MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 Août 1955 - Skikda

Faculté des Sciences Département de Mathématiques

Analyse Numérique I

Cours et Exercices

Dr KHENNICHE GHANIA

2020-2021

Table des matières

Introduction

L'analyse numérique a commencé bien avant la conception des ordinateurs et leur utilisation quotidienne que nous connaissons aujourd'hui. Les premières méthodes ont été développées pour essayer de trouver des moyens rapides et efficaces de s'attaquer à des problèmes soit fastidieux à résoudre à cause de leur grande dimension (systèmes à plusieurs dizaines d'équations par exemple), soit parce qu'il n'existe pas de solutions explicites connues même pour certaines équations assez simples en apparence.
Dès que les premiers ordinateurs sont apparus, ce domaine des mathématiques a pris son envol et continue encore à se développer de façon très soutenue. Les caractéristiques des ordinateurs (rapidité, précision,. . . ect) ont permis d'améliorer plusieurs méthodes numérique connues, et ont facilité la création d'algorithmes relatifs à des problèmes dificile voir impossible à trouver la solution analytique.
Ce cours et s'initier aux bases de l'analyse numérique en espérant qu'elles éveilleront de l'intérêt, de la curiosité aux étudiants de $2^{`eme}$ année licence mathématiques . Il a pour objectif de présenter une variété d'outils numériques permettant la résolution d'un certain nombre de problèmes.

Les chapitres de ce cours sont illustrés par des exemples d'applications,et à la fin de chaque chapitre une série d'exercices. Ce polycopie ce compose de cinque chapitres.
Chapitre 1 : Notions sur les erreurs en analyse numérique,
Chapitre 2 : Interpolation polynômiale,
Chapitre 3 : Approximation aux sens des moindres carrés
Chapitre 4 : Intégration et dérivation numériques,
Chapitre 5 : Résolution des équations non linéaires.

Chapitre 1

Notions sur les erreurs en Analyse Numérique

Introduction

Le mot erreur n'est pas pris au sens de faute (raisonnement faux dans la méthode, instruction fausse dans le programme). Il ne concerne que des erreurs inévitables. On peut les classer en trois catégories :

Les erreurs sur les données. Elles peuvent être dues à l'imprécision des mesures physiques ou au fait que les données proviennent elles mêmes d'un calcul approché. Elles sont imposées, en quelque sorte, de l'extérieur et nous ne pouvons agir sur elles. Néanmoins, la manière dont elles se propagent au cours des calculs est davantage du ressort du calculateur.

Les erreurs d'arrondi. Ce sont les erreurs dus au fait que la machine ne peut représenter les nombres réels qu'avec un nombre fini de chiffres. A chaque opération mathématique élémentaire, on peut perdre des chiffres significatifs. Le calculateur doit donc être vigilant quand le nombre d'opérations est très important. Cela va faire l'objet du prochain paragraphe.

Les erreurs d'approximation ou de discrétisation. Ce sont les erreurs qu'on commet, par exemple, lorsqu'on calcule une intégrale à l'aide d'une somme finie, une dérivée à l'aide de diférences finies ou bien la somme d'une série infinie à l'aide d'un nombre fini de ses termes (on parle alors quelquefois d'erreur de troncature). Une situation consiste à approcher une fonction, solution d'une certaine équation fonctionnelle ou aux dérivées partielles, par une combinaison linéaire finie de fonctions élémentaires. Ce type d'erreurs est bien sûr fortement lié à la méthode employée. Un des buts de l'analyse numérique consiste justement à évaluer ces erreurs de discrétisation pour chaque algorithme mis en place.

Dans ce chapitre nous nous intéressons principalement aux erreurs numériques.

1.1 Erreurs absolue et relative

1.1.1 Erreur absolue

Définition 1.1. L'erreur absolue est le majorant de la valeur absolue de la différence entre le nombre réel x et le nombre approché x^*, la quantité réelle positive

$$\Delta(x) = \mid x - x^* \mid .$$

Remarque 1.1. Plus l'erreur absolue de x^* est petite, plus x^* est précise.

Exemple 1.1. Pour la valeur exacte de $x = \frac{2}{3}$, la valeur approchée $x_1^* = 0.666667$ est mille fois plus précise que la valeur approchée $x_2^* = 0.667$.
En effet, nous avons

$$E_1 = \mid x - x_1^* \mid = \mid \frac{2}{3} - 0.666667 \mid = \mid \frac{2000000 - 2000001}{3.10^6} \mid = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$$

$$E_2 = \mid x - x_2^* \mid = \mid \frac{2}{3} - 0.667 \mid = \mid \frac{2000 - 2001}{3.10^3} \mid = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$$

Ainsi $E_2 = 10^3 \cdot E_1$.

1.1.2 Erreur relative

Définition 1.2. L'erreur relative est égale à l'erreur absolue divisée par la valeur absolue du nombre x

$$E_r = \frac{\mid x - x^* \mid}{\mid x \mid} = \frac{E}{\mid x \mid}.$$

Remarque 1.2. E_r est souvent exprimée en pourcentage.

Exemple 1.2. Pour les valeurs exactes de $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{15}$, on considère les valeurs approchées respectives $x_1^* = 0.67$ et $y_2^* = 0.07$.
En effet, les erreurs absolues respectives sont

$$E_1 = \mid x - x^* \mid = \mid \frac{2}{3} - 0.67 \mid = \mid \frac{200 - 201}{3.10^2} \mid = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$$

$$E_2 = \mid y - y^* \mid = \mid \frac{1}{15} - 0.07 \mid = \mid \frac{100 - 105}{15.10^2} \mid = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$$

Les erreurs relatives correspondantes sont

$$E_{r_1} = \frac{E_1}{\mid x \mid} = 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.5\%$$

$$E_{r_2} = \frac{E_2}{\mid y \mid} = 5 \cdot 10^{-2} = 5\%$$

Ainsi, bien que les erreurs absolues soient égales, x^* est une approximation dix fois plus précise pour x que $y*$'l'est pour y.

1.1.3 L'erreur percentile

$E\%$ est cent fois l'erreur relative

$$E\% = 100 \times E_r.$$

1.1.4 Majorants des erreurs absolue et relative

Si la valeur exacte est connue on peut déterminer les erreurs absolue et relative. Mais dans la majorité des cas, elle ne l'est pas. Les erreurs absolue et relative deviennent alors inconnues, et pour les estimer on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.3. On appelle majorant de l'erreur absolue d'une valeur approchée x^* de x tout nombre réel positif Δx vérifiant :

$$E = \mid x - x^* \mid \leq \Delta x$$

ou de manière équivalente :

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x.$$

Remarque 1.3. 1- On écrit $x = x^* \pm \Delta x$ qui veut dire $x \in [x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$.
2- Plus Δx est petit, plus l'approximation x^* est précise. D'où, en pratique, on prend le plus petit Δx possible.
3- Si x_1 et x_2 sont tels que : $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ est une approximation de x avec une erreur absolue $\Delta x = \frac{x_1-x_2}{2}$.
4- Souvent au lieu d'écrire $x = x^* \pm \Delta x$ ou $x \simeq x^* \pm \Delta x$, on écrit $x = x^* \pm \delta x \cdot 100\%$ ou $x \simeq x^* \pm \delta x \cdot 100\%$ avec la quantité δx définie par $\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}$ qui est le majorant de l'erreur relative à x^*.

1.2 Propagation des eurreurs

1.2.1 Erreurs d'une addition

Propriété 1.1. *Soient x et y deux quantités exactes , x^* et y^* des approximations de x et y, respectivement. Alors on a*

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$$

$$\delta(x + y) \leq \max(\delta x, \delta y)$$

Démonstration. 1- Nous avons,

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x \ et \ y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y,$$

donc

$$x^* + y^* - (\Delta x + \Delta y) \leq x + y \leq x^* + y^* + (\Delta x + \Delta y)$$

Ainsi $(\Delta x + \Delta y)$ est un majorant de l'erreur absolue de $x + y$, et par suite $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$.
2-

$$\delta(x + y) = \frac{\Delta(x + y)}{x^* + y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^* - y^*} = \frac{\Delta x}{x^*}\frac{x^*}{x^* - y^*} + \frac{\Delta y}{y^*}\frac{y^*}{x^* - y^*}$$

$$= \delta x \cdot \lambda_1 + \delta y \cdot \lambda_2, \quad (avec \ \ \lambda_1 = \frac{y^*}{x^* - y^*} > 0, \lambda_2 = \frac{x^*}{x^* - y^*} > 0 \ \ et \ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$$

$$\leq \max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_1 + \max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_2$$
$$\leq \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=1} \max(\delta x, \delta y) \leq \max(\delta x, \delta y)$$

□

1.2.2 Erreurs d'une soustraction

Propriété 1.2. *Soient x et y deux quantités exactes , x^* et y^* respectivement des approximations de x et y . On a alors :*

$$\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y$$
$$\delta(x-y) \leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \max(\delta x, \delta y)$$

Démonstration. 1- Nous avons,

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x \ et \ y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y,$$

ceci implique que $-y^* - \Delta y \leq -y \leq -y^* + \Delta y$
d'où

$$(x^* - y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x - y \leq (x^* - y^*) + (\Delta x + \Delta y)$$

Ainsi $(\Delta x + \Delta y)$ est un majorant de l'erreur absolue de $x - y$, donc $\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y$.
2-

$$\delta(x-y) = \frac{\Delta(x-y)}{x^*-y^*} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x^*-y^*} = \frac{\Delta x}{x^*}\frac{x^*}{x^*+y^*} \cdot \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} + \frac{\Delta y}{y^*}\frac{y^*}{x^*+y^*} \cdot \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*}$$
$$= [\delta x \cdot \lambda_1 + \delta y \cdot \lambda_2]\frac{x^*+y^*}{x^*-y^*}$$
$$\leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*}[\max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_1 + \max(\delta x, \delta y) \cdot \lambda_2]$$
$$\leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*}\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=1} \max(\delta x, \delta y) \leq \frac{x^*+y^*}{x^*-y^*} \max(\delta x, \delta y)$$

où $\lambda_1 = \frac{x^*}{x^*-y^*} > 0$, $\lambda_2 = \frac{y^*}{x^*-y^*} > 0$ *et* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ □

1.2.3 Erreurs de multiplication

Propriété 1.3. *Soient x et y deux quantités exactes , x^* et y^* des approximations de x et y, respectivement. Alors on a*

$$\Delta(xy) = x^*\Delta x + y^*\Delta y$$
$$\delta(xy) = \delta x + \delta y$$

Démonstration. 1- De,

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x \ et \ y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y,$$

On dèduit (en suppossant $x^* - \Delta x > 0$ et $y^* - \Delta y > 0$)

$$(x^* - \Delta x)(y^* - \Delta y) \leq xy \leq (x^* + \Delta x)(y^* + \Delta y)$$

ce est équivalent à

$$x^*y^* - x^*\Delta y - y^*\Delta x + \Delta x\Delta y \leq xy \leq x^*y^* + x^*\Delta y + y^*\Delta x + \Delta x\Delta y$$

Si on néglige l'erreur du second ordre $\Delta x\Delta y$, on obtient

$$x^*y^* - [x^*\Delta y + y^*\Delta x] \leq xy \leq x^*y^* + [x^*\Delta y + y^*\Delta x]$$

Ainsi, $x^*\Delta y + y^*\Delta x$ devient un majorant de l'erreur absolue de xy, donc

$$\Delta(xy) = x^*\Delta y + y^*\Delta x.$$

2- l'erreur relative est

$$\delta(xy) = \frac{\Delta xy}{x^*y^*} = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{x^*y^*} = \frac{\Delta y}{y^*} + \frac{\Delta x}{x^*} = \delta x + \delta y.$$

□

1.2.4 Erreurs de division

Propriété 1.4. *Soient x et y deux quantités exactes , x^* et y^* des approximations de x et y, respectivement. Alors on a*

$$\Delta(\frac{x}{y}) = \frac{x^*\Delta x + y^*\Delta y}{y^{*2}}$$

$$\delta(\frac{x}{y}) = \delta x + \delta y$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 1.4.

$$\frac{x^*}{y^*} \ est \ une \ approximation \ de \ \frac{x}{y}.$$

Et l'erreur relative est

$$\delta(\frac{x}{y}) = \Delta(\frac{x}{y}) \cdot \frac{y^*}{x^*} = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{y^{*2}}\frac{y^*}{x^*} = \delta x + \delta.y$$

1.3 Représentation décimale des nombres approchés

On sait que tout nombre réel positif x peut être représenté sous forme d'une représentation décimale de développement limité ou illimité :

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-m} \cdot 10^{n-m} + ...$$

où les a_i sont les chiffres du nombre réel x ($a_i = 0, 1, 2, ..., 9$) avec $a_n \neq 0$ oú n est un entier naturel appelé rang supérieur du nombre x.

Exemple 1.3. 1- $5406,3080 = 5.10^3 + 4.10^2 + 0.10^1 + 6.10^0 + 3.10^{-1} + 0.10^{-2} + 8.10^{-3} + 0.10^{-4}$.
2- $\pi = 3.14159265358... = 3.10^0 + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 1.10^{-3} + 5.10^{-4} + ... + 5.10^{-10} + 8.10^{-11} + ...$

Dans la pratique on n'utilise, essentiellement, que des nombres approchés :

$$x = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + b_{n-m} \cdot 10^{n-m} \qquad b_n \neq 0$$

- Tous les chiffres conservés b_i $(i = n, ..., n-m)$ s'appellent chiffres significatifs du nombre approché x.
- Certains des b_i peuvent être nuls.

1.3.1 Chiffre significatif (c.s)

Lorsqu'un nombre est utilisé pour décrire une grandeur mesurée ou bien calculée, le nombre de chiffres que comporte ce nombre donne une indication sur la précision de la mesure ou du calcul. Ces chiffres sont appelés les chiffres significatifs.

Définition 1.4. On appelle chiffre significatif d'un nombre approché, tout chiffre dans sa représentation décimale diférent de zéro ; et un zéro s'il se trouve entre deux chiffres significatifs, ou s'il constitue un chiffre conservé.

La notion de chiffre significatif est propre aux scientifiques qui manipulent des grandeurs expérimentales toujours entachées d'une certaine incertitude liée à la mesure.
Elle permet de :
- Refléter la précision des valeurs mesurées ou utilisées : plus il y a de chiffres significatifs, plus la mesure est précise.
- D'obtenir des résultats de calculs dont la précision est cohérente par rapport aux données utilisées pour faire le calcul.

Cas du 0
- Le nombre de chiffres situés après le dernier 0 non significatif représente le nombre de chiffres significatifs :
• 0.8 a un chiffre significatif,
• 0.0052 a deux chiffres significatifs,
• 0.31 a deux chiffres significatifs.
- Lorsque le 0 est le dernier chiffre (donc placé à droite), il est significatif :
• 1.200 a quatre chiffres significatifs,

• 0.0520 a trois chiffres significatifs .
Cas des nombres entiers tels : $400, 1000, 10$ peut prêter à confusion :
• si le résultat d'une mesure donne 400 et qu'un seul chiffre est significatif alors le résultat final peut être écrit 4×10^2 ou encore 0.4×10^3,
• si deux chiffres sont significatifs alors le résultat final peut être écrit 4.0×10^2 ou encore 0.40×10^3,
• si trois chiffres sont significatifs alors le résultat final peut être écrit 4.00×10^2 ou encore 0.400×10^3 ou encore 400.
• Si quatre chiffres sont significatifs alors le résultat final peut être écrit 4.000×10^2 ou encore 0.4000×10^3 ou encore 400.0.

Exemple 1.4. Une approximation à 6 décimales de 0.00601035 est :

$$\underbrace{0.006}_{3}\underbrace{01}_{2}\underbrace{0}_{1}$$

1- Ce zéro traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale 10^{-6} c'est un chiffre significatif.
2- Etant placé entre les chiffres significatifs 1 et 3, zéro est lui même un chiffre significatif.
3- Ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les rangs des autres chiffres.

1.4 Chiffres exactes d'un nombre décimal approché (c.s.e)

Définition 1.5. Un chiffre significatif d'un nombre approché x est dit exact (**c.s.e**) si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas une demie unité de rang du chiffre significatif.
Ainsi :
Le $n^{ième}$ chiffre significatif après la virgule est exact si : $\Delta x = 0.5 \cdot 10^{-n}$.
Le $n^{ième}$ chiffre significatif avant la virgule est exact si : $\Delta x = 0.5 \cdot 10^{n-1}$.

Exemple 1.5. Pour $x = 35.97$ et $x^* = 36.00$ (une approximation de x), nous avons :

$$\Delta x = |x - x^*| = |35.97 - 36.00| = 0.310^{-1} = 0.510^{-1}$$

donc les chiffres significatif $3, 6$ et le premier zero après la virgule sont exacts.

Propriété 1.5. • *Si un chiffre significatif est exact, tous les chiffres significatifs à sa gauche sont exacts.*
• *Si un chiffre significatif n'est pas exact, tous ceux à sa droite ne le sont pas.*

Remarque 1.5. Si l'erreur absolue ne dépasse pas une unite de rang du chiffre significatif, on dit que c'est une approximation au sens large ou encore que c'est une approximation à chiffres exacts dans un sens large.

Exemple 1.6. Pour $x = 412.3567$ et $x^* = 412.356$ une approximation à six (06) chiffres exacts dans un sens large du fait que

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.0007 = 0.710^{-3} \leq 1.10^{-3}.$$

1.5 Troncature et Arrondissement d'un nombre

• Pour approximer $\pi = 3.141592653589....$, on peut considérer la valeur approchée 3.14 ou encore 3.14159, etc... et cela selon le besoin. Dans le premier cas on a tronqué (couper en éliminant une partie) le nombre π après 2 décimales. Dans le second cas on l'a tronqué après 5 décimales.
• F Une méthode habituelle pour tronquer un nombre pour ne garder qu'un nombre fini de chiffres significattifs c'est l'arrondi.

1.5.1 Régle d'arrondissement

Pour arrondir un nombre jusqu'à n chiffres significatifs, il faut éliminer les chiffres a droite du $(n+1)^{eme}$ chiffre significatif conservé si on se trouve après la virgule, sinon on remplace par des zéros, puis on procède de la manière suivante :
1. Si le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatif est > 5, on ajoute 1 au $(n)^{ième}$ chiffre.
2. Si le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatif est < 5, les chiffres retenus restent inchangés.
3. Si le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatif est égale à 5 alors deux cas sont possibles :
• Tous les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatif, sont des zéros : On applique la règle du chiffre pair, i.e. : le $(n+1)^{ième}$ chiffre reste inchangé s'il est pair. On lui ajoute 1 s'il est impair.
• Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ième}$ chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul : On ajoute 1 au $(n)^{ième}$ chiffre.

1.6 Exercices

Exercice 1 :
1) Arrondir les chiffres suivants à l'entier le plus proche de : $627.21; 27.61; 124.8; 56.14; 887.13$.
2) Donner un arrondi au centième près de : $124.8; 56.14; 78.984; 7.106$.
3) Donner un arrondi au centième près du nombre S tel que :$S = \frac{831-532}{84}$.

Exercice 2 :
Soient les trois nombres réels :$x = 8.22y = 0.00317z = 0.00432$.
1. Représenter les nombres x, y et z avec virgule fottante.
2. En effectuant les calculs avec $N = 3$ c.s , calculer la somme $x + y + z$ en faisant :
i) $(x + y) + z$,
ii) $x + (y + z)$.
3. Commenter les résultats obtenus. Conclure.

Exercice 3 :
On veut calculer la surface d'un disque $S = \pi R^2$ où $R = 2.3400$, $\pi = 3.1416$. En admettant que tous les chiffres de R et π sont exacts.
1. Estimer les erreurs absolue et relative de S.
2. Calculer S en arrondissant au nombre de chiffres significatifs exacts.

Exercice 4 :
On considère l'équation

$$x^2 - 1634x + 2 = 0. \tag{1.1}$$

1. Résoudre l'équation (1.1) en effectuant les calculs avec $N = 10$ chiffres significatifs. (Utiliser le discriminant)
2. Commenter le résultat obtenu et proposer une autre méthode de calcul pour contourner le problème posé.

Exercice 5 :
Soit $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ avec $d = 3.7 \pm 0.05cm$ et $\pi = 3.14$.
Calculer ΔV et δv.

Exercice 6 :
Soient $x > 0; y > 0$ et x, y leurs approximations respectives.
1) Démontrer que : $\Delta(\frac{x}{y}) = \frac{x^*\Delta x + y^*\Delta y}{y^{*2}}$ où Δ dsigne majoration de l'erreur absolue.
2) Déduire que $\delta(\frac{x}{y}) = \delta x + \delta y$.

Exercice 7 :
Soit l'approximation $\Delta f(x) \simeq |df(x)|$
1. Montrer que $\Delta ln(x) = \frac{\Delta x}{x}$.
2. En déduire l'erreur relative d'une puissance $u = x^n$ et telle que $\delta_u = n\delta_x$.
3. Déterminer l'erreur absolue et l'erreur relative de la racine énième$v = \sqrt[n]{x}$.
4. Soient$x = 22.123002$ et $y = 1.252468$ où tous les c.s. sont exacts.
Calculer $ln(\frac{x}{y})$ en déduire la valeur de $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$ arrondir au dernier c.s.e.

Chapitre 2

Interpolation

2.1 Interpolation polynômiale

Approcher une fonction f consiste à la remplacer par une autre fonction φ plus simple et dont on peut se servir à la place de f.
On verra dans le prochain chapitre qu'on utilise fréquemment cette stratégie en intégration numérique, au lieu de calculer $\int_a^b f(x)dx$ on calcule de manière exacte $\int_a^b \varphi(x)dx$, oú $\varphi(x)$ une fonction simple à intégrer par exemple la fonction polynômale. La fonction peut être connue que par les valeurs qu'elle prend en quelque points particuliers. Dans ce cas, on cherche à construire une fonction continue φ représentant une loi empirique qui se cacherait derrière les données.

2.2 Problème d'interpolation

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. En supposant ne connaitre que sa valeur en $n+1$ poits x_i de $[a, b]$ que l'on suppose ordonnés

$$a < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} < b$$

.
Etant donné $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i=0}^n$, le problème consiste à trouver une fonction $\varphi = \varphi(x)$ d'un type choisi à l'avance qui interpole f sur l 'intervalle $[a, b]$ telle que

$$\varphi(x_i) = y_i \quad ; \quad i = 0, ..., n.$$

Les quantités y_i représentent les valeurs aux noeuds x_i d'une fonction f connue analytiquement ou des données expérimentales. En général on cherche φ dans l'ensemble des polynômes, dans l'ensemble des combinaisons linéaires de fonction trigonométriques ou exponotielles, dans l'ensemble des fractions rationnelles, etc...
Notons par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace véctoriel formé par tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n. Il est bien connu que $\mathbb{R}_n[x]$ à dimension n+1 et que sa base canonique est donnée par

$$\{1, x, x^2.x^3, ..., x^n\}$$

2.2.1 Position du problème d'interpolation

Déterminer un polyôme $P_n(x)$ de degré $n \geq 0$ tel que

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq n \tag{2.1}$$

Si un tel problème existe, il est appelé polynôme d'interpolation.

Théorème 2.1. *Etant donné* $(n+1)$ *points distincts* $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ *et* $n+1$ *valeurs correspondantes* $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ *il existe un unique polynôme* $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ *tel que*

$$P_n(x_i) = y_i \quad \textit{pour} \quad i = 0, 1, ...n$$

Démonstration. Résoudre ce problème est d'écrire le polynôme $P_n(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sont des coefficients qui deveront être déterminés.
Les $n + 1$ relations de (2.1) s'écrivent, alors

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_n x_2^n = y_2 \\ .... = ... \\ .... = ... \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Ainsi, le problème consiste à chercher le polynôme $P_n(x)$, satisfaisant (2.1) peut se reduire à résoudre le système linéaire (2.2) qu' on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

(2.3) est un système linéaire de déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0 j>i}^{n} (x_i - x_j) \tag{2.4}$$

(c'est le déterminant de Vandermonde). On a $\Delta \neq 0$, car les x_i, sont tous distincts. Donc, le système (2.3) admet une et une seule solution $(a_0, a_1, ..., a_n)$, d'où le polynôme d'interpolation existe. Il est unique. □

Exemple 1. *Soit la fonction* $f(x) = x^4 - 2x^3 + x$.
Parmi les polynômes suivants quel est celui qui interpole f *aux points d'abscisses* $x_0 = -1, x_1 = 0$ *et* $x_2 = 2$: $P_1(x) = 2x^4 - x^2 - x$, $P_2(x) = x^2 + x + 1$, $P_3(x) = x^3 - 3x$, $P_4(x) = x^2 - x$.

2.3 Interpolation de Lagrange

Quand on écrit le polynôme dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, le problème est de déterminer les $(n+1)$ coefficients $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ tels que

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

On se demande s'il existe une autre base $\{L(x)_0, L(x)_1, L(x)_2, ..., L_n(x)\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que le polynôme s'écrit

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + ... + y_n L_1(n)$$

dont les coordonnées du polynôme dans cette base ne sont rien d'autres que les valeurs connues $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$.

2.3.1 Polynôme de Lagrange

Pour trouver les polynômes de Lagrange (telle base), commençons par imposer le passage du polynôme par les $(n+1)$ points données.
Les $(n+1)$ relations (2.1) imposent la condition suivante :

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i, j \leq n \tag{2.5}$$

$\delta_{i,j}$ est le symbole de Kroneker. Les polynômes $L_i(x)$ sont déterminés de façon unique par les $(n+1)$ équations.
Puisque $L_i(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, $L_i(x_j) = 0$ pour $j = 0, ..., i-1, i+1, ...n$, nous pouvons écrire

$$L_i(x) = K(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_{n-1})$$

et puisque $L_i(x_i) = 1$ nous avons

$$K = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_{n-1})}$$

D'où

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_{n-1})}{(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_{n-1})}$$

ou encore

$$L_i(x) = \prod_{i=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \tag{2.6}$$

Pour chaque $i = \overline{0, n}$, $L_i(x)$ est appelé polynôme élémentaire de Lagrange au point x_i.

Proposition 2.1. *Les polynômes $\{L_0(x), L_1(x), ..., L_n(x)\}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$.*

Démonstration. La famille $\{L_0(x), L_1(x), ..., L_n(x)\}$ est composée de $(n+1)$ éléments.
Pour montrer qu'elle forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$, qui est de dimension $(n+1)$, il faut et il suffit que les polynômes $\{L_i\}_{i=0}^n$ sont linéairement indépendants c'est à dire que les $L_i, i = \overline{0,n}$ étant donné $n+1$ scalaires $\alpha_i, i = \overline{0,n}$ alors,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = 0, \quad \text{pout tout} \quad j = \overline{0,n},$$

puisque $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$ on conclut que tous les α_j sont nuls, c'est à dire $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. □

Théorème 2.2. *Etant donné $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, ..., x_n$ et $(n+1)$ valeurs correspondantes $y_0, y_1, ..., y_n$ il existe un unique polynôme $P_n(x) \in \mathbf{R}_n[x]$ tel que $P_n(x_i) = y_i$ pur $i = 0, 1, ..., n$ qu'on peut écrire sous la forme*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \in \mathbb{R}_n[x] \tag{2.7}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{i=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

La relation (2.7) est appelée formule d'interpolation de Lagrange et les $L_i(x)$ sont les polynômes carectéristiques de Lagrange.

Exemple 2.1. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ qui interpole les points tabulée :

x_i	-1	0	1
y_i	8	3	6

Pour $n = 2$ le polynôme d'interpolation Lagrange s'écrit

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

où

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -1(x+1)(x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}x(x+1)$$

Donc,

$$P_2(x) = 4x(x-1) - 3(x+1)(x-1) + 3x(x+1) = 4x^2 - x - 3$$

Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction f plus ou moins compliquée par une fonction plus simple polynômiale, mais pour justifier cet échange, il nous faut une estimation de l'erreur commise. On rappelle le théorème de Rolle :

Théorème 2.3. *Théorème de Rolle*
Soit$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *une application continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$ *telle que* $f(a) = f(b)$*, alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

2.4 Erreur d'interpolation

Avant de donner une estimation de l'erreur, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *dérivable sur* $[a,b]$ *alors, si* f *possède au moins* $(n+2)$ *zéros distincts sur* $[a,b]$*,*$\acute{f}$ *possède au moins* $(n+1)$ *zéros distincts sur* $[a,b]$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de f. □

Corollaire 2.1. *Soit* $f \in C^{n+1}([a,b])$*. Si* f *possède au moins* $(n+2)$ *zéros distincts sur* $[a,b]$*, alors* $f^{(n+1)}$ *a au moins un zéro sur* $[a,b]$.

Démonstration. Il suffit de faire une récurrence en appliquant le lemme 2.1 précédent. □

Il est évident que si nous ne connaissons que les couples $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,1,\ldots,n}$, nous pouvont faire varier la fonction $f(x)$ entre ces points sans changer le polynôme d'interpolation.
Si nous voulons estimer l'erreur $E(x) = f(x) - P_n(x)$ nous devons mieux connaitre la fonction $f(x)$.

Théorème 2.4. *On suppose que* $f \in C^{n+1}[a,b]$*; alors, pour tout* $x \in [a,b]$*, il existe* ξ_x *appartenant au plus petit intervalle fermé contenant* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *tel que*

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_n(x) f^{(n+1}(\xi_x) \tag{2.8}$$

où l'on a posé

$$\pi_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Démonstration. Si $x = x_i$, $E(x) = 0$ et (2.8) est verifiée trivialement ; supposons donc $x \neq x_i$ et considérons, pour x fixé, le polyôme en t de degré $n+1$

$$q_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)}.\pi_n(t)$$

$q_{n+1}(x)$ vérifie : $\forall (i,l)$ avec $0 \leq i \leq n$, $0 \leq l \leq \alpha_i$, $q_{n+1}^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$ et

$$q_{n+1}(x) = f(x)$$

considérons la fonction

$$F(t) = f(t) - q_{n+1}(t)$$

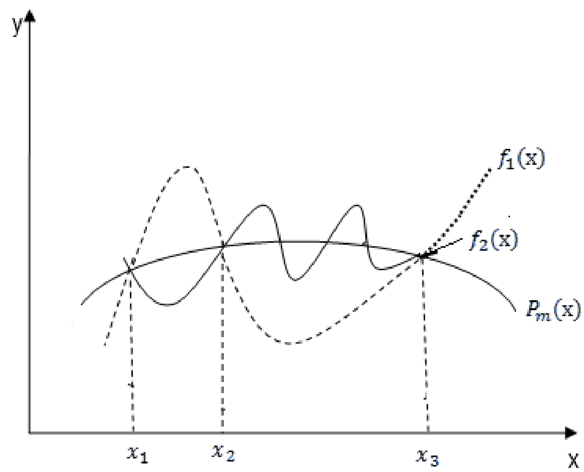

FIGURE 2.1 – Représentation de la fonction $f(x)$ et du polynôme $P_n(x)$

Cette fonction est $n+1$ fois continûment différentiable est telle que

$$F(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)}.\pi_n(x_i) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., n+1$$

et

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)}.\pi_n(x) = 0$$

Donc F a au moins $n+2$ racines distinctes dans l'intervalle $[a, b]$. D'après le théorème de Rolle, la dérivée $\acute{F}$ à au moins $n+1$ racines dans le plus petit intervalle contenant x et les x_i $i = 1, ..., n+1$; la dérivée seconde F y a au moins n racines ;... ; la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée y a au moins une racine. Notons ξ_x une racine de $F^{(n+1)}$ nous avons donc

$$F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)}.(n+1)! = 0$$

d'où (2.8). □

Corollaire 2.2. *Posons* $M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \mid f^{(n+1)}(x) \mid$ *; une borne supérieure de l'erreur d'interpolation* $E(x) = f(x) - P_n(x)$ *est donnée par*

$$\mid E(x) \mid \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \mid \pi_n(x) \mid .$$

Exemple 2.2. Prenons $f(x) = e^x$; on a alors, pour $x \in [a, b]$, $\quad M_{n+1} = e^b$, et quel que soit le choix des points x_i, $\quad | \pi_n(x) | \leq (b-a)^{n+1}$, d'oú

$$\max_{x \in [a,b]} | E(x) | \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^b$$

On en déduit $\lim\limits_{x \in [a,b]} \{ \max\limits_{x \in [a,b]} | E(x) | \} = 0$, c'est-à-dire que P_m converge uniformément vers f sur $[a, b]$ lorsque n tend vers l'infini. En fait, on peut démontrer un résultat analogue pour toute fonction développable en série entière au point $x = \frac{a+b}{2}$ avec un rayon de convergence $r > \frac{3}{3}(b-a)$.

Remarque 2.1. 1- La formule de Lagrange est intéressante du point de vue numérique, car elle ne dépend que des abscisses x_i, $i = 0, 1, ..., n$. Soit à calculer plusieurs polynômes d'interpolation où les abscisses correspondant à ces polynômes restent fixées (il n'y a que les points y_i, $i = 0, 1, ..., n$ qui changent). Les polynômes de Lagrange $L_i(x)$, $\quad i = 0, 1, ..., n$ sont calculés une fois pour toute et servent ensuite pour tous les polynômes.
2- La méthode d'interpolation de Lagrange n'est pas la plus efficace d'un point vue pratique. Elle présente deux inconvénients majeurs :
i) L'erreur d'approximation peut ne pas diminuer si on augmente le nombre de points d'interpolation (voir TP).
ii) La méthode n'est pas récurrente : connaissant P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré au plus n en les points $(x_i, y_i), i = \overline{0, n}$, si on rajoute le point d'interpolation (x_{n+1}, y_{n+1}), il existe un unique polynôme P_{n+1} de degré au plus $n+1$. Il est impossible de déduire P_{n+1} à partir de P_n, car dans la méthode de Lagrange, l'introduction d'un nouveau point x_{n+1} nécessite un nouveau calcul de tous les polynômes L_i de Lagrange aux points x_i, $\ i = 0, 1, ..., n+1$.

2.5 Polynôme d'interpolation de Newton

Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ comporte la résolution d'un système linéaire d'ordre n. On a alors introduit une autre base de $\mathbb{R}_n[x]$, la base des polynômes de Lagrange, qui permet de calculer directement le polynôme d'interpolation car les coordonnées du polynôme cherché dans cette base ne sont rien d'autres que les valeurs y_i . Cependant, cette méthode n'est pas la plus efficace d'un point de vue pratique. La méthode de Newton est basée sur le choix d'une autre base de sorte à ce que l'ajoût d'un point comporte juste l'ajoût d'une fonction de base.

Considérons la famille de polynômes $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_m$ où

$$\omega_0(x) = 1 \tag{2.9}$$

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_{k-1}) \omega_{k-1}(x), \qquad \forall k = 1, ..., n$$

La famille $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Si on choisit comme base de $\mathbb{R}_n[x]$ la famille $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n$, le problème du calcul du polynôme d'interpolation P_n est alors ramené au calcul des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x).$$

Si on a calculé les $(n+1)$ coefficients $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ et on ajoute un point d'interpolation, il n'y a plus a calculer que le coefficient α_{n+1} car la nouvelle base est déduite de l'autre base en ajoutant simplement le polynôme ω_{n+1}. Commençons par chercher une formule qui permette de calculer ces coefficients. Le polynôme d'interpolation dans la base de Newton évalué en x_0 donne

$$P_n(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x_0) = \alpha_0$$

donc $\alpha_0 = y_0$.
Le polynôme d'interpolation dans la base de Newton évalué en x_1 donne

$$P_n(x_1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0)$$

donc

$$\alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Le polynôme d'interpolation dans la base de Newton évalué en x_2 donne

$$P_n(x_2) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

donc

$$\alpha_2 = \frac{y_2 - \alpha_0 - \alpha_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Pour calculer tous les coefficients on va alors introduire la notion de différence divisée :

2.5.1 Les différences divisées

Définition 2.1. Soit une fonction f dont on connait les valeurs en $(n+1)$ points $x_0, ..., x_{n+1}$ qui ne sont pas uniformément espacés (distincts). On appelle différence divisée d'ordre $0, 1, ..., n$ de la fonction f les expression suivantes :

Ordre	Notation	Définition
0	$f[x_i]$	$f(x_i)$
1	$f[x_i, x_j]$	$\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}, \quad i \neq j$
2	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}, \quad i \neq j \quad i \neq k \quad j \neq k$
...	....	....,
$k-1$	$f[x_0, x_1, ..., x_k]$	$\frac{f[x_1,...,x_k]-f[x_0,x_1,...,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$,
...	....	....
$m-1$	$f[x_0, x_1, ..., x_n]$	$\frac{f[x_1,...,x_n]-f[x_0,x_1,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$,

Table 2.1 –

Définition 2.2. La quantité $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ est appelée différence divisée d'ordre k de f aux points $x_0, x_1, ..., x_k$.

Lemme 2.2.

$$\forall k \geq 1, \quad f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_k] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

et

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., k.$$

Calcul des différences divisées

Pour calculer la différence divisée d'ordre n de la fonction f aux points $x_0, ..., x_n$ on forme le tableau suivant, en appliquant les formules du tableau 4.6.1 colonne après colonne :

Théorème 2.5. *Si une fonction $f(x)$ prend les valeurs $f(x_i)$ sur un ensemble de points x_i, $i = \overline{0, n}$ non uniformement espacés, alors*

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

x_i	$f(x_i)$	$1DD$	$2DD$	...	nDD
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
...	...	......	....		
...	...	......	....		
...	...	......	....		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	......	$f[x_0, x_1, ..., x_n]$

TABLE 2.2 –

2.5.2 Polynôme d'interpolation de Newton

Nous avons

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

donc

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0].$$

puis

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_1)}{x - x_1}$$

donc

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1]$$

et

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1].$$

En réitérant le procédé, on obtient enfin :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ...$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})f[x_1, x_2, ..., x_n]$$

$$+(x - x_1)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)(x - x_n)f[x, x_0, ..., x_n]$$

Si f est un polynôme de degré n, on a

$$f[x, x_0, ..., x_n] = 0$$

En effet

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0]$$

prouve que, $f[x, x_0]$ est un polynôme de degré $n - 1$.
De même $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1]$.
Prouve que, $f[x, x_0, x_1]$ est un polynôme de degré $n - 2$.
Ainsi $f[x, x_0, ..., x_{n-1}]$ est une constante et $f[x, x_0, ..., x_n] = 0$.

Théorème 2.6. *Si f est une fonction continue sur l 'intervalle $[a, b]$ qui prend les valeurs en $(n+1)$ points distincts $x_0, x_2, ..., x_n$, le polynôme P_n*

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ...$$
$$+(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_1, x_2, ..., x_n]$$

est polynôme d'interpolation de Newton de degré inférieur ou égal à n de la fonction f pour les points $\{x_0, x, ..., x_n\}$ (i.e.)

$$P_n(x) = f(x_i), \quad i = 0, ..., n$$

Exemple 2.3. Déterminer P_2 le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction $f(x)$ passant par les points tabuler

x_i	1	3	4
$f(x_i)$	-3	3	9

Tableau des différences divisées :

x_i	$f(x_i)$	$1DD$	$2DD$
1	-3		
3	3	3	1
4	9	6	

$$P_2(x) \simeq f(x_1) + (x - x_1)f[x_1, x_2] + (x - x_1)(x - x_2)f[x_1, x_2, x_3]$$
$$P_2(x) \simeq -3 + (x - 1)(3) + (x - 1)(x - 3)(1)$$
$$P_2(x) \simeq x^2 - x - 3$$

Remarque 2.2. L'erreur d'iterpolation est donnée par

$$f(x) - P_n(x) = \pi_n(x)f[x, x_0, x_2, ..., x_n]. \tag{2.10}$$

Il suffit de remarquer que $P_n(t) + \pi_n(t)f[x, x_0, x_2, ..., x_n]$ est d'après

$$P_k(t) - P_{k-1}(t) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{k-1})f[x, x_0, x_1, ..., x_k]$$

le polynôme (*en* t) d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n, x$. On déduit alors du théorème 2.4 qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$f[x_0, x_2, ..., x_n] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

2.5.3 Les différences finies : formules de Newton progressive et régressive

Lorsque les points x_i d'interpolation ne sont pas équidistants, on utilise l'algorithme de Newton décrit précédemment ; dans le cas où ces points sont equidistants, on peut construire des algorithmes plus simples et moins coûteux.
Supposons la fonction f connue aux points équidistants (régulièrement espacés) x_i avec le pas h

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, ...$$

dans ce cas les différences divisées sont remplacées par les différences finies.

Différences finies progressives

On définit l'opérateur aux différences finies progressives $\triangle$ par

$$\triangle^0 f_i = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, ..., n$$

On appelle différence finie d'ordre 1 progressive la fonction définie par

$$\triangle f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1$$

et une différence finie d'ordre 2 progressive

$$\triangle^2 f_i = \triangle f(x_{i+1}) - \triangle f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n-2$$

et $\forall k \geq 0$ une différence finie d'ordre k progressive

$$\triangle^k f_i = \triangle^{k-1} f(x_{i+1}) - \triangle^{k-1} f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n-k$$

Les différences finies progréssives successives sont obtenues en formant le tableau suivant :

x_i	$f(x_i)$	$\triangle f_i$	$\triangle^2 f_i$	...	$\triangle^n f_i$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$\triangle f(x_0)$			
x_2	$f(x_2)$	$\triangle f(x_1)$	$\triangle^2 f(x_0)$		
...	...	......	....		
...	...	......	....		
...	...	......	....		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$\triangle f(x_{n-2})$	$\triangle^2 f(x_{n-3})$		
x_n	$f(x_n)$	$\triangle f(x_{n-1})$	$\triangle^2 f(x_{n-2})$	......	$\triangle^n f(x_0)$

Théorème 2.7. *Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n+1)$ points équidistants telles que $x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, ...$ avec le pas $h > 0$. Le polynôme d'interpolation P_n de degré n de f aux points $x_i, \quad i = 0, 1, ...$ s'écrit :*

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + ...$$
$$... + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

$P_n(x)$ est la formule de Newton du polynôme d'interpolation pour les différences finies progressives.

Relation entre les différences finies progressives et les différences divisées

Théorème 2.8. *Soient* $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ *abscisses distinctes telles que* $x_i = x_{i-1} + h$, $i = 1, ..., n$; $h > 0$.
Alors,

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{\triangle^k f(x_i)}{h^k k!} \qquad 0 \leq i \leq i+k \leq n. \tag{2.11}$$

Démonstration. Exercice □

Différences finies régressives

De manière analogue on introduit l'opérateur aux différences finies régressives ∇ par

$$\nabla^0 f_i = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, ..., n$$

$$\nabla f_i = f(x_i) - f(x_{i-1}), \quad i = 1, ..., n$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f(x_i) - \nabla f(x_{i-1}), \quad i = 2, ..., n$$

et $\forall k \geq 0$ une différence finie d'ordre k régressive

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f(x_i) - \nabla^{k-1} f(x_{i-1}), \quad i = k, k+1, ..., n$$

x_i	$f(x_i)$	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	...	$\nabla^n f_i$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$\nabla f(x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$\nabla f(x_2)$	$\nabla^2 f(x_2)$		
...	...	......	....		
...	...	......	....		
...	...	......	....		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$\nabla f(x_{n-1})$	$\nabla^2 f(x_{n-1})$		
x_n	$f(x_n)$	$\nabla f(x_n)$	$\nabla^2 f(x_n)$	......	$\nabla^n f(x_n)$

Théorème 2.9. *Soient* $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n+1)$ *points équidistants telles que* $x_i = x_{i+1} - h, \quad i = 0, 1, ..., n-1$ *avec le pas* $h > 0$ *. Le polynôme d'interpolation* P_n *de degré* n *de* f *aux points* $x_i, \quad i = 0, 1, ...$ *s'écrit :*

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{\nabla f(x_n)}{1!h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ...$$

$$... + \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_0)$$

Relation entre les différences finies regressives et les différences divisées

Théorème 2.10. *Soient* $x_0, x_1, ..., x_n, \quad (n+1)$ *abscisses distinctes telles que*
$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, ..., n; \ h > 0.$
Alors,

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{\nabla^k f(x_i)}{h^k k!} \qquad 0 \leq i \leq i + k \leq n. \tag{2.12}$$

Démonstration. Exercice □

2.6 Interpolation de Hermite

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ et $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$. Dont on connait les valeurs $y_i = f(x_i), \quad \acute{y_i} = \acute{f}(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n.$
On peut généraliser l'interpolation de Lagrange pour prendre en compte, les valeurs de la dérivée du polynôme interpolateur dans ces points.
Considérons $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, \acute{y_i})$, le problème est de trouver un polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in \mathbb{R}^n[x]$ tel que

$$\begin{cases} P_n(x) = y_i \\ \acute{P_n}(x) = \acute{y_i} \end{cases} \quad i = 0, ..., n. \tag{2.13}$$

Il s'agit d'un système linéaire de $2(n+1)$ équations à $2(n+1)$ inconnues.

Théorème 2.11. *Étant donné* $(n+1)$ *points distincts* $x_0, ..., x_n$ *et* $(n+1)$ *couples correspondantes* $(y_0, \acute{y_0}), ..., (y_n, \acute{y_n})$*, il existe un unique polynôme* $P_{2n+1}(x) \in \mathbb{R}^{2n+1}[x]$ *tel que* $P_{2n+1}(x) = y_i$ *et* $\acute{P}_{2n+1}(x) = \acute{y_i}$ *, pour* $i = 0, ..., n$ *qu'on écrit sous la forme*

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) + \acute{y_i} K_i(x) \in \mathbb{P}_{2n+1}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{i=0, j \neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

$$c_i = \sum_{i=0 \ j \neq i}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)},$$

$$\begin{cases} H_i(x) = (1 - 2(x - x_i)c_i)(L_i(x))^2, \\ K_i(x) = (x - x_i)(L_i(x))^2, \end{cases}$$

ou encore sous la forme

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i D_i(x) + \acute{y_i}(x - x_i)K_i(x) \in \mathbb{P}_{2n+1}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{i=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

$$c_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j\neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)},$$

$$\begin{cases} H_i(x) = (1 - 2(x - x_i)c_i)(L_i(x))^2, \\ D_i(x) = 1 - 2(x - x_i)c_i. \end{cases}$$

cette relation est appelée formule d'interpolation de Hermite.

Démonstration. Montrons que

$$deg(H_i) = deg(K_i) = 2n + 1, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., , n\}$$

Pout tout $i \in \{0, 1, ..., , n\}$, on a $deg(L_i) = n$ et $L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & si\ j = i, \\ 0, & si\ j \neq i. \end{cases}$ Alors

$$deg(H_i) = deg(K_i) = 2deg(L_i) + 1 = 2n + 1.$$

Montrons que

$$H_i(x_j) = \begin{cases} 1, & si\ j = i, \\ 0, & si\ j \neq i, \end{cases} \qquad K_i(x_j) = 0 \;\; \forall i, j \in \{0, 1, ..., , n\}$$

$$\acute{K}_i(x_j) = \begin{cases} 1, & si\ j = i, \\ 0, & si\ j \neq i, \end{cases} \qquad \acute{H}_i(x_j) = 0 \;\; \forall i, j \in \{0, 1, ..., , n\}$$

On a d'une part

$$\begin{cases} H_i(x_i) = (L_i(x_i))^2[1 - 2(x_i - x_i)c_i(x_i)] = (L_i(x_i))^2 = 1, \\ H_i(x_j) = (L_i(x_j))^2[1 - 2(x_j - x_i)c_i(x_i)] = 0, \quad si \quad j \neq i, \\ K_i(x_i) = (x_i - x_i)(L_i(x_i))^2 = 0 \\ K_i(x_j) = (x_j - x_i)(L_i(x_j))^2 = 0, \quad si \quad j \neq i \end{cases}$$

alors $K_i(x_j) = 0 \;\; \forall i, j \in \{0, 1, ..., , n\}$ et d'aurtre part

$$\begin{cases} \acute{H}_i(x_i) = 2\acute{L}_i(x_i)L_i(x_i)[1 - 2(x_i - x_i)c_i(x_i)] - 2c_i(x_i)[L_i(x_i)]^2 = 0, \\ \acute{H}_i(x_j) = 2\acute{L}_i(x_j)L_i(x_j)[1 - 2(x_j - x_i)c_i(x_i)] - 2c_i(x_i)[L_i(x_j)]^2 = 0 \quad si \quad j \neq i, \\ \acute{K}_i(x_i) = 2\acute{L}_i(x_i)L_i(x_i)(x_i - x_i) + [L_i(x_i)]^2 = 1 \\ \acute{K}_i(x_j) = 2\acute{L}_i(x_j)L_i(x_j)(x_j - x_i) + [L_i(x_j)]^2 = 1 = 0, \quad si \quad j \neq i \end{cases}$$

ainsi $\acute{H}_i(x_j) = 0 \quad \forall i, j \in \{0, 1, ..., , n\}$
On a

$$deg(P_{2n+1}(x)) \leq 2n + 1 \quad \text{car} deg(H_i) = deg(K_i) = 2n + 1,$$

$$P_{2n+1}(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x_j) + \acute{y_i} K_i(x_j) = y_j H_j(x_j) = y_j \quad \text{car } K_i(x_j) = 0 \quad \forall j \in \{0, 1, ..., , n\}$$

et

$$\acute{P}_{2n+1}(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \acute{H}_i(x_j) + \acute{y_i} \acute{K}_i(x_j) = \acute{y_j} \acute{K}_j(x_j) = \acute{y_j} \quad \text{car } \acute{H}_i(x_j) = 0 \quad \forall j \in \{0, 1, ..., , n\},$$

Ceci montre que

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) + \acute{y_i} K_i(x)$$

de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ vérifiant (2.13).
On suppose qu'il existe un autre polynôme de degré au plus $2n+1$, noté Q_{2n+1}, verifiant $Q_{2n+1}(x_i) = y_i$ et $\acute{Q}_{2n+1} = \acute{y_i}, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., , n\}$.
Posons $R_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x) - Q_{2n+1}(x)$, on obtient

$$R_{2n+1}(x_i) = P_{2n+1}(x_i) - Q_{2n+1}(x_i), \quad i \in \{0, 1, ..., , n\}$$

$$\acute{R}_{2n+1}(x_i) = \acute{P}_{2n+1}(x_i) - \acute{Q}_{2n+1}(x_i), \quad i \in \{0, 1, ..., , n\},$$

ainsi $x_0, x_1, ..., x_n$ sont des racines doubles de $R_{2n+1}(x)$. Donc,$R_{2n+1}(x)$ est un polynôme de degré au plus $2n + 1$ possède au moins $2n + 2$ racines, ce qui signifie que $R_{2n+1}(x)$ est un polynôme nul. ceci implque que $Q_{2n+1}(x) \equiv P_{2n+1}(x)$. □

Théorème 2.12. *Soit $[a, b]$ un intervalle contenant $x_0, x_1, ..., x_n$. si f est $2n + 2$ fois continûment dérivables sur $[a, b]$, alors : pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que :*

$$E(x) = f(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!} \left(\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \right) \tag{2.14}$$

Démonstration. $f \in C^{2n+1}([a, b])$, dérivable $(2n + 1)$ fois sur $]a, b[$. Remarquons que $E(x_i) = 0 \quad i \in \{0, 1, ..., , n\}$.
On considère sur $[a, b]$ avec $x \neq x_i, \quad i = 0, ..., , n$ la fonction ψ définiepar :

$$\psi(t) = f(t) - P_{2n+1}(t) - \frac{f(x) - P_{2n+1}(x)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$$

La fonction ψ s'annule pour $t \in x_0, x_1, ..., x_n, x$, donc $\psi \in C^{2n+2}([a, b])$ et s'annule au moins $(n + 2)$ fois dans $[a, b]$, Donc, D'après le théorèmre de Rolle, la dérivée ψ a au moins n+1 racines dans le plus petit intervalle contenant x et les $x_i \quad i = 1, ..., n$. De plus on a $\acute{\psi}(x_i) = 0, \quad \forall i \in 0, 1, ..., n$, alors $\acute{\psi}$ a au moins $(2n+2)$ racines dans $]a, b[$. En appliquant le théorème de Rolle a au moins $2n+2$

fois à la fonction ψ sur $[a,b]$, on trouve $\psi^{(2n+2)}$ a au moins une racine $\xi = \xi(x) \in]a,b[$.
Donc, on aura

$$\begin{cases} \psi^{(2n+1)}(\xi) = 0 \\ \psi^{(2n+1)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - 0 - \frac{f(x)-P_{2n+1}(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2}(2n+2)!, \end{cases}$$

puisque

$$\frac{d^{2n+2}P_{2n+1}(t)}{dt^{2n+2}} = 0, \quad (deg(P_{2n+1}) \leq 2n+1),$$

$$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 = t^{2n+2} + S_{2n+1}(t), \quad S_{2n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1}.$$

D'o'u, $\forall x \in [a,b], \ \exists \xi \in]a,b[$:

$$E(x) = f(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\right)$$

$\square$

Corollaire. *Posons* $M_{2n+2} = \max_{x\in[a,b]} \mid f^{(2n+2)}(x) \mid$ *; une borne supérieure de l'erreur d'interpolation* $E(x) = f(x) - P_{2n+1}(x)$ *est donnée par*

$$\mid E(x) \mid \leq \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!}(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i))^2.$$

2.7 Exercices

Exercice 1 :
Construire le polynôme P_3 qui interpole les points $(0,2),(1,1),(2,2)$ *et* $(3,3)$ en utilisant succesivement les trois méthodes (directe, Lagrange,Newton).

Exercice 2 :
On considère la fonction f définie par :

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	e	1	e

1- Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ qui interpole les points tabulés.
2- Soit $Q(x)$ le polyôme de Lagrangequi interpole les points.

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	-1	0	-1

- Sans faire les calculs, donner l'expression de polynôme de Lagrange $Q(x)$ qui interpole les points tabulés.
- Trouver le polynôme de l'espace vectoreil $Vec\{1, x, x^2\}$ qui interpole les trois poits $(-1, -1), (0, 0)$ *et* $(1, -1)$.

Exercice 3 :

Montrer que le polynôme d'interpolation de la Lagrange associé à une fonction paire et une famille de points $x_1, x2, ..., x_{n+1}$ symétrique par rapport à l'origine est paire.

Exercice 4 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1- Déterminer P_2 le polynôme d'interpolation de f sur les points $-1, 0$ *et* 1.
2- Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de

$$\mid E(x) \mid = \mid f(x) - P_2(x) \mid .$$

Exercice 5 :
On considère la fonction f définie par :

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	16	9	0	-5

1- Construire le tableau des différences divisées associé à ces données.
2- Construire le polynôme d'interpolation de Newton.

Exercice 6 :
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ $(n+1)$ points réels distincts et F, G deux fonctions définies en ces points. On considère P, Qles polynômes d'interpolations de F et G (respectivement) aux points $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$.
1- Montrer que $P + Q$ est le polynôme d'interpolation de $F + G$ aux points $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$.
2- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P \cdot Q$ soit le polyôme d'interpolation de $F \cdot G$ aux points $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$.
Soit la fonction f donnée par le tableau suivant :

1- Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton de f aux points $x_i,\ i = 0, ..., 3$.

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{8}$
$f(x_i)$	1	3	8	16

2- En déduire le polynôme d'interpolation de la fonction g définie par $g(x) = xf(x) + x^2$ aux points $x_i,\ i = 0, ..., 3$.

Exercice 7 :

Soit la fonction f donnée par :

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	0	-1	2	1	-2	0

1- Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P de f aux points $-1, 0, 1$.
2- Montrer que $\forall x \in [-1, 1] \mid E(x) \mid \leq \frac{\sqrt{3}}{27} M$;
où $E(x)$ est l'erreur d'interpolation et $M = \sup_{x\in[-1,1]} \mid f^{(3)}(x) \mid$
3- Calculer $f(\frac{1}{3})$ en arrondissant au dernier c.s.e, sachant que $M \leq 10^{-1}$.
4- Déterminer le polynôme d'interpolation Q de degré 4, qui permet de calculer une bonne valeur approchée de $f(\frac{1}{3})$.

Chapitre 3

Approximation au sens des moindres carrés

Introduction

Soit $X = \{x_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ n points situés dans un intervalle $[a, b]$. Supposons qu'à chaque point x_i de X, on associer un $y_i \in \mathbb{R}$, résultat d'une expérience ou valeur numérique donnée par une table, cette opération est impossible avec $x \in [a, b] \setminus X$. Notons $D = \{(x_i, y_i) \mid x_i \in X\}$ déterminons donc une fonction, facilement calculable, qui permette d'obtenir une estimation (raisonable) de la réponse du phénomène pour la valeur de x_i. Notons par g cette fonction et $G = \{(x_i, g(x_i)) \mid x_i \in X\}$.
Nous avons deux choix possibles :
1- Si nous définissons une distance entre D et G nous pouvons chercher une fonction g, d'un type préalablement choisi telle que cette distance soit minimal. C'est l'approximation
2- Nous pouvons chercher g, d'un type préalablement choisi pour que $D = G$. C'est l'interpolation.

Exemple 2. *On considère un mélange de gaz et on note par g le taux de chaleur dans ce mélange on appelle x la variable (par exemple la proportion d'un gaz dans le mélange. La loi donnant g en fonction de x est supposé de la forme*

$$g(x) = T(1 - e^{-a_1 e^{xb_1}}) + (1 - T)(1 - e^{-a_2 e^{xb_2}})$$

oú les paramètres à déterminer sont $(T, a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^5$
En fait n mesures de T pour de valeurs de x de sorte que $T(x_i) \simeq T_i \quad i = 1, 2, ..., n$ *on obtient alors la formulation au sens des moindre carrés du problème*

$$min \sum_{i=1}^{n} [T(x_i) - T_i]^2$$

$$min \sum_{i=1}^{n} [T(1 - e^{-a_1 e^{x_i b_1}}) + (1 - T)(1 - e^{-a_2 e^{x_i b_2}}) - T_i]^2.$$

3.1 Approximation au sens des moindres carrés

Considérons une fonction $f(x)$ définie et continue dans un intervalle réel $[a, b]$. L'approximation de f sur [a,b] consiste à déterminer une fonction $\varphi(x)$ d'écriture connue, comme un polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, une combinaison linéaire de fonctions données $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{b_k x}$, $\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^{m-j}}$, une somme trigonométrique $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \sin kx + a_{2k+1} \cos kx$ lorsque la fonction f est une fonction périodique on cherche en général à l'approcher par une somme de fonction trigonométrique ayant certaines propriétes analogues à celles des polynômes de telle sorte que l'écart

$$\xi(x) = f(x) - \varphi(x)$$

soit minimal.
Rappelons que E est un espace vectorel sur $\mathbb{R}$, sur lequel pour chaque couple d'élément, f et g est défini un produit scalaire $< f, g >$ c'est à dire l'application

$$(f, g) \in E \times E \longmapsto < f, g > \in \mathbb{R}$$

vérifiant les propriétés :
1- $< f, f >> 0$
2- $< f, f >= 0 \Longleftrightarrow f = 0$
3- $< f, g >=< g, f >$
4- $< f, \lambda g + \mu h >= \lambda < f, g > +\mu < f, h >$
- E est un espace vectoreil normé, l'application

$$\|.\| : E \longmapsto \mathbb{R}_+$$
$$f \longmapsto \|f\| = \sqrt{< f, f >}$$

est appelée norme sur E associée au produit scalaire $< ., . >$.
- Un espace vectoreil réel muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien sur $\mathbb{R}$.
- un espace préhilbertien complet pour la norme associée à ce produit scalaire est dit un espace de Hilbert.
- Soit $\{\varphi_0, \varphi_1, ...\varphi_n\}$ une famille de E
a- la famille $\{\varphi_0, \varphi_1, ...\varphi_n\}$ est appelée base orthogonale de de E si

$$< \varphi_i, \varphi_j >= 0 \quad \forall i, j = \overline{0, n} \;\; et \;\; i \neq j,$$

b- la famille $\{\varphi_0, \varphi_1, ...\varphi_n\}$ est appelée base orthonormée de de E si

$$< \varphi_i, \varphi_j >= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i, j \leq n$$

3.2 Existence et unicité de la meilleure approximation

Corollaire 3.1. *Si G est un sous espace vectoreil, de dimension finie, alors il existe au moins un élément g de G tel que*

$$\| f - g \| = \min_{h \in G} \| f - h \| .$$

Pour tout f donnée dans E, le corollaire 3.1 assure l'existence dans un sous-espace vectoreil G, de dimension finie, d'un élément g meilleure approximation de f. Cet élément g est défini par

$$\| f - g \| = \min_{h \in G} \| f - h \| .$$

Le cas qui nous interesse est $G \equiv \mathbb{P}_n$ ou on cherche $\bar{P}_n$ polynôme tel que

$$\| f - \bar{P}_n \| = \min_{P_n \in \mathbb{P}_n} \| f - P_n \| .$$

Théorème 3.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que g soit une meilleure approximation de f est que*

$$< f - g, h >= 0 \quad \textit{pour tout} \quad h \in G$$

Démonstration. Condition nécessaire
g meilleure approximation de f ceci implique que

$$< f - g, h >= 0 \quad \text{pour tout} \quad h \in G$$

Raisonnons par l'absurde, supposons que
$\exists h_1 \in G$ telle que $< f - g, h_1 >= c \neq 0$.

Si on considère $h_2 \in G$ défini par

$$h_2 = g + \frac{c}{\|h_2\|^2} \cdot h_1 \in G$$

nous avons

$$\| f - h_2 \| = \sqrt{f - g - \frac{c}{\|h_1\|^2} \cdot h_1, f - g - \frac{c}{\|h_1\|^2} \cdot h_1}$$

$$\| f - h_2 \| = \sqrt{\| f - g \|^2 - 2 < f - g, \frac{c}{\|h_1\|^2} \cdot h_1 > + \frac{c^2}{\|h_1\|^2}}$$

$$\| f - h_2 \| = \sqrt{\| f - g \|^2 - \frac{c^2}{\|h_1\|^2}}$$

$$\| f - h_2 \| < \| f - g \|$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.
Condition suffisante
$< f - g, h >= 0$ pour tout $h \in G$ ceci implique que g meilleure approximation de f dans G.
Soit $g_1 \in G$ telle que $< f - g_1, h >= 0$ pour tout $h \in G$. On a alors,

$$\| f - h \| = \sqrt{f - h, f - h}$$

$$\| f - h \| = \sqrt{f - g_1 - h + g_1, f - g_1 - h + g_1}$$

$$\| f - h \| = \sqrt{\| f - g_1 \|^2 + \| h - g_1 \|^2}$$

Donc

$$\| f - g_1 \| < \| f - h \| \quad \text{pour tout} \quad h \in G \quad \text{donc} \quad g_1 = g$$

Cet élément g est appelé meilleure approximation de f au sens des moindres carrés. □

Théorème 3.2. *La meilleure approximation au sens des moindres carrés est unique.*

Démonstration. Soient g_1 et g_2 deux meilleures approximations.On a

$$< f - g_1, h >=< f - g_2, h >= 0 \ \text{ pour tout } \ h \in G.$$

En particulier pour $h = g_1 - g_2$; d'oú

$$\begin{aligned} \| g_1 - g_2 \| &= \sqrt{< g_1 - f + f - g_2, g_1 - g_2 >} \\ &= \sqrt{< f - g_1, g_1 - g_2 > + < f - g_2, g_1 - g_2 >} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'oú $g_1 = g_2$ □

3.3 Détermination de la meilleure approximation au sens des moindres carrés.

Soit $\{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de $\mathbb{P}_n$, $f \in E$.

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{P}_n \Longrightarrow P &= \sum_{i=0}^{n} a_i \psi_i, \quad a_i \in \mathbb{R}. \\ \bar{P} \in \mathbb{P}_n \Longrightarrow \bar{P} &= \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_j \psi_j, \quad \bar{a}_j \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de projection $\bar{P}$ vérifiant

$$< f - \bar{P}, P >= 0 \ \ \forall P \in \mathbb{P}_n$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow < f - \bar{P}, \Sigma_{i=0}^{n} a_i \psi_i >= 0 \ \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ i = 0, ..., n \\ &\Longleftrightarrow \Sigma_{i=0}^{n} a_i < f - \bar{P}, \psi_i >= 0 \ \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ i = 0, ..., n \\ &\Longleftrightarrow < f - \bar{P}, \psi_i >= 0 \ \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ i = 0, ..., n \\ &\Longleftrightarrow < \bar{P}, \psi_i >=< f, \psi_i > \ \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ i = 0, ..., n \\ &\Longleftrightarrow < \Sigma_{j=0}^{n} \bar{a}_j \psi_j, \psi_i >=< f, \psi_i > \ \ \forall a_i \in \mathbb{R} \ \ i = 0, ..., n \\ &\Longleftrightarrow \Sigma_{j=0}^{n} \bar{a}_j < \psi_j, \psi_i >=< f, \psi_i > \ \ i = 0, ..., n. \end{aligned}$$

C'est un système linèaire de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues. Ce système peut être écrit sous forme d'un système matriciel :

$$\begin{pmatrix} < \psi_0, \psi_0 > & < \psi_1, \psi_0 > & ... & ... & < \psi_n, \psi_0 > \\ < \psi_0, \psi_1 > & < \psi_1, \psi_1 > & ... & ... & < \psi_n, \psi_1 > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < \psi_0, \psi_n > & < \psi_1, \psi_n > & ... & ... & < \psi_n, \psi_n > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < f, \psi_0 > \\ < f, \psi_1 > \\ \vdots \\ \vdots \\ < f, \psi_n > \end{pmatrix}$$

Le système admet une et une seule solution car $\bar{P}$, existe et est unique.

3.4 La meilleure approximation au sens des moindres carrés cas continue

Soit $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Les fonctions ψ_i définies par

$$\psi_i = x^i \quad ; i = 0, ..., n$$

forment une base de $\mathbb{P}_n$ (base canonique). Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. $\bar{P}_n$ la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $f \in [a, b]$, s'écrit

$$\bar{P}_n = \bar{a}_0\psi_0 + \bar{a}_1\psi_1 + ... + \bar{a}_n\psi_n,$$

et le polynôme P_n de $\mathbb{P}_n$ s'écrit

$$P_n = a_0\psi_0 + a_1\psi_1 + ... + a_n\psi_n,$$

La condition nécessaire et suffisante du théorème 3.2 s'écrit donc

$$< f - \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i\psi_i, \sum_{j=0}^{n} a_j\psi_j >= 0$$

pour tout élément $(a_0, ..., a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ ce qui conduit au système suivant :

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i < \psi_i, \psi_j >=< f, \psi_j > \qquad j = 0, ..., n$$

oú $(\bar{a}_{0,...,\bar{a}_n})$ est l'unique solution.(corollaire , théorème de l'unicité).
Soit $E = C([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, on utilise souvent le produit scalaire suivant :
soit ω une fonction positive n'ayant qu'un nombre fini de racines sur $[a, b]$ et telle que l'intégrale $\int_a^b \omega(x)h(x)dx$ existe pour tout $h \in C([a, b])$. On suppose en général ω continue par morceaux. On pose

$$< f, g >= \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$$

Souvent, dans l'approximation polynômiale, on pend $\omega \equiv 1$.
La meilleure approximation au sens des moindres carrés de $f \in C([a, b])$, par un polynôme de $\mathbb{P}_n$ est donc le polynôme $\bar{P}_n$ défini par

$$\int_a^b \omega(x)[f(x) - \bar{P}_n(x)]^2dx = \min_{P_n\in\mathbb{P}_n} \int_a^b \omega(x)[f(x) - P_n(x)]^2dx \tag{3.1}$$

Ce polynôme $\bar{P}_n$ existe et vérifie

$$\int_a^b \omega(x)[f(x) - \bar{P}_n(x)]P_n(x)dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad P_n \in \mathbb{P}_n \tag{3.2}$$

ses coefficients $(\bar{a}_0, ..., \bar{a}_n)$ sont donnés par le système d'équation

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \int_a^b \omega(x) x^{i+j} dx = \int_a^b \omega(x) f(x) x^j dx \quad \text{pour} \quad j = 0, ..., n \tag{3.3}$$

ou solution du système matriciel

$$\begin{pmatrix} \int_a^b \omega(x)dx & \int_a^b \omega(x)xdx & \dots & \dots & \int_a^b \omega(x)x^n dx \\ \int_a^b \omega(x)xdx & \int_a^b \omega(x)x^2dx & \dots & \dots & \int_a^b \omega(x)x^{n+1}dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \omega(x)x^n dx & \int_a^b \omega(x)x^{n+1}dx & \dots & \dots & \int_a^b \omega(x)x^{2n}dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b \omega(x)f(x)dx \\ \int_a^b \omega(x)f(x)xdx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_a^b \omega(x)f(x)x^n dx \end{pmatrix}$$

Exemple 3.1. Trouver le polynôme $\bar{P}_2$ qui réalise meilleure approximation au sens des moindres carrés de $f(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ sur l'intervalle $[a, b]$ avec $\omega(x) = 1$

On a

$$\sum_{i=0}^{2} \bar{a}_i \int_{-1}^{1} x^{4-i-j} dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) x^{2-j} dx j = 0, ..., 2$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{array}{c} \frac{2}{5}\bar{a}_0 + 0\bar{a}_1 + \frac{2}{3}\bar{a}_2 = -\frac{7}{30} \\ 0\bar{a}_0 + \frac{2}{3}\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2 = \frac{7}{30} \\ \frac{2}{3}\bar{a}_0 + 0\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 = -\frac{1}{6} \end{array}$$

d'oú $\bar{a}_0 = -1$, $\bar{a}_1 = \frac{7}{20}$ et $\bar{a}_2 = \frac{1}{4}$

$$\bar{P}_2 = -x^2 + \frac{7}{20}x + \frac{1}{4}$$

On a alors, l'erreur d'approximation

$$\xi(x) = f(x) - \bar{P}_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + x^2 - \frac{7}{20}x - \frac{1}{4}$$

$$\xi(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

3.5 La meilleure approximation au sens des moindres carrés cas discret

Soient $C([a, b])$, $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Soit f une fonction dèfinie sur un intervalle $[a, b]$, dont on connait la valeur aux point x_k; $k = 0, ..., n$ distincts. On définit sur $E = C([a, b])$ le produit scalaire discret comme suit

$$< f, g >= \sum_{i=0}^{n} \omega(x_k) f(x_k) g(x_k) \quad \forall f, g \in C([a, b])$$

ω_k sont des nombres positifs non nuls à la fois (ω_k sont des poids.). En pratique, on prend des poids égaux.

On dit que le polyôme $\bar{P}_n$ réalises la meilleure approximation discrète au sens des moindres carrés de f dans $\mathbb{P}_n$ si

$$\sum_{k=0}^{n} \omega(x_k)[f(x_k) - \bar{P}_n(x_k)]^2 = \min_{P_n \in \mathbb{P}_n} \sum_{k=0}^{n} \omega(x_k)[f(x_k) - P_n(x_k)]^2 \tag{3.4}$$

Si on pose

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

et

$$\bar{P}_n(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + ... + \bar{a}_n x^n,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{P}_n$ soit meilleure approximation de f s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} \omega(x_k)[f(x_k) - \bar{P}_n(x_k)]P_n(x_k)dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad P_n \in \mathbb{P}_n \tag{3.5}$$

les coefficients $(\bar{a}_0, ..., \bar{a}_n)$ étant donnés par

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \sum_{k=0}^{n} \omega(x_k) x_k^{i+j} = \sum_{k=0}^{n} \omega(x_k) f(x_k) x_k^j \quad \text{pour} \quad j = 0, ..., n \tag{3.6}$$

ou solution du système matriciel

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \omega_k & \sum_{k=0}^n \omega_k x_k & ... & ... & \sum_{k=0}^n \omega_k x_k^n \\ \sum_{k=0}^n \omega_k x_k & \sum_{k=0}^n \omega_k x_k^2 & ... & ... & \sum_{k=0}^n \omega_k x_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^n \omega_k x_k^n & \sum_{k=0}^n \omega_k x_k^{n+1} & ... & ... & \sum_{k=0}^n \omega_k x_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k) \\ \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k) x_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k) x_k^n \end{pmatrix}$$

avec $\omega(x_k) \equiv \omega_k$

ce qui détermine $\bar{P}_n$.

Exemple 3.2. Soit la fonction f telle que

x_k	-1	-1/2	0	1/2	1
$f(x_k)$	-3/2	0	1/4	0	0

le polynôme $\bar{P}_2$ qui réalise meilleure approximation au sens des moindres carrés sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec $\omega(x) = 1$ est donné par le système

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{a}_i \sum_{k=1}^{5} x_k^{6-i-j} = \sum_{k=1}^{5} f(x_k) x_k^{3-j} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{17}{8}\bar{a}_1 + \frac{5}{2}\bar{a}_3 & = -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}\bar{a}_2 & = \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}\bar{a}_1 + 5\bar{a}_3 & = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

d'oú $\bar{a}_1 = -1$, $\quad \bar{a}_2 = \frac{3}{5}$ $\quad$ et $\bar{a}_3 = \frac{1}{4}$
alors le polynôme $\bar{P}_2(x) = -x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$

3.6 Les polynômes orthogonaux

Définition 3.1. Soit E une famille de polynômes, noté P_n. Cette famille sera orthogonale relative à une fonction-poids ω donnée, sur un intervalle $[a, b]$ si

$$\int_a^b \omega(x)P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad \text{pour tout} \quad n, m; \quad n \neq m \tag{3.7}$$

$$\int_a^b \omega(x)(P_n(x))^2dx = c(n) \tag{3.8}$$

oú c est une constante ne dépendant que de n

Définition 3.2. On dit qu'un ensemble de polynômes $P_0, P_1, ..., P_k$, degré$P_i \leq k$, pour tout $i + 0, 1, ..., k$ sont orthogonaux aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ avec les poids $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n$ si

$$\sum_{r=0}^{n} \omega_i P_i(x_r)P_j(x_r) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, ..., k. \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

Théorème 3.3. *(Orthogonalisation de Schmidt)*
Soit $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ l'ensemble $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k définis par recurrence par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - a_1 \\ P_i(x) = (x - a_i)P_{i-1}(x) - b_iP_{i-2}(x), \quad i = 2, 3..., k \end{cases} \tag{3.11}$$

oú

$$a_i = \frac{\sum_{r=0}^{n} \omega_r x_r P_{i-1}^2(x_r)}{\sum_{r=0}^{n} \omega_r P_{i-1}^2(x_r)} \qquad i = 1, 2, ..., k$$

$$b_i = \frac{\sum_{r=0}^{n} \omega_r x_r P_{i-1}(x_r)P_{i-2}(x_r)}{\sum_{r=0}^{n} \omega_r P_{i-1}^2(x_r)} \qquad i = 2, 3, ..., k$$

avec $\omega_r > 0$ pour tout $r = 0, 1, ..., n$.
Alors, l'ensemble des polynômes $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ forment un ensemble de polynômes orthogonaux aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ avec les poids $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n$.

3.6.1 Quelques exemples de familles de polynômes orthogonaux

1- Les polynômes de LEGENDRE

Le polynôme de LEGENDRE de degré n est défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad x \in [-1,1] \tag{3.12}$$

avec $P_0(x) = 1$.
Les premiers polynômes sont

$$\begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On peut les définir par la relation de récurrence

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \\ P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \end{cases} \tag{3.13}$$

La famille des polynômes de LEGENDRE est orthogonale relativement à la fonction poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle$[-1.1]$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx &= 0 \qquad \text{pour tout} \quad n, m; \quad n \neq m \\ \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx &= \frac{2}{2n+1} (\neq 0) \end{aligned}$$

Les monômes $1, x, x^2, ...$ s'écrit facilement en fonction des polynômes $P_n(x)$

$$\begin{array}{l} 1 = P_0(x) \\ x = P_1(x) \\ x^2 = \frac{1}{3}[2P_2(x) + p_0(x)] \\ x^3 = \frac{1}{5}[2P_3(x) + 3P_1(x)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le polynôme P_n admet n racines réelles dans 'intervalle $[-1,1]$.

2- Les polynômes de LAGUERRE

Le polynôme de LAGUERRE de degré n est défini par

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n), \qquad x \in [0, +\infty[\tag{3.14}$$

avec $L_0(x) = 1$.
Les premiers polynômes sont

$$\begin{array}{l} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = -x + 1 \\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2 \\ L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Qu'on peut définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = -x + 1 \\ L_n(x) = (2n - x - 1)L_{n-1}(x) - (n-1)^2 L_{n-2}(x) \end{cases} \tag{3.15}$$

La famille des polynômes de LAGUERRE est orthogonale relativement à la fonction poids $\omega(x) = e^x$ sur l'intervalle$[0. + \infty[$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^x L_n(x) L_m(x) dx &= 0 \qquad \text{pour tout} \quad n, m; \quad n \neq m \\ \int_0^{+\infty} e^x [L_n(x)]^2 dx &= (n!)^2 (\neq 0) \end{aligned}$$

Les monômes $1, x, x^2, ...$ s'éscrit facilement en fonction des polynômes $L_n(x)$

$$\begin{array}{l} 1 = L_0(x) \\ x = -L_1(x) + L_0(x) \\ x^2 = L_2(x) - 4L_1(x) + 2L_0(x) \\ x^3 = -L_3(x) + 9L_2(x) - 18L_1(x) + 6L_0(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le polynôme L_n admet n racines réelles dans 'intervalle $[0, +\infty[$.

3- Les polynômes de HERMITE

Le polynôme de HERMITE de degré n est défini par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \qquad x \in]-\infty, +\infty[\tag{3.16}$$

avec $H_0(x) = 1$.
Les premiers polynômes sont

$$\begin{array}{l} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Qu'on peut définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \quad , \quad H_1(x) = 2x \\ H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \end{cases} \tag{3.17}$$

La famille des polynômes de HERMITE est orthogonale relativement à la fonction poids $\omega(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle$]-\infty, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx &= 0 \qquad \text{pour tout} \quad n, m; \quad n \neq m \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx &= (n!)^2 (\neq 0) \end{aligned}$$

Les monômes $1, x, x^2, ...$ s'éscrit facilement en fonction des polynômes $H_n(x)$

$$\begin{array}{l} 1 = H_0(x) \\ x = \frac{1}{2} H_1(x) \\ x^2 = \frac{1}{4} H_2(x) + \frac{1}{2} H_0(x) \\ x^3 = \frac{1}{8} H_3(x) + \frac{3}{4} H_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le polynôme H_n admet n racines réelles dans 'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

3- Les polynômes de TCHEBYCHEV

Le polynôme de TCHEBYCHEV de degré n est défini par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad x \in [-1, 1] \tag{3.18}$$

avec $T_0(x) = 1$.
Les premiers polynômes sont

$$\begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On peut les définir par la formule de récurrence

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{cases} \tag{3.19}$$

La famille des polynômes de TCHEBYCHEV est orthogonale relativement à la fonction poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[-1.1]$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx &= 0 \qquad \text{pour tout} \quad n, m; \quad n \neq m \\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [T_n(x)]^2 dx &= \begin{cases} \pi & si \ \ n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & sin = 1, 2, ... \end{cases} \end{aligned}$$

Les monômes $1, x, x^2, ...$ s'éscrit facilement en fonction des polynômes $T_n(x)$

$$\begin{aligned}
&1 = T_0(x)\\
&x = T_1(x)\\
&x^2 = \tfrac{1}{2}[T_2(x) + T_0(x)\\
&x^3 = \tfrac{1}{4}T_3(x) + 3_1^T(x)\\
&..............................
\end{aligned}$$

Le polynôme T_n admet n racines réelles dans 'intervalle $[-1, 1]$.

$$T_n(x) = 0 \ \ pour \quad x = x_n = \cos[(2k+1)\frac{\pi}{2n}], \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

En outre

$$T_n(x) = 1 \ \ pour \quad x = 1, \ \ \cos\frac{\pi}{2n}, \quad ....$$

$$et \quad T_n(x) = -1 \ \ pour \quad x = \cos\frac{\pi}{n}, x = \cos\frac{3\pi}{n} \quad ....$$

3.7 Exercices

Exercice 1 :

Construire le polynôme $\overline{P}_2(x)$ qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés de $f(x) =| x |$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Soit la fonction tabulée f

x_i	-1	-1/2	0	1/2	1
$f(x_i)$	1	1/2	0	1/2	1

Construire le polynôme $\overline{P}_2(x)$ qui réalise la meilleure approximation discrète des moindres carrés sur $[-1, 1]$.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie :

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	16	9	0	-5

1- Déterminer le polynôme d'interpolation de f par la méthode de Newton.

2- Déterminer le polynôme $\overline{P}_2(x)$ qui réalise une meilleure approximation en moyenne quadratique du polynôme $P_3(x)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3- Les polynômes de Tchebychev étant définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0(t) = 1, \ T_1(t) = t \\ T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \end{cases}$$

sur l'intervalle $[-1,1]$, avec fonction poids $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
a) vérifier les relations

$$1 = T_0(t), \quad t = T_1(t), \quad t^2 = \frac{1}{2}[T_2(t) + T_0(t)]$$

$$t^3 = \frac{1}{4}[T_3(t) + 3T_1(t)]$$

b) Développer sur l'intervalle $[-2,0]$ l'expression du polynôme $P_3(x)$ en fonction de la base des polynômes de Tchebychev.

Exercice 3 :
Soit la fonction $f(x)$ définie par ses valeurs

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	30	24	12	0

1- Construire le polynôme d'interpolation de Newton de degré 3.
2- Déterminer le polynôme $\overline{P}_2(x)$ meilleure approximation au sens des moindres carrés de $P_3(x)$ sur l'intervalle $[-1,1]$.
3- les polynôeme d' Hermite étant définis par la relation de recurrence

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, \ H_1(x) = 2x \\ H_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{cases}$$

a) vérifier les relations

$$1 = H_0(x), \quad x = \frac{1}{2}H_1(x), \quad x^2 = \frac{1}{4}H_2(x) + \frac{1}{2}H_0(x)$$

$$x^3 = \frac{1}{8}H_3(x) + \frac{3}{2}H_1(x)$$

b) Déduire l'expression du polynôme $P_3(x)$ en fonction de la base des polynômes d'Hermite.
Exercice 4 :
Le polynôme de Tchebychev de degré n est défini sur l'intervalle $[1,1]$ par la relation $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ **1-** En posant $\cos\theta = x$, montrer que les polynômes $T_n(x)$ vérifiant la relation de recurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_nx - T_{n-1}(x)$$

2- Montrer que les polynôme de Tchebychev constituent un système orthogonal sur l'intervalle $[-1,1]$, relativement à la fonction poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3- Déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à 4 de meilleure approximation au moyenne quadratique sur l'intervalle $[-1,1]$ avec fonction poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ de la fonction $f(x)$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \mid x \mid, \text{si} -1 \leq x \leq 1 \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

Chapitre 4

Dérivation et Intégration numérique

4.1 Dérivation numérique

Introduction

La dérivation numérique consiste à dériver (de façon approchée) une fonction sur un intervalle bornée $[a, b]$, c'est-à dire calculer la pente de la courbe représentant la fonction, à partir d'un calcul ou d'une mesure en un nombre fini de points. La répartition des points en abscisse est généralement uniforme h (pas constant) mais il existe des méthodes à pas variable, ou encore à pas adaptatif. La dérivation des polynômes étant très simple, l'opération consiste généralement à construire une interpolation polynômiale par morceaux (de degré plus ou moins élevé) puis de dériver le polynôme sur chaque morceau.

4.1.1 Approximation de la dérivée d'une fonction régulière

Soit $f(x)$ une fonction dérivable réspectivement q fois continuement dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ dont on connait la valeur en $n+1$ points $x_0, x_1, ..., x_n$ de $[a, b]$ On désire avoir une approximation de la valeur en un point x de $[a, b]$ de la dérivée f' de f respectivement de la dérivée d'ordre q $f^{(q)}$ *de* f. Pour cela nous allons chercher cette valeur sous la forme suivante

$$f^{(q)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(x) \tag{4.1}$$

où les $\alpha_i(x)$ seront choisis de telle sorte que la fonction $R(x)$ est nulle si f est d'un type déterminé. Si f est quelconque et $R(x)$ suffisamment petit, nous considérons que

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

est une approximation de $f^{(q)}(x)$.
Soit P_n le polynôme d'interpolation de f, nous avons

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

Alors,la dérivée d'ordre q de P_n est donnée par

$$P_n^{(q)}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(q)}(x) f(x_i)$$

Nous considérons $P_n^{(q)}$ comme une approximation de $f^{(q)}(x)$ si certaines conditions sont vérifiées.

Remarque 4.1. Les coefficients $L_i^{(q)}(x)$ sont indépendants de la fonction f. Ils peuvent être tabulés lorsque les points x_i sont équidistants.

4.1.2 Etude de l'erreur de dérivation

Théorème. *Soit f une fonction n fois continument dérivable sur $[a, b]$, et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Soit P le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$, contenus dans $[a, b]$.*
Alors, pour tout $i = 0, 1, ..., n$.

$$\acute{f}(x_i) - \acute{P}_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad oú \quad \xi_x \in]a, b[$$

- *Commençons par étudier* $\acute{\epsilon}(x) = \acute{f}(x) - \acute{P}_n(x)$
Si f est $n+1$ fois continuemment dérivable sur $[a, b]$, on a l'erreur d'interpolation :
pour tout x, il existe un élément $\xi_x \in [a, b]$

$$\epsilon(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi_x) \tag{4.2}$$

On pose $\epsilon(x) = \pi(x) g(x)$ avec $\pi(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ et $g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$.
En dérivant (4.2), nous avons

$$\acute{\epsilon}(x) = \acute{\pi(x)} g(x) + \pi(x) \acute{g(x)}$$

Si $x = x_i$ alors $\pi(x_i) = 0$ ceci implique que

$$\acute{\epsilon}(x_i) = \frac{1}{(n+1)!} \pi(x_i) f^{(n+1)}(\xi_{x_i})$$

donc, l'erreur de dérivation est plus petite aux points d'interpolation.
Si $x \neq x_i$ nous devons connaitre une estimation de $\acute{g}(x)$. Si f est $n+2$ fois continuement dérivable, pour tout x de $[a, b]$, il existe un élément ς_x tel que

$$\acute{g}(x) = \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\varsigma_x)$$

alors on a

$$\acute{\epsilon}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\acute{\pi}(x) f^{(n+1)}(\xi_x) + \frac{1}{(n+2)!}\pi(x) f^{(n+2)}(\varsigma_x). \tag{4.3}$$

Notons

$$M_q = max_{x\in[a,b]}|f^{(q)}(x)|$$

nous avons donc

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{j=0,j\neq i}(x_i - x_j)$$

et selon (4.3) on a

$$|\acute{\epsilon}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\acute{\pi}(x)| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}|\pi(x)| \qquad x \in [a,b] \quad x \neq x_i \quad i = 1, ..., n \tag{4.4}$$

Comme la valeur de ξ_x n'est pas connue, on remplace la dérivée par les différences divisées.

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) = f[x_0, x_1, ..., x_n, x] \qquad \xi_x \in [a,b] \tag{4.5}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, ..., x_n, x] &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f[x_0, x_1, ..., x_n, x+h] - f[x_0, x_1, ..., x_n, x]}{x+h-x} \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} f[x_0, x_1, ..., x_n, x+h, x]\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x]$$

Donc,nous avons

$$\acute{\epsilon} = \acute{\pi}(x) f[x_0, x_1, ..., x_n, x] + \pi(x) f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x]$$

-Calculons l'erreur de la dérivation d'ordre q $\epsilon^{(q)}(x) = f^{(q)}(x) - P_n^{(q)}(x)$
En généralisant (4.2)
et d'après le théorème de Leibniz, on obtient

$$\frac{d^q}{dx^q}\pi(x) f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = \sum_{j=0}^{q} C_q^j \pi^{(i)}(x) \frac{d^{q-i}}{dx^{q-i}} f[x_0, x_1, ..., x_n, x] \tag{4.6}$$

$$\frac{d^q}{dx^q}\pi(x) f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = \sum_{j=0}^{q} C_q^j \pi^{(i)}(x) f[x_0, x_1, ..., x_n, \underbrace{x, x, ..., x}_{q-i+1}] \tag{4.7}$$

comme

$$f[x_0, x_1, ..., x_n, \underbrace{x, x, ..., x}_{q-i+1}] = \frac{1}{q-i+1} f^{(q-i+1)}(\xi_i$$

D'oú

$$\epsilon^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{q} C_q^j \pi^{(q-i)}(x) \frac{f^{(n+q-i+1)}(\xi_x)}{(n+q-i+1)!}.$$

4.2 Intégration numérique

Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle donné $[a, b]$. Nous supposerons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

définie.
On ne peut pas toujours trouver explicitement une primitive de f, même dans le cas oú f est donné par une expréssion analytique explicite, encore moins dans la pratique, la fonction f résulte de mesures physique, chimie, mécanique...ect et donc donné souvent tabulairement, et la notion de primitive perd alors tout son sens. On se propose de chercher une approximation numérique de cette intégrale.
Dans les méthodes approchées d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie. Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme qui approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur.
Ces méthodes se répartissent en deux grandes catégories :
les méthodes composées dans lesquelles la fonction f est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire $[x_x, x_{i+1}]$ de la subdivision et les méthodes de Gauss fondées sur les polynômes orthogonaux pour lesquelles les points de la subdivision sont imposés.

4.2.1 Position du problème

Soit ω une fonction poids définie sur $[a, b]$. Nous désirons approcher la valeur de l'intégrale définie par

$$I = \int_a^b \omega(x)f(x)dx.$$

Supposons que la fonction f soit connue en n points $x_0, x_1, ..., x_n$. Nous allons écrire que

$$I = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R \tag{4.8}$$

où les coefficients α_i seront choisis de telle sorte que le reste R est nul lorsque f est connue. Lorsque f est quelconque, on supposera que

$$A = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

est une valeur approchée de I si R est suffisamment petit.
Soit P_n le polynôme d'interpolation de f. Alors on a

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i)$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

D'oú

$$\tilde{P} = \int_a^b \omega(x)P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b \omega(x)L_i(x)dx\right)}_{\alpha_i} f(x_i) \tag{4.9}$$

Alors, on peut considérer $\tilde{P}$ comme approximation de I si certains conditions sur ω, α_i et x_i sont réalisées.

Remarque 4.2. Les coefficients α_i sont indépendants de la fonction f. Ils peuvent donc être tabulés pour un intervalle $[a, b]$ donné.

4.2.2 Etude de l'erreur d'intégration

Si f est $n+1$ fois continuement dérivable sur $[a, b]$, Nous savons que, pour tout x, il existe un élément ξ_x de $[a, b]$ tel que

$$\epsilon(x) = f(x) - P_n(x) = L(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \tag{4.10}$$

avec $L(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

En intégrant, les deux membres de (4.10), nous obtenons la relation suivante

$$R = I - \tilde{P} = \int_a^b \omega(x)L(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}dx \tag{4.11}$$

Si le produit $\omega(x)L(x)$ est de signe constant dans l'intervalle d'intégration $[a, b]$c'est-à-dire ne contient aucun des points d'interpolation, avec ω de signe constant sur $[a, b]$, d'aprés le théorème de la moyenne nous avons

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \omega(x)L(x)dx, \qquad \eta \in [a, b] \tag{4.12}$$

Si on connait une borne de $f^{(n+1)}$,

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

nous avons alors

$$|R| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\omega(x)L(x)|\, dx \tag{4.13}$$

4.3 Méthodes de Newton-Côtes

Ce sont des formules de quadrature de type interpolation avec subdivision régulière.
- Si les deux extrémités de l'intervalle sont des points d'interpolation il s'agit de Newton-Côtes **fermé** (méthodes des trapèzes, de Simpson,...).
- Si les deux bornes de l'intervalle d'intégration ne sont pas des points d'interpolation il s'agit de Newton-Côtes **ouvert** (méthode de Poncelet...).
La régularité de la subdivision permet d'obtenir des formules qui sont générales.

Soient $n+1$ points, répartis régulièrement sur l'intervalle $[a,b]$ c'est-à-dire que nous allons supposer que les points x_i sont équidistants et que l'on a

$$\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_1 = x_0 + h \\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh = b \end{array}$$

donc on peut les écrire sous la forme suivante :

$$x_i = a + ih \qquad i = 0, 1, ..., n$$

l'intervalle entre les points étant égal à $h = \frac{b-a}{n}$.
En outre,pour simplifier les écritures nous prendrons $\omega(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$. L'intégrale s'écrit alors :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx \tag{4.14}$$

$$\simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)dx}_{\alpha_i} \tag{4.15}$$

Pour un x quelconque dans $[a,b]$, on peut toujours poser que $x = a + h \cdot t$ oú t est un nombre réel dans l'intervalle $[0,n]$. On a alors $dx = h \cdot dt$ et les polynômes de Lagrange $L_i(x)$ s'écrivent

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}$$

et donc l'intégrale devient :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j} \cdot h \cdot dt \tag{4.16}$$

Les coefficients α_i sont évidemment donnés par

$$\alpha_i = \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j} dt \tag{4.17}$$

On peut remarquer que l'on a

$$\alpha_0 = \alpha_n \quad , \quad \alpha_1 = \alpha_{n-1} \quad , \quad \alpha_3 = \alpha_{n-2}, ...$$

Les α_i sont appelés poids associés aux points, ils ne dépendent que de n (pas de f ni $[a, b]$). Par ailleurs

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = n$$

On pose $f \equiv 1$ ceci implique que $P_n \equiv 1$ en substituant dans (4.16) on obtient
$\int_a^b 1dx = b - a \simeq h \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$, ainsi $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = \frac{b-a}{h} = n$

Remarque 4.3. Les formules de Newton-Côtes, bien que convergentes pour les polynômes,elles ne le sont pas pour les fonctions quelconques.

4.3.1 Méthode des trapèzes

pour $n = 1$, on a

$$1 = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1$$

alors,

$$\alpha_0 = \int_0^1 \frac{t-1}{-1} dt = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

En substituant les valeurs de α_i, $i = 0, 1$ dans (4.16) on obtient

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] \tag{4.18}$$

la relation (4.18) est la formule simple des trapèzes sur l'intervalle $[a, b]$. Cette intgrale égal à la surface du trapeze comprise entre $P_n(x)$ et les deux droites $x = a$, $x = b$.

4.3.2 Méthode de Simpson

Dans la méthode de Thomas Simpson $(1710-1761)$, la fonction f est remplacée par un polynôme du second degré définissant un arc de parabole passant par les points d'ordonnées $f(x_0)$, $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Donc, dans le cas où on a trois points, induisant deux subdivisions, le nombre n de subdivisions doit être pair $(n = 2m)$.
On a

$$2 = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

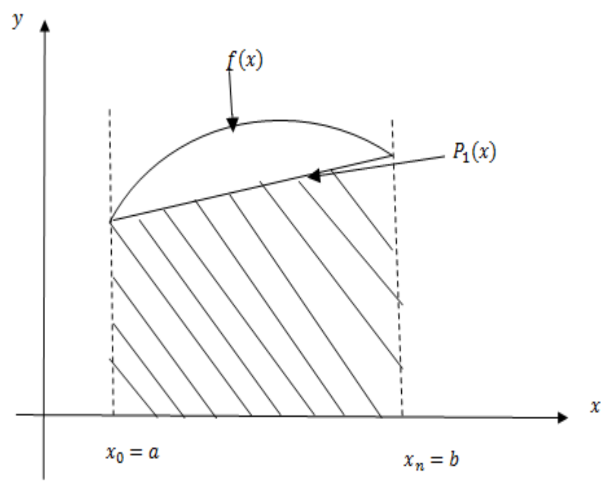

FIGURE 4.1 –

alors,

$$\alpha_0 = \int_0^2 \frac{(t-1)}{-1}\frac{(t-2)}{-2}dt = \frac{1}{3}, \quad \alpha_1 = \int_0^2 t\frac{(t-2)}{1-2}dt = \frac{4}{3}$$

et

$$\alpha_2 = \int_0^2 \frac{t}{2}\frac{(t-1)}{2}dt = \frac{1}{3}$$

En substituant les valeurs de $\alpha_i,\ i = 0, 1, 2$, dans (4.16) on obtien :

$$\int_{a=x_0}^{b=x_2} f(x)dx \simeq \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \tag{4.19}$$

L'expression (4.19) est la formule de Simpson simple sur l'intervalle $[x_0, x_2]$.

4.3.3 Méthode Composite

Quand n est grand, les formules de Newton-côtes peuvent parfois être instables (quand la fonction f est difficilement interpolable par des polynômes). Comme on dispose de n points, soit on utiliser la méthode standard à n points, soit une méthode composite ou on décompose l'intervalle en m sous-intervalles réguliers de $[a, b]$ de pas h (avec $nh = b - a$), on utilise une formule de Newton-côtes. Ces formules sont efficaces si h est petit.

On note $x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., n$.

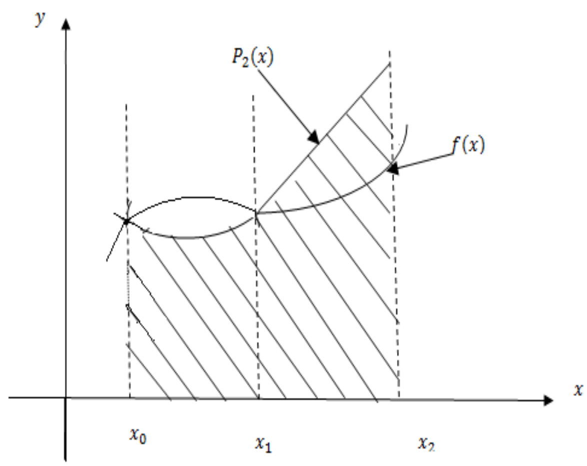

FIGURE 4.2 –

Méthode composite des trapèzes

On a $[a,b] = [x_o, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$, alors

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

sur le sous-intervalle $[x_i, x_{i-1}]$, on a

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

alors,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i \simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \tag{4.20}$$

Méthode composite de Simpson n=2m

On a $[a,b] = [x_o, x_2] \cup [x_2, x_4] \cup ... \cup [x_{n-2}, x_n]$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

sur le sous-intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, on a

$$I_i = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]$$

donc,

$$I = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} I_i \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) + f(b)\right] \tag{4.21}$$

4.3.4 Erreur dans la méthode des trapèzes

- Méthode simple

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]\right| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12}$$

avec $M_2 = max_{x\in[a,b]} \mid f^{(2)}(x) \mid$

- Méthode composite

$$\mid \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x) + ... + f(x_{n-1})]\mid \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

4.3.5 Erreur dans la méthode de Simpson

- Méthode simple

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]\right| \leq M_4\frac{(b-a)^5}{2880}$$

avec $M_4 = max_{x\in[a,b]} \mid f^{(4)}(x) \mid$

- Méthode composite (n=2m)

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{3n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{+}4\left(f(x_1)+...f(x_{n-1})\right) + 2\left(f(x_2)+...+f(x_{n-2})\right)\right]\right|$$

$$\leq M_4\frac{(b-a)^5}{180n^4}.$$

Pour déterminer le nombre (suffisant) de sous intervalle partiels de l'intervalle d'intégration telle que l'erreur soit inférieure à ϵ, il suffit de faire la majoration suivante :
- Méthode des trapèzes $M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq \epsilon$.
- Méthode de Simpson $M_4\frac{(b-a)^5}{180n^4} \leq \epsilon$.

4.4 Méthode de Gauss

Les méthodes de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilisent une subdivision particulière où les points x_i sont les racines d'une famille de polynômes orthogonaux, qui ne sont pas régulièrement espacés, contrairement aux méthodes composées. La fonction à intégrer est approchée par une interpolation de Lagrange sur les points x_i. Les méthodes de Gauss sont les méthodes les plus répandues et les plus précises, car l'intégration est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ (au lieu de n ou $n+1$ dans les méthodes composées).

4.4.1 Position du problème de Gauss

Si f est connue explicitement, on peut calculer la valeur $f(x_i)$ quel que soit x_i. On cherche s'il existe un choix optimal de n points $\bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$ dans $[a, b]$ tels que le reste R de la formule

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\bar{x}_i) + R \tag{4.22}$$

soit nul lorsque f est polynôme de degré m avec $m > n$, le plus grand possible. Notons $m = n + q$ et $\bar{L}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - \bar{x}_i)$. Soit P_m un polynôme quelconque de degré m que l'on écrit sous la forme

$$P_m(x) = \bar{L}(x) \cdot Q_{q-1}(x) + R_n(x) \tag{4.23}$$

où $Q_{q-1}(x)$ est un polynôme de degré $q-1$ et $R_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
On a alors

$$\int_a^b \omega(x) P_m(x) dx = \int_a^b \omega(x) \bar{L}(x) \cdot Q_{q-1}(x) dx + \int_a^b \omega(x) R_n(x) dx$$

Notre objectif est que

$$\int_a^b \omega(x) P_m(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i P_m(\bar{x}_i) \quad \text{pour} \quad m = n, ...$$

et

$$\int_a^b \omega(x) R_n(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i R_n(\bar{x}_i) \quad \text{pour} \quad m = n, ...$$

D'autre part nous avons

$$R_n(\bar{x}_i) = P_m(\bar{x}_i) - \bar{L}(\bar{x}_i) \cdot Q_{q-1}(\bar{x}_i) = P_m(\bar{x}_i)$$

car $\bar{L}(x)$ vérifie

$$\int_a^b \omega(x) \bar{L}(x) \cdot Q_{q-1}(x) dx = 0 \tag{4.24}$$

pour tout polynôme Q_{q-1} de degré $(q-1)$.
La propriété d'orthogonalité doit être vérifiée pour tout polynôme Q_{q-1} de degré inférieur ou égal à $q-1$. On a alors

$$\begin{cases} \int_a^b \omega(x) \bar{L}(x) dx = 0 \\ \\ \int_a^b \omega(x) \bar{L}(x) x dx = 0 \\ \\ \text{..............................} \\ \\ \int_a^b \omega(x) \bar{L}(x) x^{q-1} dx = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

avec $\bar{L}(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.
En substituant $\bar{L}(x)$ dans (4.25) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 \int_a^b \omega(x)dx + a_1 \int_a^b \omega(x)xdx + ... + a_n \int_a^b \omega(x)x^n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 \int_a^b \omega(x)x^{q-1}dx + a_1 \int_a^b \omega(x)x^q dx + ... + a_n \int_a^b \omega(x)x^{n+q-1} = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

Le système linéaire (4.26) à n inconnues a_i. Le système ne peut avoir de solution, en général, que si $q \leq n+1$. Donc, le reste R de (4.22) ne pourra être nul que lorsque f est de degré m inférieur ou égal à $2n+1$.
Le polynôme $\bar{L}(x)$ est déterminé, une fois le système (4.26) est résolu. Ceci nous permet de chercher les racines $\bar{x}_i$ de $\bar{L}(x) = 0$.
Les coefficients α_i sont obtenus par la résolution du système suivant :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \bar{x}_i^k = \int_a^b \omega(x)x^k dx, \qquad k = 0, 1, ..., n \tag{4.27}$$

Remarque 4.4. En posant $L_i(x) = \prod_{j=0\ \ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ on a d'aprés (4.22) les coefficients α_i sont aussi déterminer par

$$\int_a^b \omega(x)L_i^2(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i^2(\bar{x}_k) = \alpha_i$$

Intégration de Gauss-Legendre

Lorsque la famille de polynômes orthogonaux est la famille des polynômes de Legendre relative à la fonction-poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, l'intégrale est approchée par la relation (4.22)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\bar{x}_i) + R$$

oú α_i sont donnés par la formule

$$\alpha_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{\bar{x}_i - x_j}$$

et les $\bar{x}_i$ sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1}. L'erreur d'intégration est donné par

$$\epsilon = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi) \qquad \xi \in [-1, 1]$$

Application numérique
Pour $n = 2$, la relation de récurrence définissant les polynômes de Legendre donne $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$.

Ce polynôme admet trois racines $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ et $x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Alors, $x_0 = \bar{x}_0$, $x_1 = \bar{x}_1$ et $x_2 = \bar{x}_2$ définissant la subdivision de l'intervalle de base. Les valeurs α_i s'en déduisent. La première valeur se calcule par

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} \frac{(x)(x - \sqrt{\frac{3}{5}})}{\frac{6}{5}} = \frac{9}{5}, \quad \alpha\ _1 = \int_{-1}^{1} -\frac{(x + \sqrt{\frac{3}{5}})(x - \sqrt{\frac{3}{5}})}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{9}$$

et

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{1} \frac{(x)(x + \sqrt{\frac{3}{5}})}{\frac{6}{5}} = \frac{9}{5}$$

L'intégrale se réduit à

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}}).$$

Intégration de Gauss-Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ relativement à la fonction-poids $\omega(x) = e^{-x}$. L'intégrale est approximée par

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\bar{x}_i) + R$$

L'erreur est donnée par

$$\epsilon = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \qquad \xi \in [0, +\infty[$$

Application numérique

Pour $n = 1$, la relation de récurrence définissant les polynômes de Legendre donne $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$. Ce polynôme admet deux racines $x_0 = \bar{x}_0 = 2 - \sqrt{2}$ et $x_1 = \bar{x}_1 = 2 + \sqrt{2}$. Les valeurs de α_i sont $\alpha_0 = \frac{(2+\sqrt{2})}{4}$ et $\alpha_1 = \frac{(2-\sqrt{2})}{4}$. L'aproximation de l'intégrale est la suivante

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx \simeq \frac{(2+\sqrt{2})}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{(2-\sqrt{2})}{4} f(2-\sqrt{2}).$$

Intégration de Gauss-Hermite

Les polynômes de Hermite sont orthogonaux sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ relativement à la fonction-poids $\omega(x) = e^{-x^2}$. Ils permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\bar{x}_i) + R(x)$$

L'erreur est donnée par

$$\epsilon = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \qquad \xi \in]-\infty, +\infty[$$

Application numérique
Pour $n = 1$, la relation de récurrence définissant les polynômes de Hermite donne $H_2(x) = 4x^2 - 2$, qui admet deux racines $x_0 = \bar{x}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_1 = \bar{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les valeurs $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ conduisent à l'approximation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2}[f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}})].$$

Intégration de Gauss-Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev forment une base orthogonale sur $[-1, +1]$ par rapport à la fonction-poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Les racines du polynomes T_{n+1} sont données par

$$x_i = \bar{x}_i = \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2})$$

Les valeurs α_i ont une expression analytique général $\alpha_i = \frac{\pi}{n+1}$. Les polynômes de Tchebychev permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\bar{x}_i)$$

L'erreur est donnée par

$$\epsilon = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \qquad \xi \in [-1, +1]$$

Application numérique
Pour $n = 1$, le polynôme du second degré $T_2(x) = 2x^2 - 1$ admet deux racines distinctes $x_0 = \bar{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_1 = \bar{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les valeurs $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ conduisent à l'approximation suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \simeq \frac{\pi}{2}[f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{2}})].$$

4.5 compliment du cours

4.5.1 Méthode de Poncelet ; Newton-Côtes ouvert

La méthode de Poncelet est une amélioration de la méthode des trapèzes. L'intervalle de base $[a, b]$ est partagée en $2n$ parties égales $x_0 = a, x_1, ..., x_{2n-2}, x_{2n} = b$. On note $h = \frac{b-a}{2n}$ le pas de la subdivision. Une première valeur approchée de l'intégrale est calculée par la méthode des trapèzes. Ensuite, sur chaque intervalle $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, la fonction $f(x)$ est approchée par la tangente de $f(x)$ au point x_{2i-1}. Une deuxième valeur approchée de l'intégrale est alors calculée. L'intégrale est remplacée par la moyenne des deux valeurs calculées :

$$\int_a^b \simeq \frac{h}{4}\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 7(f(x_1) + f(x_{2n-1})) + 8\sum_{i=0}^{n-2} f(x_{2i+1})\right)$$

Notons p_i le point de coordonnées $(x_i, f_i = f(x_i))$. Calculons la valeur de l'intégrale par la méthode des trapèzes. En remplaçant la courbe par la ligne polygonale
$(p_0, p_1, p_3, ..., p_{2n-3}, p_{2n-1}, p_{2n})$, on obtient

$$I_1 = \frac{h}{2}f_0 + \frac{3}{2}hf_1 + 2hf_3 + ... + \frac{3}{2}hf_{2n-1} + \frac{h}{2}hf_{2n}$$

La deuxième valeur est obtenue en remplaçant la courbe entre $x_{2k} et x_{2k+1}$ par la tangente au point p_{2k+1}. En approchant la pente par l'expression

$$f'(x_{2i+1}) = \frac{f_{2i+1} - f_{2i}}{h}$$

On obtient

$$I_2 = 2hf_1 + ... + 2hf_{2n-1}$$

On en déduit l'estimation suivante en prenant la moyenne des deux valeurs précédentes

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

4.6 Exercices

4.6.1 Exercices : dérivation numérique

Exercice 1 :
A partir des données expérimentales
- Calculer les approxiationts de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$: données par les formules centrées.

x_i	1	1.01	1.02
$f(x_i)$	1.27	1.32	1.38

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

- Si les données du tableau sont précises à ± 0.005 quelle sera l'erreur commise sur les trois quantitées calculées.

Exercice 2 :
Soit une fonction f connue aux certains points $x_i, i = 0, ..., n$ et $h = x_{i+1} - x_i$ un pas.On cherche à approcher la dérivée première $f'(x_i)$ par les trois valeurs $f(x_{i-2})$, $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$ à l'aide d'un schéma dé-centré suivant :

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}\left[\alpha f(x_i) + \beta f'(x_{i-1}) + \gamma f''(x_{i-2}\right] + O(h)$$

Que valent les nombres α, β et δ?
Exercice 3 :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^5 sur l'intervalle $[a, b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a, b[$. Soit le rapport

$$A = \frac{f(x+3h) - 3f(x+h) + 3f(x-h) - f(x-3h)}{8h^3}.$$

- Montrer que le rapport A approche une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.
-Vérifier que A coïncide avec une formule de dérivation numérique que l'on donnera.
Exercice 4 :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^6 sur l'intervalle $[a, b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a, b[$. - Montrer que le rapport

$$B = \frac{-2f(x+2h) + 32f(x+h) - 60f(x) + 32f(x-h) - 2f(x-2h)}{24h^2}$$

approche une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.
- Commenter les résultats obtenus.

4.6.2 Exercices : intégration numérique

Exercice 1 :
On considère la fonction $f(x)$ définie par le tableau de valeurs :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	0.1	0.17	0.13	0.15	0.23	0.25	0.21	0.22	0.25	0.23	0.26

Calculer les intégrales suivantes par la méthode de Simpson généralisée

$\int_0^1 f(x)dx,\ \ \int_0^1 xf(x)dx,\ \ \int_0^1 (3x^2-1)f(x)dx.$
Exercice 2 :
On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ

$t(s)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\gamma(m/s^2)$	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Sachant que l'accélération γ est la dérivée de la vitesse V, donc,

$$V(t) = v(0) + \int_0^t \gamma(s)ds$$

avec $V(0) = 0$ et $t = 80$
Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80$, par la méthode des trapèzes puis par Simpson.
Exercice 3 :
Calculer par les formules des trapèzes et de Simpson généralisées l'intégrale

$$I_1 = \int_0^3 \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{pour} \quad n = 10$$

Calculer la solution exacte de $\int_0^3 \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exercice 4 :
Soit la fonction définie par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	17	4	3	1	61

1- Donner le tableau des différences divisées de f et en déduire le plynôme d'interpolation de degré 4 de f par la méthode de Newton.
2- Déterminer le polynôme $P_2(x)$ de meilleure approximation de f au sens des moindres carrés, sachant que $f(x) = \exp(2x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
3- Calculer les intégrales $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, $\int_{-2}^{2} P_4(x)dx$ et $\int_{-2}^{2} P_2(x)dx$, par les formules des trapèzes et de Simpson généralisées.
Exercice 5 :
Soit la fonction définie par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	34	0	0	78	384

1- Donner le tableau des différences divisées de f et en déduire le plynômed'interpolation de degré 4 de f par la méthode de Newton.
3- Calculer l'intégrale $\int_{-2}^{2} P(x)dx$, par la méthode de Gauss-Legendre pour $n = 2$. Comparer avec le résultat exact et conclure.

Exercice 6 :
On considère le polynôme suivant :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

1- Calculer l'intégrale $\int_{-\beta}^{\beta} P_n(x)dx$ par la méthode de Gauss-Legendre pour $n = 2$.
Sachant que les polynômes de Legendre sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, P_1(x) = x \\ P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \end{cases}$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$, avec fonction poids $\omega(x) = 1$.
2- Calculer l'intégrale en prenant $\beta = 2$ et $P_2(x) = \frac{6}{7}x^2 + \frac{6}{35}$. Comparer les résultats avec la solution exacte.
Exercice 7 :
On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} f(x)dx, \qquad f(x) = \exp(x)\log(1 + \exp(x))$$

par deux changements de variables, montrer que l'intégrale I est donnée par

$$I = \int_0^1 \log(1 + \frac{1}{x})dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1 + \frac{2}{x+1})dx = 2\log 2$$

La formule de Gauss-Legendre est donnée par.

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

Calculer les coefficients A_k et les abscisses x_k lorsque $n = 2$. En déduire la valeur approchée de I.
On considère la formule d'intégration :

$$\int_0^1 f(x)dx = af(\frac{1}{4}) + bf(\frac{1}{2}) + cf(\frac{3}{4}) + R(f)$$

Déterminer a, b, c pour que cette formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux (c-à-d la formule donnée est exacte pour les monômes $1, x, x^2$. En déduire une valeur approchée de$I$.

Chapitre 5

Résolution des équations non Linéaires $f(x) = 0$

Un des problèmes classiques en mathématiques appliquées est celui de la recherche des valeurs pour lesquelles une fonction donnée s'annule. Notons que la résolution d'équations algébriques est un problème difficile qui fait intervenir des notions essentielles bien qu'il puisse être posé en des termes simples. L' objective de ce chapitre est de résoudre l'équation non linéaire du type :

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Donc, Le problème est de trouver les valeurs de x dans l'intervalle$[a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x) = 0$ par des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite x_n convergente vers la solution.

5.1 Localisation des racines

La plupart des méthodes de résolution nécessitent la séparation des racines, c'est à dire celles qui consistent à déterminer d'un (ou des) intervalle(s) fermé(s) et borné(s) de $[a, b]$ dans le(s)quel(s) f admet une et une seule racine. Alors, pour localiser grossièrement le (ou les) zéro(s) de f on va d'abord étudier de la fonction f , puis on va essayer d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection afin de trouver un intervalle (dans lequel f soit strictement monotone et ne change pas de signe) qui contient un et un seul zéro.
La séparation des racines s'effectue, en général, en utilisant deux types de méthodes :

5.1.1 Méthode graphique

Soit on trace (expérimentalement ou par étude de variations de f) le graphe de la fonction f et on cherche son intersection avec l'axe Ox. Soit on décompose f en deux fonctions f_1 et f_2 simples à étudier, telles que $f = f_1 - f_2$, et on cherche les points d'intersection des graphes de f_1 et f_2, dont les abscisses sont exactement les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Remarque 5.1. On choisit souvent f_1 et f_2 de façon que leurs courbes soient des courbes connues.

Exemple 5.1. La fonction f définie par :$f(x) = logx - \frac{1}{x}$, $x \in]0, +\infty[$a une racine unique dans l'intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{5}{2}]$. En effet ; posons $f_1(x) = logx$ et $f_2(x) = \frac{1}{x}$. Alors $f(x) = 0 \Longleftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$.
Les variations des fonctions f_1 et f_2 sont données par les courbes ci-dessous :
L'abscisse du point d'intersection des deux courbes permet de localiser la solution de f et fournit

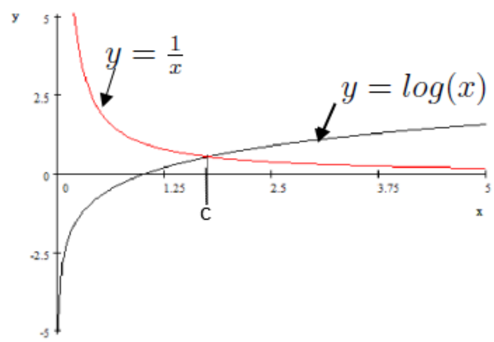

FIGURE 5.1 – Variations des fonctions f_1 et f_2

même une première approximation de celle-ci.

Exemple 5.2. La fonction f définie par :$f(x) = \sin(2x) - 1 + x ==$, $x \in] - \infty, +\infty[$ a une racine unique dans l'intervalle $[0, 1]$. En effet ; posons

$$f_1(x) = 1 - \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R} \quad et \quad f_3(x) = x$$

ou

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\arcsin(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad et \quad f_3(x) = x$$

. Alors $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_3(x) \\ f_2(x) = f_3(x). \end{cases}$

Les variations des fonctions f_1 , f_2, et f_3 sont données par les courbes ci-dessous :
On voit bien que f admet un unique zéro $c \in [0, 1]$ c' est l'abscisse du point d'intersection des graphes des fonctions permettant de localiser la solution de f.

5.1.2 Méthode de balayage

On considère une suite croissante finie $x_i, i = 0, 1, ..., n$ de valeurs de x réparties sur l'intervalle $[a, b]$. Si f est continue et $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$, alors il existe entre x_i et x_{i+1} au moins une racine de $f(x)$ (c'est le théorème des valeurs intermédiaires).

Exemple 5.3. Le polynôme $P(x)$ défini par :$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 7x - 6$ a au moins deux racines réelles $\alpha_1 \in] - 3, -1[$,$\alpha_2 \in]0, 2[$ car :$P(-4) = 270, p(-3) = 72, P(-1) = -12, P(0) = -6, P(2) = 12etP(3) = 60, ...,$ ect.

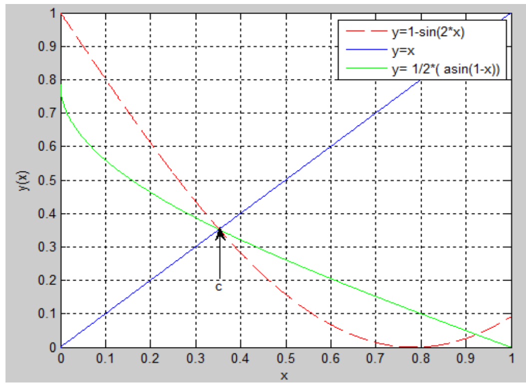

FIGURE 5.2 – Variations des fonctions f_1, f_2 et f_3

5.2 Méthode de Dichotomie (ou bissection)

L'idée : Construction d'une suite d'intervalles de plus en plus petits contenant une racine isolée de l'équation $f(x) = 0$.

5.2.1 Principe de la méthode de Dichotomie

Le princpe de la méthode de Dichotomie repose sur le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$,*
alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

La condition $f(a) \times f(b) \leq 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul). L'hypothèse de continuité est essentielle.

Remarque 5.2. Si de plus la fonction $f(x)$ est injective, alors la solution approchée c est unique. c'est à dire $f(x)$ est strictement monotone.

5.2.2 Algorithme

Comment construire une suite d'intervalle emboîtés, dont la longueur tend vers 0 et contenant chacun une solution de l'équation ($f(x) = 0$).
Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue sur $[a, b]$, il faut d'abord localiser la racine $\tilde{x}$ dans l'intervalle $[a, b]$, où $\tilde{x}$ est une racine simple. On procède de la manière suivante :

Etape 1 : On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Alors

$$\begin{cases} \tilde{x} \in [a, x_0], & si \quad f(a)f(x_0) \leq 0 \\ \tilde{x} \in [x_0, b], & si \quad f(b)f(x_0) \leq 0. \end{cases}$$

Etape 2 :On note le nouveau intervalle contenant $\tilde{x}$ par $[a_1, b_1]$:

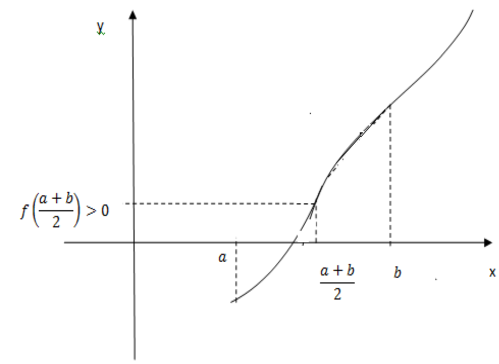

FIGURE 5.3 –

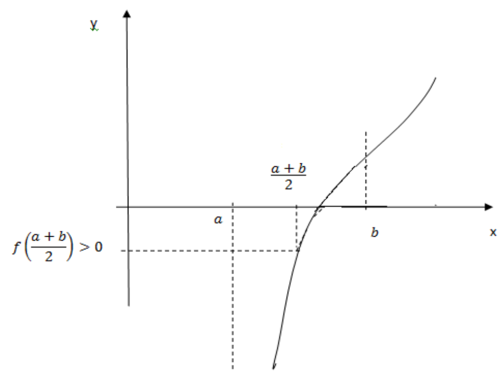

FIGURE 5.4 –

$$\begin{cases} a_1 = a \quad et \quad b_1 = x_0 \quad si \quad \tilde{x} \in [a, x_0] \\ a_1 = x_0 \quad et \quad b_1 = b \quad si \quad \tilde{x} \in [x_0, b]. \end{cases}$$

Etape 3 :En itérant ce procédé, on obtient une suite de valeurs :

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, ..., x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$$

si $f(a_n)f(x_n) \leq 0$ alors

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad et \quad b_{n+1} = x_n \quad si \quad \tilde{x} \in [a_n, x_n] \\ a_{n+1} = x_n \quad et \quad b_{n+1} = b_n \quad si \quad \tilde{x} \in [x_n, b_n]. \end{cases}$$

et en prend comme approximation de $\tilde{x}$ la valeur x_n.

Critère d'arrêt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = ... = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

et si $\tilde{x}$ est la racine de l'équation $f(x) = 0$ nous aurons :

$$| \tilde{x} - x_n | \leq b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Donc, si on désire calculer une approximation x_n de $\tilde{x}$ avec n décimales exactes il suffit de poser

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} \leq 0.5 \cdot 10^{-n}.$$

Théorème. *Soit f continue sur $[a, b]$. Nous supposons que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\tilde{x}$ dans $[a, b]$. Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape $n + 1$ (de sorte que $x_i \neq r$, $0 < i < n$) alors*

$$|\tilde{x} - x_{n+1}| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Démonstration. Exercice □

Exemple 5.4. Soit $f(x) = -39 - 43x + 9x^2 - 5x^3$,$f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On cherche à estimer $x \in [1, 5]$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

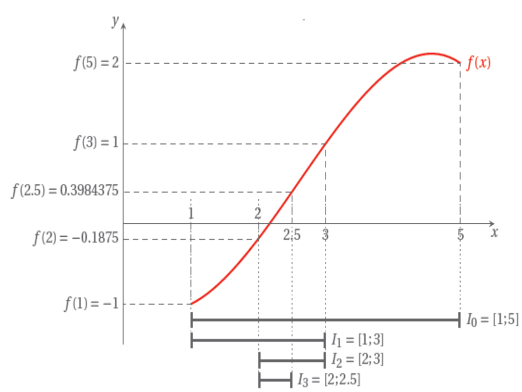

FIGURE 5.5 – Approximation de la solution par la méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie est simple mais elle ne garantit pas une réduction monotone de l'erreur d'une itération à l'autre : tout ce dont on est sûr, c'est que la longueur de l'intervalle de recherche est divisée par deux à chaque étape.

5.3 Méthode de Newton-Raphson

Soit $f \in C^1([a,b])$ tel que $f^{'} \neq 0 \forall x \in [a,b]$ et on suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $[a,b]$. Le principe de la méthode de Newton-Raphson consiste à remplacer le problème non linéaire $f(x) = 0$ par un problème affine $g(x) = 0$, où g est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 donné. On identifie la représentation de g à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse au voisinage de x_0. En effet, par la formule de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}(x - x_0). \tag{5.1}$$

On suppose que $g(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$, et nous définisons x_1 tel que $g(x_1) = 0$. Notons que x_1 est bien définie lorsque $f^{'}(x_0) \neq 0$ donné par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.2}$$

Nous construisons ainsi par récurrence $x_n \in [a,b]$, comme suit :

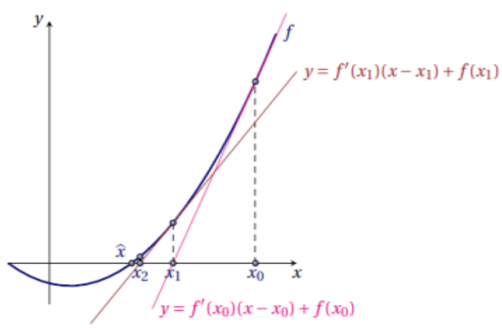

FIGURE 5.6 –

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad \text{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.3}$$

5.3.1 Etude de convergence

Théorème. *(convergence globale de la méthode de Newton -Raphson) Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I contenant $[a,b]$ telle que*

$f^{'}$ et $f^{''}$ soient strictement positives sur I (f est strictement croissante convexe). Nous supposons que $f(b) > 0$, $f(a) < 0$ et nous appelons $\tilde{x}$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a;b]$.
(a) La suite des itérés de Newton-Raphson

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad \textit{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.4}$$

est bien définie, en partant de l'approximation initiale $x_0 \in [a,b]$ qui satisfait l'inégalité $f(x_0)f^{''}(x_0) > 0$.
(b) Elle converge vers $\tilde{x}$ en décroissant.
(c) L'estimation suivante est vraie

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{M}{2m}(x_n - \tilde{x}) \tag{5.5}$$

où $M = sup_{[a;b]}f^{''}$ et $m = inf_{[a;b]}f^{'}$.

Démonstration. Nous décomposons la démonstration en plusieurs étapes.
Etape 1. Montrons que $\tilde{x} < x_1 < x_0 = b$. Nous avons
$\left\{\begin{array}{l} x_0 = b \Longrightarrow f(x_0) > 0 \\ f' > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} > 0 \Longrightarrow x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} < x_0 \Longrightarrow x_1 < x_0$. Ensuite, en utilisant la formule de Taylor de f à l'ordre 2 en x_0, il vient

$$f(\tilde{x}) = f(x_0) + (\tilde{x} - x_0)f'(x_0) + \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{2}f''(\varepsilon)$$

oú $\varepsilon \in]\tilde{x}, x_0[$. Puisque $f(\tilde{x}) = 0$ cette relation devient

$$\begin{aligned}
-f(x_0) &= (\tilde{x} - x_0)f'(x_0) + \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{2}f''(\varepsilon) \\
\Longrightarrow -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= (\tilde{x} - x_0) + \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{2}\frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_0)} \\
\Longrightarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= \tilde{x} + \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{2}\frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_0)} \\
\Longrightarrow x_1 &= \tilde{x} + \frac{(\tilde{x} - x_0)^2}{2}\frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_0)} \\
\Longrightarrow x_1 &> \tilde{x} \quad car \quad f'' > 0, \quad f' > 0
\end{aligned}$$

Etape 2. Supposons que nous avons démontré que

$$\tilde{x} < x_{n+1} < x_n \leq b \qquad (P_n) \quad \text{hypothèse de réccurence}$$

D'abord, puisque x_{n+1} se trouve dans l'intervalle $[a,b]$, nous pouvons calculer x_{n+2} par la définition,$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}$. Nous allons établir la propriété P_{n+1},

$$\tilde{x} < x_{n+2} < x_{n+1} \leq b \qquad (P_{n+1})$$

Remarquons d'abord que la dernière inégalité est déjà contenue dans l'hypothèse de récurrence de sorte que nous devons simplement obtenir $x_{n+2} < x_{n+1}$ et $\tilde{x} < x_{n+2}$. Puisque f est strictement croissante et que, en vertu de l'hypothèse de récurrence, $x_{n+1} > \tilde{x}$, nous avons aussi $f(x_{n+1}) > f(\tilde{x}) = 0$. Ensuite,

$\left\{ \begin{array}{l} f(x_{n+1}) > 0 \\ f' > 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow -\frac{f'(x_{n+1})}{f(x_{n+1})} < 0 \Longrightarrow x_{n+1} - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} < x_{n+1} \Longrightarrow x_{n+2} < x_{n+1}$. En utilisant à nouveau la formule de Taylor, nous pouvons écrire

$$f(\tilde{x}) = f(x_{n+1}) + (\tilde{x} - x_{n+1})f'(x_0) + \frac{(\tilde{x} - x_{n+1})^2}{2} f''(\varepsilon)$$

oú $\varepsilon \in]\tilde{x}, x_{n+1}[$. Utilisant $f(\tilde{x}) = 0$, nous obtenons avec les mêmes calculs que précédemment

$$x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})} = \tilde{x} + \frac{(\tilde{x} - x_{n+1})^2}{2} \frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_{n+1})}$$

d'oú

$$x_{n+2} = \tilde{x} + \frac{(\tilde{x} - x_{n+1})^2}{2} \frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_{n+1})}$$

d'oú

$$xn + 2 > \tilde{x} \quad car \quad f'' > 0, \quad f' > 0$$

Les étapes 1 et 2 montrent par récurrence que la suite (x_n) est bien définie et vérifie

$$\tilde{x} < x_{n+1} < x_n \leq b \quad n \geq 1$$

. En particulier, étant décroissante et minorée par $\tilde{x}$ la suite (x_n) est convergente. Appelons l sa limite. Nous devons nous assurer que $l = \tilde{x}$. Faisons $n \longrightarrow \infty$ dans la relation

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.6}$$

Nous avons à la fois x_{n+1} et x_n. La continuité de f entraîne que $f(x_n) \longrightarrow f(l)$ et celle de f' que $f'(x_n) \longrightarrow f'(l)$. Observons que $f'(l)$ est non nul car, par hypothèse, f' ne s'annule jamais. Le passage à la limite ($n \longrightarrow \infty$) dans (5.6) donne donc

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \Longrightarrow f(l) = 0 \Longrightarrow l = \tilde{x}, \tag{5.7}$$

la dernière implication étant justifiée par le fait que f admet une et une seule racine. Enfin,revenant à la relation

$$x_{n+2} = \tilde{x} + \frac{(\tilde{x} - x_{n+1})^2}{2} \frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_{n+1})}$$

établie au dessus, nous obtenons

$$\mid x_{n+2} - \tilde{x} \mid \leq \mid \frac{(\tilde{x} - x_{n+1})^2}{2} \mid\mid \frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_{n+1})} \mid,$$

d'oú

$$\mid x_{n+2} - \tilde{x} \mid \leq \mid \frac{(\tilde{x} - x_{n+1})^2}{2} \mid\mid \frac{M}{m)} \mid,$$

A cause de la relation $\mid x_{n+2} - \tilde{x} \mid \leq C(\tilde{x} - x_{n+1})^2$, nous disons que la méthode de Newton est d'ordre 2. Une telle propriété implique une convergence très rapide. □

Remarque 5.3. Le bon choix de l'approximation initiale x_0 vérifie l'inégalité
$f(x_0)f^{''}(x_0) > 0$.

Exemple 5.5. Soit $f(x) = x^2 - cosx$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et soit $x_0 = \frac{\pi}{4}$. On a $f'(x) = 2x + sinx > 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et $f''(x) = 2 + cosx > 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

En utilisant la suite de Newton pour trois itérations, on trouve :

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.8250207$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.8241327556$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.8241323123$

On observe à chaque itération que $|f(x_0)| \simeq 10^{-1}, |f(x_1)| \simeq 2 \times 10^{-3}, |f(x_2)| \simeq 10^{-6}$ et $|f(x_3)| \simeq 3 \times 10^{-13}$.

On voit que l'exposant de $|f(x_i)|, i = 0, 1, 2, 3$ est double à chaque itération, on dit alors que la méthode de Newton est d'ordre 2 (ou bien la convergence de la méthode de Newton est quadratique).

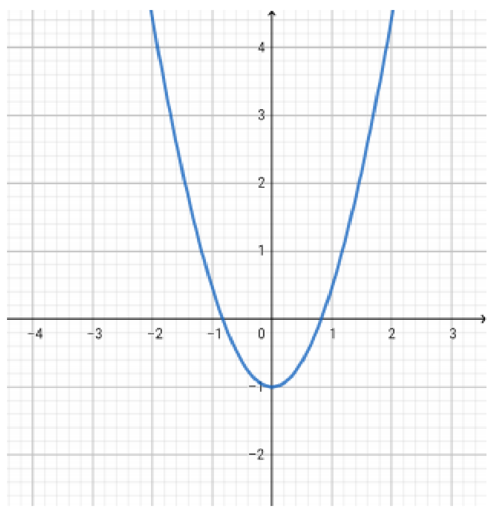

FIGURE 5.7 – Interprétation géométrique de la méthode de Newton

5.4 Méthode du point fixe

Dans cette section, nous considérons les équations de la forme $x = g(x)$. Nous étudierons un théorème qui, à la fois garantit l'existence et l'unicité de la solution et fournit une suite qui converge rapidement vers la solution. Le procédé employé – les approximations successives – joue un rôle très important en mathématiques. Il peut être étendu à l'étude d'équations plus complexes dans lesquelles les inconnues sont des fonctions, par exemple, les équations différentielles.

On suppose que f ne possède qu'une seule racine, notée α, dans $[a, b]$.
Principe de la méthode des approximations successives
On remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente $x = g(x)$ où g est continue, et on construit la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_0 = a, & a \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 0 & \end{cases} \tag{5.8}$$

avec l'espoir que la suite (x_n) converge vers la solution α du problème posé.
Interprétation géométrique :
Chercher α tel que $f(\alpha) = 0$ revient à chercher l'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses.

Chercher α tel que $g(\alpha) = \alpha$ revient à chercher l'intersection du graphe de f avec la droite $y = x$, c'est à dire à trouver le point fixe de g, d'où le nom de la méthode.

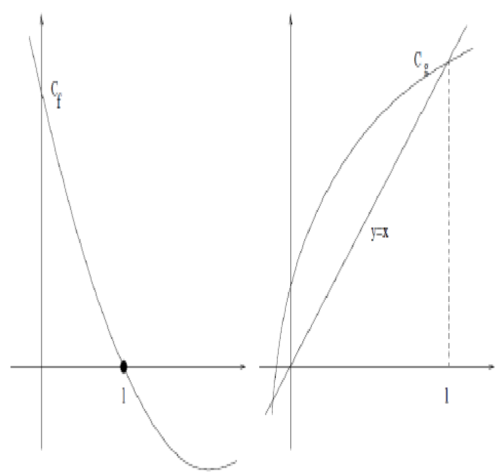

FIGURE 5.8 –

Définition 5.1. Soit I un sous-intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow I$ une application continue.
- On dit que $\alpha \in I$ est un point fixe de g dans I si $g(\alpha) = \alpha$.
- On dit que g est contractante si g est L-ipschitzienne du rapport K avec $0 < k < 1$,
c'est à dire s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$| g(x) - g(y) | \leq k \mid x - y \mid \quad x, y \in I$$

Nous démontrerons quelques inégalités à l'aide de quelques lemmes qui seront utile pour la démonstration du théorème du point fixe.

Lemme 5.1.

$$\forall p \geq 0, \quad | x_{p+1} - x_p | \leq k^p \mid x_1 - x_0 \mid .$$

Démonstration. D'après la définition de la suite et en supposant que g est une contraction. Nous avons

$$|x_{p+1} - x_p| = |g(x_p) - g(x_{p-1})| \leq k|x_p - x_{p-1}| = k|g(x_{p-1}) - g(x_{p-2})| \tag{5.9}$$
$$\leq k^2|x_{p-1} - x_{p-2}| \leq ... \leq k^p|x_1 - x_0|.$$

□

Lemme 5.2. $\forall q > p \geq 0$

$$|x_q - x_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k}|x_1 - x_0|$$

Démonstration.

$$|x_q - x_p| = |x_q - x_{q-1} + x_{q-1} - x_{q-2} + ... + x_{p+1} - x_p|$$
$$\leq |x_q - x_{q-1}| + x_{q-1} - x_{q-2}| + ... + |x_{p+1} - x_p|$$
$$\leq (k^{q-1} + k^{q-2} + ... + k^p)|x_1 - x_0|$$
$$\leq k^p(k^{q-1-p} + k^{q-2-p} + ... + k^q + 1)|x_1 - x_0|$$
$$\leq k^p\frac{1-k^{q-p}}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k}|x_1 - x_0|$$

□

Ce lemme permet de démontrer la convergence de la suite x_n que nous avons admis. La démonstration utilise le critère de Cauchy pour la convergence des suites.
Admettant donc que la suite (x_n) converge, nous obtenons en appliquant l'inégalité du lemme (5.4) avec $p = n$ et $q = p + n$

$$|x_{p+n} - x_p| \leq \frac{k^n}{1-k}(1-k^q)|x_1 - x_0|$$

Faisons $p \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité. Puisque $x_{p+n} \longrightarrow l = \tilde{x} = solution\ de\ g(x) = x$ et $k^q \longrightarrow 0$ (car $0 < k < 1$) nous obtenons

$$| \tilde{x} - x_n | \leq \frac{k^n}{1-k} | x_1 - x_0 |$$

5.4.1 Enoncé du théorème du point fixe

Théorème. *Soit I un intervalle fermé (non nécessairement borné) et g une fonction de I dans I. S'il existe un réel $k < 1$ tel que*

$$| g(x) - g(y) | \leq k | x - y | \quad x, y \in I$$

alors l'équation

$$g(x) = x$$

admet une et une seule solution dans I. Cette solution est limite de la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 = a, & a \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) & n \geq 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

(On est libre de choisir n'importe quel x_0 dans I). De plus, si $\tilde{x}$ est la solution de l'équation $g(x) = x$ alors

$$| \tilde{x} - x_n | \leq \frac{k^n}{1-k} | x_1 - x_0 | \tag{5.11}$$

L'intervalle I est de la forme $I = \mathbb{R}$ ou $I =]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$.

Démonstration. Il est facile de voir que si l'équation $g(x) = x$ admet une solution alors cette solution est unique. En effet, si s_1 et s_2 sont deux solutions, nous avons $|s_2 - s_2| = |g(s_2) - g(s_2)| \leq k|s_2 - s_2|$ ce qui n'est possible que si $s_1 = s_2$ car $k < 1$.
Lorsque $I = [a, b]$ un argument très simple permet de montrer que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution et donc, d'après la remarque précédente, une unique solution. Considérons en effet la fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = g(x) - x$. Nous avons
(a) $g(b) \in [a, b] \Longrightarrow g(b) \leq b \Longrightarrow f(b) \leq 0, et$
(b) $g(a) \in [a, b] \Longrightarrow g(a) \geq a \Longrightarrow f(a) \geq 0.$
De $f \leq 0$ et $f(a) \geq 0$ nous déduisons à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que f admet une racine dans $[a, b]$ autrement dit que l'équation $g(x) = x$ admet une solution.
Nous nous replaçons maintenant dans le cas général où I n'est pa supposé de la forme $[a, b]$, nous admettrons pour le moment que la suite (x_n) converge mais montrons que sa limite à l satisfait la relation $g(l) = l$ ainsi que les inégalités annoncées par le théorème. Le premier point est immédiat. En effet, si $x_n \longrightarrow l$ alors $x_{n+1} \longrightarrow l$. Faisant $n \longrightarrow \infty$ dans la relation $x_{n+1} = g(x_n)$, nous obtenons directement, grâce à la continuité de g, $l = g(l)$ de sorte que l est bien solution de l'équation $g(x) = x$ et, d'après ce qui précède, est l'unique solution.
Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons N de telle sorte que $\frac{k^n}{1-k} | x_1 - x_0 | \leq \epsilon$ où $k \in]0, 1[$ est la constante de contraction de la fonction f ci-dessus. L'existence de N vérifiant la condition demandée est garantie par le fait que la suite $\frac{k^n}{1-k} | x_1 - x_0 |$ tend vers 0 lorsque $N \longrightarrow \infty$, propriété qui découle elle-même du fait que k est une constante positive plus petite que 1. Maintenant si $q > p > N$, grâce au lemme (5.4), nous avons

$$|x_q - x_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \frac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \frac{k^N}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \epsilon$$

Ceci montre que la suite x_n vérifie le critère de Cauchy, il s'agit donc d'une suite convergente et, du fait que l'intervalle I est supposé fermé, sa limite est nécessairement incluse dans I. □

Exemple 5.6. Soit l'équation $e^x - x - 2 = 0$. On pose $f(x) = e^x - x - 2$, alors

$$f(x) = 0 \quad , \quad f(x) + x = x \quad , \quad e^x - 2 = x$$

ou $e^x - x - 2 = 0$, $e^x = x + 2$, $x = ln(x + 2)$, Donc on note $g_1(x) = e^x - 2$ et $g_2(x) = ln(x + 2)$.
D'autre part,on a $f(1) = e - 3 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, d'où on prend $I = [1, 2]$.
Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe.

$$1 \leq x \leq 2, e - 2 \leq e^x - 2 \leq e^2 - 2 > 2$$

d'où $g_1([1, 2]) \subsetneq [1, 2]$. Alors la méthode de point fixe diverge.
Par contre la fonction $g_2([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ et $| g_2'(x) |< k$ où $0 \leq k < 1$.

En effet, $1 < ln3 \leq ln(x+2) \leq ln4 < 2$ pour $x \in [1,2]$ et $g_2'(x) = \frac{1}{x+2}$ alors $g_2'(1) = \frac{1}{3} < 1$ et $g_2'(2) = \frac{1}{4} < 1$ D'autre part,$g''_2(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} < 0$.
Donc $\mid g_2'(x) \mid < \frac{1}{3} < 1$. D'où la méthode de point fixe converge.
On choisit $x_0 = 1$, on a

$$x_1 = g_2(x_0) = ln3$$

$$x_2 = g_2(x_1) = ln(ln3 + 2) = 1.1309$$

$$x_3 = g_2(x_2) = 1.143205032$$

On voit que la suite de la méthode de point fixe par la fonction g_2 converge vers le point fixe $\tilde{x} \simeq 1,143205$ sur l'intevalle $[1,2]$.

5.5 Exercices

Exercice 1 :
Soit l'équation

$$\arctan x = \frac{1}{x}$$

1- Montrer que l'équation admet une solution réelle dans l'intervalle $[-2,-1]$. Trouver une valeur approchée de cette solution avec deux décimaux exactes par la méthode de dichotomie.
2- Montrer que l'équation admet une solution réelle dans l'intervalle $[2,1]$. Trouver une valeur approchée de cette solution avec trois décimaux exactes par la méthode de Newton.

Exercice 2 :
Soit l'équation

$$x + \cosh x = 3$$

1-Quelle est le nombre de solutions réelles de l'équation.
2-Trouver une valeur approchée de chacune des solutions par la méthode de Newton.

Exercice 3 :
On considère la fonction à valeurs réelles dans l"intervalle $]0,4[$

$$f(x) = 4\exp(\frac{x}{4}) - 6$$

1-Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans l'intervalle $]0,4[$ et trouver α de façon analytique.
2-Peut-on appliquer la méthode de dichotomie pour calculer α. Justier votre réponse.
3- Pour approcher le zéro α, on considère les méthodes de points fixe $x_{k+1} = g(x_k), \quad i = 1,2,3$ avec

$$g_1(x) = x + 4\exp(\frac{x}{4}) - 6; \quad g_2(x) = 4x + 6\exp(\frac{x}{4}); \quad g_2(x) = x + \frac{3}{32} + \frac{\exp(\frac{x}{4})}{4}$$

établir si les trois méthodes sont convergentes.

Exercice 4 : On se propose de trouver une valeur de la racine de l'équation

$$f(x) = x - \exp(-2x) \qquad (*)$$

1- Montrer que l'équation admet une racine unique.
2- Montrer que cette racine appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
3- Trouver en utilisant la méthode de Newton une valeur approchée de la racine de l'équation avec deux dicimaux exactes.
On se propose de réécrire l'équation $(*)$ sous la forme suivante :

$$x = g(x) = \frac{l \cdot x + \exp(-2}{l + 1} \qquad l > 0$$

1- vérifier que cette équation est identique à l'équation $(*)$.
2- Donner les valeurs de l permettant de faire converger la méthode du point fixe sur l'intervalle $[0, 1]$ vers la solution unique de $(*)$.
Exercice 5 : Soit l'équation

$$2x \cos x + x - 1 = 0$$

1- Montrer que l'équation admet une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.
2- Trouver une valeur approchée de la solution par la méthode du point fixe.

Bibliographie

[1] N. Bakhvalov, Méthode numériques ,Analyse,algèbre équations différentielles ordinaires, Editions Mir Moscou, 1976.

[2] M. Boumahrat, A.Bourdin, Méthodes numériques appliquées, Office des publications universitaires, 1983.

[3] J.P. Demailly, Analyse numériques et équations différentielles, Office des publications universitaires, 1994.

[4] B. Démodovitch,I.Maron, Eléments de calcul numérique, Edition.Mir Mosco, 1979.

[5] A. Fortin,Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales polytechnique, 1994.

[6] M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, Office des publications universitaires, 2003.

[7] G. Legendre, Introduction à l'analyse numérique et au calculs cientifique, Dauphine université de Paris, 2018.