

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Dynamique non linéaires fractionnaire et chaos

Option : COSD

Par :

SAHRAOUI Houssam Eddine

Encadré par : CHOUGUI Zoulikha M.C.B U.SKIKDA

Devantlejury :

Présidente : FOUGHALI Fouzia M.C.B U. SKIKDA

Examineur: BELYACINE Zahia M.C.B U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Résumé

Ce mémoire s'intitule : " Dynamique non linéaire fractionnaire et chaos ", il se constitue de deux parties, la première théorique, comprends certaines définitions élémentaires et notions essentielles sur la théorie de systèmes dynamiques chaotique et le calcul fractionnaire. La deuxième partie pratique, comprends une étude qualitative et numérique d'un nouveau système hyper chaotique qui est obtenu par une modification du système de financier.

Mots clés : Système dynamique - Attracteur chaotique - Calcul fractionnaire.

Abstract

This memory calling itself: " Dynamique non linéair fractionnal and chaos ", it consists of two parts, the first theoretic, understands some basic elementary definitions and essential notions about the theory dynamic system and chaos, the second practical part, understands a qualitative and numerical study of a new chaotic system which is obtained by a modification of the financier system.

Keywords : Dynamic system - Chaotic attractor - Fractionnal calcul.

ملخص

هذه المذكرة بعنوان دراسة الأنظمة الفوضوية، تتألف من جزأين، الجزء الأول نظري يتضمن بعض التعاريف القاعدية والمفاهيم الأساسية لنظرية الحمل الديناميكية والفوضى. الجزء الثاني تطبيقي، يتضمن دراسة نوعية وعددية لجملة فوضوية جديدة تحصلنا عليها بتغيير لجملة.

الكلمات المفتاحية: جادب غريب لجملة ديناميكية.

Introduction général		6
1 Calcul Fractionnaire		9
1.1 Fonctions Utiles		9
1.1.1 La fonction Gamma		9
1.1.2 La fonction bêta		12
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler		13
1.2 Intégrale fractionnaire		14
1.2.1 Intégrale d'ordre arbitraire (Formule de Cauchy)		14
1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville		15
1.3 Dérivée fractionnaire		16
1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville		17
1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo		18
1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov		18
1.4 Système dynamique		20
1.4.1 Système dynamique continu		20
1.4.2 Système dynamique discret		21
1.4.3 Système autonomes et non autonomes		21
1.4.4 Attracteurs et flot		22
2 Stabilité des systèmes dynamiques		26
2.1 Stabilité des systèmes en représentation interne		26
2.1.1 Stabilité globale et stabilité locale		26

2.1.2	Stabilité des systèmes linéaires	27
2.1.3	Stabilité des systèmes non linéaires	27
2.2	Bifurcation	32
2.3	Route vers le chaos	35
2.3.1	Par la doublement de période	35
2.3.2	Par intermittence	35
2.3.3	Par quasi-périodicité	36
3	Etude de système dynamique hyperchaotique fractionnaire	37
3.1	Introduction :	37
3.2	Problème de Cauchy :	37
3.2.1	Théorème d'existence et unicité :	38
3.3	Stabilité des systèmes fractionnaires :	39
3.3.1	Méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation) :	39
3.3.2	Système issue de modèle financier :	41
	Bibliographie	45

INTRODUCTION GÉNÉRAL

Le concept de calcul d'ordre fractionnaire est connu depuis la contribution de Leibniz et L'Hôpital en 1695, mais ses applications à l'ingénierie, à la physique et aux mathématiques, la biologie ne sont que des sujets d'intérêt récents. Il a été constaté qu'avec l'aide de fractionnaires calcul, la plupart des systèmes dans les domaines interdisciplinaires peuvent être représentés avec délicatesse. En fait, tous les phénomènes physiques de la nature existent sous la forme d'ordre fractionnaires, et l'équation différentielle d'ordre entier (traditionnelle) n'est qu'un cas particulier de la un fractionnaire. L'importance des modèles d'ordre fractionnaire est qu'ils peuvent donner une description explicite et offre un aperçu plus approfondi des processus physiques sous-jacents à un comportement de la mémoire à longue portée. Ainsi, la description fractionnaire est plus proche de la réalité.

Le comportement dynamique des systèmes hyperchaotiques est plus compliqué que celui d'un simple système chaotique. C'est pour cette raison que ces systèmes offrent plus de sécurité dans le domaine de la communication.

D'autre part, en raison de ses applications théoriques et pratiques dans les domaines technologiques, tels que les circuits non-linéaires, les lasers, le contrôle, la synchronisation, l'hyperchaos est récemment devenu un thème central dans la recherche des sciences non linéaires.

Nous allons décrire brièvement le contenu des chapitres qui le composent.

Le chapitre 1 est consacrée à la théorie du calcul fractionnaire, nous présentons la description de la dérivation fractionnaire, l'intégrale et leurs propriétés.

Au cours du **chapitre 2** nous définirons les différents outils nécessaires qui servent à l'étude des systèmes dynamiques et chaos

Nous abordons au **chapitre 3**, l'étude théorique d'un système dynamique hyperchaotique fractionnaire, le modèle issu de modèle financière tel que la stabilité, puis la résolution numérique.

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous donnons ici quelques définitions et propriétés des fonctions Utiles.

1.1 Fonctions Utiles

La fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Mittag-Leffler sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}/\{0, -1, -2, \dots\}$ tel que $\Re(z) > 0$. [1]

Définition 1.1.1. [1] *L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Proposition 1.1.1. [1]

1. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ en particulier $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\Gamma(-m) = \mp\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
4. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ et pour les valeurs négatives

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5 \dots (2n - 1)} \sqrt{\pi}.$$

5. La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad \Re(z) > 0. \quad (1.2)$$

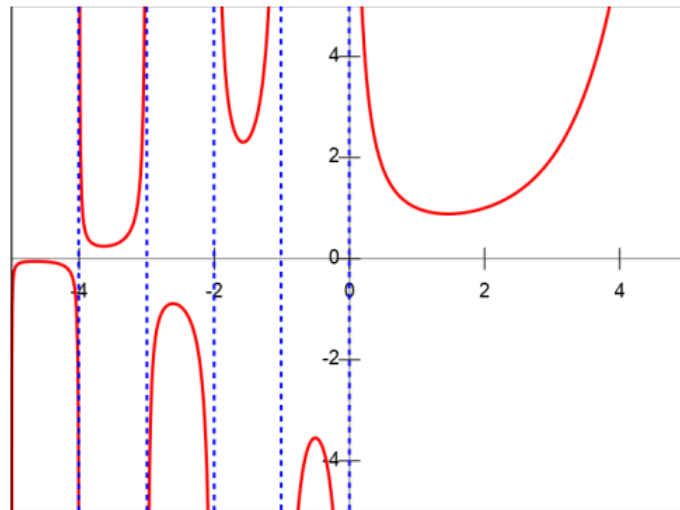


FIGURE 1.1 – La fonction Gamma

Demonstration.

1.
 - En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

- On a $\Gamma(1) = 0! = 1$ et la propriété $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, on obtient :

$$\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2!$$

... ..

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$$

2. On a : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ et $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. donc $\Gamma(0^+) = +\infty$.

3. Avec le changement de variable $s = \sqrt{t}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ (d'après l'intégrale de Gauss)} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

4. En peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et le montrons pour n :

on a

$$\Gamma\left((n - 1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!}$$

est vérifié. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ &= \left(\frac{2n - 1}{2}\right) \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n - 1)}{2} \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Et la même démonstration pour la deuxième l'expression.

5. Voir [1].

Exemple 1.1.1.

- $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \approx 2.363271801207.$
- $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.544907701811.$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 0.886226925453.$
- $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \approx 1.329340388179.$
- $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \approx 3.323350970448.$

1.1.2 La fonction bêta

La fonction bêta est appelée intégrale d'Euler du premier type.

Définition 1.1.2. La fonction Bêta est définie par [1] :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0) \quad (1.3)$$

Par exemple pour trouver :

$$\begin{aligned} B(1, 3) &= \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (1-2t+t^2) dt \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2. La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta sont données par [1] :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (z, w \in \mathbb{C}; \Re(z), \Re(w) > 0). \quad (1.4)$$

Démonstration. [2]

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} t_2^{w-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{w-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_2 \right) dt_1. \end{aligned}$$

Par changement de variable

$$t'_2 = t_1 + t_2$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{w-1} e^{-t'_2} dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t'_2} (t'_2 - t_1)^{w-1} t_1^{z-1} dt_1.\end{aligned}$$

Si on pose $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$, on arrive à :

$$\begin{aligned}&= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left(\int_0^1 (t'_1 t'_2)^{z-1} (t'_2 - t'_1 t'_2)^{w-1} t'_2 dt'_1 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left((t'_2)^{z+w-1} B(z, w) \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{z+w-1} dt'_2 B(z, w) \\ &= \Gamma(z+w) B(z, w).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

Corollaire 1.1.1. [1] *La fonction Bêta est symétrique : $B(z, w) = B(w, z)$*

Démonstration. On a :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)} = B(w, z)$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, et on la trouve largement utilisée dans la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette fonction a été présentée par G. M. Mittag-Leffler, et étudié par A. Wiman.

Définition 1.1.3. [1] *La fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha > 0). \quad (1.5)$$

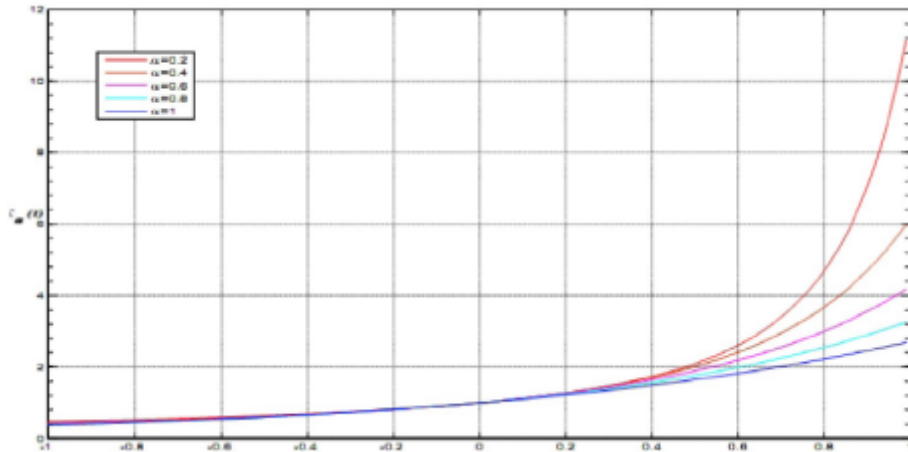


FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

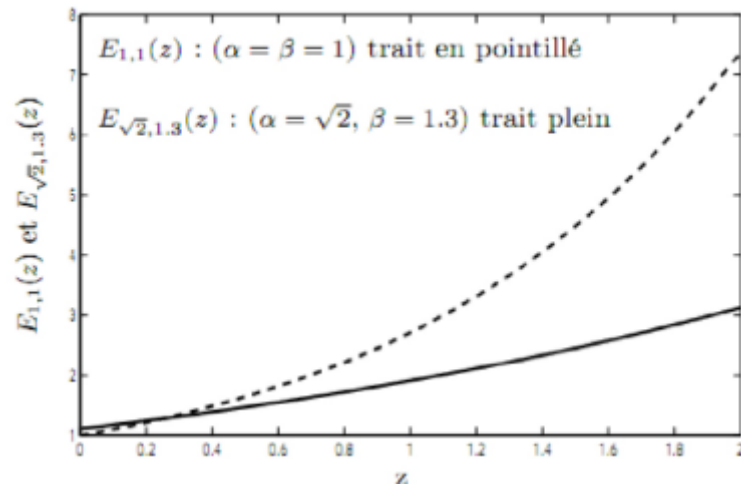


FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

et la fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (1.6)$$

1.2 Intégrale fractionnaire

1.2.1 Intégrale d'ordre arbitraire (Formule de Cauchy)

Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, (b pouvant être fini ou infini).

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(s) ds,$$

pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau) d\tau \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-s)f(s)ds.$$

Plus généralement, le nième itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I_a^n f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad (1.7)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule est appelée formule de Cauchy.

1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy (1.7), en généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante.

Définition 1.2.1. [3] Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, a \in \mathbb{R},$$

est appelée *intégrale fractionnaire gauche de Riemann-Liouville d'ordre α* (qu'on va utiliser dans tout ce qui suit), et l'intégrale

$$I_{b-}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, b \in \mathbb{R},$$

est appelée *intégrale fractionnaire droite de Riemann-Liouville d'ordre α* .

Exemple 1.2.1.

a) Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$. Alors

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds.$$

Une changement $s = a + (t - a)^\tau$, donne

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} \tau^\beta d\tau, \\
 &= \frac{(t - a)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times B(\beta + 1, \alpha), \\
 &= \frac{(t - a)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)}, \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta + \alpha}.
 \end{aligned}$$

b) Soit la fonction $f(t) = C$. Alors

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha - 1} C ds, \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha - 1} ds,
 \end{aligned}$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = t - s$

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha C &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} \tau^{\alpha - 1} d\tau \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{(t - a)^\alpha}{\alpha} \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha
 \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1. [3] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville possède la propriété suivante

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] = I_a^{\alpha + \beta} f(t), \alpha, \beta > 0.$$

De plus, on a

$$\frac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha - 1} f(t), \alpha > 0.$$

1.3 Dérivée fractionnaire

On présente dans cette partie les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et d'Hadamard qui sont les plus utilisées dans plusieurs applications.

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1. [3] Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - 1 < \alpha < n$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville gauche d'ordre α d'une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est définie par

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.8)$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville droite d'ordre α de la fonction f est définie par

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n I_{b-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.9)$$

Remarque 1.3.1. Dans ce qui suit, nous considérons que la dérivée fractionnaire gauche.

Propriété 1.3.1.

- **Linéarité**

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) + \mu {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} g(t). \quad (1.10)$$

- **En général on a**

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} ({}^{RL}D_{a+}^{\beta} f)(t) \neq {}^{RL}D_{a+}^{\beta} ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(t) \neq {}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \quad (1.11)$$

- **Formules de composition**

Soient $m - 1 \leq \alpha < m$ et $n - 1 \leq \beta < n$,

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} ({}^{RL}D_{a+}^{\beta} f)(t) = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}^{RL}D_{a+}^{\beta-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}. \quad (1.12)$$

$${}^{RL}D_{a+}^{\beta} ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(t) = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}^{RL}D_{a+}^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}. \quad (1.13)$$

- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est donnée par

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \quad t > a. \quad (1.14)$$

- La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction puissance $(t-a)^{\nu}$

pour $\nu > -1$

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha}, \quad (1.15)$$

et

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha + 1. \quad (1.16)$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.3.2. [3] La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f de classe $C^n([a, b])$ est définie par

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t > a, \quad (1.17)$$

avec $n-1 < \alpha < n$.

1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.

La dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction f au point t est donnée par :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.18)$$

Par dérivation successive de la fonction f , on obtient une généralisation de la formule (1.18) à l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \quad (1.19)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

La formule (1.19) représente la dérivée d'ordre entier n , si n est positif et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression

plus générale dans le cas où n est négatif ou nul

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)\dots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}.$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.20)$$

et

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Les formules (1.20) et (1.21) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f , où f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, t]$.

Si f est de classe C^m , des intégrations par parties de (1.20) et (1.21) nous permet d'écrire :

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad (1.22)$$

et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.23)$$

La formule (1.22) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) sont continues sur l'intervalle fermé $[a, t]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$.

La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante :

$$m-1 < \alpha < m.$$

1.4 Système dynamique

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- De son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 .
- De sa loi d'évolution [4].

Définition 1.4.1. [5] *Un système dynamique d'écrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamique et statique, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statique encore appelée paramétré du système sont fixe.*

Définition 1.4.2. [6] *Un système dynamique est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$, qui possède la propriété, pour tout $x \in X$ et $t, s \in T$:*

$$\begin{cases} f(x, 0) = x \\ f(f(x, t), s) = f(x, t + s) \end{cases}$$

On distingue deux grandes catégories de systèmes dynamiques : les systèmes á temps continu et les systèmes à temps discret. Si $T = \mathbb{R}^+$ ou \mathbb{R} , le système est dit à temps continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , le système est dit à temps discret.

1.4.1 Système dynamique continu

Dans le cas continu un système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme [7] :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_t = f(x, t, \mu). \quad (1.24)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}^r$ où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Exemple 1.4.1. *Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Où x, y, z sont les variables d'état du système, σ, r et b sont des paramètres réels. L'espace de phase est \mathbb{R}^3 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 .

1.4.2 Système dynamique discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme [7] :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3 \dots \quad (1.25)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ indique la dynamique du système en temps discret.

Exemple 1.4.2. *L'application de Hénon :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases}$$

Où a et b sont des paramètres réels. L'espace de phase est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.4.3 Système autonomes et non autonomes

Définition 1.4.3. [8] *Un système différentielle est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t , Dans ce cas on l'écrira :*

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

Exemple 1.4.3. *Soit l'équation*

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{3+t}.$$

Cette équation est non autonome.

Remarque 1.4.1. [8] On peut aussi utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non autonome en système autonome. En effet, la non autonomie se traduit par une équation de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, \mu).$$

Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, la forme ce qui réhabilite la forme :

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple 1.4.4. Soit le système non-autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2t \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$, alors $\dot{x}_3 = 1$, donc le système autonome est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

1.4.4 Attracteurs et flot

• Flot

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r. \quad (1.26)$$

Définition 1.4.4. [9] Soit $x(x_0, t)$, $x_0 \in \mathbb{U}$, une solution du système avec la condition initiale $x(0) = x_0$. On appelle flot de l'équation (1.26), l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{U} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 &\mapsto \phi_t(x_0) = x(x_0, t) \end{aligned}$$

Autrement dit, étant donné un point (matériel) en x de l'espace des phases, le flot du système permet de préciser la position $\phi_t(x)$ du point après un déplacement d'une durée t .

Proposition 1.4.1. [10] $\phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

- $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r .
- $\phi_0(x_0) = x_0$.
- $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.



FIGURE 1.4 – Représentation du flot

• Attracteurs [11]

Un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

★ Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que A est invariant par le flot : $\phi_t(A) \subset A$ pour tout t . A est dite stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $\phi_t(x_0) = x(x_0, t)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :

$$\bigcap_{t>0} \phi_t(V) = A.$$

S'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur.

• Bassin d'attraction [12]

L'orsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t<0} \phi_t(A).$$

C'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent vers A .

Est appelé bassin d'attraction de A .

Les types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1) Attracteurs réguliers :[5]

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

a) point fixe : c'est l'attracteur le plus simple, il est représenté par un point dans l'espace des phases.

b) cycle limite périodique : C'est une trajectoire fermé qui attire toutes les trajectoires proches.

c) Attracteur quasi périodique (tore) : C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplir sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle même au bout d'un temps infini.

La figure suivant représente les différents types d'attracteurs réguliers.

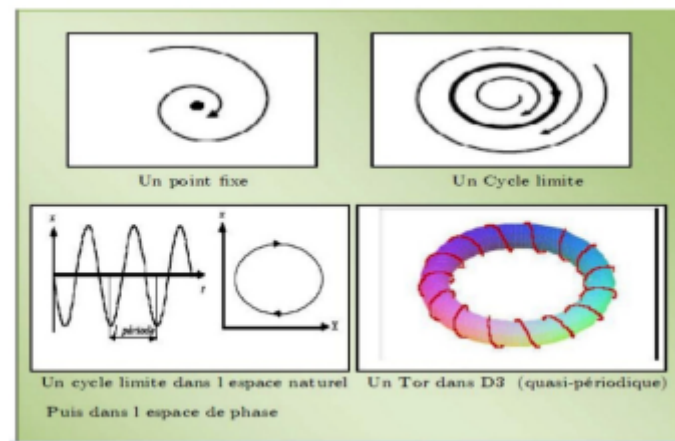


FIGURE 1.5 – Attracteurs réguliers

2) Attracteurs étranges :[5]

Ce sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques. - Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

-
- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nulle.
 - La dimension \mathbf{d} de l'attracteur est fractale (non entier), pour un système continue autonome $2 < d < n$, avec n la dimension de l'espace des phases.
 - Sensibilité au conditions initiales (deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre).

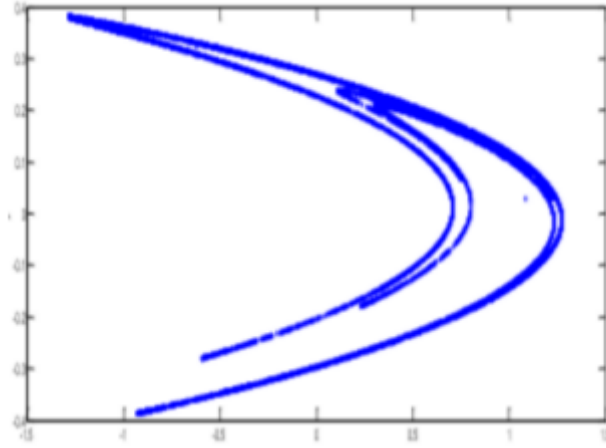


FIGURE 1.6 – Attracteurs étranges de Hénon

CHAPITRE 2

STABILITÉ DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

2.1 Stabilité des systèmes en représentation interne

Une question importante est de connaître le comportement des trajectoires initialement voisines de l'équilibre pour cela on définit la notion de stabilité d'un point d'équilibre. La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. C'est un concept qui a donné lieu à différentes terminologies.

2.1.1 Stabilité globale et stabilité locale

Si on compare les comportements possibles dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires, on s'aperçoit que les comportements dynamiques des systèmes non linéaires sont beaucoup plus compliqués, avec un éventail beaucoup plus grand. Par exemple, parler de la stabilité de l'équilibre ou de la stabilité du système revient au même dans le cas linéaire, puisque l'on peut confondre la stabilité locale et la stabilité globale. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre sous la forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature du point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique mais aussi à déterminer le domaine d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de la stabilité ou de l'instabilité locale ou globale, la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité globale signifie la divergence de solutions en dehors de toute limite.

2.1.2 Stabilité des systèmes linéaires

Considérons le système différentiel $\dot{x}(t) = Ax(t)$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $x(t) \in \mathbb{R}^n$. On note $x(\cdot, x_0)$ la solution telle que $x(0, x_0) = x_0$. On dit que le point origine 0 , qui est un point d'équilibre, est stable si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \|x_0\| \leq \delta \implies \forall t \geq 0 \quad \|x(t, x_0)\| \leq \varepsilon.$$

Définition 2.1.1. *Le point 0 est asymptotiquement stable s'il est stable et de plus*

$$x(t, x_0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Pour un système linéaire, la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale.

Théorème 2.1.1. *S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\Re(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre 0 est instable.*

- *Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.*
- *Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.*

2.1.3 Stabilité des systèmes non linéaires

1) Stabilité des systèmes non linéaires autonomes

1.1) Quelques définitions

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1. *On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine 0 puisque si x_e vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$, la dérivée de z est donnée par*

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \stackrel{\text{déf}}{=} g(z) \text{ et } g(0) = 0.$$

L'origine est bien un point d'équilibre du système $\dot{z} = g(z)$.

Définition 2.1.2. (*Stabilité simple*) Le points d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que

$$\text{si } \|x_0 - x_e\| \leq r \text{ alors } \|x(t) - x_e\| \leq \rho, \forall t \geq 0,$$

sinon le point d'équilibre est dit instable.

Définition 2.1.3. (*Stabilité asymptotique*) Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s'il stable et attractif, i.e., il existe $r > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x_e, r)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Définition 2.1.4. (*Stabilité exponentielle*) Le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux scalaires strictement positifs k et α tels que

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| \leq k \|x_0\| e^{-\alpha t},$$

dans une boule $B(r)$ autour de l'origine.

Remarque 2.1.2. Dans chacune des définitions précédente, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée à la notion de voisinage.

Définition 2.1.5. Si un système est stable asymptotiquement (exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans \mathbb{R}^n , on dira que le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement (exponentiellement) stable au sens large on dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

1.2) Théorie de Lyapunov

a) Méthode directe de Lyapunov

a.1) Fonction de Lyapunov

Soit V une fonction de classe C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine,

$$V : D \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow V(x).$$

On notera \dot{V} la fonction définie par

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(x(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

c'est la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires du système (2.1).

Définition 2.1.6.

- V est dite définie positive si : $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans un voisinage de 0 pour tout $x \neq 0$.
- V est dite définie négative si : $-V$ est définie positive.
- V est dite semi-définie positive si : $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans un voisinage de 0.
- V est non définie si : $V(0) = 0$ et $V(x)$ change de signe dans tout voisinage de 0.

Exemple 2.1.1.

- $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ définie positive dans \mathbb{R}^3 .
- $V(x) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$ est semi-définie positive dans \mathbb{R}^3 .
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ est définie positive dans \mathbb{R}^2 mais semi-définie positive dans \mathbb{R}^3 .
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$ est définie positive à l'intérieur du cercle unité.

Définition 2.1.7. (Fonction de Lyapunov) Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction de classe C^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(x) = 0 \quad x = 0,$$

ayant la propriété

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0.$$

Le résultat fondamentale de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est à dire $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, alors la stabilité est en plus asymptotique.

b) Méthode indirecte de Lyapunov

Une approximation locale de la dynamique du système autour du point d'équilibre permet, dans certains cas, de déduire la stabilité locale du système complet. Il s'agit de la méthode indirecte de Lyapunov.

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x),$$

où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1(D)$ et D une partie de \mathbb{R}^n contenant le point d'équilibre du système, i.e. $f(0) = 0$. Par le théorème de moyenne, nous avons

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) x$$

où z_i est un point du segment joignant x et l'origine reste dans D . Comme $f(0) = 0$, nous pouvons écrire

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x.$$

D'où l'on peut déduire que

$$f(x) = Ax + g(x),$$

avec

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \text{ et } g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x.$$

La fonction $g_i (i = 1, \dots, n)$ vérifie

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|,$$

et par la continuité de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, on remarque que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Cela signifie que dans un voisinage de zéro suffisamment petit, on peut approcher le système (2.1) par son linéarisé

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{où } A = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0). \quad (2.2)$$

On rappelle que la norme euclidienne d'un vecteur x est donnée par :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème qui suit, connu comme méthode indirecte de Lyapunov, utilise la linéarisation (2.2) du système (2.1) et peut dans certain cas apporter une réponse au problème de la

stabilité locale, plus précisément :

Théorème 2.1.2. *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x),$$

où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $C^1(D)$ et D un voisinage de zéro. Soit

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}.$$

Alors,

1. L'origine est asymptotiquement stable si $\Re(\lambda_i) < 0$ pour toute les valeurs propres λ_i de A .

2. L'origine est instable si $\Re(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre λ_i de A .

Notons que ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système lorsque $\Re(\lambda_i) \leq 0$ pour toute i et $\Re(\lambda_i) = 0$ pour un certain i .

Exemple 2.1.2. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b \sin x_2. \end{cases}$$

On a de deux points d'équilibres : $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ et $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$.

La matrice jacobienne est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}.$$

Pour étudier la stabilité de l'origine, on calcule la jacobienne au point $x = 0$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}.$$

Pour tout $a, b > 0$, les valeurs propres de A sont purement réelles et sont strictement négatives. Alors le système est asymptotiquement stable à l'origine. Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, on calcule la jacobienne en ce point :

$$\tilde{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de \tilde{A} sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}.$$

Pour tout $a > 0$ et $b \geq 0$, nous avons $\lambda_1 = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a} > 0$. Alors d'après le théorème (2.1.2), le point d'équilibre $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ est instable.

2.2 Bifurcation

Définition 2.2.1. Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude des systèmes d'équations non-linéaires en fonction des paramètres caractéristiques est classique. Le simple pendule entretenant présente des comportements différents suivant les valeurs des paramètres d'entretien et d'amortissement mathématiquement, il y a une bifurcation lorsque les portraits des phases ne sont plus homéomorphes. Illustrons quelque peu cette notion. Considérons un système dynamique dépendant d'un paramètre réel μ , à une dimension :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu)$$

avec $x \in I \subset \mathbb{R}^n, \mu \in D \subset \mathbb{R}, f \in C^m$ tel que $m \neq \mu$.

Types de bifurcations

On considère quatre types de bifurcations locales :

- Bifurcation noeud-col.
- Bifurcation transcritique.

- Bifurcation de fourche.
- Bifurcation de hopf.

Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation associé à l'équation :

$$\dot{x} = \mu - x^2.$$

avec μ le paramètre de contrôle.

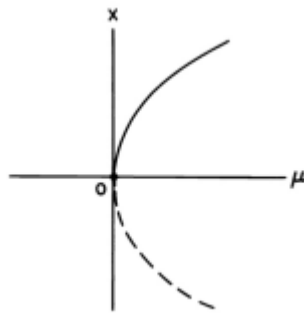


FIGURE 2.1 – Diagramme de bifurcation noeud-col

- Pour $\mu < 0$, il n'y a aucun point d'équilibre.
- Pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un point d'équilibre instable, plus précisément il est **stable à gauche** et **instable à droite**, donc semi-stable.
- Pour $\mu > 0$, il y a deux points d'équilibres : point d'équilibre asymptotiquement stable $-\sqrt{\mu}$ et point d'équilibre instable $\sqrt{\mu}$ [13].

Bifurcation transcritique

système présentant un ou deux équilibres :

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

- Pour $\mu < 0$, il y a l'équilibre asymptotiquement stable 0 et l'équilibre instable μ .
- Pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un équilibre instable : c'est comme pour la bifurcation noeud-col l'équilibre semi-stable du système $x = -x^2$.

- Pour $\mu > 0$, il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable μ et l'équilibre instable 0.

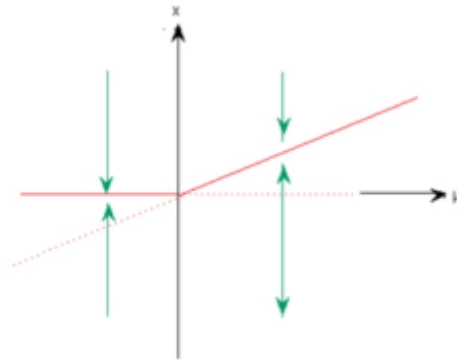


FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation transcritique

Bifurcation de fourche

$$\dot{x} = x^3 - \mu x$$

- Pour $\mu < 0$, il y a un seul équilibre 0, qui est instable.
- Pour $\mu = 0$, on a $x = x^3$: 0 est toujours l'équilibre unique, instable.
- Pour $\mu > 0$, il y a trois équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0, et les deux équilibres instables $\pm\sqrt{\mu}$.

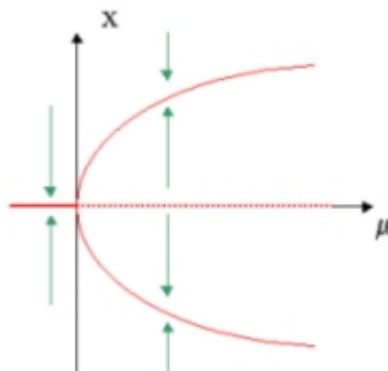


FIGURE 2.3 – Diagramme de bifurcation fourche

Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle prend une valeur critique 0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de la stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparaition d'un cycle limite.

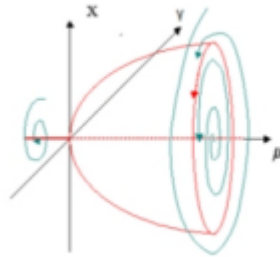


FIGURE 2.4 – Diagramme de bifurcation de Hopf

2.3 Route vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. [4] On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

2.3.1 Par la doublement de période

Ce scénario de transition est sans doute le plus connu. Par augmentation du paramètre de control de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16, ...etc. Les doublements étant de plus en rapprochées, on tend vers un point d'accumulation au quel on obtiendrait hypothetiquement une frequence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique [14].

2.3.2 Par intermittence

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotique dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant

un certain laps de temps un région périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire un certain "régularite" et il se destabilise brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique.

2.3.3 Par quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques des [15]. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparait une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

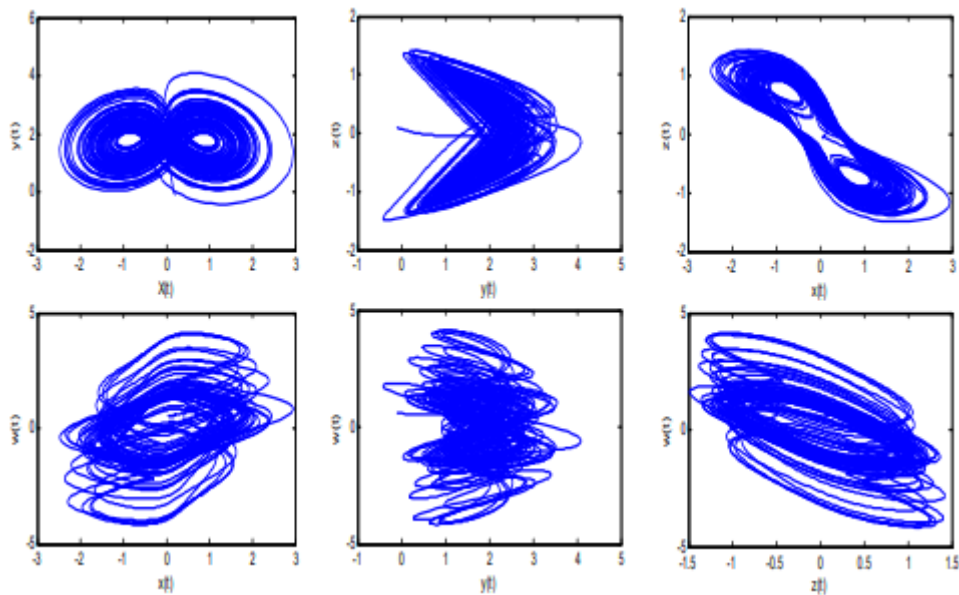


FIGURE 2.5 – 2-D Attrateurs chaotiques du système fractionnaire (3.4).

CHAPITRE 3

ETUDE DE SYSTÈME DYNAMIQUE HYPERCHAOTIQUE

FRACTIONNAIRE

3.1 Introduction :

Les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire fournissent de meilleurs modèles mathématiques pour certains systèmes physiques et d'ingénierie réels. Ils ont de nombreux comportements dynamiques qui sont similaires aux systèmes d'ordre entier. Ils sont élargis en raison de leurs applications potentielles. Le but de ce chapitre est présenter les éléments sur la théorie des EDFs, nous débutons par considérer la question d'existence et d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy (type de Caputo), puis l'étude de la stabilité et nous finissons par examiner de modèle de système hyperchaotique.

3.2 Problème de Cauchy :

Une EDF admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir entre les différentes solutions celle qui décrit le problème, il faut considérer d'autres données et d'autre conditions qui dépendent de la valeur de la solution en un instant initiale t_0 notée $y(t_0)$. Cette condition est appelée la condition initiale.

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}; k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Tel que : $p > 0, p \notin \mathbb{N}, n = [p] + 1, {}^c D_t^p$ designe l'opérateur de dérivation de Caputo. et $f : G \rightarrow \mathbb{R}$.

3.2.1 Théorème d'existence et unicité :

Dans la théorie des équations différentielles fractionnaire les propriétés d'existence et d'unicité de la solution sont essentielles car dans la modélisation un système il faut qu'il admette une solution unique.

Pour pouvoir prédire l'état future du système à partir de son état actuel il faut que le problème admette une solution unique.

Un moyen qui permet d'assurer que le problème admette une unique solution c'est d'imposer la condition de Lipschitz sur le second membre $f(t, y)$.

Définition 3.2.1. "Fonction Lipschitzienne" :

Soit une fonction définie par :

On dit que f est Lipschitzienne en y s'il existe un $L > 0$, tel que pour tout t :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, y) \mapsto f(t, y).$$

Théorème 3.2.1.

Soient $y_0^{(k)}, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}, K > 0, h^* > 0$, définissons :

$$G = \left\{ (t, y) \in [0, h^*], \left| y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \right| \leq K \right\}$$

Et soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue Lipschitzienne par rapport à y .

Alors il existe une unique solution y du problème (3.1) tel que $y \in C[0, h^*]$.

La fonction $y \in C[0; h]$ est une solution du problème (3.1) si et seulement si est solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (3.2)$$

3.3 Stabilité des systèmes frationnaires :

3.3.1 Méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation) :

On linéarise le système (3.1) autour du point d'équilibre qui peut s'écrire sous la forme :

$${}^c D_t^p y(t) = Ay(t), \quad (3.3)$$

telle que : $0 < p < 1$ et A est la matrice Jacobienne de f et puis on applique le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit le système (3.3) :*

Le système (3.3) est asymptotiquement stable, si et si seulement si, $|\arg(\lambda)| > p\frac{\pi}{2}$, pour tout :valeurs propres de la matrice A . Aussi, le vecteur d'état $y(t)$ tends vers 0 et vérifie la condition suivante : $\|y(t)\| < Nt^{-p}, t > 0, p > 0$.

Le système (3.3) est stable, si et si seulement si, la condition $|\arg(\lambda)| \geq p\frac{\pi}{2}$ est vérifie pour toute valeur propre de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfont à $|\arg(\lambda)| = p\frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique qui coincide avec leur multiplicité algébrique ($\lambda v = \lambda A$)

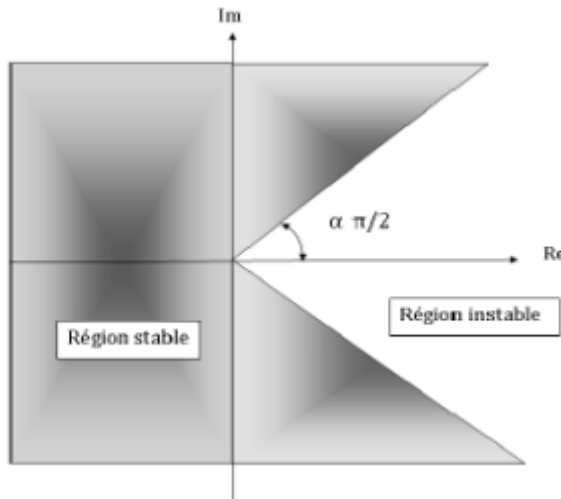


FIGURE 3.1 – Régions stable et unstable.

Corollaire 3.3.1. *Supposons que $p_1 \neq p_2 \neq \dots p_n$ et tous les i sont des nombres rationnels entre 0 et 1 soit m le plus petit commun mulitple des dénoménateurs u_i de $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ où $p_i = \frac{v_i}{u_i}, v_i$ et $u_i \in \mathbb{Z}_+$ avec $i = 1; 2; \dots, n$ et en posant $\rho = \frac{1}{m}$; donc le système (3.3) est asymptotiquement stable si $|\arg(\lambda)| > \rho\frac{\pi}{2}$ pour toutes les racines de l'équation caractéristique*

suivante :

$$\det (\text{diag}([\lambda^{mp_1}, \dots, \lambda^{mp_n}] - A) = 0 .$$

Exemple 3.3.1.

$$\begin{cases} {}^c D_t^{0.75} y_1 = -y_2 \\ {}^c D_t^{0.75} y_2 = y_1 \end{cases}$$

alors : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ les valeur propres de A sont : $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ on a : $\arg(\lambda_1) = \frac{\pi}{2}, \arg(\lambda_2) = \frac{3\pi}{2}$.

il est clair que : $|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$

Donc : le système est asymptotiquement stable.

Exemple 3.3.2.

$$\begin{cases} {}^c D_t^{0.2} y_1 = -y_2 \\ {}^c D_t^{0.5} y_2 = -y_1 \end{cases}$$

$$\text{alors : } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on a : $p_1 = 0.2 = \frac{1}{5}, p_2 = 0.5 = \frac{1}{2}, m = \text{PCM}(2, 5) = 10$ (PCM = le plus petit commun multiple)

$$\det (\text{diag}([\lambda^{mp_1}, \lambda^{mp_2}] - A) = 0$$

ie :

$$\det \left[\begin{pmatrix} [\lambda^{10 \times 0.2} + 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{10 \times 0.5} + 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Ses racines sont données comme suit :

$$\lambda_k = e^{i \frac{\pi(2k+1)}{2}}, k = 0, 1, \lambda_l = e^{i \frac{\pi(2l+1)}{5}}, l = 0, 1, 3, 4$$

Il est facile de vérifier que : $|\arg(\lambda_{k,l})| > \frac{1}{10} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{20}$

Donc : le système est asymptotiquement stable.

3.3.2 Système issue de modèle financier :

Soient le système de financier suivant :

$$\begin{cases} D_t^p x = z - (y - a)x \\ D_t^p y = 1 - by - x^2 \\ D_t^p z = -x - cz \\ D_t^p w = x - dw \end{cases} \quad (3.4)$$

Tel que : $a = 1, b = 0.1, c = 1, d = 0.1$, et $p = 0.95$

On cherche les points d'équilibres :

$$\begin{cases} z - (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \\ x - dw = 0 \end{cases} .$$

On trouve trois points d'équilibres sont :

$$\begin{aligned} E_0 &= \left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right) \\ E_1 &= \left(\sqrt{1 - bk}, k, -\frac{1}{c}\sqrt{1 - bk}, \frac{1}{d}\sqrt{1 - bk}\right) \\ E_2 &= \left(-\sqrt{1 - bk}, k, \frac{1}{c}\sqrt{1 - bk}, -\frac{1}{d}\sqrt{1 - bk}\right). \end{aligned}$$

Où : $k = a + \frac{1}{c} \cdot k \leq \frac{1}{b}$.

Si $k > \frac{1}{b}$ il existe un seul point d'équilibres E_0 .

La matrice Jacobienne est donner par :

$$J(x.y.z.w) = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 & 0 \\ -2x & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix} .$$

Et le polynome caratéristique est le suivant :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \lambda^4 + [a + b + c + d - y]\lambda^3 \\
&+ [ab + ac + ad + bc + bd + cd - (b + c + d)y + 2x^2 + 1] \lambda^2 \\
&+ [bcd + abc + abd + acd + b + d - (bc + bd + cd)y + 2(c + d)x^2] \lambda \\
&+ bd - abcd + bcdy + 2cdx^2.
\end{aligned}$$

Pour les valeurs : $a = 1, b = 0.1, c = 1, d = 0.1$, les point fixe sont :

Points d'équilibres	Valeurs propres
(0, 10, 0, 0)	$\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = 8.8990, \lambda_3 = -8.8990, \lambda_4 = -0.1$
(0.89443, 2, -0.89443, 8.9443)	$\lambda_1 = -0.1, \lambda_{2,3} = 0.3304 \pm 1.4120i, \lambda_4 = -0.7609$
(-0.89443, 2, 0.89443, -8.9443)	$\lambda_1 = -0.1, \lambda_{2,3} = 0.3304 \pm 1.4120i, \lambda_4 = -0.7609$

Pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre, nous allons utiliser le théorème 36 (Matignon)

De plus, en utilisant les valeurs de paramètres mentionnées ci-dessus, on vérifie que :

- (1) Pour le point fixe $E_0 = (0, 10, 0, 0)$, $|\arg(\lambda_2)| = 0 < p\frac{\pi}{2}$ pour tout $0 < p < 1$ donc E_0 est instable.
- (2) Pour les points fixes $E_1 = (0.89443, 2, -0.89443, 8.9443)$, $E_2 = (-0.89443, 2, 0.89443, -8.9443)$ $|\arg(\lambda_{1,4})| = \pi, |\arg(\lambda_{2,3})| = 1.3409$ alors, $\min_{1 \leq i \leq 4} |\arg(\lambda_{i,2})| = 1.3409$.

Donc la valeur critique est :

$$p_c = \frac{2 \min_{1 \leq i \leq 4} |\arg(\lambda_{i,2})|}{\pi} = 0.8508.$$

- (i) Si $p < 0.8508$ donc E_1, E_2 sont asymptotiquement stable.
- (ii) Si $p > 0.8508$ donc E_1, E_2 sont instable.

Par conséquent, l'ordre fractionnaire ; le plus bas, dont le système d'ordre fractionnaire (3.4) montre le chaos est donné par l'inégalité $p > 0.85408$.

Ce système sera intégré numériquement pour montrer les hyperchaotique en utilisant une méthode efficace de résolution équations différentielles d'ordre fractionnaire, c'est-à-dire le schéma de Grünwald-Letnikov pour les valeurs : $a = 1, b = 0.1, c = 1, d = 0.1, p = 0.95$; et la condition initial $(x, y, z, x) = (0.2, -0.1, 0.1, 0.6)$.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons centré notre étude sur la théorie des équations différentielles fractionnaires (type de Caputo). Nous avons présenté quelques théories de base pour les études d'existence, unicité et stabilité. Les résultats de stabilité ont été utilisés dans l'étude de modèles sélectionnés.

Annexe A

Programme en Matlab

```
function    FOLorenz parameters orders TSim
% Numerical Solution of the Fractional-Order Lorenz's System
%$D\ symbol {94}q_{1}$
%$D\ symbol {94}q_{2}$
%$D\ symbol {94}q_{3}$
% function    FOLorenz parameters orders, TSim
% Input : parameters - model parameters
% orders - derivatives orders
% TSim-simulation time TSim in sec
% - initial conditions
% Output : - simulation time ( : Tstep : TSim)
% - solution of the system
% time step :

% number of calculated mesh points :
=round(TSim/);
% orders of derivatives, respectively :
    orders(1)    orders(2)    orders(3)
% constants of Lorenz's system :
    parameters    parameters    parameters
% binomial coefficients calculation :

for j = 1 : n;

end

% initial conditions setting :
```

```

% calculation of phase portraits /numerical solution/ :
for
$X(i) = ( sigma \ ast (y(i - 1) - x(i - 1))) \ ast h \ symbol {94}q_{-}(1) - memo (x, c_{\{1\}}, i) ; $
$Y(i) = ( x(i) \ ast (rho - z(i - 1) - y(i - 1)) \ ast h \ symbol {94}q_{-}(2) - memo (y, c_{\{2\}}, i) ; $
$Z(i) = ( x(i) \ ast y(i) - beta \ ast z(i - 1)) \ ast h \ symbol {94}q_{-}\{3\} - memo (z, c_{\{3\}}, i) ; $
end
for

end

function
temp
for

end

% figure
plot
    label    label    xlabel

```

- [1] I. Podlubny. Fractional differential equations. Academic Press , 1999.
- [2] M. Kaddouri, Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, Mémoire, Saïda, 2017.
- [3] A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, (2006).
- [4] J.L.Pac, Systèmes dynamiques, 2e édition, 5 rue Laromiguière, 75005 Paris 20122016.
- [5] I. Talbi, Système dynamique non linéaire et phénomène de chaos.Mémoire de magistère. Univ. Mentouri. Constantine (2010), 1.
- [6] H.Bouilfane, Étude des systèmes dynamiques à temps discrets, Mémoire de master, Université Larbi Ben M'hidi Oum El- Bouaghi, (2019).
- [7] A.Désilles, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret (2003).
- [8] R. Djenhi, A. Makouf, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets, Mémoire de master, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, 2016/2017.
- [9] I. Louza, R. Zerrouki ,Etude de la dynamique d'un modèle financier continu, Mémoire de master, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2016).
- [10] H. Dang-Vu et C. Delcarte. Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses. (2000).
- [11] M.Tidjani, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Magistère en mathématiques, université Mentouri Constantine, (2014).

-
- [12] A. Arama, F. Loucif, Etude de la dynamique d'un modèle écologique, Mémoire de master, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2015).
- [13] Laouira. W, Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques, Thèse de doctorat, Université Constantine 1, 2017/2018.
- [14] Tayeb Hamaizia, Systemes Dynamiques et chaos " Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique", thèse pour obtenir le titre de Docteur en Sciences, Université de Constantine-1-, le 25/04/2013.
- [15] Ruelle.D et Takens.F,On the nature of turbulence, Commun.Math.Phys.[1971]