وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة ٢٠ أوت ١٩٥٥ ، سكيكدة

كلـــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N0 : U.S/F.S/D.M /……/2023.

Faculté des Sciences

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Étude comparative de quelques distribution issues de la famille exponentielle

Option : Commande optimale et systèmes dynamiques .

Par :

REMACHE Chima

Encadré par : LALLOUCHE Abdallah MCB U.SKIKDA

Devant le jury :

Président: BOUCENNA Ahcen MCB U. SKIKDA

Examinateur: BEDRANI Yassine MAB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

REMERCIEMENTS

*♥ Je remercie tout d'abord **ALLAH** qui m'aide et me donne la santé, la patience et le courage durant ces langues années d'étude et la force pour finir ce travail♥.*

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur

***Dr.Lallouche Abdallah**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet.*

Mon sincère remerciement aux membres de jury

***Dr.Boucenna Ahcen** et **Dr.Bedrani Yassine** qui ont accepté de juger mon travail.*

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-mêmes afin de nous assurer une formation de qualité.

الإهداء

الحمد لله على توفيقه واحسانه وخيراته وأفضاله حمدا شكرا يبلغا رضاه،

أما بعد :

إلى تيجان بلورية نقية، لهما أنحني وبهما أرفع رأسي...

أمي وأبي (سعيود يمينة ، فرحات)

إلى كنوز أذخرها للسنين وإلى أطواق من ياسمين

إخوتي(حسين، أحسن، مولود، خير الدين وياسر) خالي أحسن ، زوج أختي عمار

وأختاي (بسمة، حنان وأبنائها أويس وجواد) و زوجات إخوتي حفظهم الله وأطال في أعمارهم

إلى كل غال فقدناه (جدتي، جدي، خالي يوسف ،خالي نبيل وابنة أخي سجود) رحمهم الله وغفر لهم وجعل قبرهم روضة من رياض الجنة

إلى أعز صديقاتي وزميلاتي كل باسمه بالاخص (نجلاء، شيماء)

إلى كل من علمني حرفا وكان له الفضل في اتمام دراستي الجامعية

أساتذتي الكرام

إلى أقربائي وكل أحبتي وكل من ساندني من قريب أو بعيد

شيماء...

Résumé

Dans ce travail, on va faire une étude comparative issues de quelques distributions de la famille exponentielle, qui sont la distribution exponentielle et de Lindley, la distribution exponentielle généralisée, et la déstribution exponentielle transmutée. On va traiter les propriétés des distributions telles que les moments, les fonctions génératrices et caractéristiques, fonction quantile et l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance. Des applications à des données réelles sont été proposées pour comparer entre les distributions.

Mots clés:famille exponentielle, distributions, estimation, propriétés.

ABSTRACT

In this work, we will make a comparative study from some exponential family distributions , which are the exponential distribution and Lindley, the generalized exponential distribution, and the transmuted exponential distribution. We will process thr properties of distributions such as moments, generative and characteristics, quantile function and estimatiom by the maximum likelihood method. Applications to real data are proposed to compare between distributions.

Key words: exponentiel family, distributions, estimatiom, properties.

الملخص

في هذا العمل، سوف نتطرق لدراسة مقارنة لبعض التوزيعات من الاسرة الأسية و هي: التوزيع الأسي و ليندلي، التوزيع الأسي المعمم، التوزيع الأسي المحول. بالاظافة الى دراسة خصائص التوزيعات مثل: العزوم، الدوال المولدة و المميزة، و التقدير بطريقة المعقولية العظمى. في الأخير تطبيق على بعض البيانات حقيقية للتمييز بين التوزيعات.

الكلمات المفتاحية: العائلة الأسية، التوزيعات، التقديرات، الخصائص.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Une distribution de probabilité décrite le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard, jeux de dés, tirage de boules dans des urnes et jeu de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir les expériences aléatoires. Les distributions de probabilités sont utilisées dans plusieurs domaines de l'activité humaine comme l'économie, l'inènierie, le management et l'informatique.
Les distributions statistiques sont des modèles mathématiques utilisés pour décrire et analyser la répartition des données. L'histoire des distributions statistiques remonte à plusieurs siècles et connu un développement important dans la compréhension de caractéristiques et des applications de ces distributions. Parmi les distributions courantes, la loi exponentielle qui modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire.
La loi de Lindley, proposée par le statisticien britannique Dennis Victor Lindley en 1958, est une distribution de probabilité continue, les propriétés issues de cette distribution a été étudie pour la première fois par Ghitany. en 2008.
L'utilisation des distributions statistiques aident à comprendre les données et à prévoire les événements futurs. Cependant, Il est important de noter que l'utilisation des distributions statistiques sont basée sur des données passées et il est nécessaire de tenir compte des changements et des variations dans le contexte actuel.

Plan de mémoire :

Ce mémoire comporte, En plus de l'introduction quatre chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, Nous rappelons certaines notions et certains résultats que nous utiliserons par la suite. Ce rappel comporte la notion de tribus, Variables aléatoires, Fonction quantile les lois des probabilités.

chapitre 2 : Dans ce chapitre, Nous abordons les propriétés de la distribution exponentielle et lindley. Ces propriétés sont : Moments et mesures connexes, Fonction caractéristique et loi exponentielle. Enfin, Nous donnons des exemples illustratifs réelles pour comparer entre la distribution de lindley et loi exponentielle.

chapitre 3 : Dans ce chapitre nous allons etudier la loi exponentielle généralisé, Ces propriétés : Moment d'ordre k, Densité, Estimation du maximum de vraisemblance, Analyse des données et discussion.

chapitre 4 : Dans ce chapitre, nous allons voir les propriétés de distribution exponentielle transmutée. Ces propriétés : Moment, Analyse de fiabilité, Estimation et inférence

CHAPITRE 1

RAPPELS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts de base et les définitions liées aux tribus, aux variables aléatoires et lois de probabilités qui serons utilisées dans les prochains chapitres suivants, Ainsi quelques Exemples et interprétation en domaine de modélisation.

1.1 Tribus et Mesures

Commençons par quelques définitions sur les tribus et les mesures.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{F}$ une famille des parties de Ω, (i.e) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. La famille $\mathcal{F}$ est une* ***tribu*** *(on dit aussi σ**-Algèbre**)sur Ω si $\mathcal{F}$ vérifiée :*

i. $\mathcal{F} \neq \varnothing$.

ii. *$\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable, (i.e pour toute suite dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, on a : $(\cup A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{F}$.*

iii. *$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire, (i.e pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a : $A^c \in \mathcal{F}$).*

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle ***espace mésurable ou espace probabilisable****.*

Remarque 1.1. ***(en modélisation)***

— *Ω représente* ***l'espace fondamental*** *: l'ensemble de tous les resultats possibles d'une expérience aléatoire.*

— ***Tribu*** *: le contenu d'information associée a un expérience aléatoire.*

— ***Une expérience aléatoire*** *: est une expérience dont les resultats ne peuvent être prévus avec certitude(exactitude) d'avance.*

Exemple 1.1. *1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω pour tout ensemble Ω.*

2. $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω pour tout ensemble Ω.

Définition 1.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, une sous tribu de $\mathcal{F}$ est une sous famille $G \subset \mathcal{F}$ qui est également une tribu sur $\mathcal{F}$.*

Définition 1.3. *(**Tribu engendrée**) Soient Ω un ensemble et $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par C la plus petite tribu contenant, (i.e : la tribu $\sigma(C)$ intersection de toutes les tribu sur Ω contenant C). Cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant C.*

Exemple 1.2. *1. La tribu engendrée par F=$\{B\}$ est $\{\varnothing, B, B^c, \Omega\}$.*

Définition 1.4. *Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.*
*Les parties de $\mathcal{F}$ qui sont des éléments de $\mathcal{F}$ sont dites **mesurables** ou **probabilisables**.*

Définition 1.5. *(**Mesure Positive**) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurables, on appelle mesure positive sur $\mathcal{F}$ une application : $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i. $\mu(\varnothing) = 0$.

ii. μ est α–additive, (i.e : pour tout famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux, (i.e : tels que $A_n \cap A_m = \phi$ si $n \neq m$), on a :

$$\mu(\cup A_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Définition 1.6. *Si $\mu(\Omega) < +\infty$ on dit que μ est une **mesure finie**.*

— *$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un **espace mesuré**.*

— *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé** ou $\mathbb{P}$ est une **mesure de probabilité**.*

Passons maintenant à la mesurabilité, les variables aléatoires et leur caractéristiques.

Remarque 1.2.

Si $\mu(\Omega) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité.

1.2 Applications mesurables

Définition 1.7. *(**Applications mesurables**) Soit* $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une application* $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *est mesurable (par rapport aux tribus* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}'$*) si :*

$$\forall B \in \mathcal{F}' : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

où

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}$$

1.3 Variables aléatoires

Définition 1.8. *On appelle variable aléatoire* X *(en abrg V.A.X) tout application mesurable d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dans un espace mesurable* $(\Omega', \mathcal{F}')$*.*

Définition 1.9. *Soit* X *:*$(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ *une variable aléatoire. On appelle **Loi** de probabilité* X *la mesure* $\mathbb{P}_X$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}')$ *définie par :*

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)).$$

où

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

Remarque 1.3. $\mathbb{P}_X$ *est un **mesure de probabilité.***

Définition 1.10. *On appelle **fonction de répartition** d'une V.A.X la fonction* F_X *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega \leq x)\}), x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.11. *Une variable aléatoire* X *est à **densité**, ou **continue**, s'il existe une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que la fonction de répartition de* X *s'écrit*

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.1}$$

où f *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *satisfaisant les condition suivantes :*

1. $f(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Une fonction qui vérifie les condition (1) et (2) est appelée ***densité de probabilité****.*

Proposition 1.3.1. *Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors X est une variable à densité f donnée par $f(x) = F'_X(x)$.*

Définition 1.12. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On dit que deux événements A et B dans Ω sont indépendants lorsque :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

Plus généralement, soient n événement, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dit indépendants (ou plus précisément deux à deux indépendants) lorsque pour tous $i \neq j$ on a

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i).\mathbb{P}(A_j).$$

Définition 1.13. ***(Indépendance des variables aléatoires)***
Deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2 sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites indépendantes si, pour tous W et W' dans $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, les événements $X_1 \in W$ et $X_2 \in W'$ sont indépendants. La définition s'étend immédiatement au cas de n variables aléatoires.

1.4 Espérance mathématique et Variance

Définition 1.14. *L'espérance mathématique d'une V.A.X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est donnée par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \tag{1.2}$$

$X(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par X.

Définition 1.15. *La variance d'une (V.A.X) existe et finie si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors on a :*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X^2)) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \tag{1.3}$$

où,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X^2(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \tag{1.4}$$

$\mathbb{E}(X^2)$ *est le moment d'ordre 2 de la (V.A.X).*

Définition 1.16. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et une sous tribu* $G \subset \mathcal{F}$*, une V.A.X sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}(\mid X \mid) < +\infty$.

On appelle espérance conditionnelle de X sachant G et on note $\mathbb{E}(X/G)$ *toute V. A. Y satisfaisant :*

1. $Y \subseteq G$*, (i.e Y est G-mesurable).*
2. *Pour tout* $A \in G$*, on a :*

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.$$

Remarque 1.4. ***(en modélisation)***

L'espérance conditionnelle d'une V. A. X par rapport à G représente la meilleure estimation que l'on puisse faire de la valeur de X à l'aide de l'information contenue dans G.

1.5 Fonction quantile

Définition 1.17. *soit X une V.A de fonction de répartition* F_X*. Le quantile d'ordre* $\mathfrak{u} \in]0,1[$ *de X est le nombre* $x_u = Q_X(\mathfrak{u})$ *tel que* $F_X(x_u) = u$*. La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition.*

Remarque 1.5. 1. $Q_X(1/2) = x_{1/2}$ *est appelé médiane deX.*

1.6 Fonction génératrice des moments

Définition 1.18. *La foction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est définie par*

$$M_X(t) = E(e^{Xt}), t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.6.1. 1. *Lorsque les moments de tout ordre existent et que leur série génératrice exponentielle a un rayon de convergence non nul R alors pour tout* $t \in]-R, R[$ *on a*

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E\left(X^K\right)}{K!} t^k.$$

2. *pour tout* $K \geqslant 0$, M_x *est K fois dérivable en*0 *et* $E(X^K) = M_x^k(0)$*. donc, on a* $E(X) = M'_X(0)$ *et* $Var(X) = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2$.

1.7 Méthode du maximum de vraisemblance

Définition 1.19. *(Fonction de vraisemblance) Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*, n variables aléatoires indépendantes et de même lois. La fonction de vraisemblance est*

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i; \theta) & X_i \, est \, discrete \\ \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta) & X_i \, est \, continue. \end{cases}$$

Définition 1.20. *On appelle estimateur du maximum de vraisemblance de la variable aléatoire* X *correspondant à la valeur* $\hat{\theta}_n$ *en la quelle la fonction de vraisemblance atteint son maximum.*

1.8 Lois de Probabilités utiles

Donnons quelques lois de probabilités utiles en théorie de la famille exponentielle.

1.8.1 Loi Binomiale

Définition 1.21. *Une (V.A.R)* X *suit une loi Binomiale de paramètres* p*,* $(0 < p < 1)$ *et* n*, et on note :* $X \to B(n, p)$ *si sa loi est donnée par :*

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, pour \; k \in \mathbb{N} \\ 0, \; sinon \end{cases}$$

Proposition 1.8.1. *expérience (La moyenne) et la variance de* $X \longrightarrow B(n, p)$ *sont :*

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$Var(X) = np(1-p)$$

Remarque 1.6. ***(en modélisation :)***

–La loi Binomiale modélise la situation suivante :

On compte le nombre de succès parmi n expérience réalisées de façon indépendantes.

1.8.2 Loi de Poisson

Définition 1.22. *Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda(\lambda > 0)$, et on note $X \to \mathbb{P}(\lambda)$ si sa loi est donnée par :*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \, k = 0.1 \ldots n, \ldots$$

Proposition 1.8.2. *Si $X \to \mathbb{P}(\lambda)$ on a*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \tag{1.5}$$

$$Var(X) = \lambda \tag{1.6}$$

Proposition 1.8.3. *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variable de Poisson indépendantes de paramètre respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors X=$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est une variable de Poisson de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$.*

Remarque 1.7. *(**en modélisation**) :*
La loi de Poisson est la loi des événements rares, (i.e) : des événements ayant une faible probabilité de réalisation :(maladies rares, accidents mortels rares, le titrage d'une solution virale, mutation ou recombinaisons dans une séquence génétique, pannes, radioactivité...).

1.8.3 Loi exponentielle

Définition 1.23. *Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre (ou de taux) $\lambda > 0$ est une variable continue à valeurs positives de densité :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \, x \geq 0 \\ 0, \, x < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

et on note $X \to \varepsilon(\lambda)$

Exemple 1.3. *Le temps d'attente exprimer en minutes au guichet d'une banque est une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ.*
On sait que la probabilité qu'un client attente moins de 8 est égale à 0.7

1. *La valeur approchée à 0.0001 de λ.*

On a :

$$\mathbb{P}(T \leq 8) = 0.7,\ donc:\ 1 - e^{(-8\lambda)} = 0.7$$

$$e^{-8\lambda} = 0.3,\ donc:\ \lambda = \frac{\ln(0.3)}{-8} \simeq 0.1505$$

2. *La probabilité qu'un client attende entre 15 et 20 minutes.*

$$\mathbb{P}(15 \leq X \leq 20) = F(20) - F(15) = e^{-0.1505*20} - e^{-0.1505*15} \simeq 0.055$$

Remarque 1.8. ***(en modélisation)*** *:*

–La loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire : ou sans vieillissement : la probabilité que le phénomène dure au moins (s+t) heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale.

En d'autre termes, la fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t.

1.9 Loi de Gamma

Définition 1.24. *La loi exppnentielle est un cas particuluier de la famille des loi Gamma. Une variable aléatoire X suit une loi Gamma $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, ($\alpha$ est appeié paramètre d'échelle et β est le paramètre de forme), notée par $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. La densité de X*

$$\begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, si\, x \geqslant 0, \\ 0, \quad si\, x < 0 \end{cases}$$

Où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma est donnée par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0 \tag{1.8}$$

1.10 Loi Normale

Définition 1.25. *Soient deux réels m et σ. On suppose $\sigma > 0$ on dit que la variable aléatoire réelle continue X suit la loi normale de paramètres m et σ lorsqu'elle admet pour densité de probabilité* *la fonction :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

La loi normale de paramètre m et σ est notée $N(m,\sigma)$ telle que m est la moyenne et d'écart-type σ.

Cas Particulier :

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, la loi normale est dite centrée réduite

$$X \to N(0,1)$$

.

Définition 1.26. *On dit que la variable aléatoire réelle continue X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité de probabilité de fonction :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

1.11 Loi uniforme

Définition 1.27. *Soit un univers des possibles Ω, intervalle de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels tels que $a < b$.*

On appelle loi uniforme sur $[a,b]$ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction constante définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & , si\, x < a \\ \frac{1}{b-1}, & , si\, a \leq x \leq b \\ 0, & si\, x > b \end{cases}$$

La fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & si\, a \leq x \leq b \\ 0, & , si\, x > b \end{cases}$$

1.12 Critères d'information

Définition 1.28. *Les critères les plus cités sont ceux d'**Akaike**(CIA), **Schwarz** (CS), **Hannan et Quinn** (CIHQ) et **Baysien** (CIB)*

$$CIA = -2logL + 2k$$

$$CS = \log(n)k - 2\log(L)$$

$$CIHQ = -2L + 2k\log(\log(n))$$

$$CIB = -2logL + klog(n)$$

Où L est la vraisemblance, k le nombre de paramètres dans le modèle et n le nombre d'observations.

Définition 1.29. ***(Test de Kolmogorov-Smirnov)***
Il existe une variante du test précédent, le test de Kolmogorov-Smirnov, pour lequel on compare la distribution de deux échantillons statistiques.

–Données : n observations d'une variable aléatoire X, q observations d'une variable aléatoire Y.
–Hypothèse testée : "Les fonctions de répartition de X et Y, notées respectivement F_X et F_Y sont égales" avec risque d'erreur a.
–Déroulement du test :
1–On calcule F_X et F_Y comme ci-dessus.
2–On calcule $k = \sup \mid F_X - F_Y \mid$.
3–On compare avec la valeur critique de la loi du $\triangle$ de Kolmogorov-Smirnov : si b est tel que $\mathbb{P}(\triangle > b) = a$ et si $k < \sqrt{\frac{p+q}{pq}}$, alors on accepte l'hypothèse, sinon on la rejette.
–Condition de validité : il faut que p et q soient grands, car on approxime la loi de $\mid F_X - F_Y \mid$ par la loi limite.

CHAPITRE 2

DISTRIBUTION EXPONENTIELLE ET DE LINDLEY

Dans ce chapitre, On traite la distribution exponentielle et de Lindley, les propriétés statistique et on termine par des applications.

2.1 Distribution de Lindley

La loi Lindley est une distribution de Probabilité continue. Son nom est issu du nom du statisticien britannique Dennis Victor Lindley (né la 25 juillet (1923) et décédé le 14 décembre (2013)). En (1956), Lindley a introduit, la distribution dit de Lindley.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *La densité de probabilité de la distribution de Lindley de paramètre $\theta > 0$ est*

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\theta^2}{1+\theta}(1+x)e^{-\theta x}, \quad si \quad x \geq 0 \\ 0 \ , \ sinon. \end{cases}$$

En effet : On peut verifier que f est densité. On a $f(x)$ est une fonction positive et continue pour $\theta \geq 0$, Et on a

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\theta^2}{1+\theta}\int_0^{+\infty}(1+x)e^{-\theta x}\, dx.$$

D'après un calcul par la méthode d'intégration par parties, On obtient

$$\int_0^{+\infty}(1+x)e^{-\theta x}\, dx = \frac{1+\theta}{\theta^2}.$$

C'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Remarque 2.1. *La fonction de réparation de Lindley est*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1}(e^{-\theta x}), & x > 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$$

2.1.2 Fonction de Hasard et fonction de Survie

Définition 2.2. *On appelle fonction de Hasard de X*

$$S(x) = 1 - F(x) = \frac{\theta + 1 + \theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x},$$

Et la fonction de hasard de la distribution de Lindley est

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta^2 (1 + x)}{\theta + 1 + \theta x}.$$

Remarque 2.2. *Pour étudier le sens de variation de h sur $I = [0, \infty[$, On étudie le signe de sa fonction dérivée. La première dérivée de la fonction de Hasard est*

$$\frac{d}{dx} h(x) = h'(x) = \frac{\theta^2}{\theta + 1 + \theta x};$$

Donc on a la $h'(x) > 0$ pour $x \in [0, \infty[$, Alors la fonction $h(x)$ est une fonction croissante en x. De plus on a

$$\frac{\theta^2}{\theta + 1} < h(x) < 0$$

.

2.1.3 Moments

Proposition 2.1.1. *Le moment d'ordre $k \in N^*$ de la distribution de Lindley paramètre θ, Ou le moment d'ordre k de Lindley, Est*

$$\mu_k = E(X^k) = \frac{k!(\theta + k + 1)}{\theta^k (\theta + 1)}.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^{+\infty} x^k f(x)dx \\
&= \frac{\theta^2}{1+\theta}\int_0^{+\infty}(1+x)x^k e^{-\theta x}dx \\
&= \frac{\theta^2}{1+\theta}\left(\int_0^{+\infty} x^k e^{-\theta x}dx + \int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{-\theta x}\right)dx.
\end{aligned}$$

Par changement de variable $\mu = \theta x$ puis en utilisant la fonction gamma Γ, On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^k e^{-\theta x}dx &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mu}{\theta}\right)^k e^{-\mu}d\mu \\
&= \frac{1}{\theta^k}\int_0^{+\infty}\mu^k e^{-\mu}d\mu \\
&= \frac{1}{\theta^k}\Gamma(k+1) \\
&= \frac{1}{\theta^k}k!
\end{aligned}$$

Le même, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{-\theta x}dx = \frac{1}{\theta^{k+1}}(k+1)!.$$

D'où

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{k!\theta^2}{\theta^k(1+\theta)}\left(1+\frac{k+1}{\theta}\right) \\
&= \frac{k!\theta^2}{\theta^k(1+\theta)}\left(\frac{k+1+\theta}{\theta}\right) \\
&= \frac{k!(\theta+k+1)}{\theta^k(\theta+1)}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 2.1.2. *Soit $X \sim Lindley(\theta)$. Alors on a*

$$E(X) = \frac{(\theta+2)}{\theta(\theta+1)}, E(X^2) = \frac{2(\theta+3)}{\theta^2(\theta+1)}$$

$$E(X^3) = \frac{6(\theta+4)}{\theta^3(\theta+1)}, E(X^4) = \frac{24(\theta+5)}{\theta^4(\theta+1)}$$

Le moment centré d'ordre K de la distribution de Lindley est défini par :

$$\begin{aligned}
\mu'_K &= E\left[(X-E(X))^r\right] \\
&= \sum_{r=1}^{K} C_K^r \mu_K(-E(X))^{K-r}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mu_2' = Var(X) = \frac{\theta^2+4\theta+2}{\theta^2(\theta+1)}$$

$$\mu_3' = \frac{2(\theta^3+6\theta^2+6\theta+2)}{\theta^3-(\theta+1)^3}$$

$$\mu_4' = \frac{3(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8)}{\theta^4(\theta+1)^4}$$

Le coefficient de variation (γ), *Le coefficient de dissymétre* $\sqrt{\beta_1}$ *et le coefficient d'aplatissement* (β_2) *de la distribution de Lindley sont*

$$\gamma = \frac{\sqrt{\theta^2+4\theta+2}}{\theta+2}$$

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2(\theta^3+6\theta^2+6\theta+2)}{(\theta^2+4\theta+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\beta_2 = \frac{3(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8)}{(\theta^2+4\theta+2)^2}$$

2.1.4 Fonction Caractéristique

Définition 2.3.

Proposition 2.1.3. *La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle* $X \sim Lindely(\theta)$ *est donnée par :*

$$\varphi(t) = \frac{\theta^2(\theta-it+1)}{(1+\theta)(\theta-it)^2} \qquad ou \quad i^2=-1$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = E(e^{itx}) &= \int_0^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \\
&= \frac{\theta^2}{1+\theta}\int_0^{+\infty} e^{itx}e^{-\theta x}dx \\
&= \frac{\theta^2}{1+\theta}\left(\int_0^{+\infty} e^{itx}e^{-\theta x}dx + \int_0^{+\infty} xe^{itx}e^{-\theta x}dx\right) \\
&= \frac{\theta^2}{1+\theta}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-\theta-it)x}dx + \int_0^{+\infty} xe^{-(\theta-it)x}dx\right)
\end{aligned}$$

et on a

$$e^{(-\theta-it)x}dx = \frac{1}{\theta-it}$$

et pour calculer

$$\int_0^{+\infty} xe^{-(\theta-it)x}dx$$

On fait le changement de variable $u = (\theta - it)x$ puis en utilisant la fonction gamma Γ, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-(\theta-it)x}dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{(\theta-it)}\right) e^{-u}du \\
&= \frac{1}{(\theta-it)^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= \frac{1}{(\theta-it)^2}\Gamma(2) \\
&= \frac{1}{(\theta-it)^2}.
\end{aligned}$$

2.2 Distribution Exponentielle

Définition 2.4. *On dit que la (V.A) X suit une loi exponentielle de paramètre* $(\lambda > 0)$*, Et on note* $X \sim exp(\lambda)$*, Si elle satisfait*

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}, pour\ tout\ t \geq 0 \tag{2.1}$$

Sa fonction de répartition est donc

$$F(t) = \begin{cases} 1 - exp(-\lambda t), & si\ \ t \geq 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Et sa densité

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda exp(-\lambda t), & si\ t \geq 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

2.2.1 Fonction Génératrice Des Moments

Définition 2.5.

Proposition 2.2.1. *1- La fonction génératrice des moments d'un (V.A) exponentielle est donnée par :*

$$G_X(t) = E\left[exp(tX)\right] = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, t < \lambda. \tag{2.2}$$

2- Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ*, Alors*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, et\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.3}$$

Preuve

1- On peut calcule facilement la fonction génératrice des moments de la (V.A) $X \sim exp(\lambda)$,

$$\begin{aligned} G_x(t) = E\left[exp(tX)\right] &= \int_0^{+\infty} exp(tx)f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} exp(tx)\lambda exp(-\lambda x)dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} exp\left(-(\lambda - t)x\right)dx \end{aligned}$$

Pour $t \geq \lambda$, La fonction n'est par intégrale en l'infini, Tandis que pour $t < \lambda$, On a

$$G_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

2- Nous notons par la dérivation que, Pour la distribution exponentielle, $G_X(t)$ n'est défini que pour des valeurs de t inférieures à λ

$$G'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, et\ G''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

On obtient,

$$E(X) = G'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, et\ E[X^2] = G''_0 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Alors

$$Var(X) = E[X^2] - (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Lemme 2.1. *Soit X une V.A à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, De fonction de répartition F_X continue. Alors X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si pour t et s deux réels positifs quelconques*

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Preuve

Commençons par supposer que X est une V.A.R. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors pour tout $u \geq 0$, $\mathbb{R}(X > u) = e - \lambda u$. On en déduit

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-(t+s)\lambda}}{e - \lambda t} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

Réciproquement, On suppose maintenant que X est une (V.A). à valeurs $\mathbb{R}_+$, De fonction de répartition F_X continue, Et qui vérifie pour $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Remarque 2.3. *On introduit la fonction de survie de X, G, Qui est définie par $G(u) = \mathbb{P}(X > u) = 1 - F_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, puisque $\mathbb{P}(X > t + s|X > t) = \mathbb{P}(X > t + s)/\mathbb{P}(X > t)$, G vérifie*

$$G(t + s) = G(t)g(s).$$

Pour tout $t, s \geq 0$. Une récurrence immédiate basée sur cette relation permet d'établir que

$$G(n) = g(1)^n.$$

Pour tout entier $n \geq 1$.

Définition 2.6. *Une loi F_X est dite à échelle, Si pour tout $c > 0$, $\mathbb{P}(cX \leq x)$ appartient à la mâme famille que F_X.*

Définition 2.7. *Soit X une varia ble de loi de densité f et de fonction de répartition F Son risque est $h(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$. Si h est décroissante, Dit alors que les queues (ailes) de la loi X sont épaisses et si h est croissante alors les queues de X sont légères. Les figures ci-dessous ;*

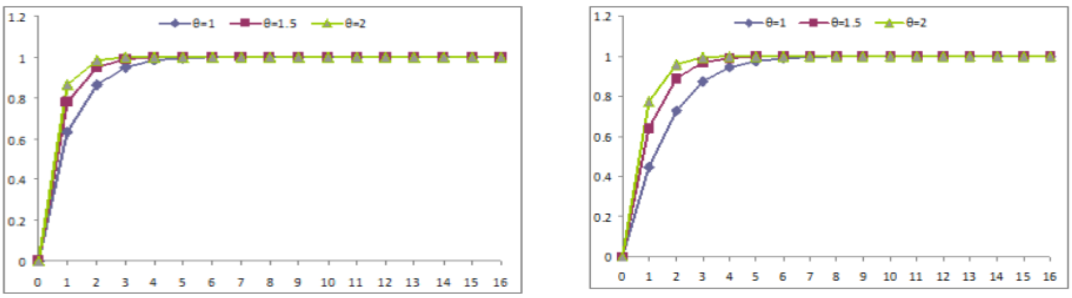

FIGURE 2.1 – La fonction de répartition d'un loi exponentielle et Lindley

2.3 Applications

La distribution exponentielle et de Lindley ont été ajustée un certain nombre d'ensembles de données de durée de vie réelle. Des tests d'ajustement pour quinze ensembles de données de durée de vie réelle ont éyé présentés ici. Afin de comparer les distributions exponentielles et Lindley, Il paut chercher $-2lnL$, AIC (Akaike information critère) AICC (Akaike information critère corrigé)

BLC(Bayésien information critère) K-S statistique (Kolmogorov-Smirnov statistique) pour les six ensembles de données de durée de vie àréelle ont àété calcués les formules pour calculert ALC les ststistiques ALCC, BIC et K-S sont les suivantes :

$$AIC = -2lnL + 2K, AICC = AIC + \frac{2K(K+1)}{5n-K-1}$$

$$BIC = -2lnL + KlnL, etD = sup|F_n(x) - F_0(x)|.$$

Ou k le npmbre de paramétres n est la taille de l'échantillon et $F_n(x)$ est la fonction de distribution empirique. Les ajustements des distribution exponentielles et de lindley sont basés sur des estimations du maximum de vraisemblance(MLF).

Soi $t_1, t_2, \ldots, t_n$ un échantillon aléatoire de taille n à partir d'une distribution exponentielle.

La fonction logarithmique L de vraisemblance $\ln L$ de distribution exponentielle étant donnée.

$L = \theta^n e^{-n\theta\bar{t}}$, Et donnée $\ln = n \ln \theta - n\theta\bar{t}$ le MLE $\hat{\theta}$ du paramètre θ de distribution exponentielle est la résolution de l'équation $\dfrac{d \ln L}{d\theta} = 0$

Soit $t_1, t_2, \ldots, t_n$ un échantillon aléatoire de taille n de la distribution de lindley la fonction vraisemblance L et la fonction de $\ln L$de vraisemblance dans de L de la distribution de lindley sont donnée par

$$L = \left(\frac{\theta^2}{\theta+1}\right)^n \prod (1+t_i)e^{-n\theta t},$$

et

$$\ln L = n \ln \left(\frac{\theta^2}{\theta+1}\right) + \sum \ln(1 + t_i - n\theta t).$$

Le (MLE) θ du paramétré $\hat{\theta}$ de la distribution de lindley est la solution de l'équation $\dfrac{d \ln L}{d\theta} = 0.$

Enesmble de données 1

5.1	1.2	1.3	0.6	0.5	2.4	0.5	1.1	8	0.8	0.4	0.6
0.9	0.4	2	0.5	5.3	3.2	2.7	2.9	2.5	2.3	1	0.2
0.1	0.1	1.8	0.9	2	4	6.8	1.2	0.4	0.2		

Enesmble de données 2

Cet ensemble de donnée Ce jeu de données représent les temp d'attennte (en minutes) avant de service de 100 client bancaires et examinées analysé par Ghitany pour ajuster la distribution de Lindley :

0.8	0.8	1.3	1.5	1.8	1.9	1.9	2.1	2.6	2.7	2.9	3.1	3.2
3.3	3.5	3.6	4.0	4.1	4.2	4.2	4.3	4.3	4.4	4.4	4.6	4.7
4.7	4.8	4.9	4.9	5	5.3	5.5	5.7	5.7	6.1	6.2	6.2	6.2
6.3	6.7	6.9	7.1	7.1	7.1	7.1	7.4	7.6	7.7	8	8.2	8.6
8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6	9.7	9.8	10.7	10.9	11
11	11.1	11.2	11.2	11.5	11.9	12.4	12.5	12.9	13	13.1	13.3	13.6
13.7	13.9	14.1	15.4	15.4	17.3	17.3	18.1	18.2	18.4	18.9	19	19.9
20.6	21.3	21.4	21.9	23.0	27	31.6	33.1	38.5				

Enesmble de données 3

Ces données sont pour les périodes entre les pannes successives de l'équipement de climatisation dans un avion Boing 720 :

74	57	48	29	502	12	70	21	29	386	59	27	153	26	326

Enesmble de données 4

Ces données représentent les donnée de la durée de vie relatives aux temps de soulagement (en minutes) de 20 patients recevant un analgésique :

1,1	1,4	1,3	1,7	1,9	1,8	1,6	2,2	1,7	2,7
4,1	1,8	1,5	1,2	1,4	3	1,7	2,3	1,6	2

Enesmble de données

donnée	Model	parameter estimat	$-2\ln L$	AIC	AICC	BIC	K-S statistique
donnéz 1	Lindley	0,823821	112,61	114,61	114,73	116,13	0,133
	exponentielles	0,532081	110,91	112,91	113,03	114,43	0,089
donnée 2	Lindley	0,186571	638,07	640,07	640,12	642,68	0,058
	exponentielles	0,101245	658,04	660,04	660,08	662,65	0,163
donnée 3	Lindley	0,01636	181,34	183,34	183,65	184,05	0,386
	exponentielles	0,008246	173,94	175,94	176,25	176,65	0,277
donnée 4	Lindley	0,816118	60,5	62,5	62,72	63,49	0,341
	exponentielles	0,526316	65,67	67,67	67,9	68,67	0,389

Remarque 2.4. *Dans certains cas exponentielle est meilleur, les données de 1 et 3 : Exponentielle est le meilleur, les données de 2 et 4 : Lindley est le meilleur.*

CHAPITRE 3

DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉ

Le modèle exponentiel généralisé à deux paramètres α et λ a été proposé et étudié par Gupta et Kundu (2001).

3.1 Définitions et propriétés

Dans cette partie, nous présentons les définitions et quelques propriétés du modèle exponentielle généralisée, ainsi que quelques interprétations probabilistes de ce modèle.

3.1.1 Fonction De Répartition

On dit que F est une fonction de répartition de la variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle généralisée de paramètres $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $EG(\alpha, \lambda)$, Si F est donnée par :

$$F(x, \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}; \quad \alpha, \lambda, x > 0$$

Avec α est le paramètre de forme et λ est le paramètre d'échelle.
On remarque que si $\alpha = 1$, La distribution exponentielle généralisée coïncide avec la loi exponentielle de paramètre λ.

3.1.2 Fonction De Densité

Une variable aléatoire continue X suit une loi de exponentielle généralisée $EG(\alpha, \lambda)$, Si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f(x, \alpha, \lambda) = \frac{dF(c)}{dx} = \alpha\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x} : \quad \alpha, \lambda, x > 0$$

Proposition 1. La densité de la distribution exponentielle généralisée est log-convexe si $\alpha < 1$ et log-conceve si $\alpha > 1$.

Preuve 1.

Il suffit de calculer la deuxième dérivée du logarithme de la fonction de densité.

On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} log f(x, \alpha, \lambda) = -(\alpha - 1)\frac{e^{-\lambda x}}{(1 - e^{-\lambda x})^2} \tag{3.1}$$

Donc $\frac{\partial^2}{\partial x^2} log f(x, \alpha, \lambda)$ est log-convexe pour $\alpha < 1$ et log-concave pour $\alpha > 1$.

FIGURE 1 : Densité de probabilité de loi exponentielle généralisée $EG(1, 1), EG(3, 1)$ et $EG(5, 1)$

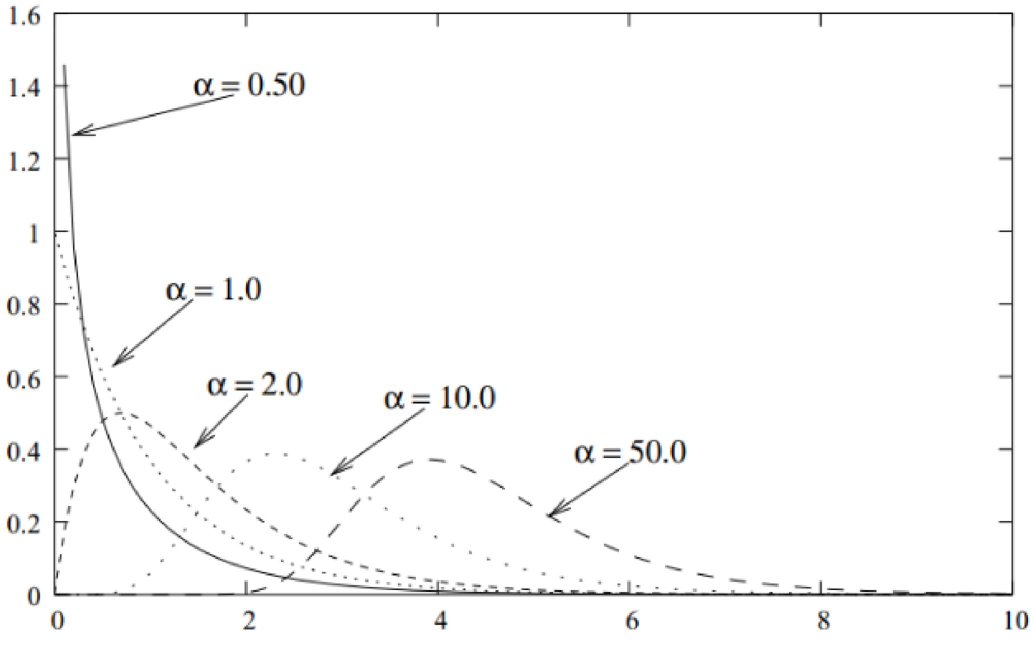

FIGURE 3.1 – Puisque λ est le paramètre d'échelle, nous prenons $\lambda = 1$

Nous donnons quelques cas particuliers et quelques propriétés :

1. Si $\alpha = 1$, On a $EG(1, \lambda)$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ de densité de probabilité donnée par :
$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad \lambda, x > 0$$
2. Si $\lambda = 1$, On a $EG(\alpha, 1) = EG(\alpha)$ de densité de probabilité donnée par :
$$f(x, \alpha) = \alpha(1 - e^{-x})^{\alpha-1} e^{-x}; \quad \alpha, x > 0$$
3. Si $X \sim EG(\alpha)$, alors $\lambda X \sim EG(\alpha, \lambda)$.
4. Si$X_i \sim EG(\alpha_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors la densité de probabilité de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par :
$$f_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j f(x, \alpha^* + j)$$

où $f(x, \alpha^* + j)$ est la densité de la loi $EG(\alpha^* + j)$ avec
$$\alpha^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
$$C_j = \frac{C_0 \alpha^*}{(\alpha^* + j)} C_j^{(n)} \qquad j = 1, \ldots$$

avec
$$C_0 = \frac{\prod_{i=1}^{n} \gamma(\alpha_j + 1)}{\gamma(\alpha^* + 1)}$$
$$C_j^{(k)} = \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})_j}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)_j} \sum_{i=0}^{j} \frac{(\alpha_k)_i}{i!} C_{j-i}^{(k-1)} \quad pour \quad k = 3, \ldots, n$$

et
$$C_j^{(2)} = \frac{(\alpha_1)_j (\alpha_2)_j}{j! (\alpha_1 + \alpha_2)_j}$$

Ici
$$(\alpha)_j = \Gamma(\alpha + j) / \Gamma(\alpha)$$

Puisque $C_j > 0$ et
$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j = 1$$

alors la loi de

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est un mélange de lois EG.

3.1.3 Fonction de Survie

Soit X une variable aléatoire continué de loi exponentielle généralisée de fonction de répartition F et de densité de probabilité f. Sa fonction de survie qui est la probabilité de survie au-delà de x est définie par :

$$S(x, \alpha, \lambda) = Pr(X > x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}; \quad \alpha, \lambda, x > 0.$$

La fonction de survie est une fonction décroissante telle que $S(0) = 1$ et $\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$.

3.1.4 Foction hasard

La fonction de hasard est définie comme la probabilité conditionnelle que le phénomène se termine après une durée x sachant que l'on a atteint cette durée (taux de panne, taux de défaillance, taux de décès ou risque instantané). En utilisant le théorème des probabilités conditionnelles et le modèle exponentielle généralisée $EG(\alpha, \lambda)$, la fonction hasard h est donnée par :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\alpha\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

FIGURE 2 : Fonction de hasard de loi exponentielle généralisée $EG(1, 1), EG(3, 1)$ et $EG(5, 1)$.

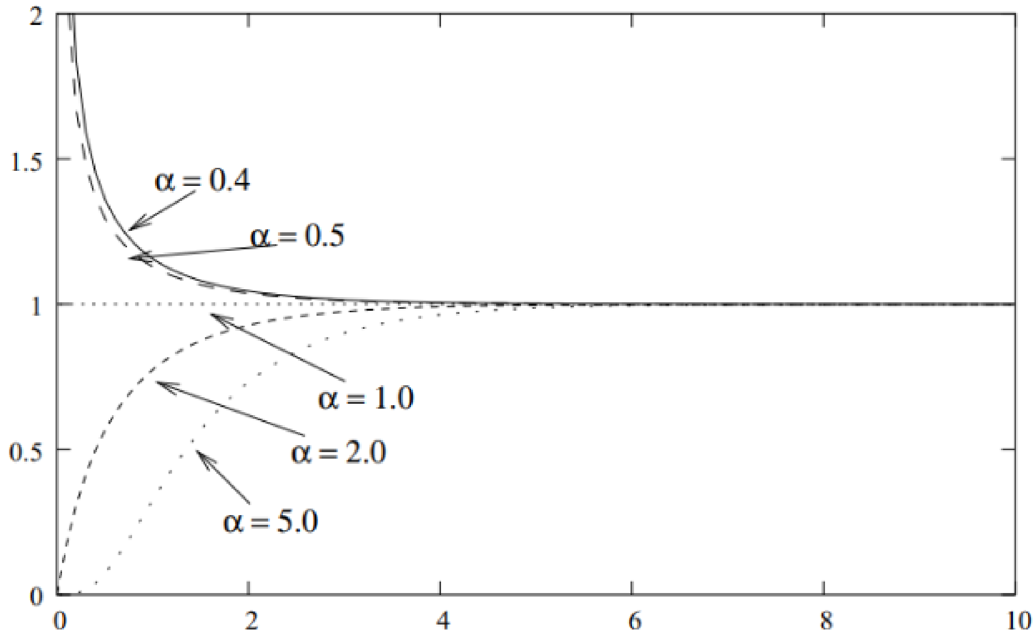

FIGURE 3.2 – Puisque λ est le paramètre d'échelle, nous prenons $\lambda = 1$

Pour la distribution exponentielle généralisée $EG(\alpha, \lambda)$, la fonction hasard qui joue un rôle important est croissante si $\alpha < 1$, décroissante si $x > 1$ et constante si $\alpha = 1$. Il est interessant aussi d'étuder les similitudes de la denité et les fonctions de distributions de la famille exponentielle généralisée avec les familles Gamma et Weibull. Par exemple, l'étude du comportement de la fonction hasard des trois distributions se résume dans le tableau 1.1.

TABLE 1.1 : Comportement de la fonction hasard des modèles exponentiel généralisé, Gamma et Weibull.

paramètre	EG	Gamma
$\alpha = 1$	λ	λ
$\alpha > 1$	croît de 0 à λ	croît de 0 à λ
$\alpha < 1$	décroît de ∞ à λ	décroît de ∞ à λ

avec la densité de la distribution Gamma :

$$f_G(x, \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad \alpha, \lambda, x > 0$$

La fonction hasard de la distribution exponentielle généralisée se comporte comme la fonction hasard de la distribution Gamma.

3.1.5 Moments d'ordre k

Considérons maintenant les différents moments de la distribution exponentielle généralisé. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $EG(\alpha, \lambda)$. Le moment d'ordre k est donné par :

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k f(x) ds \\ &= \alpha\lambda \int_0^\infty x^k (1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

En utilisant la représentation de la série de $(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}$ on a :

$$(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha-1}^i e^{-i\lambda x}$$

comme $C_{\alpha-1}^i = \frac{(\alpha-1)...(\alpha-i)}{i!}$, alors on obtient

$$E(X^k) = \frac{\alpha\Gamma(k+1)}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha-1}^i \frac{1}{(i+1)^{k+1}}.$$

Donc $\forall k \geq 0$ la série est convergente implique que tous les moments d'ordre k existent.

1. pour $k = 1$, on obtient l'espérance de X :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha-1}^i \frac{1}{(i+1)^2}.$$

2. pour $k = 2$, on obtient le moment d'ordre 2 de X :

$$E(X^2) = \frac{2\alpha}{\lambda^2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{\alpha-1}^i \frac{1}{(i+1)^3}.$$

3.1.6 Fonction génératrice des moments

On appelle fonction génératrice des moment de X qui suit la loi $EG(\alpha, \lambda)$, la fonction $M(t)$ définie par :

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^\infty e^{tX} f(x) dx \\ &= \alpha\lambda \int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{(t-\lambda)x} dx. \quad 0 < t < \lambda \end{aligned}$$

On pose $y = e^{-\lambda x}$ on obtient :

$$\begin{aligned} M(t) &= \alpha \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{i\frac{t}{\lambda}} dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\lambda(1-\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\alpha+1-\frac{t}{\lambda})} \end{aligned}$$

On sait que :

$$E[X^k] = \frac{\partial^k M(0)}{\partial t^k},$$

donc, pour calculer l'espérance de X, il suffit de calculer la premiére dérivée de $M(t)$ au point $t = 0$.

On pose $t = 0$, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\partial M(0)}{\partial t} \\ &= \frac{\Gamma'(\alpha+1)\Gamma(1)6\Gamma'(1)\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(1)\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1) - \psi(1) \end{aligned}$$

avec $\psi(a) = \dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ est la fonction digamma (voir Abramowitz and Stegun [1972] et Amos [1983]).

3.1.7 Estimateurs du maximum de vraisemblance

Soit $x_1, \ldots, x_n$un n observations d'un n-échantillon issu d'une variable X aléatoire de la loi $EG(\theta, \lambda)$. Alors la fonction de vraisemblance notée par $L(x, \alpha, \lambda)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} L(x, \alpha, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \alpha\lambda(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La méthode de maximum de vraisemlance consiste à choisir comme estimateur $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ qui réalise un maximum de la vraisemblance, c'est-à-dire :

$$L(x, \hat{\theta}) \geq L(x, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

La recherche du MV peut se faire en résolvant l'équation :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{3.4}$$

qui vérifie $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$. Cependant, dans la pratique, on préfère remplacer ce problème (produit) par le problème équivalent pour la log-vraisemblance :

$$\frac{\partial logL}{\partial \theta} = 0 \tag{3.5}$$

avec $\frac{\partial^2 logL}{\partial \theta^2} < 0$. En utilisant l'expression (2.1) et l'équation (2.2), on obtient les équations non-linéaires suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial logL(x,\alpha,\lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} log(1 - e^{-\lambda x_i}) = 0. \\ \frac{\partial logL(x,\alpha,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \end{cases}$$

Notons que la résolution de ce système est relativement difficile et n'admet pas des solutions explicites. Dans ce travail, nous utilisons la fonction **mle** du logiciel statistique **R**.
En introduisant les valeurs initiales α^0 et λ^0 , la fonction **mle** permet de retourner les estimateurs de α et λ , en calculant le maximum de la log-vraisemblance de mainière itérative.

3.2 Analyse des données et discussion

Dans cette section, nous présentons l'analyse d'un ensemble de données réelles à l'aide du modèle $E(\lambda)$ et $EG(\lambda, \alpha)$ le comparons à d'autres modèles, comme la distribution généralisé Gompretz $GD(a, c)$, distribution exponentielle $ED(a)$, distribution exponentiel généralisé de Gompetz $GED(a, \theta)$. Les données qui ont été obtenues à partir de [5] qui comme suit pour les donnée de vies de 50 dispositifs.

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6
7	11	12	18	18	18	18	18	21	32
36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83
84	84	84	85	85	85	85	85	86	86

Le modèle $E(\lambda)$ est utilisé pour ajuster cet ensemble de donnée. Le MLEs du (des) paramétre(s) inconnu (s), la valeur de log-vraisemblance (L), Kolmogorov-Smirnov $(K - S)$, les critères d'informations (AIC), critère d'information corrigé (AIC_c) et le critère dinformation bayésien (BIC) et ses $P - valeurs$ respectives pour seot modèles différents sont donnés dans dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Le MLE (s) du paramétre(s), du L, de $l'AIC$**, du** AIC_C**,du** BIC**, des valeurs de**$K - s$ **et des** $P - valeurs$

Le Mdèle	MLE(s)	$K - s$	$-L$	AIC	AIC_C	BIC	$P - valeurs$
$ED(a)$	$\hat{a} = 0.022$	0.191	241.09	484.18	484.16	486.09	0.045
Le$GED(a, \theta)$	$\hat{a} = 0.021$ $\hat{\theta} = 0902$	0.194	240.36	484.72	484.96	488.54	0.0402

Le tableau 2 montre que la distribution sont les plus adaptés (bon ajustements) à cette situation. Mais, nous voyons que le modèle $d'ED(a)$ est le meilleur parmi ces distributions car il la plus petite valeur de test $K - s$,d'AIC ,d'AIC_C etBIC. La distribution exponentielle est meilleur.

CHAPITRE 4

DISTRIBUTION EXPONENTIEL TRANSMUTÉE

Dans ce chapitre, On traite la distribution exponentielle transmutée, Les propriétés ststistiques et on termine par une application.

4.1 Introduction

Dans de nombreuses sciences appliquées telles que la médecine, L'ingénierie et la finance, la modélisation et l'analyse des données de durée de vie sont cruciales. Plusieurs distributions de durée de vie ont été utilisées pour modéliser ces types de données. La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement de la modèle de probabilité ou distribution. En raison de cet effort considérable a été consacré au dévelopement de grandes classes de distribution de probabilièté standard ainsi que de méthodologies statistiques pertinentes.

Cependant, il reste encore de nombreux problèmes importants ou les données réelles ne suivent aucune des probabilités classiques ou standard des modèles.

Dans ce chapitre nous présentons une nouvelle généralisation de la distribution exponentielle appelée distribution exponentielle tranmutée.

Définition 4.1. *On dit que la variable aléatoire X suit une distribution transmutée si sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F(x) = (1+\lambda)G(X) - \lambda G^2(x), \qquad |\lambda| \leq 1 \tag{4.1}$$

Ou $G(x)$ est la fonction de répartition la distribution de base donnée.

$$f(x) = g(x)\left[1 + \lambda - 2\lambda G(x)\right], \quad |\lambda| \leq 1 \tag{4.2}$$

Où $g(x)$ la densité de la distribution de base donnée.

Remarque 4.1. *Si $\lambda = 0$, (4.1) et (4.2) réduitent à la distribution de base .*

Si $\lambda = 1$, les equations (4.1) et (4.2) deviennent :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{1}{\theta})}\left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{1}{\theta})}\right] \tag{4.3}$$

$$F(x) = \left[1 - e^{-(\frac{1}{\theta})}\right]\left[1 + \lambda e^{-(\frac{1}{\theta})}\right] \tag{4.4}$$

θ : dit paramètre d'chelle.

λ : paramètre transmutée.

Cas particulier :

Si $\lambda = 0$, équation (4.1) réduit à la distribution exponentielle

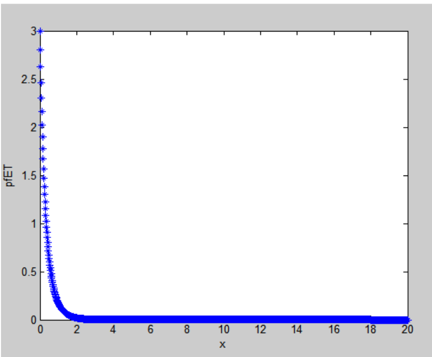

FIGURE 4.1 – Trace pour la fonction de densité de probabilité de la distribution ET à $(\theta = 0.5, \lambda = 0.5)$

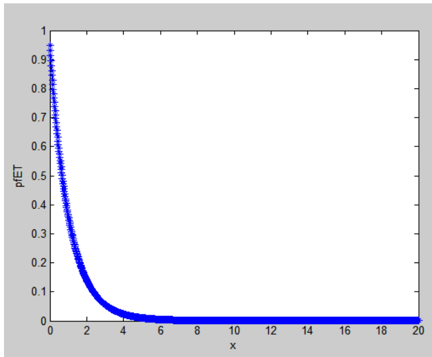

FIGURE 4.2 – Trace pour la fonction de densité de probabilité de la distribution ET à $(\theta = 2, \lambda = 0.9)$

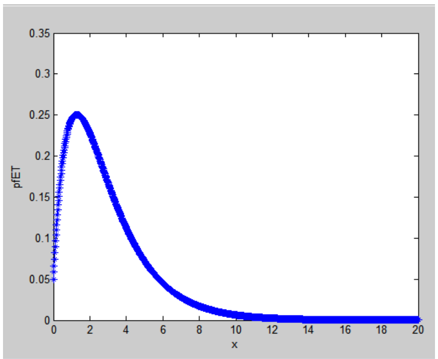

FIGURE 4.3 – Trace pour la fonction de densité de probabilité de la distribution ET à $(\theta = 2, \lambda = -0.9)$

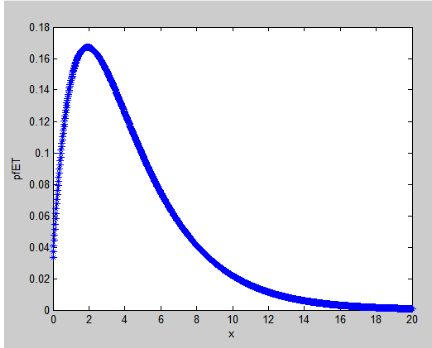

FIGURE 4.4 – Trace pour la fonction de densité de probabilité de la distribution ET à $(\theta = 3, \lambda = -0.9)$

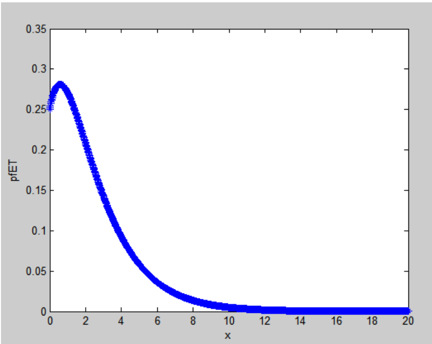

FIGURE 4.5 – Trace pour la fonction de densité de probabilité de la distribution ET à $(\theta = 2, \lambda = -0.5)$

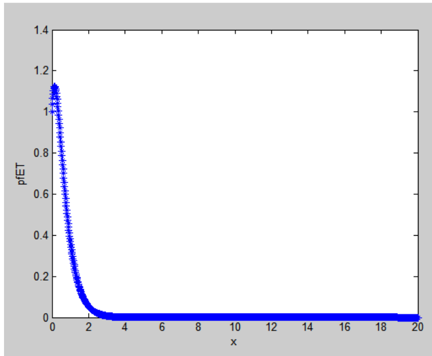

FIGURE 4.6 – Trace pour la fonction de densité de probabilité de la distribution ET à $(\theta = 0.5, \lambda = -0.5)$

Moments de la distributin exponentielle transmutée

Soit X une variable aléatoire à densité f et $(r \geq 1)$.

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$

par conséquent le rième moment de la variable exponentiel transmutée est :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{x}{\theta})} [1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{x}{\theta})}] dx \tag{4.5}$$

et pour $\lambda = 1$

$$E(X^r) = \theta^r \Gamma(1 + r)[1 - \lambda + \lambda 2^{-r}] \tag{4.6}$$

et

$$E(X^r) = \theta^r r! [1 - \lambda + \lambda 2^{-r}] \tag{4.7}$$

pour $r = 1$, on obtient

$$E(X) = \theta \left(\frac{2 - \lambda}{2} \right) \tag{4.8}$$

le tableau (1) donne les valeurs de $E(x)$ de la distribution exponentielle transmutée par les valeur de (θ et λ).

Fonction quantile et médiane :

	$\lambda = -0.1$	$\lambda = -0.4$	$\lambda = -0.7$	$\lambda = -1.0$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.7$	$\lambda = 1.0$
$\theta = 1$	1.05	1.20	1.35	1.50	1.00	0.95	0.80	0.65	0.50
$\theta = 2$	2.10	2.40	2.70	3.00	2.00	1.90	1.60	1.30	1.00
$\theta = 3$	3.15	3.60	4.05	4.50	3.00	2.85	2.40	1.95	1.50
$\theta = 4$	4.20	4.80	5.40	6.00	4.00	3.80	3.20	2.60	2.00
$\theta = 5$	5.25	6.00	6.75	7.50	5.00	4.75	4.00	3.25	2.50
$\theta = 6$	6.30	7.20	8.10	9.00	6.00	5.70	4.80	3.90	3.00
$\theta = 7$	7.35	8.40	9.45	10.50	7.00	6.65	5.60	4.55	3.50
$\theta = 8$	8.40	9.60	10.80	12.00	8.00	7.60	6.40	5.20	4.00
$\theta = 9$	9.45	10.80	12.15	13.50	9.00	8.55	7.20	5.85	4.50
$\theta = 10$	10.50	12.00	13.50	15.00	10.00	9.50	8.00	6.50	5.00

La fonction quantile de la distribution exponenentielle transmutée est donnée par :

$$x_q = \theta \left[-\ln \left\{ 1 - \left(\frac{1 + \lambda - \sqrt{(1+\lambda)^2 - 4\lambda q}}{2\lambda} \right) \right\} \right] \tag{4.9}$$

quand $q = 0.5$ la médiane est

$$x_{0.5} = \theta \left[-\ln \left(\frac{\lambda - 1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda} \right) \right] \tag{4.10}$$

4.2 Analyse de fiabilité

La fonction de fiabilité $S(x)$, est donnée par :

$$S(x) = 1 - F(x) \tag{4.11}$$

La fonction de fiabilité d'une distribution exponentielle transmutée est donnée par :

$$S(x) = \lambda e^{-2(\frac{x}{\theta})} - (\lambda - 1)e^{-(\frac{x}{\theta})} - (\lambda - 1)e^{-(\frac{x}{\theta})} \tag{4.12}$$

La fonction de danger est mathématiquement donnée par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{4.13}$$

Définition 4.2. *la fonction de taux de risque pour une variable aléatoire de exponentielle transmutée est donnée par :*

$$h(x) = \frac{\frac{1}{\theta}\left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)}\right]}{\left[\lambda e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)} + 1 - \lambda\right]} \tag{4.14}$$

Quelques gragiques possibles pour le taux de défaillance de la distribution ET à certaines de paramètre séléctionnées sont représentées sur les figures 7, 8, 9et10

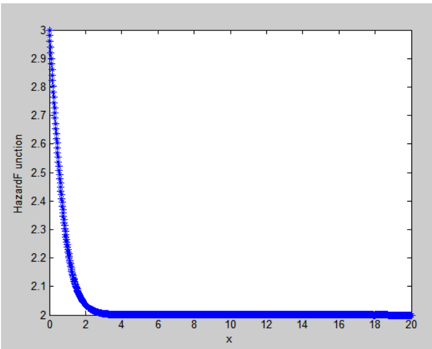

FIGURE 4.7 – Trace de la fonction de Hazard de la distribution ET à $(\theta = 0.5, \lambda = 0.5)$

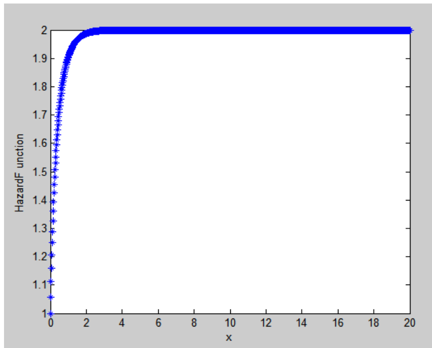

FIGURE 4.8 – Trace de la fonction de Hazard de la distribution ET à $(\theta = 0.5, \lambda = -0.5)$

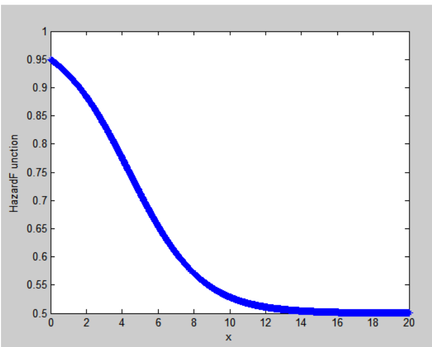

FIGURE 4.9 – Trace de la fonction de Hazard de la distribution ET à $(\theta = 2, \lambda = 0.9)$

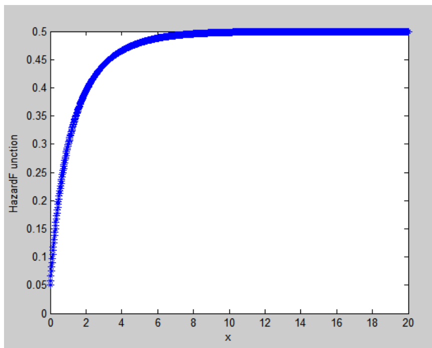

FIGURE 4.10 – Trace de la fonction de Hazard de la distribution ET à $(\theta = 2, \lambda = -0.9)$

4.3 Estimation et inférence des paramètres

Nous utilisonsè la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (MLE) pour estimer la paramètres de la distribution de la distribution ET. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon de taille 'n'de la distribution ET, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta, \lambda) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta})} \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{x_i}{\theta})}\right]$$

soit $l = \log L$:

$$l = n \log\left(\frac{1}{\theta}\right) - \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta}) + \sum_{i=1}^{n} \log\left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{x_i}{\theta})}\right]$$

Donc :

$$l = -n \log\theta - \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta}) + \sum_{i=1}^{n} \log\left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{x_i}{\theta})}\right]$$

Diddérencier l par rapport à θ et λ donne respectivement :

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - (\frac{x_i}{\theta})\right] + \frac{2\lambda}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{x_i}{\theta})e^{-(\frac{x_i}{\theta})}}{\left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{x_i}{\theta})}\right]} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2e^{-(\frac{x_i}{\theta})} - 1}{\left[1 - \lambda + 2\lambda e^{-(\frac{x_i}{\theta})}\right]} \tag{4.16}$$

Assimiler les équations (18) et (19) à zéro et résoudre le système d'équations non linéaire résultant donne les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres θ et λ .

4.4 Application

Les modèles à comparer dans cette section comprennent la distribution de student, la distribution exponentielle bêta, la distribution exponentielle généralisée et la distribution exponentielle exponentiée.

Ensemble de données : Le premier ensemble de données représente la durée de vie de la fracture par fatigue de Kevlar 373/époxy soumis à une pression constante à un niveau de contrainte de 90% jusqu'à ce que tous aient échoué. Les données ont été extraites de (Abdul-Moniem et Seham, 2015) et ont été utilisées précédemment par Bralow et al. (1984). Les données sont les suivantes :

0.0251, 0.0886, 0.0891, 0.2501, 0.3113, 0.3451, 0.4763, 0.5650, 0.5671, 0.6566, 0.6748, 0.6751, 0.6753, 0.7696, 0.8375, 0.8391, 0.8425, 0.8645, 0.8851, 0.9113, 0.9120, 0.9836, 1.0483, 1.0596, 1.0773, 1.1733, 1.2570, 1.2766, 1.2985, 1.3211, 1.3503, 1.3551, 1.4595, 1.4880, 1.5728, 1.5733, 1.7083, 1.7263, 1.7460, 1.7630, 1.7746, 1.8275, 1.8375, 1.8503, 1.8808, 1.8878, 1.8881, 1.9316, 1.9558, 2.0048, 2.0408, 2.0903, 2.1093, 2.1330, 2.2100, 2.2460, 2.2878, 2.3203, 2.3470, 2.3513, 2.4951, 2.5260, 2.9911, 3.0256 3.2678, 3.4045, 3.4846, 3.7433, 3.7455, 3.9143, 4.8073, 5.4005, 5.4435, 5.5295, 6.5541, 9.0960.

Le résumé des données est fourni dans le tableau 2

Tableau 2 résumé des données sur la rupture par fatigue du Kevlar 373/**époxyà un niveau de contrainte de** 90% **(à quatre décimales)**

Min	Q_1	Q_2	Q_3	Mean	Max	Variance	Skewness	Kurtosis
0.0251	0.9048	1.7360	2.2960	1.9590	9.0960	2.4774	1.9406	8.1608

Les performances de la distribution exponentielle transmuée par rapport aux distributions exponentielle bêta, exponentielle généralisée et exponentielle exponentiée, en utilisant les données sur la fracture par fatigue, sont présentées dans le tableau 3.

Le deuxième **Tableau 3 Classement des performances des modèles sélectionnés**

Distributions	Estimates	Log-likelihood	AIC
Exponentielle transmutée (θ, λ)	$\hat{\theta} = 1.3763, \hat{\lambda} = -0.8487$	-121.5166	247.0331
Exponentielle généralisée (a, θ)	$\hat{a} = 1.70949, \hat{\theta} = 0.70279$	-122.2436	248.4872

Ensemble de données II. Le deuxième ensemble de donnéed représente les recettes fiscales réelles mensuelles (en milliers de millions de livres éguptiennes) en égypte entre janvier 2006 et novembre 2010. Les données ont été extraites de Nassar et Nada (2011). Les données sont les suivantes :[insére les données ici].

5.9, 20.4, 14.9, 16.2, 17.2, 7.8, 6.1, 9.2, 10.2, 9.6, 13.3, 8.5, 21.6, 18.5, 5.1, 6.7, 17, 8.6, 9.7, 39.2, 35.7, 15.7, 9.7, 10, 4.1, 36, 8.5, 8, 9.2, 26.2, 21.9, 16.7, 21.3, 35.4, 14.3, 8.5, 10.6, 19.1, 20.5, 7.1, 7.7, 18.1, 16.5, 11.9, 8.6, 12.5, 10.3, 11.2, 6.1, 8.4, 11, 11.6, 11.9, 5.2, 6.8, 8.9, 7.1, 10.8.

Le résumé des données est fourni dans le tableau 4

Tableau 4 Résumé des données sur les recettes fiscales (à deux décimales)

Min	Q_1	Q_2	Q_3	Mean	Max	Variance	Skewness	Kurtosis
4.10	8.45	10.60	16.85	13.49	39.20	64.83	1.57	5.26

La performance de la distribution exponentielle transmutée par rapport à la distribution exponentielle bêta, à la distribution exponentielle généralisée et à la distribution exponentielle exponentielle est indiquée dans le tableau 5.

Tableau 5 classement des performance des modèles sélectionnés

Distributions	Estimates	Log-likelihood	AIC
Exponentielle transmutée (θ, λ)	$\theta = 3.862 \times 10^5, \lambda = 9.389 \times 10^{-4}$	-83.44494	170.8899
Exponentielle généralisée (a, θ)	$a = 5.53040, \theta = 0.17867$	-191.2235	386.4471

4.5 Discussion

Le modéle correspondant au critère d'information d'Akaike (CIA) le plus bas ou à la valeur de Log-vraisemblance la plus élevée est considéré comme le $\ll$ *meilleur* $\gg$ modèle. Dans ce cas, la distribution ET a la valeur AIC la plus basse avec 247.0331 et 170.8899 respectivement. En outre, il a la valeur la plus élevée de Log-vraisemblance de -121.5166 et -83.44494 respectivement. Par considéré comme un meilleur modèle pour les données utilisées.

CONCLUSION

Les probabilités et les distributons sont des méthodes utilisées en analyse statistique dont la qualité est fortement liée aux phénoménes statistiquees. à partir de cette plate-forme, la catégorie générale des distributions en probabilités classiques à été dévéloppée sur la base de la méthodologie statistique générale. Cependant, malgré cela, il reste encore de nombreux problèmes importants qui ne peuvent pas être résolus par les méthodes classiques ariciennes ou bien connxes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abdul-Moniem IB and Seham M (2015) *Transmuted Gompertz distribution. Comput Appl Math J 1(3) :88–96*

[2] Afify AZ, Nofal ZM and Butt NS(2014) *Transmuted complementary Weibull geometric distribution. Pak J Stat Operation Res 10(4) :435–454*

[3] Ahmad A, Ahmad SP and Ahmed A (2015) *On new method of estimation of parameters of transmuted size-biased exponential distribution and its structural properties. Int J Innov Res Stud 4(3) :1–12*

[4] Akaike,H. *New Look at the Statistical Model Identification I.E.E.E.Transactions on Automatic control, AC (1974) 19, 716-723.*

[5] Alexander C, Cordeiro GM, Ortega EMM and Sarabia JM(2012) *Generalized beta-generated distributions. Comput Stat Data Anal 56 :1880–1897.*

[6] Aryal GR and Tsokos CP(2011) *Transmuted Weibull distribution : a genaralization of the Weibull probability distribution. Eur J Pure Appl Math 4 :89–102*

[7] Cordeiro GM and de Castro M(2011) *A New family of generalized distributions. J Stat Comput Simul 81 :883–898*

[8] Deniz EG and Ojda EC (2011). *The discrete Lindley distribution -Properties and Applications.Journal of Statistical Computation and Simulation 81(11) : 1405-1416.*

[9] Eugene N, Lee C and Famoye F (2002) *Beta-normal distribution and its applications. Commun Stat : Theory Methods 31 :497–512*

[10] Foata, D. Fuchs et A. (1998). *Calcul des probabilités : Cours, exercices et problémes corriés. Seconde édition, Dunod, ARIS.*

[11] Fuller EJ, Friemen S, Quinn J, et al. *Fracture mechanics approch to the design of glass aircraft windows : A cas study. SPIE Proceedings. 1994 : 419-430.*

[12] Gross AJ and Clarkk VA. *Survival Distributions : Reliability Applications in the biopmetrical Sciences, John Wiley, Nork, USA ; 1975.*

[13] Gupta RD (2001) *Exponentiated exponential family ; an alternative to gamma and Weibull. Biometrical J 33 :117–130*

[14] Gupta RD and Kundu D (1999) *Generalized exponential distributions. Aust N Z J Stat 41 :173–188*

[15] Gupta RD and Kundu D (2007) *Generalized exponential distribution : existing methods and recent developments. J Stat Plann Inference 137 :3537–3547*

[16] Lawless and J.F.(2003). *Statistical models and methods for lifetime data.Wiley, New York.*

[17] Lee E.T.And Wang J.W. *Statistical Methods for Survival Data Analysis, 3rd ed ; Wiley, New York, 2003.*

[18] Lindley D.V. *Fiducial distribution and Bayes theorem, Journal of the Royal Statistical Society, Series B 20 (1958) 102107.*

[19] Nadarajah S and Kotz S(2006) *The Beta exponential distribution. Reliability Eng Syst Saf 91(6) :689–697*

[20] Nassar MM and Nada NK (2011) *The beta generalized pareto distribution. J Stat : Adv Theory Appl 6(1/2) :1–17*

[21] Pierre SL. *Probability and politics : Laplace, Condorcet, and Turgot. Proceedings of the American Philosophical Society. 1819 ;116(1) :1-20.*

[22] Risti'c, Miroslav M and Balakrishnan N(2012) *The gamma-exponentiated exponential distribution. J Stat Comput Simulation 82 :1191–1206*

[23] Shaw WT and Buckley IR(2007) *The alchemy of probability distributions : beyond Gram-Charlier expansions and a skewkurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. Research report*

[24] Torabi H and Montazari NH(2012) *The gamma-uniform distribution and its application. Kybernetika 48 :16–30*

[25] Zografos K and Balakrishnan N(2009) *On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. Stat Methodol 6 :344–362*