > 0$, $u \in L_T$ telle que u est une solution du problème (P3) sur $[0, T]$, alors $T < T_{u_0}$.

Notre but dans ce théorème est de montrer la positivité de la solution du (P2)

Théorème 1.7. *(positivité) Soit u une solution de (P3) sur $[0, T_{u_0}[$. Alors pour tout $t \in [0.T_{u_0}[,\ u(.,t) \in L_{T_+}$.*

Preuve Supposons qu'il existe $t_0 \in [0, T_{u_0}[$, tel que $u(.,t_0) \notin L^1_+$, alors, de la Proposition 1.5, il existe $T > 0$ et $u \in L_{T_+}$ telle que u vérifie (1.40), donc pour tout $t \in [0,T]$, $u(.,t) \in L^1_+$. Mais d'après les Propositions 1.3, 1.5 et le Théorème 1.3, on obtient que il existe $\hat{T} > 0$, tel que $u \in L_{(T+\hat{T})+}$, vérifie (1.40), ceci est une contraduction avec $u(.,t_0) \notin L^1_+$.

1.3 Globalité de la solution

Notre but dans ce paragraphe est de montrer la globalité de la solution du problème (P1). Dans la suite du chapitre on fera l'hypothèse suivante

(H9). Soit $T>0$ et $t\in[0,T]$, il existe $w_T\in\mathbb{R}$ tel que

$$F(u(.,t))+\int_t^{a_m}G(u(.,t))(a)\,da\le w_T\int_t^{a_m}u(a,t)\,da,$$

Théorème 1.8. *Soient u une solution de (P3) sur $[0,T_{u_0}[$ et $T_{u_0}<+\infty$, alors*

$$\lim_{t\to T_{u_0}}\sup\|u(.,t)\|_{L^1}=+\infty.$$

Preuve. Soit $T_{u_0}<+\infty$. Supposons que il existe $r>0$ tel que pour tout $t\in[0,T_{u_0}[$, $\|u(.,t)\|_{L^1}\le r$. D'autre part, pour $T<T_{u_0}$ on a $u\in L_{T_{u_0}-T/2}$ et u est une solution de (P3),donc d'après la proposition 1 1. on obtient que u vérifie (1.40) sur $[0,T_{u_0}-T/2]$. Du Théorème 1.1 et $\|u(.,T_{u_0}-T/2)\|_{L^1}\le r$ il existe $\hat{u}\in L_{\hat{T}}$ telle que pour tout $t\in[0,\hat{T}]$,

$$\hat{u}(a.t)=\begin{cases}F(\hat{u}(.,t-a))+\int_0^a G(\hat{u}(.,s+t-a))(s)\,ds & a\in[0,t],\\ u(a-t,T_{u_0}-T/2)+\int_{a-t}^a G(\hat{u}(.,s+t-a))(s)\,ds & a\in]t,a_m].\end{cases}$$

Définisons prolongement de u par

$$u(.,t)=u(.,t)\ \text{ pour } t\in[0,T_{u_0}-T/2],$$

et

$$u(.,t)=\ \hat{u}(.,t-T_{u_0}+T/2)\ \text{ pour } t\in[T_{u_0}-T/2,T_{u_0}+T/2].$$

De la Proposition 1.3 on obtient que $u\in L_{T_{u_0}+T/2}$ et u est une solution de (P3) sur l'intervalle $[0.T_{u_0}+T/2]$, ce qui est une contraduction avec la maximalité de T_{u_0}.

Théorème 1.9. *Les deux fonctions F et G associées au problème (P2) satisfont (H9).*

Soit $T>0$, pour tout $t\in[0,T]$ on a

$$\begin{aligned}&F(u(.,t))+\int_0^{a_m}G(u(.,t))(a)da\\ &=\int_0^{a_m}\alpha(a,I_\alpha(t),t)\exp\left(-\int_0^a m(\sigma)d\sigma\right)u(a,t)da\\ &+\int_0^{a_m}-\mu(a,I_\mu(t),t)u(a,t)da\end{aligned}$$

d'après (H3) et (H4) il existe $c > 0$, tel que

$$F(u(.,t)) + \int_0^{a_m} G(u(.,t))(a)da \leq c \int_0^{a_m} u(a,t)da.$$

Prenons $w_T = c$,alors pour tout $T > 0$ et $t \in [0.T]$ il existe $w_T \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(u(.,t)) + \int_0^{a_m} G(u(.,t))(a)\,da \leq w_T \int_0^{a_m} u(a,t)\,da.$$

Donc les deux fonctions F et G associées au problème (P2) satisfont (H9). Le théorème suivante réduit l'étude la globalité de la solution du problème (P2) à celle de (P3).

théorème 1.10. *Soit u est une solution du problème (P3) sur $[0.T_{u_0}[$. Alors*

$$\|u(.,t)\|_{L^1} \leq e^{w_T t} \|u_0\|_{L^1} \quad et \quad T_{u_0} = +\infty.$$

Preuve. Soit $T \in [0.T_{u_0}[$, on définit $v(t)$ par $v(t) = \|u(.,t)\|_{L^1[0,a_m-h]}$ pour tout $t \in [0.T]$, alors

$$\begin{aligned}
&h^{-1}[v(t+h) - v(t)] \\
&\leq h^{-1}\left[\int_0^{a_m} |u(a,t+h)|\,da - \int_0^{a_{m-h}} |u(a,t)|\,da\right] \\
&\leq h^{-1}\left[\int_{-t-h}^{a_m-t-h} |u(t+h+c,t+h)|\,dc - \int_{-t}^{a_m-t-h} |u(t+c,t)|\,dc\right] \\
&\leq h^{-1}\int_{-t-h}^{-t} |u(t+h+c,t+h)|\,dc \\
&+h^{-1}\int_{-t}^{a_m-t-h} |u(t+h+c,t+h)|\,dc - h^{-1}\int_{-t}^{a_m-t-h} |u(t+c,t)|\,dc \\
&\leq h^{-1}\int_{-t-h}^{-t} |u(t+h+c,t+h)|\,dc \\
&+ \int_{-t}^{a_m-t-h} |[u(t+h+c,t+h) - u(t+c,t)]|\,dc \\
&\leq h^{-1}\int_0^h |u(a,t+h) - F(u(.,t))|\,da + |F(u(.,t))| \\
&+ \int_0^{a_{m-h}} |h^{-1}[u(a+h,t+h) - u(a,t)] - G(u(.,t))(a)|\,da \\
&+ \int_0^{a_m} |G(u(.,t))(a)|\,da.
\end{aligned}$$

Comme u est une solution de (P3), on obtient

$$\lim_{h\to 0}\sup h^{-1}\left[v(t+h)-v(t)\right] \leq F\left(u\left(.,t\right)\right)+\int_0^{a_m} G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)da,$$

d'après le Théorème 1.9 on a

$$\lim_{h\to 0}\sup h^{-1}\left[v(t+h)-v(t)\right] \leq w_T v(t),$$

donc d'après weeb ([4] Théorème(2.5), page 49), pour tout $t\in[0,T]$ on déduit que

$$\left\|u\left(.,t\right)\right\|_{L^1} \leq e^{w_T t}\left\|u_0\right\|_{L^1}.$$

Montrons que $T_{u_0}=+\infty$,. Supposons que $T_{u_0}<+\infty$, alors il existe $w_{T_{u_0}}=w\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in[0,T_{u_0}]$

$$F\left(u\left(.,t\right)\right)+\int_0^{a_m} G\left(u\left(.,t\right)\right)\left(a\right)da \leq w\int_0^{a_m} u\left(a,t\right)da,$$

de plus pour tout $t\in[0,T_{u_0}]$

$$\left\|u\left(.,t\right)\right\|_{L^1} \leq e^{wt}\left\|u_0\right\|_{L^1}.$$

Comme $T_{u_0}<+\infty$, alors il existe $M>0$ tel que pour tout $t\in[0.T_{u_0}]$, $e^{wt}\left\|u_0\right\|_{L^1_+}\leq M$. Donc

$$\lim_{t\to T_{u_0}}\left\|u\left(.,t\right)\right\|_{L^1}\leq M.$$

Ce qui est une contraduction avec le Théorème 1.8.■

Remarque 1.4. D'après le théorème (1.7) et (1.10), la solution du problème (P2) est positive et globale.Ceci entraine donc que la solution du problème (P1) est positive et globale

Chapitre 2
Régularité de la Solution

Dans ce chapitre on montre en utilisant la théorie des semi-groupes que la solution obtenue dans le chapitre précédent est de classe C^1 par rapport à t et a.

2.1 Notios de Semi Groupe

Soient X un espace de Banach et C une sous ensemble fermée de X. On dit que la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continue non linéaire si et selment si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfait les conditions suivantes:

(C1) $S(t) : C \to C$ est continue pour $t \geq 0$.

(C2) $S(0) = I$ (I est l'application identité de C vers C).

(C3) pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1) o S(t_2)$

(C4) pour tout $x \in C$ l'application $t \to S(t)x$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Proposition 2.1. *Soient $\phi \in L^1_+$ et $u(.,t)$ la solution du problème (P2);défini sur* $[0, +\infty[$ tel que $u(.,0) = \phi$. *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ une famille définée sur L^1_+ par, pour tout $t \geq 0$, $S(t)\phi = u(.,t)$. Alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est une semi-groupe non linéaire fortement continue sur L^1_+.*

Montrons que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe non linéaire fortement continue, sur L^1_+.D'après le chapitre(1) les conditions (C2) et (C4) sont satisfaites. Montrons la condition (C1), c'est à dire que $S(t)$ est continue de L^1_+ vers L^1_+. Soient $t > 0$, $\phi \in L^1_+$,d'après la Proposition 1.2 on obtient que $\forall t \geq 0$, $\phi, \hat{\phi} \in L^1_+$;

$$\left\| S(t)\phi - S(t)\hat{\phi} \right\|_{L^1} \leq \left\| \phi - \hat{\phi} \right\|_{L^1} e^{ct}.$$

Alors $S(t)$ est continue de L^1_+ vers L^1_+ pour tout $t \geq 0$. Ce qui montre (C1). Il reste à montrer la condition (C3). Soit $\phi \in L^1_+$ et $t_1 > 0$, on a $u(.,t) = S(t)\phi$, et soit $\hat{\phi} = S(t_2)\phi$, tel que pour tout $t \geq 0$, $\hat{u}(.,t) = S(t)\hat{\phi}$.

De la Proposition 1.3 et le Théorème 1.4 on a $u(.,t_1+t_2) = \hat{u}(.,t_1)$, alors $S(t_1+t_2)\phi = S(t_1)S(t_2)\phi$. Donc la condition (C3) est vérifiée. Finalement, on déduit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un non linéaire semi-groupe fortement continue.

2.2 Générateur d'un Semi Groupe

Définition 2.2. Soient X un espace de Banach, C un sous ensemble fermée de X et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe non linéaire fortement continue sur C. On dit que l'opérateur B

$$\begin{array}{rccc} B: & D(B) & \rightarrow & C \\ & x & \rightarrow & Bx \end{array}$$

est un générateur d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ si et seulement si $D(B) = \{x \in C$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{S(t)x-x}{t}$existe$\}$ et

$$Bx = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x-x}{t},$$

Définition 2.3. Soient F, G deux fonctions associées au problème (P2) donnée par (1.4) .Définissons l'opérateur A par

$$\begin{array}{rccc} A: & L^1_+ & \rightarrow & L^1_+ \\ & \phi & \mapsto & A\phi \end{array}$$

où $D(A) = \{\phi \in L^1_+$ tel que ϕ est continue sur $[0, a_m]$, $\phi' \in L^1$ et $\phi(0) = F(\phi)\}$, pour tout $\phi \in D(A)$, $A\phi = \phi' - G(\phi)$.

Théorème 2.1. *Soient A l'opérateur donné par la Définition 2.3, et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe non linéaire fortement continue sur L^1_+ associée a la solution du problème (P2). Alors $-A$ est un générateur de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.*

Preuve. Soit B est un générateur de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, il suffit de montrer que $B = -A$.

1. Montrons que $-A \subset B$. Soit $\phi \in D(A)$ et $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left\| t^{-1}(S(t)\phi - \phi) + A\phi \right\|_{L^1} &= \int_0^{a_m} |t^{-1}[(S(t)\phi)(a) - \phi(a)] \\ &\quad + \phi'(a) - G(\phi)(a)|\, da \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\left\|t^{-1}(S(t)\phi-\phi)+A\phi\right\|_{L^1} &= \int\limits_0^t \left|t^{-1}[F(S(t-a)\phi)\right.\\ &+ \int\limits_{t-a}^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds-\phi(a)]\\ &+ \phi'(a)-G(\phi)(a)|\,da\\ &+ \int\limits_t^{a_m} |t^{-1}\phi(a-t) + \phi'(a)-G(\phi)(a)\\ &+ t^{-1}\left[\int\limits_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds-\phi(a)\right]\Bigg|\,da.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Posons

$$\begin{aligned}K_1 &= \int\limits_0^t \Bigg|t^{-1}[F(S(t-a)\phi)+\int\limits_{t-a}^t G(S(s)\phi(s+a-t)ds-\phi(a)]\\ &+\phi'(a)-G(\phi)(a)|\,da\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}K_2 &= \int\limits_0^t \Big|t^{-1}\phi(a-t) + \phi'(a)-G(\phi)(a)\\ &+ t^{-1}\left[\int\limits_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds-\phi(a)\right]\Bigg|\,da\end{aligned}$$

Comme $\phi(0)=F(0)$, alors

$$\begin{aligned}K_1 &\le t^{-1}\int\limits_0^t |F(S(t-a)\phi)-F(\phi)|\,da\\ &+\int\limits_0^t \left|\phi'(a)-t^{-1}[\phi(a)-\phi(0)]\right|da\\ &+t^{-1}\int\limits_0^t \left|\int\limits_{t-a}^t G(S(s)\phi(s+a-t)ds-G(\phi)(a)\right|da.\end{aligned}$$

Posons

$$H_1 = t^{-1}\int\limits_0^t |F(S(t-a)\phi)-F(\phi)|\,da,$$

$$H_2 = \int\limits_0^t \left|\phi'(a)-t^{-1}[\phi(a)-\phi(0)]\right|da,$$

et

$$H_3 = t^{-1}\int_0^t \left| \int_{t-a}^t G(S(s)\phi(s+a-t)ds - G(\phi)(a) \right| da.$$

La continuité de F entraîne que

$$\begin{aligned} H_1 &= t^{-1}\int_0^t |F(S(t-a)\phi) - F(\phi)|\, da \\ &\leq \sup_{0\leq s\leq t} |F(S(s)\phi) - F(\phi)| \to 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

quand $t \to 0$. Comme ϕ est continue sur $[0, a_m]$ et $\phi' \in L^1$ alors

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_0^t \left|\phi'(a) - t^{-1}[\phi(a) - \phi(0)]\right| da \\ &\leq \int_0^t |\phi'(a)|\, da + \sup_{0\leq a\leq t} \int_0^a |\phi'(b)|\, da \to 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

quand $t \to 0$. On a G est continue et $G(\phi) \in L^1$, alors

$$\begin{aligned} H_3 &= \int_0^t \left| t^{-1}\int_{t-a}^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - G(\phi)(a) \right| da \\ &\leq t^{-1}\int_0^t \int_{t-s}^t |G(S(s)\phi)(s+a-t)da|\, ds + \int_0^t |G(\phi)(a)|\, da \\ &\leq t^{-1}\int_0^t \left[\int_0^s [|G(S(s)\phi)(a) - G(\phi)(a)| + |G(\phi)(a)|]da \right] ds \\ &\quad + \int_0^t |G(\phi)(a)|\, da \\ &\leq \sup_{0\leq s\leq t} \|G(S(s)\phi) - G(\phi)\|_{L^1} + 2\int_0^t |G(\phi)(a)|\, da \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$H_3 \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0. \tag{2.4}$$

En combinant (2.2), (2.3) et (2.4) on déduit que

$$K_1 \to 0 \quad \text{quand } t \to 0. \tag{2.5}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} K_2 &= \int\limits_t^{a_m} t^{-1}\left[\phi(a-t)+\int\limits_0^t [G(S(s)\phi)(s+a-t)ds-\phi(a)]\right] \\ &\quad + \phi'(a)-G(\phi)(a)\big|\,da \\ &\leq \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}[\phi(a-t)-\phi(a)]+\phi'(a)]\right| da \\ &\quad + \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}\int\limits_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - G(\phi)(a)\right| da. \end{aligned}$$

Posons

$$J_1 = \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}[\phi(a-t)-\phi(a)]+\phi'(a)]\right| da$$

et

$$J_2 = \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}\int\limits_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - G(\phi)(a)\right| da$$

comme ϕ est continue et $\phi' \in L^1$ et d'après le Lemme 1.2 on obtient

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}[\phi(a-t)-\phi(a)]+\phi'(a)\right| da \\ &= \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}\int_0^t [\phi'(a-\tau)-\phi'(a)]d\tau\right| da \\ &\leq t^{-1}\int\limits_0^t \left[\int\limits_t^{a_m} |\phi'(a-\tau)-\phi'(a)|\,da\right] d\tau \\ &\leq \sup_{0\leq\tau\leq t} \int\limits_t^{a_m} |\phi'(a-\tau)-\phi'(a)|\,da. \end{aligned}$$

ce qui implique

$$J_1 \to 0 \quad \text{quand } t \to 0. \tag{2.6}$$

D'autre part comme G est continue et $G(\phi) \in L^1$ alors

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_t^{a_m} \left|t^{-1}\int\limits_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - G(\phi)(a)\right| da \\ &\leq t^{-1}\int\limits_0^t \left[\int\limits_t^{a_m} |G(S(s)\phi)(s+a-t)-G(\phi)(s+a-t)|\,da\right. \\ &\quad \left. + \int\limits_t^{a_m} |G(S(s)\phi)(s+a-t)-G(\phi)(a)|\,da\right] ds; \end{aligned}$$

d'ou

$$
\begin{aligned}
J_2 \quad \leq \quad & \sup_{0\leq s\leq t} [\|G(S(s)\phi) - G(\phi)\|_{L^1} \\
& + \int_t^{a_m} |G(\phi)(s+a-t) - G(\phi)(a)|\, da \Big],
\end{aligned}
$$

D'après le Lemme 1.2 et le Théorème 1.2 on obtient que

$$J_2 \to 0 \;\text{ quand } t \to 0. \tag{2.7}$$

De (2.6) et (2.7) on trouve

$$K_2 \to 0 \;\text{ quand } t \to 0. \tag{2.8}$$

D'autre par on a d'après (2.5) et (2.8)

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}[s(t)\phi - \phi] = -A\phi.$$

D'après la définition du générateur on obtient $\phi \in D(B)$ et $B(\phi) = -A\phi$. C'est-à-dire que

$$-A \subset B. \tag{2.9}$$

2. Il reste à montrer que $B \subset -A$.
Soit $t > 0$, définissons les deux fonctions suivantes $X_t \in L^1$ et $\varphi_t \in L^1$ par:

$$X_t(a) = \begin{cases} 0 & a < t, \\ t^{-1} \int_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)da & a > t, \end{cases}$$

et

$$\varphi_t(a) = \begin{cases} 0 & a < t, \\ t^{-1}[\phi(a-t) - \phi(a)] & a > t. \end{cases}$$

On a

$$
\begin{aligned}
\|X_t - G(\phi)\|_{L^1} \quad & \leq \int_0^t |G(\phi)(a)|\, da + \\
& \int_t^{a_m} \left| t^{-1} \int_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - G(\phi)(a) \right| da,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

comme $G(\phi) \in L^1$ alors

$$\int_0^t |G(\phi)(a)|\, da \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0. \tag{2.11}$$

le Lemmes 1.3 entraine

$$\begin{aligned}
&\int_t^{a_m} \left| t^{-1} \int_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - G(\phi)(a) \right| da \\
&\leq t^{-1} \int_0^t \left[\int_t^{a_m} [|G(S(s)\phi)(s+a-t) - G(\phi)(s+a-t)| \right. \\
&+ |G(S(s)\phi)(s+a-t) - G(\phi)(a)|]da]\, ds \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t} [\|G(S(s)\phi) - G(\phi)\|_{L^1} \\
&\left. + \int_t^{a_m} |G(S(s)\phi)(s+a-t) - G(\phi)(a)|\, da \right],
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 1.2, G est continue et $G(\phi) \in L^1$,on obtient que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|G(S(s)\phi) - G(\phi)\|_{L^1} \to 0 \quad \text{quand } t \to 0, \tag{2.12}$$

et

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \int_t^{a_m} |G(S(s)\phi)(s+a-t) - G(\phi)(a)|\, da \to 0 \quad \text{quand } t \to 0. \tag{2.13}$$

En combinant (2.10)-(2.13), on déduit que

$$\|X_t - G(B)\|_{L^1} \to 0 \quad \text{quand } t \to 0. \tag{2.14}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|\varphi_t + X_t - B\phi\|_{L^1} &\leq \int_0^t |B\phi(a)|\, da \\
&+ \int_t^{a_m} \left| t^{-1}[\phi(a-t) \right. \\
&\left. + \int_0^t G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - \phi(a) \right] - B\phi(a) \bigg|\, da \\
&\leq \int_0^t |B\phi(a)|\, da + \|t^{-1}(s(t)\phi - \phi) - B\phi\|_{L^1},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

comme B est un générateur de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, et $\phi \in D(B)$, alors

$$\int_0^t |B\phi(a)|\, da + \left\| t^{-1}(S(t)\phi - \phi) - B\phi \right\|_{L^1} \to 0, \quad \text{quand} \quad t \to 0, \tag{2.16}$$

de (2.15) et (2.16) on obtient

$$\|\phi_t + x_t - B\phi\|_{L^1} \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0. \tag{2.17}$$

De (2.14) et (2.17) on déduit que

$$\begin{cases} \|\varphi_t + x_t - B\phi\|_{L^1} \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0, \\ \|x_t - G(\phi)\|_{L^1} \to 0 \quad \text{quand } t \to 0, \end{cases}$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t = B\phi - G(\phi). \tag{2.18}$$

D'aprés ([4] théorème 3.2 page 80) alors si $0 < t < u < v$ on a

$$\begin{aligned} & t^{-1} \int_{u-t}^{u} \phi(a)da - t^{-1} \int_{v-t}^{v} \phi(a)da \\ & = \int_u^v [\phi(a-t) - \phi(a)]da = \int_u^v \varphi_t(a)da, \end{aligned}$$

quand $t \to 0$ on obtient $\phi(u) - \phi(v) = \int_u^v [B\phi(a) - G(\phi)(a)]da$, donc ϕ est continue, $\phi^{'} \in L^1$ et pour tout $a \geq 0$,

$$\phi'(a) = -B\phi(a) + G(\phi)(a). \tag{2.19}$$

Il reste à montrer que $\phi(0) = F(\phi)$. On a

$$\begin{aligned} & \|t^{-1}[S(t)\phi - \phi] - B(\phi)\|_{L^1} \\ & \geq \int_0^t \Big| t^{-1} \Big[F(S(t-a)\phi) - \phi(0) + \phi(0) \\ & + \int_{t-a}^{t} G(S(s)\phi)(s+a-t)ds - \phi(a) \Big] + \phi'(a) - G(\phi)(a) \Big|\, da \\ & \geq t^{-1} \int_0^t |F(S(t-a)\phi) - \phi(0)|\, da \\ & - \int_0^t |\phi'(a) - t^{-1}[\phi(a) - \phi(0)]|\, da \\ & - t^{-1} \int_0^t \left| \int_{t-a}^{t} G(S(s)\phi)(s+a-t) - G(\phi)(a) \right| da, \end{aligned} \tag{2.20}$$

En prenant $t \to 0$ on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t |\phi'(a) - t^{-1}[\phi(a) - \phi(0)]| \, da \to 0, \\ \int_0^t t^{-1} \left| \int_{t-a}^t G(S(s)\phi)(s+a-t) - G(\phi)(a) \right| da \to 0, \\ t^{-1} \int_0^t |F(S(t-a)\phi) - \phi(0)| \, da \to |F(\phi) - \phi(0)| \, . \end{array} \right. \tag{2.21}$$

(2.20) et (2.21) impliquent

$$F(\phi) = \phi(0). \tag{2.22}$$

De (2.19) et (2.22) on déduit que $\phi \in D(A)$ et $-A\phi = B\phi$, c'est-à-dire

$$B \subset -A. \tag{2.23}$$

Finalement, de (2.9) et (2.23) on a $B = -A$. D'où le résultat.

3.2 Régularité de la Solution

considérons l'hypothèse:

(H9). Soit $G : L^1 \longrightarrow L^1$ telle que $\forall u\,(.,t) \in L^1,\ \forall a \in [0, a_m]$

$$G(u\,(.,t))\,(a) = -\mu(a, u\,(.,t))u\,(.,t)\,(a)\,,$$

où $\mu(a, u\,(.,t)) \in \beta\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des opérateurs linéaires bornées, alors
1) Il existe une fonction croissante $c_4 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $\forall a, \hat{a} \in [0, a_m]$ et $u\,(.,t) \in L_1$,

$$|\mu(a, u\,(.,t)) - \mu(\hat{a}.u\,(.,t))| \leq c_4\,(\|u\,(.,t)\|_{L^1})\,|a - \hat{a}|\,.$$

2) Il existe une fonction croissante $c_5 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $\forall a \in [0, a_m]$ et $u\,(.,t) \in L_1$,

$$|\mu(a, u\,(.,t))| \leq c_5\,\|u\,(.,t)\|_{L^1}\,.$$

3) Il existe une fonction croissante $c_6 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $\forall a \in [0, a_m]\,,\ u\,(.,t)$ et $u\,(.,s) \in L^1$ où $\|u\,(.,t)\| \leq r,\ \|u\,(.,s)\| \leq r$,

$$|u(a, u\,(.,t)) - u(a, u\,(.,s))| \leq c_6(r)\,\|u\,(.,t) - u\,(.,s)\|_{L^1}\,.$$

Proposition 2.2. *Si les hypothéses de la Proposition 2.1 et (H9) sont satisfaites, alors*

$$S(t)[D(B)] \subset D(B),$$

$\forall t > 0, \phi \in D(B)$

$$\frac{d}{dt}S(t)\phi = BS(t)\phi = S(t)B\phi.$$

Preuve. D'après weeb ([4] proposition (3.6) page87). On a $S(t)[D(B)] \subset D(B)$. Montrons que $\forall t > 0, \phi \in D(B)$

$$\frac{d^-}{dt}S(t)\phi = \frac{d^+}{dt}S(t)\phi = BS(t)\phi = S(t)B\phi,$$

soit $\phi \in D(B)$, $t > 0$ et $h > 0$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} &= \lim_{h\to 0} S(t)\left[\frac{S(h)-I}{h}\right]\phi \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{S(h)-I}{h}\right]S(t)\phi, \end{aligned}$$

ceci implique

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt}S(t)\phi &= \lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} S(t)\left[\frac{S(h)-I}{h}\right]\phi = S(t)B\phi \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{S(h)-I}{h}\right]S(t)\phi = BS(t)\phi, \end{aligned}$$

donc $\forall \phi \in D(B)$, $\forall t > 0$

$$\frac{d^+}{dt}S(t)\phi = BS(t)\phi = S(t)B\phi. \tag{2.24}$$

Il reste à montrer que $\forall t > 0$, $\phi \in D(B)$; $\frac{d^-}{dt}S(t)\phi = BS(t)\phi = S(t)B\phi$. D'après ([4] théorème 2.10 page63) on a $u(.,t)$ est différentiable pour tout $t > 0$. Alors de (2.24) on trouve

$$\forall t > 0, \forall \phi \in D(B),\ \frac{d^-}{dt}S(t)\phi = BS(t)\phi = S(t)B\phi, \tag{2.25}$$

de (2.24) et (2.25) on déduit que $\forall \phi \in D(B)$, $\forall t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}S(t)\phi = BS(t)\phi = S(t)B\phi.$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

Théorème 2.2. *La fonction G associeé au problème (P2) donnée par (1.4) vérifie (H9).*

Preuve. Montrons que la fonction G vérifie (H9). On a $G(u(.,t))(a) = -\mu(a, I_\mu(t), t))u(a,t)$ où $I_\mu(t) = \int\limits_0^{\alpha_m} \gamma_s(a) \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u(a,t)da$, Donc l'opérateur $\mu(a, u(.,t))$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \mu(a, u(.,t)) : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \mu(a, u(.,t))x = \mu(a, I_\mu(t), t)x. \end{aligned} \tag{2.26}$$

(1) Montrons qu'il existe une fonction croissante
$c_4 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $\forall a, \hat{a} \in [0, a_m]$, $u(.,t) \in L_1$,

$$|\mu(a, u(.,t)) - \mu(\hat{a}.u(.,t))| \leq c_4 \left(\|u(.,t)\|_{L^1}\right) |a - \hat{a}| .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\mu(a, u(.,t))x - \mu(\hat{a}.u(.,t))x| \quad &= |\mu(a, I_\mu(t), t)x - \mu(\hat{a}, I_\mu(t), t)x| \\ &\leq |\mu(a, I_\mu(t), t) - \mu(\hat{a}, I_\mu(t), t)| \, |x| , \end{aligned}$$

d'après (H3) il existe $c > 0$ tel que

$$|\mu(a, u(.,t))x - \mu(\hat{a}.u(.,t))x| \leq c\,|a - \hat{a}|\,|x| , \tag{2.27}$$

de (2.26) et (2.27) on déduit

$$|\mu(a, u(.,t)) - \mu(\hat{a}.u(.,t))| \leq c\,|a - \hat{a}| ,$$

donc il existe une fonction croissante (constante) c_4 donnée par

$$\begin{aligned} c_4 : \quad [0, +\infty[\quad &\to \quad [0, +\infty[\\ r \quad &\mapsto \quad c, \end{aligned} \tag{2.28}$$

telle que pour tout $a, \hat{a} \in [0, a_m]$ et $u(.,t) \in L_1$ on a

$$|\mu(a, u(.,t)) - \mu(\hat{a}, u(.,t))| \leq \left(c_4 \|u(.,t)\|_{L^1}\right) |a - \hat{a}| .$$

(2) Montrons que il existe une fonction croissante
$c_5 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $\forall u\,(.,t) \in L^1,\ \forall a \in [0.a_m]$,

$$|\mu(a, u\,(.,t))| \leq c_5\left(\|u\,(.,t)\|_{L^1}\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\mu(a, u\,(.,t))x| = |\mu(a, I_\mu(t), t)x|,$$

d'après (H3) il existe $c > 0$ tel que

$$|\mu(a, I_\mu(t), t)x| \leq c,$$

donc il existe une fonction croissante (constante) c_5

$$\begin{array}{rccc} c_5: & [0, +\infty[& \rightarrow & [0, +\infty[\\ & r & \mapsto & c, \end{array} \tag{2.29}$$

telle que $\forall u\,(.,t) \in L^1\ a \in [0, a_m]$,

$$|\mu(a, u\,(.,t))| \leq c_5(\|u\,(.,t)\|_{L^1}).$$

(3) Montrons que il existe une fonction croissante
$c_6 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $\forall u\,(.,t)\,, u\,(.,s) \in L^1$ et $\|u\,(.,t)\| \leq r,\ \|u\,(.,s)\| \leq r$, alors

$$|\mu(a, u\,(.,t)) - \mu(a, u\,(.,s))| \leq c_6(r)\,\|u\,(.,t) - u\,(.,s)\|_{L^1}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\mu(a, u\,(.,t))x - \mu(a, u\,(.,s))x| & \leq & |\mu(a, I_\mu(t), t)x - \mu(a, I_\mu(s), s)x| \\ & \leq & |\mu(a, I_\mu(t), t) - \mu(a, I_\mu(s), s)|\,|x|, \end{array}$$

d'après (H3) il existe $c_1 > 0$ tel que

$$|\mu(a, u\,(.,t)) - \mu(a, u\,(.,t))| \leq c_1\,|I_\mu(t) - I_\mu(s)|, \tag{2.30}$$

mais on a

$$\begin{array}{rcl} |I_\mu(t) - I_\mu(s)| & = & \left| \int\limits_0^{a_m} \gamma_s(a) \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u(a,t)da \right. \\ & & \left. - \int\limits_0^{a_m} \gamma_s(a) \exp\left(-\int\limits_0^a m(\sigma)d\sigma\right) u(a,s)da \right| \\ & \leq & \int\limits_0^{a_m} |\gamma_\alpha(a)|\,|u\,(a,t) - u\,(a,s)|\,da, \end{array}$$

alors de (H1) il existe $c_2 > 0$ tel que

$$|I_\mu(t) - I_\mu(s)| \leq c_2 \|u(.,t) - u(.,s)\|_{L^1}. \tag{2.31}$$

(2.30) et (2.31) implique, qu'il existe une fonction croissante (constante) c_6,

$$\begin{array}{ccccc} c_6 & [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ & r & \to & c = c_1 + c_2, \end{array} \tag{2.32}$$

telle que $\forall u(.,t)\,,\ u(.,s) \in L^1,\ \|u(.,t)\| \leq r$ et $\|u(.,s)\| \leq r$ alors

$$|\mu(a, u(.,t)) - \mu(a, u(.,s))| \leq c_6(r)||u(.,t) - u(.,s)||_{L^1}.$$

En combinant (2.38), (2.29) et (2.32) on déduit que la fonction G associeé au problème (P2) vérifie (H9). ■

.Le théorème suivante montrer que la solution du problème (P2) est déf-férentiable

Théorème 2.3. *La solution du problème (P2), notée* $u(.,t) = S(t)u_0$, *et* $u \in C^1[0,a_m] \times]0,+\infty[$

Preuve. D'après (H5) on a $u_0 \in D(A)$ et de la Proposition 2.2 et le Théorème 2.2, on obtient que $S(t)u_0 \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}u(.,t) = \frac{d}{dt}S(t)u_0 = -AS(t)u_0\ \forall t \geq 0.$$

Alors u satisfait le problème (P2), ce qui montre la régularité de la solution du problème (P2). ■

Chapitre 3
Méthode Numérique

Dans ce chapitre on propose une méthode numérique pour calculer une solution approchée du problème (P1). Cette méthode proposée par Angulo et al. [5] est une adaptation de la méthode des différences finies. On construit un schéma numérique puis on montre la consistance de ce schéma. L'analyse de la convergence du schéma est également étudiée.
Considérons le système structuré âge suivant:

$$\begin{cases} u_a + u_t = -(m(a) + \mu(a, I_\mu(t), t)u, & 0 < a \leq a_m, \quad t > 0, \\ u(0,t) = \int\limits_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(t), t)u(a,t)da, & t \geq 0, \\ u(a,0) = u_0(a), & 0 \leq a \leq a_m, \\ I_s(t) = \int\limits_0^{a_m} \gamma_s(a)u(a,t)da, & t \geq 0, s = \mu, \alpha. \end{cases}$$

où $\gamma_u,\ \gamma_\alpha,\ m,\ \mu,\ \alpha,\ u_0$ satisfont les conditions suivantes:

(H1) $\gamma_u,\ \gamma_\alpha \in C^2([0, a_m])$

(H2) $m \in C^2[0, a_m), m \geq 0, \int_0^{a_m} m(\delta)d\delta = +\infty$

(H3) $\mu \in C^2([0, a_m] \times [-\bar{\varepsilon}, P(T) \left\|\gamma_\mu\right\|_\infty + \bar{\varepsilon}] \times [0, T])$ où $P(T) = P_0 \exp\left(t \left\|\alpha\right\|_\infty\right)$ et $\mu \geq 0$

(H4) $\alpha \in C^2([0, a_m] \times [-\bar{\varepsilon}, P(T) \left\|\gamma_\alpha\right\|_\infty + \bar{\varepsilon}] \times [0, T]), \alpha \geq 0$

(H5) $u_0 \in C^2([0, a_m]),\ u_0 \geq 0,\ u_0(0) = \int_0^{a_m} \alpha(a, I_\alpha(0), 0)u_0(a)da$

et $\lim\limits_{a \longrightarrow a_m} u_0(a) \exp \int_0^{a_m} m(s)ds < +\infty$

D'après le chapitre 1 le problème structuré en âge précédent admet une solution unique. De plus d'après les Théorèmes de régularités (voir [15]), on peut montrer que $u \in C^2([0, a_m] \times [0, T])$ et $u(a,t) \geq 0, \forall a \in [0, a_m], \forall t \geq 0$.
Posons $a - t = c$, on obtient

$$\frac{d}{dt}u(t+c,t) = -(m(t+c) + \mu(t+c, I_\mu(t), t))u(t+c,t),$$

alors on a pour $0 < \bar{a} < a_m$, $h > 0$, et $\bar{a} + h < a_m$

$$u(\bar{a}+h, t_0+h) = u(\bar{a}, t_0) \exp(-\int_0^h [m(\bar{a}+\tau) + \mu(\bar{a}+\tau, I_\mu(t_0+\tau), t_0+\tau)] d\tau).$$

Soit $A^* \in (0, a_m)$ telle que m soit borné sur $[0, A^*]$, et définissons la fonction f par

$$f(a) = \int_0^a m(s) ds,$$

il est claire que $f(a_m) = +\infty$.
On considère une discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, A^*]$ de pas $h = \frac{A^*}{J^*}$ (avec J^* un entier positif). Soient $J = \left[\frac{a_m}{h}\right]$ le nombre de points de discritisation de l'intervalle $[0, a_m]$, et $N = \left[\frac{T}{h}\right]$ le nombre de points de discritisation de l'intervalle $[0, T]$. On définit les noeuds d'un maillage régulier $(a_j, t_n) = (jh, nh)$ pour $j \in \{0, ..., J\}$ et $n \in \{0, ..., N\}$, avec $a_{j+\frac{1}{2}} = a_j + \frac{h}{2} = (j + \frac{1}{2})h$, et $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2} = (n + \frac{1}{2})h$. On note $U^n = (U_0^n, U_1^n, U_2^n, ..., U_j^n)$, $U^0 = (U_0^0, U_1^0, U_2^0, ..., U_J^0)$, $U_0 = (U_0^1, U_0^2, U_0^3, ..., U_0^N)$ et $U^{n+\frac{1}{2}} = \left[U_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, U_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, ..., U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right]$ tels que U_j^n est la valeur de la solution déscrète approchée au point (a_j, t_n)
Considérons le schéma numérique suivante pour $0 \le n \le N - 1$.

Pour $0 \le j \le J^* - 1$,

$$U_{j+1}^{n+1} = U_j^n \exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu U^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]),$$

pour $J^* \le j \le J - 1$,

$$U_{j+1}^{n+1} = U_j^n \exp(f(a_j) - f(a_{j+1})) \exp(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu U^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})),$$

pour $0 \le n \le N - 1$,

$$U_0^{n+1} = \varphi_h(\alpha(U^{n+1}) U^{n+1}),$$

où

$$\alpha(u^n)_j = \alpha(a_j, \varphi_h(\gamma_\alpha^n U), t_n), \quad 0 \le j \le J,$$

et l'approximation des demi noeuds par: pour $0 \le n \le N - 1$,
pour $0 \le j \le J^* - 1$,

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n \exp(-\frac{h}{2}[m(a_j) + \mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu U^n), t_n)])$$

et pour $J^* \leq j \leq J-1$,

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n \exp f(a_j) - f(a_{j+1})) \exp(-\frac{h}{2}\mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu U^n), t_n))$$

où on a posé

$$\begin{array}{lll} \varphi_h(v) = & hv_1 + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{h}{2}(v_j + v_{j+1}) & v = (v_0, v_1, ..., v_J), \\ \varphi_h^*(v) = & \sum_{j=0}^{J-1} hv_{j+\frac{1}{2}} & v = (v_{\frac{1}{2}}, v_{\frac{3}{2}}, ..., v_{J-\frac{1}{2}}). \end{array}$$

Définissons les deux espaces X_h et Y_h tels que $X_h = (R^{J+1})^{N+1}$ et $Y_h = R^{J+1} \times R^N \times (R^J)^N$ munis des normes suivantes:

$$\left\| v^0, v^1, ..., v^n \right\|_{X_h} = \max_{0 \leq n \leq N} \left\| v^n \right\|_{\infty J+1}, \quad (v_0, v^1, ..., v^n) \in X_h$$

$$\begin{array}{ll} \left\| P^0, P_0, P^1, P^2, ..., P^N \right\|_{Y_h} & = \left\| P_0 \right\|_{\infty J} + \left\| P^0 \right\|_{\infty N} + \sum_{N=1}^{N} h \left\| P^n \right\|_{\infty J}. \\ & (P^0, P_0, P^1, P^2, ..., P^N) \in Y_h. \end{array}$$

3.1 Consistence

Notre but dans ce paragraphe est de montrer que le schéma numérique précédent est consistant. On aurra besoin du lemme suivant. *Soit* $B_{\infty J+1}(u_h^n, \varepsilon)$ *la boule de centre* u_h^n *et de rayon* ε *où* u_h la solution exact du problème (P1), $u_h^n = (u_1^n, u_2^n, ..., u_J^n)$ et $u_j^n = u(a_j, t_n)$.

Lemme 3.1. (Angulo [5]) *Soit* $v^n \in B_{\infty J+1}(u_h^n, \varepsilon)$, *avec les hypothèses (H1)-(H5). Alors, pour* h *suffisamment petit on a*

$$\varphi_h(\gamma_\phi v^n) \in \left[-\bar{\varepsilon}, P(T) \left\| \gamma_\phi \right\|_\infty + \bar{\varepsilon}\right], 0 \leq n \leq N,$$

et

$$\varphi_h^*(\gamma_\phi v^{n+\frac{1}{2}}) \in \left[-\bar{\varepsilon}, P(T) \left\| \gamma_\phi \right\|_\infty + \bar{\varepsilon}\right], 0 \leq n \leq N-1,$$

où $\phi = \mu, \alpha$.

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H5) ont lieu et soient* $v^n, w^n \in B_{\infty\ J+1}(u_h^n, \varepsilon)$. *Alors, pour h suffisamment petit et* $0 \leq j \leq J-1$ *on a*

$$\left|\varphi_h(\gamma_\phi v^n) - \varphi_h(\gamma_\phi w^n)\right| \leq C \left\|v^n - w^n\right\|_{1J+1},\ 1 \leq n \leq N,$$

$$|v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| \leq \left|v_j^n - w_j^n\right| + Ch \left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1},\ 0 \leq n \leq N-1,$$

$$\left|\varphi_h^*(\gamma_\phi v^{n+\frac{1}{2}}) - \varphi_h^*(\gamma_\phi w^{n+\frac{1}{2}})\right| \leq C \left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1},\ 0 \leq n \leq N-1,$$

$$|\varphi_h(\alpha(v^n)v^n) - \varphi_h(\alpha(w^n)w^n)| \leq C \left\|v^n - w^n\right\|_{1J+1},\ 1 < n < N,$$

où $\left\|v^n\right\|_{1J+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{J} h|v_j|,\ \phi = \mu, \alpha.$

Preuve. Montrons que pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\left|\varphi_h(\gamma_\phi v^n) - \varphi_h(\gamma_\phi w^n)\right| \leq C \left\|v^n - w^n\right\|_{1J+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_h(\gamma_\phi v^n) - \varphi_h(\gamma_\phi w^n)\right| &\leq \Big|h\left(\gamma_\phi v^n\right)_1 - h(\gamma_\phi w^n)_1 \\
&+ \sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2}\left((\gamma_\phi v^n)_j + (\gamma_\phi w^n)_{j+1}\right) \\
&- \sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2}((\gamma_\phi w^n)_j + (\gamma_\phi w^n)_{j+1})\Big| \\
&\leq h|(\gamma_\phi v^n)_1 - (\gamma_\phi w^n)_1| \\
&+ \sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2}|(\gamma_\phi v^n)_j - (\gamma_\phi w^n)_j| \\
&+ \sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2}|(\gamma_\phi v^n)_{j+1} - (\gamma_\phi w^n)_{j+1}|,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

mais

$$\left|(\gamma_\phi v^n)_j - (\gamma_\phi w^n)_j\right| = \left|\gamma_\phi(a_j)v_j^n - \gamma_\phi(a_j)w_j^n\right|,$$

d'après (H1) il existe $C > 0$, tel que pour $0 \leq j \leq J$,

$$\left|(\gamma_\phi v^n)_j - (\gamma_\phi w^n)_j\right| \leq C|v_j^n - w_j^n|. \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_h(\gamma_\phi v^n) - \varphi_h(\gamma_\phi w^n)\right| &\leq Ch|v_1^n - w_1^n| + C\sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2}|v_j^n - w_j^n| \\
&+C\sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2}|v_{j+1}^n - w_{j+1}^n| \\
&\leq C\left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1}.
\end{aligned}$$

Montrons que pour $0 \leq j \leq J-1$ et $0 \leq n \leq N-1$,

$$|v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| \leq \left|v_j^n - w_j^n\right| + Ch\left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1}.$$

Pour $0 \leq j \leq J^* - 1$, on a

$$\begin{aligned}
v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= v_j \exp\left(-\frac{h}{2}[m(a_j) + \mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu v^n), t_n)]\right) \\
&\quad -w_j \exp\left(-\frac{h}{2}\left[m(a_j) + \mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu w^n), t_n)\right]\right) \\
&= (v_j^n - w_j^n)\exp\left(-\frac{h}{2}\left[m(a_j) + \mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu v^n), t_n)\right]\right) \\
&\quad +w_j^n \exp\left(-\frac{h}{2}m(a_j)\right)\left[\exp\left(-\frac{h}{2}\mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu v^n), t_n)\right)\right. \\
&\quad \left.-\exp\left(-\frac{h}{2}\mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu w^n), t_n)\right)\right],
\end{aligned} \tag{3.3}$$

de la même manière, pour $J^* \leq j \leq J-1$ on obtient

$$\begin{aligned}
&v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \\
&(v_j^n - w_j^n)\exp\left(f(a_j) - f(a_{j+\frac{1}{2}})\right)\exp\left(-\tfrac{h}{2}\mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu v^n), t_n)\right) \\
&+w_j^n \exp\left(f(a_j) - f(a_{j+\frac{1}{2}})\right)\left[\exp\left(-\tfrac{h}{2}\mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu v^n), t_n)\right)\right. \\
&\left.-\exp\left(-\tfrac{h}{2}\mu(a_j, \varphi_h(\gamma_\mu w^n), t_n)\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

D'après la première inégalité du Théorème 3.1, et comme $\|w^n\|_{\infty\ J+1} < C$ avec (3.3) et (3.4), alors pour $0 \leq j \leq J-1$ et $0 \leq n \leq N-1$ on a

$$\begin{aligned}
\left|v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right| &\leq \left|v_j^n - w_j^n\right| + Ch\left|\varphi_h\left(\gamma_\mu v^n\right) - \varphi_h(\gamma_\mu w^n)\right| \\
&\leq \left|v_j^n - w_j^n\right| + Ch\left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1}.
\end{aligned}$$

Montrons que pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$\left|\varphi_h^*\left(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}\right) - \varphi_h^*\left(\gamma_\mu w^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| \leq C \left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1}.$$

On a

$$\left|\varphi_h^*\left(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}\right) - \varphi_h^*\left(\gamma_\mu w^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| = \left|\varphi_h^*\left(\gamma_\mu\left[v^{n+\frac{1}{2}} - w^{n+\frac{1}{2}}\right]\right)\right|, \quad (3.5)$$

De (H1) et le Lemme 3.1 on trouve

$$\left|\varphi_h^*\left(\gamma_\phi v^{n+\frac{1}{2}}\right) - \varphi_h^*\left(\gamma_\phi w^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| \leq C\sum_{i=1}^{J-1} h\left|v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right|, \quad (3.6)$$

D'après la dexième inégalité du Théorème 3.1 on obtient

$$\left|v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right| \leq C\left|v_j^n - w_j^n\right| + Ch\left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1}, \quad (3.7)$$

(3.5)–(3.7) nous donne pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{aligned}\left|\varphi_h^*\left(\gamma_\phi v^{n+\frac{1}{2}}\right) - \varphi_h^*\left(\gamma_\phi w^{n+\frac{1}{2}}\right)\right| &\leq C\sum_{i=1}^{J-1} h\left|v_j^n - w_j^n\right| \\ &+C\sum_{i=1}^{J-1} h^2\left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1} \\ &\leq C\left\|v^n - w^n\right\|_{1\ J+1}\end{aligned}$$

Montrons que pour $1 < n < N$,

$$\left|\varphi_h(\alpha(v^n)v^n) - \varphi_h(\alpha(w^n)w^n)\right| \leq C\left\|v^n - w^n\right\|_{1J+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}&\left|\varphi_h(\alpha(v^n)v^n) - \varphi_h(\alpha(w^n)w^n)\right| \\ &= \Big|h(\alpha(v^n)_1 v^n)_1 - h(\alpha(w^n)_1 w^n)_1 \\ &+\sum_{j=1}^{J-1} h/2\left[(\alpha(v^n)_j v^n)_j + (\alpha(v^n)_{j+1} v^n)_{j+1})\right] - \\ &+\sum_{j=1}^{J-1} h/2[(\alpha(w^n)_j w^n)_j + (\alpha(w^n)_{j+1} w^n)_{j+1}]\Big| \\ &\leq h\left|(\alpha(v^n)_1 v^n)_1 - (\alpha(w^n)_1 w^n)_1\right| \\ &+\sum_{j=1}^{J-1} h/2\left|(\alpha((v^n)_j v^n)_j - (\alpha(w^n)_j w^n)_j\right| \\ &+\sum_{j=1}^{J-1} h/2\left|(\alpha((v^n)_{j+1} v^n)_{j+1} - (\alpha(w^n)_{j+1} w^n)_{j+1}\right|\end{aligned} \quad (3.8)$$

mais

$$\begin{aligned}
&\left|(\alpha(v^n)_j v^n)_j - (\alpha(w^n)_j w^n)_j\right| \\
&= \left|\alpha(a_j,\varphi_h(\gamma_\alpha v^n),t_n)v_j^n - \alpha(a_j,\varphi_h(\gamma_\alpha w^n),t_n)w_j^n\right| \\
&\leq \left|\alpha(a_j,\varphi_h(\gamma_\alpha v^n),t_n)\right| \left|v_j^n - w_j^n\right| \\
&+ \left|w_j^n\right| \left|\alpha(a_j,\varphi_h(\gamma_\alpha v^n),t_n) - \alpha(a_j,\varphi_h(\gamma_\alpha w^n),t_n)\right|
\end{aligned} \tag{3.9}$$

alors le Lemme 3.1, (H4) et $\|w^n\|_{\infty\ J+1} < C$ implique qu' il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\left|(\alpha(v^n)_j v^n)_j - (\alpha(w^n)_j w^n)_j\right| \quad &\leq C\left|v_j^n - w_j^n\right| \\
&+ C\left|\varphi_h(\gamma_\alpha v^n) - \varphi_h(\gamma_\alpha w^n)\right|.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La première inégalité du Théorème 3.1 et (3.10) entraînent qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\left|(\alpha(v^n)_j v^n)_j - (\alpha(w^n)_j w^n)_j\right| \leq C\left|v_j^n - w_j^n\right| + C\left\|v^n - w^n\right\|_{1J+1}, \tag{3.11}$$

les inégalités (1.8)-(1.11) entrainent qu' il existe $C > 0$, tel que

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi_h(\alpha(v^n)v^n) - \varphi_h(\alpha(w^n)w^n)\right| \\
&\leq Ch\left|v_1^n - w_1^n\right| + Ch\left\|v^n - w^n\right\|_{1j+1} \\
&+ C\sum_{j=1}^{J-1} h/2\left[C\left|v_j^n - w_j^n\right| + C\left\|v^n - w^n\right\|_{1j+1}\right] \\
&+ C\sum_{j=1}^{J-1} h/2\left[C\left|v_{j+1}^n - w_{j+1}^n\right| + C\left\|v^n - w^n\right\|_{1j+1}\right]
\end{aligned}$$

alors

$$\left|\varphi_h(\alpha(v^n)v^n) - \varphi_h(\alpha(w^n)w^n)\right| \leq C\left\|v^n - w^n\right\|_{1,j+1}.$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.1. *Définissons* L_{j+1}^{n+1} *par* $\forall 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq j \leq J^* - 1$

$$L_{j+1}^{n+1} = \frac{1}{h}\left[u_{j+1}^{n+1} - \exp\left(m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right)\right],$$

et pour $J^* \leq j \leq J-1$

$$L_{j+1}^{n+1} = \frac{1}{h}\left[u_{j+1}^{n+1} - \exp\left(f\left(a_j\right) f\left(a_{j+1}\right)\right) \exp \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right].$$

Alors, il existe $C > 0$ tel que

$$\left|L_{j+1}^{n+1}\right| \leq Ch^2.$$

Preuve. Pour $0 \leq j \leq J^* - 1$, on a

$$\begin{array}{l}
\left|L_{j+1}^{n+1}\right| \leq \\
\frac{\left|u_j^n\right|}{h}\left\{\left|\exp\left(-\int_0^h\left[m\left(a_j+\delta\right)+\mu\left(a_j+\delta, I_\mu\left(t_n+\delta\right), t_n+\delta\right)\right] d\delta\right)\right.\right. \\
\left.\left.-\exp -h\left[m(a_{j+\frac{1}{2}})+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right]\right|\right\} \\
\leq \frac{\left|u_j^n\right|}{h}\left\{\left|\exp(-\int_0^h(m\left(a_j+\delta\right)+\mu\left(a_j+\delta, I_\mu\left(t_n+\delta\right), t_n+\delta\right))d\delta)\right.\right. \\
\left.-\exp\left(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}})+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]\right)\right| \\
+\left|\exp\left(-h\left[m(a_{j+\frac{1}{2}})+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right]\right)\right. \\
\left.\left.-\exp\left(-h[m\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]\right)\right|\right\},
\end{array} \tag{3.12}$$

posons

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left|\exp(-\int_0^h(m\left(a_j+\delta\right)+\mu\left(a_j+\delta, I_\mu\left(t_n+\delta\right), t_n+\delta\right))d\delta\right. \\
&\quad \left.-\exp\left(-h\left[m(a_{j+\frac{1}{2}})+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right]\right)\right|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left|\exp\left(-h\left[m(a_{j+\frac{1}{2}})+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right]\right)\right. \\
&\quad \left.-\exp\left(-h[m\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)+\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]\right)\right|
\end{aligned}$$

comme la fonction exp est lipschitizienne, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
K_1 \leq\ & C\left|\int_0^h m\left(a_j+\delta\right) d\delta - hm(a_{j+\frac{1}{2}})\right| \\
& +C\left|\int_0^h \mu(a_j+\delta, I_\mu\left(t_n+\delta\right), t_n+\delta)d\delta\right. \\
& \left.-h[\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]\right|,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

d'autre part on a

$$\begin{array}{l}\left|\int_0^h m\left(a_j+\delta\right)d\delta - hm(a_{j+\frac{1}{2}})\right| \\ \leq \left|\int_0^h m\left(a_j+\delta\right)d\delta - h\frac{m(a_{j+\frac{1}{2}})+m(a_j)}{2}\right| \\ +\left|h\frac{m(a_{j+1})+m(a_j)}{2} - hm(a_{j+\frac{1}{2}})\right|\end{array} \tag{3.14}$$

un développement de Taylor de m donne

$$m\left(a_j+\delta\right) = m\left(a_j\right) + \delta m'\left(a_j\right) + \frac{\delta^2}{2}m''\left(\xi_j\right),$$

et

$$\begin{aligned} m\left(a_j+\delta\right) &= m\left(a_{j+1}\right) + \left(\delta - h\right)m'\left(a_{j+1}\right) \\ &\quad + \frac{\left(\delta-h\right)^2}{2}m''(\xi_j') \\ &= m\left(a_{j+1}\right) + \left(\delta - h\right)m'\left(a_j\right) \\ &\quad + \left(\delta-h\right)^2 hm''(\xi_j'') + \frac{\left(\delta-h\right)^2}{2}m''\left(\xi_j'\right), \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} m\left(a_j+\delta\right) &= \frac{1}{2}[m\left(a_j\right) + m\left(a_{j+1}\right) + \left(2\delta-h\right)m'\left(a_j\right) + \\ &\quad \frac{\delta^2}{2}m''\left(\xi_i\right) + \left(\delta-h\right)hm''\left(\xi_i''\right) + \frac{\left(\delta-h\right)^2}{2}m''\left(\xi_i'\right)]. \end{aligned}$$

En intégrant l'égalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^h m\left(a_j+\delta\right)d\delta = \; & \tfrac{h}{2}\left(m\left(a_j\right)\right) + m\left(a_{j+1}\right) \\ & +\tfrac{1}{2}\int_0^h \left(2\delta-h\right)m'\left(a_j\right)d\delta \\ & +\tfrac{1}{2}\int_0^h \Big[\tfrac{\delta^2}{2}m''\left(\xi_i\right) + \left(\delta-h\right)hm''\left(\xi_i''\right) \\ & +\tfrac{(\delta-h)^2}{2}m''\left(\xi_i'\right)\Big]\,d\delta. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De plus

$$\int_0^h \left(2\delta-h\right)m'\left(a_j\right)d\delta = m'\left(a_j\right)\left(\frac{2\delta-h}{2}\right)^2\Bigg|_0^h = 0, \tag{3.16}$$

$$\left|\int_0^h \frac{(\delta-h)^2}{2} m''(\xi_i')\right| d\delta \leq Ch^3, \tag{3.17}$$

$$\left|\int_0^h h(\delta-h)\, hm''(\xi_i'')\right| d\delta \leq Ch^3, \tag{3.18}$$

et

$$\left|\int_0^h \frac{(\delta-h)^2}{2} m''(\xi_i')\right| d\delta \leq Ch^3. \tag{3.19}$$

En combinant (3.15)-(3.19) on déduit que

$$\left|\int_0^h m(a_j+\delta)\, d\delta - h\left(\frac{m(a_j)+m(a_{j+1})}{2}\right)\right| \leq Ch^3. \tag{3.20}$$

D'autre part, on a

$$m(a_{j+1}) = m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2} m'(a_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{4} m''(\lambda_i),$$

et

$$m(a_j) = m(a_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{h}{2} m'(a_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{4} m''(\lambda_i'),$$

alors

$$h\frac{m(a_j)+m(a_{j+1})}{2} = hm(a_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^3}{4} m''(\lambda_i) \frac{+h^3}{4} m''(\lambda_i'),$$

d'après (H1) on trouve

$$\left|h\left(\frac{m(a_{j+1})-m(a_j)}{2}\right) - hm(a_{j+\frac{1}{2}})\right| \leq Ch^3. \tag{3.21}$$

De (3.20) et (3.21) on déduit que

$$\left|\int_0^h m(a_j+\delta)\, d\delta - hm\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right| \leq Ch^3. \tag{3.22}$$

De même on peut montrer que

$$\left|\int_0^h \mu(a_j+\delta, I_\mu(t_n+\delta), t_n+\delta) d\delta - h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right| \leq Ch^3. \tag{3.23}$$

D'après les relations (3.13), (3.22) et (3.23) il existe $C > 0$, tel que

$$K_1 \leq Ch^3. \tag{3.24}$$

D'autre part,

$$K_2 \leq Ch \left| I_\mu(t_{n+\frac{1}{2}}) - \varphi_h^*(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}) \right|$$

et comme

$$\left| I_\mu \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) - \varphi_h^* \left(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}} \right) \right| \leq Ch^2,$$

on obtient donc

$$K_2 \leq Ch^3. \tag{3.25}$$

Etant donné que $\left| u_j^n \right|$ est bornée, de (3.12), (3.24) et (3.25) on déduit que

$$\left| L_{j+1}^{n+1} \right| \leq Ch^2, \tag{3.26}$$

pour $0 \leq j \leq J^* - 1$. Le meme raisonnement nous donne pour $J^* \leq j \leq J - 1$,

$$\left| L_{j+1}^{n+1} \right| \leq Ch^2. \tag{3.27}$$

De (3.26) et (3.27), pour $0 \leq j \leq J - 1$et $0 \leq n \leq N - 1$, on déduit que

$$\left| L_{j+1}^{n+1} \right| \leq Ch^2.$$

■

Lemme 3.2. *Soit $B_{X_h}(u_h, M_h) \subset X_h$ la boule ouverte de centre u_h et rayon $M_h > 0$. Définissons la fonction ψ_h par*

$$\psi_h : B(u_h, M_h) \to Y_h,$$

où

$$\psi_h(v^0, v^1, v^2, ...v^n) = (p^0, p_0, p^1 ...p^n),$$

tel que

$$p^0 = v^0 - U^0 \in R^{j+1},$$

$$p_0^n = v_0^n - \varphi_h(\alpha(v^n)v^n), \quad n \in \{1, ..., N\},$$

où pour tout $1 \leq n \leq N - 1$, $0 \leq j \leq J^* - 1$,

$$p_{j+1}^{n+1} = v_{j+1}^{n+1} - v_j^n \exp \left(-h \left[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+1/2}), t_{n+\frac{1}{2}}) \right] \right),$$

et pour $1 \leq n \leq N-1$, $0 \leq j \leq J-1$,

$$p_{j+1}^{n+1} = v_{j+1}^{n+1} - v_j^n \exp(f(a_j) - f(a_{j+1})) \exp(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_u v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})).$$

Alors pour $M_h \leq Ch$ la fonction ψ_h est bien défini.

Preuve. Soit $(v^0, v^1, ..., v^n)$, $(w^0, w^1, ..., w^n) \in B_{X_h}(u_h, M_h)$ tels que $(v^0, v^1, ..., v^n) = (w^0, w^1, ..., w^n)$, il est clair que

$$\psi_h(v^0, v^1, ..., v^n) = \psi_h(w^0, w^1, ..., w^n).$$

Il reste à montrer que quelque soit $(v^0, v^1, ..., v^n) \in B_{X_h}(u_h, M_h)$, alors $\psi_h(v^0, v^1, ..., v^n) \in Y_h$, c'est-à-dire montrons que $\|\psi_h(v^0, v^1, ..., v^n)\|_{Y_h} < +\infty$. On a $p^0 = v^0 - U^0 \in R^{J+1}$,

comme $\|v^0\| < +\infty$ et $\|U^0\| < +\infty$, alors

$$\| p^0 \|_{\infty, J+1} = \max_{0 \leq j \leq J} \left| p_j^0 \right| = \max_{0 \leq j \leq J} \left| v_j^0 - U_j^0 \right| < +\infty. \tag{3.28}$$

D'autre part, pour tout $n \in \{1, ..., N\}$ on a

$$p_0^n = v_0^n - \varphi_h(\alpha(v^n)v^n),$$

d'ou

$$\begin{aligned} |p_0^n| &= \Big| v_0^n - h(\alpha(v^n)v^n)_1 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2} \left[(\alpha(v^n)v^n)_j + \alpha((v^n)v^n)_{j+1} \right] \Big| \\ &= \Big| v_0^n - h(\alpha(a_1, \varphi_h(\gamma_\alpha v^n), t_1) v_1^n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J-1} \tfrac{h}{2} \big[\alpha(a_j, \varphi_h(\gamma_\alpha v^n), t_n) v_j^n) \\ &\quad + \alpha(a_{j+1}, \varphi_h(\gamma_\alpha v^n), t_n) v_{j+1}^n) \big] \Big| \end{aligned}$$

d'aprés le Lemme 3.1 et (H4) il existe $C > 0$ tel que

$$|\alpha(a_j, \varphi_h(\gamma_\alpha v^n), t_n)| < C.$$

On obtient donc

$$|p_0^n| \leq |v_0^n| + Ch\,|v_1^n| + C\sum_{j=1}^{J-1} h/_2\left|v_j^n\right| + C\sum_{j=1}^{J-1} h/_2\left|v_{j+1}^n\right|,$$

il en résulte que pour tout $n \in \{1, ..., N\}$ on a

$$|p_0^n| \leq C\,\|v^n\|_{\infty J+1}\,,$$

d'où

$$\|p_0\|_{\infty N} < +\infty. \tag{3.29}$$

D'autre part,

$$\left|p_{j+1}^{n+1}\right| = \frac{1}{h}\left|v_{j+1}^{n+1} - v_j^n \exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})])\right|,$$

alors

$$\begin{aligned} \left|p_{j+1}^{n+1}\right| \;\; \leq \;\; & \frac{1}{h}\left|v_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}\right| + \left|L_{j+1}^{n+1}\right| \\ & + \left|\frac{u_j^n}{h}\exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h(\gamma_\mu u^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})])\right. \\ & \left. - \frac{v_j^n}{h}\exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})])\right|, \end{aligned}$$

le Lemme 3.1 et le Théorème 3.1 entrainent que

$$\left|p_{j+1}^{n+1}\right| \leq \frac{1}{h}\left|v_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}\right| + \left|L_{j+1}^{n+1}\right| + \frac{1}{h}\left|u_j^n - v_j^n\right| + C\,\|u^n - v^n\|_{\infty J}\,.$$

D'après la Proposition 3.1 on a $\left|L_{j+1}^{n+1}\right| \leq Ch^2$ et comme $\left|v_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}\right| \leq M_h$, $\left|u_j^n - v_j^n\right| \leq M_h$, $\|u^n - v^n\|_{\infty J} \leq M_h$, et $M_h \leq Ch$, on obtient que

$$\left|p_{j+1}^{n+1}\right| \leq C, \tag{3.30}$$

De (3.28), (3.29) et (3.30) on déduit que

$$(p^0, p_0, p^1, ..., p^n) \in Y_h.$$

Donc ψ_h est bien définie pour $M_h \leq Ch$. ■

Définissons maintenant l'erreur de consistance par

$$E_h = \parallel \psi_h(u_h) \parallel_{Y_h} = \|I_h(u_h)\|_{Y_h}\,.$$

Définition 3.1. On dit que le schéma numérique précédent est consistant, si et seulement si l'erreur de consistance, $E_h = \parallel \psi_h(u_h) \parallel_{Y_h} \to 0$ quand $h \to 0$, où bien

$$\lim_{h\to 0} \parallel \psi_h(u_h) \parallel_{Y_h} = \lim_{h\to 0} \|I_h(u_h)\|_{Y_h} = 0.$$

Le théorème suivante nous donne une condition suffisante pour l'obtention de la consistence du schéma numérique

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H5) ont lieu et soit h suffisamment petit. Alors le schéma numérique précédent est consistant, de plus*

$$\|\psi_h(u_h)\|_{Y_h} \le \left\|u^0 - U^0\right\|_{\infty J+1} + 0\left(h^2\right).$$

Preuve. On a $\psi_h(u_h) = \left(L^0, L_0, L^1, L^2, ..., L^N\right)$. D'après la proposition 3.1, pour $0 \le j \le J-1$ et $0 \le n \le N-1$ on a

$$\left|L^{n+1}_{j+1}\right| \le Ch^2. \tag{3.31}$$

De plus d'aprés la preuve de la Proposition 3.1 on déduit qu' il exist $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |L^n_0| &\le \int_0^{a_m} \alpha\left(a, I_\alpha(t_n), t_n\right) u(a, t_n) da - \varphi_h(\alpha(u^n)u^n) \\ &\le Ch^2 + \left|I_\alpha(t_n) - \varphi_h(\gamma_\mu u^n)\right|, \end{aligned}$$

d'après Angulo [5] on a l'inégalité suivante

$$\left|I_\alpha(t_n) - \varphi_h(\gamma_\mu u^n)\right| \le Ch^2,$$

on obtient donc, pour $0 \le n \le N$,

$$|L^n_0| \le Ch^2. \tag{3.32}$$

De (3.31) et (3.32) il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|\psi_h(u_h)\|_{Y_h} &= \left\|L^0\right\|_{\infty J+1} + \|L_0\|_{\infty N} + \sum_{n=1}^{n=N} h\, \|L^n\|_{\infty J} \\ &\le \left\|L^0\right\|_{\infty J+1} + Ch^2, \end{aligned}$$

d'ou

$$\|\psi_h(u_h)\|_{Y_h} \le \left\|u^0 - U^0\right\| + 0(h^2).$$

■

3.2 Stabilité du Schéma Numérique

Notre but dans ce paragraphe est de montrer que le schéma numérique proposé est stable par rapport au seuil M_h. Définissons l'ensembe H par

$$H = \{h \mid h = A/J^*,\ J^* \in \mathbb{N}^*\}.$$

Définition 3.2. On dit qu'une schéma numérique est stable par rapport au seuil M_h, s'il existe deux constantes positives h_0 et S telles que quelque soit $h \in H$ avec $h < h_0$ et quelque soit $V_h, W_h \in B(u_h, M_h)$ alors

$$\|V_h - W_h\|_{X_h} \leq S \|\psi_h(V_h) - \psi_h(W_h)\|_{Y_h}.$$

Le théorème suivant nous donne la stabilité du schéma numérique par rapport au seuil M_h.

Théorème 3.3. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H5) ont lieu et soit h suffisamment petit, alors le schéma numérique précédent est stable par rapport au seuil $M_h = Ch$, c'est à dire que $\exists h_0, S > 0, \forall h < h_0$ et $\forall v_h, w_h \in B(u_h, Ch)$*

$$\|v_h - w_h\|_{X_h} \leq S \|\psi_h(v_h) - \psi_h(w_h)\|_{Y_h}.$$

Preuve. Soit $\left(v^0, v^1, ..., v^N\right), \left(w^0, w^1, ..., w^N\right) \in B_{X_h}(u_h, M_h)$, posons

$$E^n = v^n - w^n \in \mathbb{R}^{J+1} \quad 0 \leq n \leq N,$$

$$\psi_h\left(v^0, v_0, v^1, ..., v^N\right) = \left(P^0, P_0, P^1, ..., P^N\right),$$

et

$$\psi_h\left(w^0, w_0, w^1, ..., w^N\right) = \left(R^0, R_0, R^1, ..., R^N\right).$$

Pour $0 \leq j \leq J^* - 1$ on a

$$\begin{aligned}
E_{j+1}^{n+1} &= v_j^n - w_j^n \\
&= v_j^n \exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]) \\
&\quad - w_j^n \exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu w^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]) \\
&\quad + h(P_{j+1}^{n+1} - R_{j+1}^{n+1}),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} E_{j+1}^{n+1} &= E_j^n \exp(-h[m(a_{j+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})]) \\ &\quad + w_j^n \exp(-hm(a_{j+\frac{1}{2}}))[\exp(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})) \\ &\quad - \exp(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu w^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}}))] \\ &\quad + h(P_{j+1}^{n+1} - R_{j+1}^{n+1}), \end{aligned}$$

de la même manière, pour $J^* \leq j \leq J-1$ on a

$$\begin{aligned} E_{j+1}^{n+1} &= E_j^n \exp(f(a_j) - f(a_{j+1})) \exp(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})) \\ &\quad + w_j^n \exp(f(a_j) - f(a_{j+1})) \left[\exp\left(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}})\right)\right. \\ &\quad \left. - \exp(-h\mu(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h^*(\gamma_\mu w^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}}))\right] \\ &\quad + h(P_{j+1}^{n+1} - R_{j+1}^{n+1}), \end{aligned}$$

d'après (H3), le Théorème (3.1) et comme $\|w\|_{\infty J+1} < +\infty$ on déduit que

$$\begin{aligned} \left|E_{j+1}^{n+1}\right| &\leq \left|E_j^n\right| + Ch\left|\varphi_h^*(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}) - \varphi_h^*(\gamma_\mu w^{n+\frac{1}{2}})\right| \\ &\quad + h\left|P_{j+1}^{n+1} - R_{j+1}^{n+1}\right| \\ &\leq \left|E_j^n\right| + Ch\|E^n\|_{1J+1} + h\left|P_{j+1}^{n+1} - R_{j+1}^{n+1}\right|. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Pour $N \geq n > j \geq 1$ on obtient par reccurence que

$$\begin{aligned} \left|E_j^n\right| &\leq \left|E_0^{n-j}\right| + Ch\sum_{i=1}^{j}\left\|E^{n-i}\right\|_{1J+1} + h\sum_{i=0}^{j-1}\left|P_{j-i}^{n-i} - R_{j-i}^{n-i}\right| \\ &\leq \left|E_0^{n-j}\right| + Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{_{1J+1}} + h\sum_{i=0}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

et pour $J \geq j \geq N \geq 1$

$$\begin{aligned} \left|E_j^n\right| &\leq \left|E_{j-n}^0\right| + Ch\sum_{i=1}^{n}\left\|E^{n-i}\right\|_{_{1J+1}} + h\sum_{i=0}^{n-1}\left|P_{j-i}^{n-i} - R_{j-i}^{n-i}\right| \\ &\leq \left|E_{j-n}^0\right| + Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{_{1J+1}} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_j}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} E_0^n &= \varphi_h\left(\alpha\left(v^n\right)v^n\right) - \varphi_h\left(\alpha\left(w^n\right)w^n\right) + \left(P_0^n - R_0^n\right) \\ &= \varphi_h\left(\alpha\left(v^n\right)E^n\right) + \varphi_h\left(\left[\alpha\left(v^n\right) - \alpha\left(w^n\right)\right]w^n\right) + \left(P_0^n - R_0^n\right), \end{aligned}$$

d'aprés (H3), le Théorème 3.1, et puisque $\|w^n\|_{\infty_{J+1}} < \infty$, alors pour tout $0 \leq n \leq N$ on a

$$\begin{aligned} \left|E_0^n\right| &\leq C\left\|E^n\right\|_{1_{J+1}} + C\left|\varphi_h\left(\gamma_\alpha\left(v^n\right)\right) - \varphi_h\left(\gamma_\alpha\left(w^n\right)\right)\right| \\ &\quad + \left|P_0^n - R_0^n\right| \\ &\leq C\left\|E^n\right\|_{1_{J+1}} + \left|P_0^n - R_0^n\right|. \end{aligned} \tag{3.36}$$

En combinant (3.34), (3.35) et (3.36) on aura

$$\begin{aligned} \left\|E^n\right\|_{1_{j+1}} &= h\left|E_0^n\right| + \sum_{j=1}^{n-1} h\left|E_j^n\right| + \sum_{j=n}^{j} h\left|E_j^n\right| \\ &\leq h\Big(C\left\|E^n\right\|_{1_{j+1}} + \left|P_0^n - R_0^n\right|\Big) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} h\left(\left|E_0^{n-1}\right| + Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{1_{J+1}} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty J}\right) \\ &\quad + \sum_{j=n}^{J} h\left(\left|E_{j-n}^0\right| + Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{1_{J+1}} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty J}\right), \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \left\|E^n\right\|_{1_{J+1}} &\leq C\left\|E^0\right\|_{1_{J+1}} + h\Big(C\left\|E^n\right\|_{1_{J+1}} + \left|P_0^n - R_0^n\right|\Big) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} h\Big(C\left\|E^{n-j}\right\|_{1_{J+1}} + \left|P_0^{n-j} - R_0^{n-j}\right|\Big) + \\ &\quad Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{1_{J+1}} + Ch\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J} \\ &\leq C\left\|E^0\right\| + Ch\sum_{i=0}^{n}\left\|E^i\right\|_{1_{J+1}} \\ &\quad + C\sum_{i=1}^{n} h\left|P_0^i - R_0^i\right| + Ch\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J}, \end{aligned}$$

par récurence on obtient que

$$\begin{aligned} \|E^n\|_{1_{J+1}} &\leq C\left\|E^0\right\|_{1_{J+1}} + C\sum_{i=1}^{n} h\left|P_0^i - R_0^i\right| + Ch\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J} \\ &\leq C\left(\left\|E^0\right\|_{\infty_{J+1}} + \|P_0 - R_0\|_{\infty_N} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J}\right). \end{aligned}$$

On a pour $N \geq n > j \geq 1$,

$$\left|E_j^n\right| \leq \left|E_0^{n-j}\right| + Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{1_{J+1}} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J},$$

pour $J \geq j \geq N \geq 1$

$$\left|E_j^n\right| \leq \left|E_{j-n}^0\right| + Ch\sum_{i=0}^{n-1}\left\|E^i\right\|_{1_{J+1}} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty J},$$

et pour $0 \leq n \leq N$

$$|E_0^n| \leq C\|E^n\|_{1_{J+1}} + |P_0^n - R_0^n|.$$

Alors pour tout $0 \leq n \leq N$ on déduit que

$$\|E^n\|_{\infty_{J+1}} \leq C\left(\left\|E^0\right\|_{\infty_{J+1}} + \|P_0 - R_0\|_{\infty_N} + h\sum_{i=1}^{n}\left\|P^i - R^i\right\|_{\infty_J}\right).$$

Finalement, prenons $S = C$ alors quelque soit $h_0 \in H$ on obtient

$$\|v_h - w_h\|_{X_h} \leq S\,\|\psi_h(v_h) - \psi_h(w_h)\|_{Y_h}.$$

Ce qui montre que le schéma numérique précédent est stable par rapport au seuil M_h ■

Remarque 3.1. Le théorème précedent reste vrai pour v_h et w_h sont bornées.

Notre but dans ce paragraphe est de montrer que le schéma numérique proposé est stable.

Définition 3.3. On dit qu'un schéma numérique est stable si et selment si la solution approchée est bornée, c-à-d s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $0 \leq n \leq N$, $\|U^n\|_{\infty_{J+1}} \leq C$.

On a le résultat suivant sur la stabilité du schéma numérique.

Théorème 3.4. *le schéma numérique précédent est stable, c'est à dire qu'il existe* $C > 0$, *tel que pour* $0 \leq n \leq N$, $\|U^n\|_{\infty_{J+1}} \leq C$.

Preuve. On a pour $0 \leq j \leq J^* - 1$,

$$U_{j+1}^{n+1} = U_j^n \exp\left(-h\left[m\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right) + \mu\left(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h\left(\gamma_\mu U^{n+\frac{1}{2}}\right), t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right]\right),$$

et pour $J^* \leq j \leq J - 1$,

$$\begin{aligned} U_{j+1}^{n+1} &= U_j^n \exp\left(f\left(a_j\right) - f\left(a_{j+1}\right)\right) \\ &\exp\left[-h\mu\left(a_{j+\frac{1}{2}}, \varphi_h\left(\gamma_\mu U^{n+\frac{1}{2}}\right), t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right], \end{aligned}$$

avec $0 \leq n \leq N - 1$,

$$U_0^{n+1} = \varphi_h\left(\alpha\left(U^{n+1}\right) U^{n+1}\right). \tag{3.37}$$

De (3.37), et $\forall 0 \leq j \leq J - 1$ on obtient que

$$\left|U_{j+1}^{n+1}\right| \leq \left|U_j^n\right|.$$

Pour $n > j$ on a

$$\left|U_j^n\right| \leq \left|U_0^{n-j}\right|,$$

et pour $n \leq j$ on déduit que il existe $C > 0$ tel que

$$\left|U_j^n\right| \leq \left|U_{j-n}^0\right| \leq C.$$

Pour démontrer que$\|U^n\|_{\infty_{J+1}}$ est bornée il suffit de montrer que $|U_0^n|$ est bornée pour $1 \leq n \leq N$. Si $n = 1$ on a

$$\begin{aligned} U_0^1 &= \varphi_h\left(\alpha\left(U^1\right) U^1\right) = \\ & h\left(\alpha\left(U^1\right) U^1\right)_1 + \sum_{i=1}^{J-1} \frac{h}{2}\left[\left(\alpha\left(U^1\right) U^1\right)_j + \left(\alpha\left(U^1\right) U^1\right)_{j+1}\right], \end{aligned}$$

or on a pour $\forall 1 \leq j \leq J$

$$\left|\left(\alpha\left(U^1\right) U^1\right)_j\right| \leq \left|\alpha\left(a_j, \varphi_h\left(\gamma_\mu^1 U\right) .t_1\right)\right| \left|u_j^1\right| \leq C\left|U_{j-1}^0\right|,$$

donc

$$\left|U_0^1\right| = \left|\varphi_h\left(\alpha\left(U^1\right)U^1\right)\right| \leq C\left\|U^0\right\|_{\infty_{J+1}}. \tag{3.38}$$

Supposons que $\left|U_0^k\right|$ est bornée pour $2 \leq k \leq n$, c'est-à-dire il existe $C > 0$ tel que $\left|U_0^k\right| \leq C$ et montrons que $\left|U_0^{n+1}\right|$ est bornée. On a

$$\begin{aligned}\left|U_0^{n+1}\right| \leq & \left|h\left(\alpha\left(U^{n+1}\right)U^{n+1}\right)_1\right. \qquad (3.39)\\ & \left.+\sum_{i=1}^{J-1}\frac{h}{2}\left[\left(\alpha\left(U^{n+1}\right)U^{n+1}\right)_j + \left(\alpha\left(U^{n+1}\right)U^{n+1}\right)_{j+1}\right]\right|,\end{aligned}$$

d'autre part d'après le Lemme 3.1 on obtient que

$$\begin{aligned}\left|\left(\alpha\left(U^{n+1}\right)U^{n+1}\right)_1\right| &\leq \left|\alpha\left(a_1, \varphi_h\left(\gamma_\mu^{n+1}U^{n+1}\right), t_{n+1}\right)\right|\left|U_1^{n+1}\right|\\ &\leq C\left|U_0^n\right| \leq C \qquad (3.40)\end{aligned}$$

et pour $2 \leq j \leq J$ on a

$$\begin{aligned}\left|\left(\alpha\left(U^{n+1}\right)U^{n+1}\right)_j\right| &\leq \left|\alpha\left(a_j, \varphi_h\left(\gamma_\mu U^{n+1}\right), t_{n+1}\right)\right|\left|U_j^{n+1}\right|,\\ &\leq C\left|U_{j-1}^n\right| \leq C \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Car $\left|U_0^k\right| \leq C$ pour $2 \leq k \leq n$. Alors d'aprés (3.38)-(3.41) il existe $C > 0$ tel que

$$\left|U_0^{n+1}\right| \leq C.$$

On déduit que $\forall 0 \leq j \leq J$, $0 \leq n \leq N$,

$$\left|U_j^n\right| \leq C,$$

d'ou $\forall 0 \leq n \leq N$,

$$\left\|U^n\right\|_{\infty_{J+1}} < C.$$

D'où le résultat ■

3.4 Convergence du Schéma Numérique

Notre but dans ce paragraphe est de montrer la convergence du schéma numérique.

Définition 4.5. Définissons l'erreur de convergence par $\|e_h\|_{X_h} = \|u_h - U_h\|_{X_h}$. On dit qu'un schéma numérique est convergent si et seulement si l'erreur de convergence $\|e_h\|_{X_h} \to 0$ quand $h \to 0$.

On aurra besoin du théorème suivant (voir [19]).

Théorème 3.5 (cf. [19]). *Si la fonction ψ_h est continue sur $B(u_h, M_h)$, et le schéma numérique précédent est consistant et stable par rapport au seuil M_h, et $\|I_h\|_{y_h} = o(M_h)$. Alors*
1. il existe une unique solution approchée $(U^0, U^1, ...U^N)$ appartenant à $B(u_h, M_h)$ telle que $\psi_h(U^0, U^1, ..., U^N) = 0$,
2. la solution $(U^0, U^1, ...U^N)$ est converge vers la solution exacte et $\|e_h\|_{X_h} \leq 0(\|I_h\|_{Y_h})$.

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour avoir la convergence du schéma numérique.

Théorème 3.6. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H5) ont lieu. Alors si $M_h \leq Ch$, il existe une unique solution approchée $(U^0, U^1, ..., U^N)$ appartenant à $B(u_h, M_h)$ satisfaisant*

$$\| u_h - U_h \|_{X_h} \leq C \left\|u^0 - U^0\right\|_\infty + 0(h^2).$$

Preuve. D'aprés les Théorèmes 3.2 et 3.3 le schéma numérique est consistant et stable par rapport au seuil $M_h \leq Ch$. Pour $\|u^0 - U^0\|_\infty \leq h^2$,on a $\|I_h\|_{X_h} = o(M_h)$. Alors pour démontrer le Théoreme 3.6, montrons que la fonction ψ_h, est continue sur $B(u_h, M_h)$. Comme la fonction ψ_h est bien définie pour $M_h \leq Ch$, il reste à montrer que pour tout suite $((v_h)_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $B(u_h, M_h)$ qui converge vers v_h, alors $(\psi_h(v_h)_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi_h(v_h)$.
Soit $(v_h)_m \to v_h$, simplement on a

$$\begin{aligned} \psi_h(v_h)_m &= ((P^0)_m, (P_0)_m, (p^1)_m, ..., (p^N)_m), \\ \psi_h(v_h) &= (R^0, R_0, R^1, R^2, ..., R^N), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\psi_h(v_h)_m - \psi_h(v_h)\|_{X_h} &= \|(P^0)_m - R^0\|_{\infty j+1} \\ &+ \|(P_0)_m - R_0\|_{\infty N} \\ &+ \sum_{n=1}^{N} h \|(P^n)_m - R^n\|_{\infty J}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Mais

$$\left\|\left(P^0\right)_m - R^0\right\|_{\infty j+1} = \left\|(v^0)_m - v^0\right\|_{\infty j+1} \leq \|(v_h)_m - v_h\|_{X_h}. \quad (3.43)$$

Pour tout $0 \leq n \leq N$ il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |P_0^n - R_0^n| &= |[(v_0^n)_m - \varphi_h(\alpha((v^n)_m (v^n)_m) \\ &\quad - (v_0^n - \varphi_h(\alpha(v^n)v^n))]| \\ &\leq |(v_0^n)_m - v_0^n| + C\,\|(v^n)_m - v^n\|_{\infty j+1} \\ &\leq C\,\|(v_h)_m - (v_h)\|_{X_h}, \end{aligned}$$

donc

$$\left\|p^0 - R^0\right\|_{\infty N} \leq C\,\|(v_h)_m - (v_h)\|_{X_h}. \quad (3.44)$$

D'autre part, pour $0 \leq n \leq n-1$ et $0 \leq j \leq J^* - 1$ on a

$$\left|\left(p_{i+1}^{n+1}\right)_m - R_{i+1}^{n+1}\right| =$$

$$\left|\frac{(v_{i+1}^{n+1})_m - (v_i^n)_m \exp\left[-h(m_{i+\frac{1}{2}} + \mu(a_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_h(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}})_m, t_{n+\frac{1}{2}}))\right]}{h} - \frac{(v_{i+1}^{n+1}) - (v_i^n) \exp\left[-h(m(a_{i+\frac{1}{2}}) + \mu(a_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_h(\gamma_\mu v^{n+\frac{1}{2}}), t_{n+\frac{1}{2}}))\right]}{h}\right|$$

d'après le Théorème 3.1, le Lemme 1.1 et $|v_i^n| \leq C$ on obtient

$$\begin{aligned} \left|\left(p_{i+1}^{n+1}\right)_m - R_{i+1}^{n+1}\right| &\leq \frac{1}{h}\left|(v_{i+1}^{n+1})_m - v_{i+1}^{n+1}\right| + \frac{1}{h}\left|(v_i^n)_m - v_i^n\right| \\ &\quad + C\,\|(v^n)_m - v^n\|_{\infty J+1} \\ &\leq \frac{2}{h}\,\|(v_h)_m - (v_h)\|_{X_h} + C\,\|(v_h)_m - v_h\|_{X_h}. \end{aligned}$$

D'ou pour $0 \leq n \leq N-1$ et $0 \leq j \leq J^* - 1$

$$\begin{aligned} \left\|p^{n+1} - R^{n+1}\right\|_{\infty J} &\leq \frac{2}{h}\,\|(v_h)_m - (v_h)\|_{X_h} \\ &\quad + C\,\|(v_h)_m - v_h\|_{X_h}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

De la même maniére on obtient pour tout $0 \leq n \leq N-1$, et $J^* \leq j \leq J-1$,

$$\begin{aligned} \left\|p^{n+1} - R^{n+1}\right\|_{\infty j} &\leq \frac{2}{h}\,\|(v_h)_m - (v_h)\|_{X_h} \\ &\quad + C\,\|(v_h)_m - v_h\|_{X_h}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Puisque $((v_h)_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers v_h, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists m_0, m > m_0, \quad \|(v_h)_m - (v_h)\|_{X_h} < \varepsilon^{'}, \tag{3.47}$$

prenons

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3C}, \frac{\varepsilon}{6TC}, \frac{\varepsilon h}{12T}\right) \text{ et } m_1 = m_0. \tag{3.48}$$

En combinant (3.43), (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) et (3.48) on déduit que quelque soit $m > m_0$

$$\left\|P_m^0 - R^0\right\|_{\infty J+1} \leq \|(v_h)_m - v_h\|_{X_h} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\|(P_0)_m - R_0\|_{\infty N} \leq C\,\|(v_h)_m - v_h\|_{X_h} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

et

$$\begin{aligned} \|(P^n)_m - R^n\|_{\infty J} &\leq \frac{2}{h}\,\|(v_h)_m - v_h\|_{X_h} \\ &\quad + C\,\|(v_h)_m + v_h\|_{X_h} \\ &< \frac{\varepsilon}{3T}, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\sum_{n=1}^{N} h\,\|(P_n)_m - R^n\|_{\infty J} < \frac{\varepsilon}{3},$$

donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m_1 = m_0$, $m > m_1$

$$\|(\psi_h(v_h))_m - \psi_h(v_h)\|_{X_h} < \varepsilon.$$

Finalement,

$$\varphi_h((v_h))_m \to \varphi_h(v_h).$$

Le Théoreme 3.5 entraîne qu'il existe une unique solution approchée $\left(U^0, U^1, ...U^N\right)$ appartenant à $B\,(u_h, M_h)$ qui satisfait $\| \; u_h - U_h \; \|_{X_h} \leq C\,\|u^0 - U^0\|_\infty + 0(h^2)$.$\blacksquare$

Autre théorème de la convergence

Théorème 3.7. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H5) ont lieu. Alors pour h suffisamment petit, il existe une unique solution approchée* $\left(U^0, U^1, ...U^N\right)$ *appartenant à* $B\left(u_h, M_h\right)$ *satisfait*

$$\| u_h - U_h \|_{X_h} \leq C \left\|u^0 - U^0\right\|_\infty + 0(h^2).$$

Preuve. D'aprés le Théorème 3.4 la solution approchée est bornée. Choisissons U^0 telle que $\|u^0 - U^0\|_\infty \leq h^2$. Du Théorème 3.2 on obtient que $\|I_h\|_{X_h} = o(M_h)$, c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|I_h\|_{X_h}}{M_h} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists h_0,\ h < h_0,\ \|I_h\|_{Y_h} < \varepsilon M_h,$$

prenons $\varepsilon = \frac{1}{S}$, alors il existe h_1 tel que pour $h_1 > h$,

$$\|I_h\|_{Y_h} < \frac{1}{S} M_h,$$

où $I_h = \psi_h(u^0, u^1, u^2, ..., u^n)$. D'autre part on a $\psi(U_h) = 0$, par suite

$$\|I_h\|_{Y_h} = \|\psi_h(U_h) - \psi_h(u_h)\|_{Y_h} < \frac{1}{S} M_h. \tag{3.49}$$

D'aprés la remarque 3.1 et (3.49), le schéma numérique est stable par rapport au seuil M_h, d'où

$$\|u_h - U_h\|_{X_h} \leq S \|\psi_h(u_h) - \psi_h(U_h)\|_{Y_h} \leq M_h, \tag{3.50}$$

donc

$$U_h \in B(u_h, M_h).$$

Montrons que U_h est unique. Supposons qu'ils existent deux solutions U_h, U'_h. De (3.50) on a

$$\|U_h - U'_h\|_{X_h} \leq S \|\psi_h(U_h) - \psi_h(U'_h)\|_{Y_h} = 0,$$

ce qui implique $U_h = U'_h$, la solution est alors unique. ll reste à montrer que

$$\| u_h - U_h \|_{X_h} \leq C \left\|u^0 - U^0\right\|_\infty + 0(h^2).$$

De (3.49) on a

$$\|I_h\|_{Y_h} = \|\psi_h(U_h) - \psi_h(u_h)\|_{Y_h},$$

le Théorème 3.3 entraine que

$$\|I_h\|_{X_h} \leq C \left\|u^0 - U^0\right\|_\infty + 0(h^2). \tag{3.51}$$

En combinant (3.50) et (3.51) on déduit que

$$\| u_h - U_h \|_{X_h} \leq C \left\|u^0 - U^0\right\|_\infty + 0(h^2).$$

■

Bibliographie

[**1**] F. sharpe and A. lotka, *A problem in age-distribution,* Philosophical Magazine, 6 (1911) 435-438.

[**2**] A. Mckendrick, *Applications of mathematics to medical problemes proc*, Edinburgh math. Soc. 44 (1926) 98-130.

[**3**] M. Gurtin and R. MacCamy, *Nonlinear age-dependent population dynamics*, Arch. Ration. Mech. Anal. 54 (1974) 281-300.

[**4**] G.F. Webb,*Theory of nonlinear Age-Dependent Population Dynamics,* Marcel Dekker, New Youk, 1985.

[**5**] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, M.A. Lopez-marcos, F.A. Miliner, *A numerical method for nonlinear age-structured population models with finite maximum age*, J.Math. Anal. Appl. 361 (2010) 150-160.

[**6**] L. M Abia, J.C. Lopez-Marcos, *Age-structured population models and their numerical solution*, Eco. Model. 188 (2005) 112-136.

[**7**] L. M Abia, J.C. Lopez-Marcos, M.A. Lopez-Marcos, *Numericol schemes for a size-structuredcell population model with equal fission*, Math. Comput. Modilling 50 (2009) 653-664.

[**8**] M. Adimy, O. Angulo, F. Croust,J.C. Lopez-Marcos,*Numerical integration mathematcal madels of hematopoietic stem cell dynamics,* comput. Math. Appl. 56 (2008) 594-606.

[**9**] O. Angulo, A. Duram, J.C. Lopez-Marcos,*Numerical study of size-structured population models.A case of Gambussia affinis*, C.R. Biol 328 (2005) 387-402.

[**10**] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos,M.A. Lopez-Marcos, *A numerical simulation for the dynamics of the sexual phase of monogonont rotifrea*,C.R. Biol 327 (2004) 293-303.

[**11**] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, M.A. Lopez-Marcos.*A numerical integator for a model with a discontinuous sink term:the dynamics of the sexual phase of monogonont rotifrea.Nonlinear Anal,* Rerl World appl 6 (2005) 935-954.

[12] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, F.A. Milner.*The applucation of an age-structured model with unbounded mortality to demography*, Math. Biosci. 208 (2007) 495-512.

[13] M.A. Bees, O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, D. Schley. *Dynamiics of a structured slug population model in the absence of seasanal variation.*Math.Models Methods appl. sic. 16 (2006) 1961-1985.

[14] M.E. Gurtin, R.C. MacCamy. *Nonlinear age-dependent population dynamics,Arch.Ration Mech.* Anal. 54 (1974) 281-300.

[15] M. Lannelli, *Mathematical Theory of age-stuctured pulation.Dynamics,*appl. Math. Monomgraphs C. N. R. Giardini Editori Stampatori, Pisa. 1995.

[16] M. Lannelli,M. Martcheva, F.A. Milner,*Gender-structured Population Modeling:Mathematical Methods,Numerics and simulation.* SIAM. Philadelphia (2005) .

[17] M. Lannelli, F.A. Milner, *on the opproximation of the Lotka-Mckendrick equation with finite life-spen,* J. Comput. appl. 136 (2001) 245-254.

[18] L.Y. Kim, Y. Kwon.*A collocation method for the Gurtin-MacCamy eqution with finite life-spen.* SIAM J. Numer. anal. 39 (6) (2002) 1914-1935.

[19] J.C.Lopez-marcos, J.M. Sans-Sern, *Stability and convergence in numerical analysis*(3) *Linear investigation of nonlinear stability* IMA. J. Numer. Anal. 8 (1988) 71-84.

[20] A.J. Lotka, *Element of Physical Biology,Williams and wilkins.* 1925.

[21] A.J. Lotka *the structure of agrowing population,*Human Biol. 3 (1931) 459-493.

[22] T.R. Malthus, *An Essay on the principal of Population,Cambridge,* University Press, Cambridge, 1992.

[23] A.G. Mckendrick. *Application of the mathematics to medical problems*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 44 (1926) 98-130.

[24] M.A. Zavala, O. Angulo,R. Bravo de la parra, J.C. Lopez-Marcos, *A model of stand structure and dynamics for ramet and monospecific tree populations:*Linking pettem to process, J. Theor. Biol. 244 (2007) 440-450.