

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de
Skikda

Faculté des Sciences
Département de
Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955
سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

N^o : U.S/F.S/D.M/ 2021/ 2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude de quelques problèmes à frontières libres

Option : ANEDP

Par :

Sabrina Heouaine

Amani ilhem Taguig

Encadrée par : *A.Hannache* M.C.B U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : *N. Boughayoute* M.C.B U. SKIKDA

Examineur : *Y. Badrani* M.C.B U. SKIKDA

Année universitaire : 2021 – 2022

The background of the page is a repeating pattern of black graduation caps (mortarboards) with gold tassels, interspersed with gold streamers or confetti. The caps are scattered across the white background, creating a celebratory and academic atmosphere.

Remerciement

Tout d'abord ,nous remercions Dieux qui nous a donné le courage et la force pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur Amal Hannache, incessants qui m'ont permis de mener à bout ce travail.

Je la remercie profondément pour sa compréhension, sa patience et sa politesse incomparable.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude aux membres du jury qui ont accepté de lire et juger mon travail.

Nos remerciement vont aussi à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation de licence et master, sans exception. Leur savoir nous on permis de gravir les marches de recherche.

A tous ceux qui m'ont aidée, d'une manière ou d'une autre , près ou de loin.

Merci à tous...

Dédicace

Du profond de cœur je dédie ce modeste travail :

*A l'homme, mon précieux offre du dieux, mon exemple éternel,
ma réussite à mon amour cher père : **Mouhamed**.*

*A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir , qui n'a
épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable
mère : **Samira**.*

*A mon cher frère : **Aymen** aucune dédicace ne peut exprimer
mon amour et ma gratitude de t'avoir comme frère .*

*A mes chères sœurs : **Chahra zed** , **Imane** , **Amani**, **Sara**.*

*A mon fiancé qui ma'soutenu et m'a fourni le courage
nécessaire tout au long l'élaboration de ce travail : **Housseem***

*A mes grands-parents : **ziden** et **fayza** je suis là grace a ces
Prières.*

*A mes grand-parents : **khadija** et **Ahsen** l'amour ne meurt
jamis quand la mort emporte ceux qui nous sent chère .*

*A tout ma famille sans exceptions : **mes oncles**, **mes tantes**.*

*Sans oublier mon binôme **Amani ilhem** pour son soutien
moral sa patience et sa compréhension tout au long de ce
travail*

A tout ceux qu'on aime...

A tout qui nous aime...

Sabrina



Dédicace

Du profond de cœur je dédie ce modeste travail :

*A l'homme, mon précieux offre du dieux, mon exemple éternel,
ma réussite à mon amour cher père : **Moussa**.*

*A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir , qui n'a
épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable
mère : **Nadira**.*

*A mes cheres frères: **Mouhamed Oussama** et **Raid Abd al
hamid**.*

*A mes chères sœurs : **Wissem** , **Ahlem** pour leurs
oncouragement permanents et leur soutien morale.*

*A mon oncle **Abd al hamid** rabi yarhmo et ses enfants c
Chemsou et **khaled**.*

*A mon binôme **sabrina** merci de votre patience et d'avoire pris
la peine de compléter ce mémoire .*

*A tout qui m'ont aidé de prés et de loin et ceux qui ont
partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation
de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et
encouragé tout au long de mon parcours .*

Amani ilhem



الملخص

هذه المذكرة تتطرق لدراسة بعض المسائل الرياضية و الحسابة الحدية.
تتضمن بعض المفاهيم و النظريات الازمة لدراسة بعض مسائل الفيزياء والميكانيك...
الهدف الرئيسي هو استخدام بعض الخوارزميات التحسين و دعم القيود المعاقبة
باستخدام خوارزمية الاسترخاء. .

الكلمات المفتاحية:

MEF ، MDF ، SOR، المعاقبة، قيد، عقبة.

Abstract

This thesis is devoted to the mathematical and algorithmic study of some free boundary problems.

It covers some notions and theories necessary for the study of some problems from physics, mechanic... .

Motivation is the use of some algorithms optimizations, and support for the inequality constraints that are included in some problems.

Keywords : penalty, MEF, MDF, SOR, obstacle constraint.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude mathématique et algorithmique de quelques problèmes à frontière libre.

Il porte sur quelques notions et théorie nécessaire à l'étude de quelques problèmes issus de physique, mécanique... .

La motivation principale est l'utilisation de quelques algorithmes d'optimisations, et la prise en charge des contraintes d'inégalité que l'on rencontre dans quelques problèmes.

La résolution est faite par algorithme de pénalisation combinée à l'algorithme de relaxation.

Mots clés : pénalisation,MEF,MDF,SOR,Contrainte,obstacle.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappel de quelques notions de base	5
1.1 Espace de Hilbert	5
1.2 Quelques Définition sur la forme bilinéaire	6
1.3 Formules de Green	8
1.4 Espace de Sobolev	8
2 problème à frontière libre elliptique	9
2.1 cadre abstrait	10
2.2 Cadre fonctionnel	10
2.2.1 Formulation variationnelle du problème	11
2.2.2 Théorème d'existence et d'unicité	12
2.3 la méthode de pénalisation	12
2.3.1 Pénalisation des problème(2.8) et (2.5)	13
2.3.2 Application	14
2.3.3 problème de la digue en dimension une	14
2.3.4 Algorithm	21
2.3.5 Résultat numérique	22
2.3.6 Problème elliptique de l'obstacle en dimension deux	23
2.3.7 Résultat par la méthode de pénalisation	27
3 Problème d'obstacle d'évolution	29
3.1 problème d'obstacle en dimension une	29

3.1.1	Position du problème	29
3.1.2	Méthode de pénalisation	30
3.1.3	Résultats numérique (problème d'obstacle d'évolution en 1d)	35
3.2	Formulation du problème d'obstacle en dimension deux	36
3.3	Pénalisation	37
3.3.1	pénalisation de l'inéquation variationnelle	37
3.4	Analogie discret du problème	38
3.4.1	Semi-discrétisation en espace	38
3.4.2	discrétisation complète (en temps)	41
4	Conclusion	43

Introduction

Les problèmes qui impliquent le contact entre un solide élastique et un obstacle rigide sont des modèles importants de problème de contact, ce genre de problème s'appelle problème d'obstacle. Ces derniers sont des problèmes à frontière libre.

La formulation mathématique de cette classe de problèmes apparaissent dans plusieurs applications tels que la filtration des fluides dans des milieux poreux, l'élasto plasticité, l'élasticité, finance, mécanique.

La modélisation du phénomène de contact pose des difficultés tout du point de vue mathématique que numérique.

L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé avec le livre de Duvant et Lions dans lequel on trouve la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, ainsi que des résultats d'existence et d'unicité mais dans le cas linéaire, d'autres ouvrages incontournables sont les livres de Panagiotopoulos, Kikuchi et Oden, Hlavacek, Haslinger, Necas et Lovisek, dans les deux derniers l'analyse numérique de quelques problèmes de contact étant présente, ce type de problèmes est modélisé par un système d'inéquations (IV) ou équations. En 1964 Stampacchia a présenté une théorie des IV .

Bien qu'il y ait des résultats d'unicité de la solution, il est difficile de trouver la solution analytique dans le cas générale, c'est pour cela que les méthodes numériques prennent leur importance dans les applications.

La résolution de ces problèmes en générale sont les schémas "élément écart", l'approche de programmation de pénalisation et de formulation de multiplicateur de Lagrange.

Ces problèmes sont caractérisés par l'existence d'une interface a priori inconnue séparant le domaine. Ce mémoire contient trois chapitres, dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions et théorèmes utiles pour la suite de ce travail. Le deuxième chapitre nous

présentons dans un cadre abstrait l'étude d'un problème de contact, nous présentons la formulation variationnelle en (IV), qui est équivalente à un problème d'optimisation, nous appliquons la méthode de Pénalisation et nous discrétisons par la méthode des éléments finis et donnons les résultats d'existence et d'unicité et de convergence du problème discret, nous pénalisons le problème discret et nous résolvons par la méthode itérative SOR. Cette étude est basée sur le travail [2] et [4]. Nous appliquons cette étude sur un problème de la digue en 1d (elliptique et parabolique) et nous utilisons le logiciel matlab(7.12) pour illustrer les résultats. Dans le troisième chapitre nous étudions les problèmes d'obstacle et nous appliquons sur des problèmes en 2d elliptique et parabolique. Nous terminons par une conclusion et perspectives.

Notations

Ω : ouvert de \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}^*$.

Γ : frontière de Ω .

$\varphi = \Omega \times]0, T[$.

$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

On note $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point quelconque de \mathbb{R}^N .

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_N$: Mesure de Lebesgue sur Ω

$C^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω .

$\langle x, y \rangle$: le produit scalaire des vecteurs $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^N , il est définie

par : $x, y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$: La norme associée à ce produit scalaire.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ un multi-indice.

∇u : le gradient de u .

$\nabla u(x) = \text{grad } u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

div : l'opérateur divergence.

$\text{div}(v_1(x), \dots, v_n(x)) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$.

$\Delta u = \text{le laplacien de } u$.

$$\Delta u(x) = \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p-ème intégrables sur Ω pour la mesure dx

$L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω

$H(\Omega)$: l'espace de Hilbert

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2 \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ v/v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

EDP : équation différentielle à dérivées partielles.

EDO : équation différentielle ordinaire.

MDF : méthode des différences finies.

s.c.i : semi continu inférieurement.

SOR : Méthode itérative de sur-relaxation.

IV : Inéquation variationnelle.

Chapitre 1

Rappel de quelques notions de base

Dans ce chapitre nous présentons d'abord quelques notions de base nécessaires à ce travail.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 [13] *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.1.2 [10] *Une partie U de E est dite convexe si pour tout couple $(u, v) \in U^2$ le segment*

$$[u, v] = (1 - t)u + tv \text{ est inclu dans } U, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Autrement dit

$$\forall (u, v) \in U^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t)u + tv \in U.$$

Définition 1.1.3 [16] *Soit une application $f : U \rightarrow R$ défini sur une partie convexe U de E*

* On dit que f est convexe sur U si

$$\forall (u, v) \in U^2, \forall t \in [0, 1], f((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)f(u) + tf(v).$$

* On dit que f est strictement convexe sur U si

$$\forall (u, v) \in U^2, \forall t \in [0, 1], f((1 - t)u + tv) < (1 - t)f(u) + tf(v).$$

Théorème 1.1.1 [13] (*Théorème de projection*)

Soit V un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_v$ est soit K un sous ensemble convexe fermé de V alors :

$$\|f - u\| = \inf \{\|f - u\|, v \in K\}$$

la projection est caractérisée par

$$\langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Théorème 1.1.2 [13] (*Théorème de Représentation de Riesz*)

Soit V un espace de Hilbert, alors pour tout forme linéaire continue $L(\cdot)$ au sens suivant

$$L(v) = \langle v, l \rangle \quad \forall v \in V.$$

1.2 Quelques Définition sur la forme bilinéaire

Définition 1.2.1 [23] Une application $A : \mathbf{E} \times E \mapsto K$ est appelée une forme bilinéaire si :

$$\begin{cases} \forall u_1, u_2, v \in E \quad \forall \lambda \in K: & \mathbf{a}(u_1 + \lambda u_2, v) = a(u_1, v) + \lambda a(u_2, v) \\ \forall u, v_1, v_2 \in E \quad \forall \lambda \in K: & \mathbf{a}(u, v_1 + \lambda v_2) = a(u, v_1) + \lambda a(u, v_2) \end{cases}$$

Définition 1.2.2 [23] La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$ s' il existe une constante M tel que

$$a(u, v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

Définition 1.2.3 [23] La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique sur $V \times V$ s' il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

Définition 1.2.4 [23] *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique sur $V \times V$ si elle vérifie*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

Définition 1.2.5 [23] *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie positive sur $V \times V$ si elle vérifie*

$$a(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V.$$

Définition 1.2.6 [23] *Un opérateur $A: V \mapsto V'$ est fortement montone s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v) \geq \alpha \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V.$$

Définition 1.2.7 [23] *Un opérateur $A: V \mapsto V'$ est continue s'il existe une constante $\beta > 0$ tel que*

$$(Au - Av, w) \leq \beta \|u - v\|_V \|w\|_V \quad \forall u, v, w \in V.$$

Définition 1.2.8 [23] *Un opérateur $A: V \mapsto V'$ est lipschitzien s'il existe une constante $c > 0$ tel que*

$$\|Au - Av\|_V \leq c \|u - v\|_V^2. \quad (1.1)$$

Définition 1.2.9 [16] *Une suite $(u_i)_{i \geq 0}$ converge fortement vers u , si la norme $\|u_i - u\|$ tend vers 0 quand i tend vers ∞ .*

Définition 1.2.10 [13] *Une suite $(u_i)_{i \geq 0}$ converge faiblement vers u dans V , si $f \in V'$, $f(u_i)$ tend vers $f(u)$ quand i tend vers ∞ et u est unique.*

Définition 1.2.11 [23] *La fonctionnelle $f: V \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ convexe est propre si $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in V$ et f n'est pas identiquement égal à ∞ .*

Définition 1.2.12 [23] *La fonctionnelle convexe $f: V \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ est semi continue inférieurement en x si pour toute suite $(x_i)_{i \geq 0}$ convergente vers x , on a*

$$f(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f(x_j) \quad (1.2)$$

1.3 Formules de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDPs, elle coïncide en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.3.1 [10] *On suppose que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ , C^1 par morceau, alors u et v sont des fonction de $H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) \, dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx + \int_{\Gamma} u(x) v(x) \eta_i(x) \, d\Gamma \quad (1.3)$$

$d\Gamma$ est la mesure superficielle sur la frontière Γ de Ω . $\eta(x)$ est le vecteur normal sur Γ orienté vers l'extérieur de Γ .

Théorème 1.3.2 [10] *soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors pour toute fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$*

et $v \in C^2(\overline{\Omega})$ on a :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) \, d\Gamma \quad (1.4)$$

Où $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x) \cdot \eta(x)$.

1.4 Espace de Sobolev

Définition 1.4.1 [3] *soit Ω est un ouvert non vide de \mathbb{R}^N , et $m \in \mathbb{N}$, On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \right\}$$

telle que $D^\alpha u$ est calculée au sens de distribution.

l'espace $H^m(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chapitre 2

problème à frontière libre elliptique

Il existe des situations dans lesquelles un corps en contact avec un autre. Le contact a un rôle très important dans la nature de tout système de structure (sa déformation).

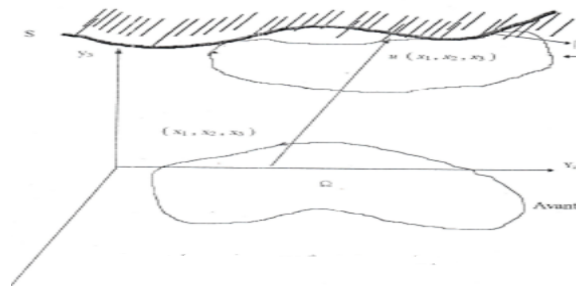


Figure 2.1 – corps déformé par une fondation rigide

La modélisation du phénomène de contact pose des difficultés tant du point de vue mathématique que numérique.

Dans ce chapitre nous nous intéressons au problème elliptique de la digue en dimension une et l'obstacle en dimension deux, nous commençons par une introduction sur les inéquations variationnelles et la méthode de pénalisation qui sont utilisés dans la suite, nous étudions deux problèmes d'évolution en dimension une et deux, nous discrétisons les problèmes par la méthode des éléments finis, nous appliquons la méthode de pénalisation, et on utilise la méthode itérative de relaxations SOR pour résoudre le problème discret obtenu.

2.1 cadre abstrait

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$) de frontière Γ suffisamment régulière $V \subset \Omega$.

$A : V \longrightarrow V'$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2.

On cherche une fonction u , à valeurs réelles, définie dans Ω telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} Au \geq f & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ u \geq q & \text{dans } \Omega \quad (2) \\ (Au - f)(u - q) = 0 & \text{dans } \Omega \quad (3) \\ u = g & \text{sur } \Gamma \quad (4) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

f et q deux fonctions données sur Ω et g une fonction qui vérifie la solution sur Γ .

$f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$.

ou q représente un obstacle.

l'équation (3) est appelée condition de complémentarité. On constate que Ω est divisé en deux régions

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega / u = q\} \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega / u > q\} \end{aligned}$$

séparées par une interface S a priori inconnue, avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Il s'agit donc d'un problème à frontière libre, le sens à donner à cette condition est dans la région Ω_2 on a $Au = f$ par contre dans Ω_1 on a l'inéquation $Au > f$.

si u est une solution régulière du problème (2.1) alors elle doit impérativement vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} u = q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} \end{array} \right. \text{ sur } S \quad (2.2)$$

Où n désigne une direction normale à S .

2.2 Cadre fonctionnel

Plusieurs problèmes à frontière libre dans la théorie de l'élasticité ou de la mécanique des fluides peuvent être décrits de manière abstraite comme suit

Soit $J: V \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonctionnelle qui peut s'écrire sous forme

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \quad \forall v \in V.$$

Où $a(., .)$ est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et $f \in V'$, alors le problème consiste à trouver un élément $u \in K$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \quad (*)$$

Où K est un sous ensemble convexe non vide de V .

Théorème Soit V un espace de Hilbert et K un ensemble convexe non vide de V , soit $a(., .)$ une forme bilinéaire continue et V - elliptique, alors il existe une solution unique du problème abstrait (2.1).

En outre, si $a(., .)$ est symétrique, cette solution est caractérisée par la propriété

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K.$$

qu'on appelle inéquation variationnelle et dorénavant noté $(I.V)$.

2.2.1 Formulation variationnelle du problème

D'après [1], le problème (2.1) est équivalent à

$$(Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (2.3)$$

Où

$$K = \{ v/v \in V, \quad v \geq q, \quad \text{dans } \Omega, \quad v = g \quad \text{sur } \Gamma \} \quad (2.4)$$

Le problème (2.1) peut être formulé autrement :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.5) est appelé problème d'inéquation variationnelle $(I.V)$.

Si $A: v \mapsto v'$ est un opérateur linéaire continu, d'après le Théorème de Représentation de Riesz, alors on peut lui associer une forme bilinéaire continue $a(u, v)$ sur $V \times V$ définie comme suit :

$$\text{si } u \in V \quad a(u, v) = (Au, v) \quad \forall v \in K \quad (2.6)$$

Alors, la formule (2.3) est équivalente à

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \quad (2.7)$$

Et le problème (2.5) est équivalent à son tour à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in k \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (2.8)$$

puisque la forme bilinéaire $a(., .)$ est symétrique, le problème (2.8) est équivalent au problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) = \inf_{v \in k} J(v) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (2.9)$$

Où

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - f(v)$$

2.2.2 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.1 [18] supposons que l'opérateur $A : V \mapsto V'$ est fortement monotone et Lipschitz contenu, K est un sous ensemble fermé, non vide de V et convexe, alors le problème (2.5) admet une solution unique.

Théorème 2.2 [18] (Théorème de Lions Stampacchia)

soit V un espace Hilbert et soit K un sous ensemble convexe et fermé de V .

soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et V -elliptique et soit $l(v)$ et une forme linéaire continue sur V , alors le problème (2.8) admet une solution unique.

Théorème 2.3 [18] Soit V un espace de Hilbert et K un ensemble convexe non vide de V . Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et V -elliptique, alors le problème (2.9) admet une solution unique.

2.3 la méthode de pénalisation

L'idée essentielle de méthode de pénalisation est de supprimer les contraintes et les incorporer dans la fonctionnelle. Cette transformation ramène le problème initial d'optimisation sans contraintes à un problème d'optimisation sous contraintes pour lequel plusieurs algorithmes de résolution existent. L'avantage principale de la méthode de la pénalisation est qu'elle est

très appropriée pour le traitement numérique des contraintes d'inégalité que l'on rencontre souvent dans les problèmes à frontière libre . Elles sont utilisées dans la pratique parce qu'elles sont faciles à mettre en oeuvre sur ordinateur .En outre, elles s'appliquent à la fois aux formulations fortes et aux formulations variationnelles.

Rappelons brièvement l'idée directrice de la méthode de pénalisation .Supposons que le problème à résoudre, appelé problème P , soit la minimisation d'une fonctionnelle $J(x)$ sur ensemble D .On définit une fonctionnelle $G(x)$, appelée "fonction de pénalité " de l'ensemble D , comme une fonctionnelle qui, par définition est non négative pour tout x et nulle si et seulement si $x \in D$. On définit alors un "critère pénalisé " $J_\varepsilon(x) = J(x) + \frac{1}{\varepsilon}G(x)$, où ε est un paramètre strictement positif et un "problème pénalisé " p_ε qui est la minimisation sans contraintes du critère J_ε .

Pour que l'application de la méthode de pénalisation ait un sens, il faut également que toute solution du problème p_ε pour de "petites" valeurs du paramètre ε soit une solution "approché" du problème p .En d'autres termes, il faut que la méthode converge .

2.3.1 Pénalisation des problème(2.8) et (2.5)

Soit l'inéquation variationnelle (2.8) et K vérifiant les hypothèses du théorème 2.2

Soit la fonctionnelle $\varphi : V \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vérifiant les hypothèses suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi \text{ est convexe, propre et s.c.i} & \\ \varphi(v) \geq 0 & \forall v \in V \\ \varphi = 0 & \text{ssi } \forall v \in K \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Introduisons le problème pénalisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in V \text{ tel que} \\ a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(v) - \frac{1}{\varepsilon}\varphi(u_\varepsilon) \geq (f, v - u_\varepsilon) \quad v \in V \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Théorème2.4 [14] sous les hypothèses (2.10), le problème (2.11) admet une solution unique.

Théorème2.5 [14] soient u la solution du problème (2.8) et u_ε la solution du problème pénalisé (2.11), alors u_ε converge fortement vers u quand ε tend vers 0.

Pour la pénalisation du problème (2.5), on introduit l'opérateur $\beta : V \mapsto V'$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta & \text{Lipchitzien continu (globalement ou localement)} \\ \beta(v) = 0 & \text{ssi } v \in V \\ \beta(v) & \text{est monotone.} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ le problème pénalisé associé au problème (2.5) est

$$\begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ (Au_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(u_\varepsilon), v) = (f, v). \end{cases} \quad (2.13)$$

D'après [14], le problème (2.13) admet une solution unique.

Théorème 2.6 Soient u la solution du problème (2.5) et u_ε la solution du problème (2.13). Si A vérifie les hypothèses du théorème (2.1) et l'opérateur β vérifie les hypothèses (2.12), alors u_ε converge fortement vers u lorsque ε tend vers 0.

2.3.2 Application

Pour illustrer cette étude, on s'intéresse à l'étude des problèmes stationnaires en dimension une et deux pour lesquelles on établit l'existence et l'unicité des solutions des problèmes variationnels en utilisant le théorème de Stampacchia.

Enfin, nous discrétisons les deux problèmes par la méthode des éléments finis et nous résolvons par la méthode itérative SOR.

2.3.3 problème de la digue en dimension une

La formulation simplifiée sous forme d'un problème de complémentarité en dimension une satisfait dans Ω le système suivant

Où $\Omega = [0, 1]$ correspond à la longueur de la digue, $u(x)$ indique la hauteur de la région mouillée correspondant au point $x \in [0, 1]$ et $a > b \geq 0$ sont deux constantes données.

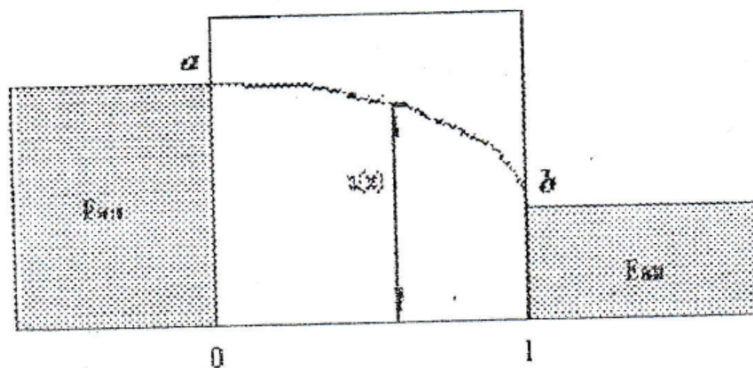


Figure 2.2 – problème de la digue en dimension une

En outre la solution u doit être suffisamment régulière, par exemple, $u \in H^2(\Omega)$. Il est clair que le système définit une partition de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ comme suit

$$\Omega_1 = \{x / u(x) = 0\}$$

$$\Omega_2 = \{x / u(x) > 0\}$$

le point d'intersection $p = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ définit une frontière libre dans Ω dans le sens où

$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{dans } \Omega_1 = [p, 1] \\ \frac{d^2 u}{dx^2} + 1 = 0 & \text{dans } \Omega_2 = [0, p] \end{cases}$$

D'après (2.1) le problème se met sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K & \text{tel que} \\ \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\right) dx + \int_0^1 (v - u) dx \geq 0 & \forall v \in K \end{cases}$$

Où

$$K = \{v \in V; u(0) = a, u(1) = b, v \geq 0 \text{ dans } \Omega\}$$

et $V = H^1(\Omega)$.

On peut mettre le problème sous forme problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) & \forall v \in K \end{cases} \quad (2.14)$$

Où

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2 - f(x)v(x) \right) dx \quad \forall v \in K$$

et

$$K = \{ v \in V; v \geq q \text{ dans } \Omega \}$$

où $V = H_0^1(\Omega)$

Puisque la fonctionnelle J est quadratique, il vient alors que si on pose

$$a(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad \forall v \in V$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \forall v \in V$$

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad \forall v \in K$$

Si $a(.,.)$ et K vérifient les conditions du théorème (2.3), alors le problème (2.14) admet une solution unique.

On peut écrire (2.15) sous la forme d'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (2.16)$$

On se propose de chercher une solution approchée du problème (2.16).

On va discrétiser le problème par la méthode des éléments finis, ensuite utiliser la méthode de pénalisation. Enfin on va proposer une méthode itérative pour résoudre le problème discret pénalisé. re d'intervalles.

Nous introduisons l'espace P_1 des polynômes de degré ≤ 1

$$P_1 = \{p : p(x) = ax + b\} \quad (2.17)$$

Discrétisation par la méthode des éléments finis (MEF)

Soit une partition régulière de Ω

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N = 1$$

c'est à dire $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, avec $h = \frac{1}{N}$ et N désigne le nombre

Et l'espace d'approximation de dimension finie V_h^1 définie par

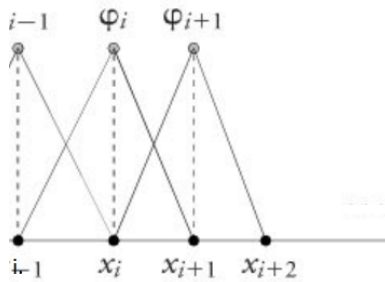
$$V_h^1 = \{v \text{ est continu sur } [0, 1] \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1, 0 \leq i \leq N-1\} \quad (2.18)$$

Où $V_h^1 = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$, les fonctions φ_j forment une base dans V_h^1 , ce sont des fonctions de type chapeaux, elle sont données comme suit :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{(x_1-x)}{h} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{N-1})}{h} & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.21)$$



Alors

$$K_h = \{v_h \in V_h^1; v_h(0) = 0, v_h(1) = 0 \quad v \geq q \text{ dans } \Omega\} \quad (2.22)$$

Où q_h l'interpolé de q , et tout $v_h \in V_h^1$ s'écrit

$$v_h(x) = \sum_{i=0}^N v_i \varphi_i(x)$$

Puisque $\varphi_i(x_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\varphi_i(x) = 1$ pour $i = j$, donc $v_i = v_h(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

L'analogie discret de (2.16) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in k_h \quad \text{tel que} \\ \int_0^1 \frac{du_h}{dx} \left(\frac{dv_h}{dx} - \frac{du_h}{dx} \right) dx \geq \int_0^1 (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in k_h \end{array} \right. \quad (2.23)$$

et K_h se réduit à l'ensemble R_h défini par

$$R_h = \{(v_i) \in \mathbb{R}^{N+1}; v_0 = 0, v_N = 0, \quad v_i \geq q_i, \quad i = 0, 1, \dots, N\} \quad (2.24)$$

En prenant

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x)$$

On obtient

$$\int_0^1 \left[\sum_{j=0}^N u_j \frac{d\varphi_j(x)}{dx} \right] \left[\sum_{i=0}^N (v_i - u_i) \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \right] dx \geq \int_0^1 \sum_{i=0}^N (v_i - u_i) f(x) \varphi_i(x) dx \quad \forall (v_i) \in R_h$$

ou encore

$$\sum_{i=0}^N (u_i - v_i) \sum_{j=0}^N u_j \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx \geq \sum_{i=0}^N (v_i - u_i) \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \quad \forall (v_i) \in R_h \quad (*)$$

posons

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

L'inégalité (*) s'écrit autrement

$$\sum_{i=0}^N (v_i - u_i) \sum_{j=0}^N a_{ij} u_j \geq \sum_{i=0}^N (v_i - u_i) F_i \quad \forall (\forall v_i) \in R_h \quad (2.25)$$

utilisons (2.19), (2.20) et (2.21), on obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ii} = \frac{2}{h} & i = 1, \dots, N-1 \\ a_{00} = a_{NN} = -\frac{1}{h} & \\ a_{ij} = -\frac{1}{h} & \text{pour } |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{pour } |i-j| \succ 1 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

On peut alors remplacer le problème (2.23) par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ (A_h u_h, v_h - u_h) \geq (f; v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Où

$$A_h(\cdot) = [a_{ij}](\cdot)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (**)$$

D'après [14], le problème (2.27) admet une solution unique u_h qui tend vers la solution du problème (2.16) quand h tend vers 0.

Appliquons la méthode de pénalisation pour résoudre le problème(2.27) .

Problème discret pénalisé

Considérons le problème discret (2.27) , avec le domaine R_h donné par (2.24).

Pour cela, introduisons une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ par :

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N ((v_i - q_i(x_i))^-)^2$$

pour $v = (v_0, v_1, \dots, v_N)$, tel que

$$(v_i - q_i(x_i))^- = \max \{0, q_i(x_i) - v_i\}.$$

On remarque que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i}(v) = ((v_i - q_i(x_i))^-) \frac{\partial}{\partial v_i} ((v_i - q_i(x_i))^-)$$

et donc

$$\nabla \varphi(v) = (-(v_0 - q(x_0)), -(v_1 - q(x_1))-, \dots, -(v_N - q(x_N))^-)^T$$

Définissons maintenant l'opérateur $\beta : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ par

$$\beta(v) = \nabla \varphi(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (2.28)$$

Et montrons qu'il vérifié les propriétés (2.12).

Lemme 2.1 L'opérateur $\beta : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ défini par l'équation (2.28) vérifié les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \beta \text{ Lipchitzien continu} \\ \beta(v) = 0 \text{ ssi } v \in R_h \\ \beta \text{ monotone} \end{cases}$$

Le Problème pénalisé associé au problème (2.27) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{\epsilon,i} \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tel que} \\ \sum_{j=0}^N a_{ij} u_{\epsilon,j} - \frac{1}{\epsilon} (u_{\epsilon,i} - q_i)^- = F_i \quad i = 0, \dots, N \\ u_{\epsilon,0} = 0 \quad u_{\epsilon,N} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

On résout ce dernier système par la méthode SOR (sur-relaxation successive).

Pour cela, on utilise la notation classique de la méthode SOR où $u^{(k)}$ et $u^{(k+1)}$ désignant deux itérations successives de la solution. Pour ne pas alourdir la présentation, on néglige l'indice désignant le paramètre de pénalisation ε , soient

$$u_0^{q+1} = 0 \quad u_N^{q+1} = 0$$

Pour $i = 1, \dots, N-1$, il existe deux cas

1. $u_i^{(q)} \geq q_i$, alors $(u_i^{(q)} - q_i)^- = 0$, et l'équation (2.30) devient

$$\sum_{j=0}^N a_{ij} u_j = F_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Pour résoudre ce système utilisant la méthode SOR, dont l'itération est

$$u_i^{(q+1)} = (1-w) u_i^{(q)} - \frac{w}{a_{ii}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} u_j^{(q+1)} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^{(q)} - F_i \right) \quad i = 1, \dots, N-1$$

2. $u_i^{(q)} < q_i$, alors $(u_i^{(q)} - q_i)^- = q_i - u_i^{(q)}$, et (2.30) devient

$$\sum_{j=0}^N a_{ij} u_j - \frac{1}{\varepsilon} q_i + \frac{1}{\varepsilon} u_i = F_i \quad i = 1, \dots, N-1$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} u_j + (a_{ii} + \varepsilon^{-1}) u_i + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j - \frac{1}{\varepsilon} q_i = F_i \quad i = 1, \dots, N-1$$

Pour résoudre ce système, on utilise aussi la méthode SOR pour assurer la convergence de cette méthode on prend $w = 1$, alors l'itération est

$$u_i^{(q+1)} = -\frac{1}{a_{ii} + \varepsilon^{-1}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} u_j^{(q+1)} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^{(q)} - \frac{1}{\varepsilon} q_i - F_i \right)$$

En introduisons les coefficients donnés par les relations (2.26), nous obtenons les itérations suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_i^{(q+1)} = (1-w) u_i^{(q)} + \frac{w}{2} \left(u_{i-1}^{(q+1)} + u_{i+1}^{(q)} + h^2 \left(\frac{2}{3} - \varepsilon - x_i \right) \right) & \text{si } u_i^{(q)} \geq q_i \quad i = 1, \dots, N-1 \\ u_i^{(q+1)} = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon+h} \left(u_{i-1}^{(q+1)} + u_{i+1}^{(q)} + \frac{1}{\varepsilon} q_i h + h^2 \left(\frac{2}{3} - \varepsilon - x_i \right) \right) & \text{si } u_i^{(q)} < q_i \quad i = 1, \dots, N-1 \\ u_0^{(q+1)} = 0 & u_N^{(q+1)} = 0 \end{array} \right.$$

Remarque 2.1 :

*Pour toute matrice A , une condition de nécessaire de convergence de la méthode de relaxation est que $0 < w < 2$.

*La matrice A_h définie par (**) est symétrique définie positive, alors la méthode de relaxation converge si et seulement si $0 < w < 2$.

2.3.4 Algorithm

```
Algorithm{PENM}
Begin{PENM};
Read the input variables: a,b,N,omg,peps,delta,maxit;
h: =1.0/N;
hp2: =h×h;
cot: =peps/(2.0 × peps+h);
For i: =0 to N do
    x[i] : =i×h
End.for;
omg1: =1.0−omg;
Uold[0] : =a;
Uold[N] : =b;
Unew[0] : =a;
Unew[N] : =b;
For i: =1 to N−1 do
    Uold[i] : =0.0
End.for;
flag: =0;
iter: =1;
{The iterative loop begins }
Repeat
{we compute the new iterate}
For i: =1 to N−1 do
    R: =Unew[i − 1]+Uold[i + 1] −hp2;
    if Uold[i]>=0.0
        then Unew[i] : =omg1*Uold[i] +omg*R/2.0
        else Unew[i] : =cot*R
    End.if;
End.for;
End.for;
```

```
{The stopping tests}
err: =0.0
For i: =1 to N-1 do
    temp: =abs(Unew [i]);
    if temp> 0.0
        then err: =err+abs(Unew [i]-Uold [i]) /temp
    End.if;
End.for;
if err< delta
    then flag: =1
if iter<=maxit
    then Uold: =Unew[i]
    else flag: =99
    End.if;
End.if;
Until flag<>
if flag=1
    then write('CONVERGENCE')
        write(x, Unew)
    else write('NO CONVERGENCE')
    End.if;
End{PENM}.
```

2.3.5 Résultat numérique

Nous avons obtenu pour les paramètres :

$$a = 0, b = 1, n = 7, n \text{ max} = 100, tol = 10^{-3}, \omega = 1,5, eps = 10^{-4}$$

ω	ε	$iter$	err_2	err_1	err_∞
1,5	10^{-4}	12	1,284388	2,6662282	0,8350248
1,5	10^{-2}	12	1,284388	2,666228	0,83502485
1,5	10^{-6}	12	1,2843880	2,66628	0,835024
1,8	10^{-2}	32	2,66500701	2,6650070162	0,834984
1,8	10^{-4}	32	2,6650070	2,66500701	0,834984470
1,8	10^{-5}	32	1,28383700642	2,665007016	0,8349847063

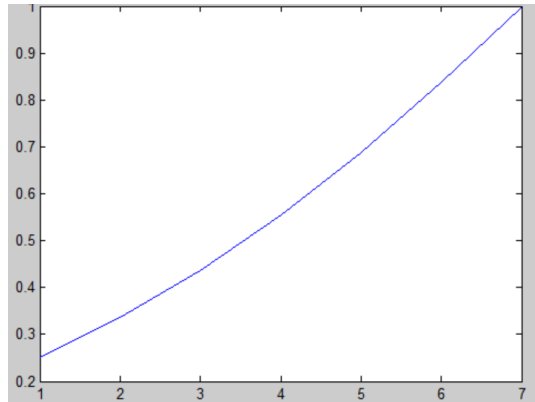


Figure 2.3 – solution problème elliptique de la digue 1d

2.3.6 Problème elliptique de l'obstacle en dimension deux

On recherche à le déplacement vertical $u(x, y)$ de Ω quand elle est déplacée par un obstacle rigide représenté par la fonction $q(x, y)$. D'où le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \geq q & \text{dans } \Omega \\ -\Delta u \geq f & \text{dans } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - q) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.31)$$

on peut récrire ce problème sous forme variationnelle.

Pour cela , on pose $V = H_0^1(\Omega)$

Mécaniquement, en dimension d'espace deux, la solution u représente le déplacement transversal d' une membrane élastique fixée le long de sa frontière Γ , soumise à une force f , et heurtant à un obstacle rigide q .

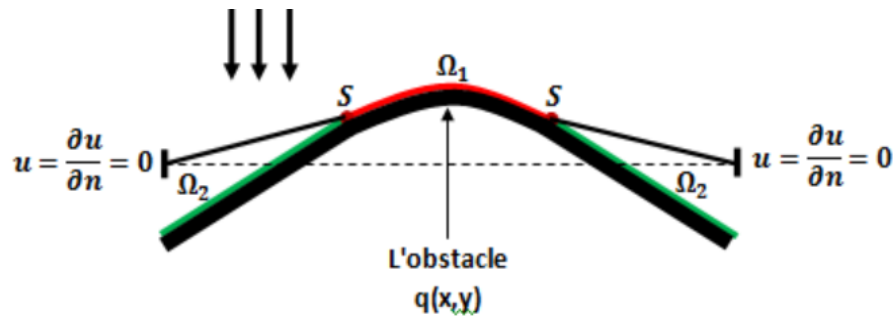


Figure 2.3 – Problème elliptique de l'obstacle en dimension deux

Pour résoudre ce problème, donnons une formulation en I.V

Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

et l'ensemble K par

$$K = \{ v \in H_0^1(\Omega) , v \geq q \text{ dans } \Omega \}$$

Où

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

on peut montrer que solution u est aussi solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

d'après le théorème 2.2 , le problème (2.32) admet une solution unique.

Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis

Soit T_h une triangulation standard de Ω ($\Omega = \Omega \cup \Gamma$) tel que T_h a un nombre fini de triangles

T vérifiant :

- $T \subset \Omega \quad \forall T \in T_h$

- $\cup_{T \in T_h} T = \Omega$

- $T_1^\circ \cap T_2^\circ = \emptyset$

$\forall T_1, T_2 \in T_h$ et $T_1 \neq T_2$ on a $T_1 \cap T_2$ soit :

- ϕ
- un coté commun
- un sommet commu

Considérons l'espace d'éléments finis construit à partir de degré 1. On établit sur Ω une triangulation T_h de triangles T , voir (figure) et soit p le polynôme de degré 1 défini sur T par P_1 :

$$p_1 = \{ (p : p(x, y) = ax + by + c; \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3) \}$$

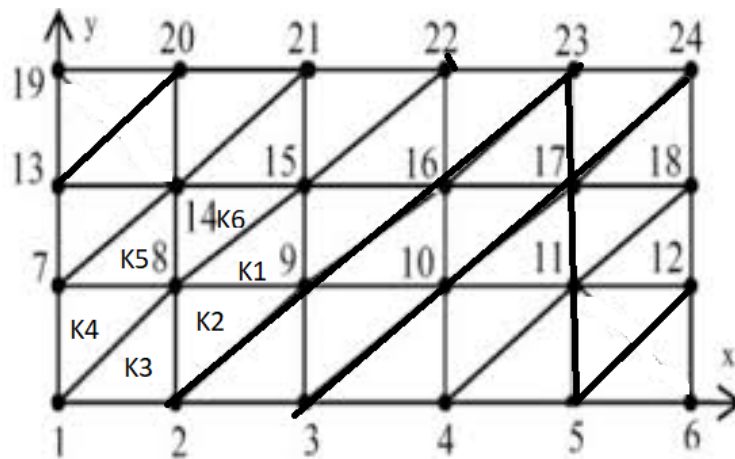


Figure 2.4 – Domaine de résolution

cette figure représente un maillage de l'ouverture $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$.

les fonctions $\varphi_j, 1 \leq j \leq 3$ représentent les fonctions de base de V_h ($V_h \subset V$ tel que $V_h < \infty$), vérifiant $\varphi_j(a_i) = \delta_{ij}$.

le'espace d'approximation qui est consèdre est :aaa

$$V_h = \{ v_h \in C^0(\Omega) \quad v_h/\Gamma = 0, \quad \text{et} \quad v_h/\Gamma \in P_1, \quad \forall T \in T_h \}$$

La discrétisation du problème (2.32) donne :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (2.33)$$

Où

$$K = \{ v_h \in V_h \quad v_h(M) \geq q(M) \quad \forall M \in \Pi_h \}$$

telle que $\Pi_h = \{ i \in \Omega, i \text{ est un noued de } T \in T_h \}$

où encore

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla (v_h - u_h) d\Omega \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (2.34)$$

Ainsi ce dernier problème est équivalente au problème au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ (A_h u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (2.35)$$

où l'opérateur A_h est donné par :

$$A_h(\cdot) = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N(\cdot)}$$

la matrice $[a_{ij}]$ est la matrice de rigidité de terme générale :

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$$

L'espace V_h est engendré par les fonctions de base $\{\varphi_{tl}\}_{tl=1}^{n*m}$ i.e tout v_h de V_h s'écrit :

$$v(x) = \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m v_{tl} \varphi_{tl}(x)$$

on obtient la matrice A qui a la structure tridiagonale par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ 0 & \dots & 0 & C & B \end{pmatrix}$$

tel que :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

une matrice carrée tridiagonale $n \times m$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

une matrice carrée tridiagonale d'ordre $n \times m$

problème discret pénalisé :

Maintenant on résoudre le problème discret en utilisant la méthode de pénalisation.

D'après le lemme 2.1 on a problème pénalisé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\varepsilon,h} \in V_h \quad \text{tel que} \\ (A(u_{\varepsilon,h}), v_h) + \frac{1}{\varepsilon} (B(u_{\varepsilon,h}), v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (2.36)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\varepsilon,ij} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad \text{tel que} \\ \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m a_{ijtl} u_{\varepsilon,ij} - \frac{1}{\varepsilon} (u_{\varepsilon,ij} - q_{ij})^- = f_{ij} \quad i = \overline{1, \dots, n}, j = \overline{1, \dots, m} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Il existe alors deux cas :

1. Soit $u_{ij}^q \geq q_{ij}$, alors $(u_{ij}^q - q_{ij})^- = 0$, ce qui donne

$$\sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m a_{ijtl} u_{\varepsilon,ij} = f_{ij}, \quad i = 1, \dots, N$$

et D'après la méthode SOR, on obtient

$$u_{ij}^{(q+1)} = (1 - w) u_{ij}^q - \frac{w}{a_{iiii}} \left(\sum_{t=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} a_{ijtl} u_{ij}^{(q+1)} + \sum_{t=i+1}^n \sum_{l=j+1}^m a_{ijtl} u_{ij}^q - f_{ij} \right)$$

2. Soit $u_{ij}^q < q_{ij}$, alors $(u_{ij}^q - q_{ij})^- = q_{ij} - u_{ij}^q$, ce qui donne

$$\sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m a_{ijtl} u_{\varepsilon,ij} + \frac{1}{\varepsilon} u_{ij} + f_{ij}$$

on utilise aussi la méthode SOR pour assurer la convergence de cette méthode la convergence de cette méthode on prend $w = 1$, alors on a

$$u_{ij}^{(q+1)} = -\frac{1}{a_{iiii} + \varepsilon^{-1}} \left(\sum_{t=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{j-1} a_{ijtl} u_{ij}^{(q+1)} + \sum_{t=i+1}^n \sum_{l=j+1}^m a_{ijtl} u_{ij}^q - \varepsilon^{-1} q_{ij} - f_{ij} \right)$$

2.3.7 Résultat par la méthode de pénalisation

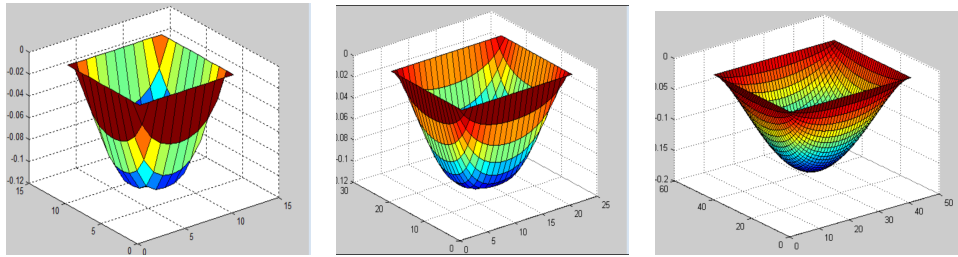
Pour application, on considère une plaque carrée simplement appuyée sur un contour Γ et supportant une charge $q(x, y)$, on cherche le moment $u(x, y)$ selon un axe oz perpendiculaire

au plan xy vérifient les équations de poisson

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{q(x,y)}{D} \\ \text{avec } u(x,y) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

$nmax = 5000$, $lot = 10^{-8}$, $\omega = 1$, $eps = 10^{-6}$, $n = 41$, $iter = 519$ et $t = 2,6266 \times e^{+02}$.

pas	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$
nombre iter	52	168	519
1	-0,02455201937745	-0,02479157148450	-0,024869534667265
2	-0,0387040387	-0,038802222322223	-0,038847147570201
3	-0,046633673339838	-0,046591961856420	-0,046610357452582
4	-0,050473693365152	-0,050385544101897	-0,050395604056825
5	-0,05047370112	-0,051491051833354	-0,051499870308697
	$t = 1,3514460403$	$t = 7,586778314222491$	$t = 2,6266 * e^{+02}$



$$D = \frac{E.ep^3}{12.(1-\mu^2)}$$

ep : epaisseur de la plaque (mm).

μ : 0,3 coefficient de poisson.

E : module de yong.

L : longueur et largeur de la plaque (mm).

q : charge (dan).

$$f = q_1 \setminus d, \quad q_1 = 10, \quad d = 2100/12.(1 - 0,3)^2.$$

Chapitre 3

Problème d'obstacle d'évolution

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux problèmes d'obstacle d'évolution, l'étude dans le chapitre précédent nous facilite le développement des deux problèmes suivants

3.1 problème d'obstacle en dimension une

3.1.1 Position du problème

On cherche la solution $u \in L^2(0, T, V)$ du problème satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq f & \text{dans } Q \\ u \geq q & \text{dans } Q \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f \right) (u - q) = 0 & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où f une fonction donnée, q représente l'obstacle, $u^0(x)$ est la donnée initiale.

$Q = \Omega \times]0, T[$ avec $\Omega = [0, 1]$.

La partition de $Q = Q_1 \cup Q_2$ est comme suit :

$$Q_1 = \{(x, t) / u = q\}$$

$$Q_2 = \{(x, t) / u > q\}$$

L'interface S entre Q_1 et Q_2 étant une frontière libre.

Le problème (3.1) peut être formulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} & \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v - u \right) \geq (f, v - u) & \forall v \in K \\ u(x, 0) = u^0(x) = 0 & x \in \Omega \text{ (} u^0 \text{ donnée dans } K \text{)} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ le problème pénalisé associé au problème (3.2) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v) - (\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}, v_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = (f, v_\varepsilon), \quad \forall v_\varepsilon \in K \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Soit ensuite $v \in K$, alors comme $\beta(v) = 0$ on déduit (3.8) que

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f, v - u_\varepsilon \right) + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(v) - \beta(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon)) \geq 0$$

Dans ce qui suit, nous allons donner les étapes à suivre pour déterminer la solution approchée. Nous discrétisons (3.4) en espace par la méthode des éléments finis, ensuite on discrétise la variable de temps par la méthode d'Euler régressif. Enfin, on introduit la méthode de pénalisation et on pose une méthode itérative pour résoudre le problème discret pénalisé obtenue.

Semi-discrétisation en espace

Soit $V_h^1 \subset V$ le sous-espace de dimension finie défini par

$$V_h^1 = \{v \in [0, 1] \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1, 0 \leq i \leq N-1\}. \quad (3.9)$$

Où sa base canonique est donnée par les fonctions de type chapeau φ_j , $0 \leq j \leq N$ telle que

$$\varphi_j \in V_h^1 = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$$

u_h^0 une approximation initiale de u^0 dans V_h^1 , le problème semi-discrétisé en espace consiste alors à déterminer $t \rightarrow u_h(t) \in K_h$ pour $t \in [0, T]$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{\partial u_h}{\partial t}(t), v_h - u_h(t)) + a(u_h(t), v_h - u_h(t)) \geq (f(t), v_h - u_h(t)) \quad \forall v_h \in K_h, \forall t \in]0, T[\\ (u_h(0), v_h - u_h) = (u_h^0, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Où

$$K_h = \{v_h \in V_h^1 \setminus v_h(0) = 0, v_h(1) = 0, v_h \geq q_h, \text{ dans } \Omega\}$$

et q_h est l'opérateur d'interpolation, et tout V_h^1 s'écrit

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x)$$

tel que $v_i = v_h(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$.

K_h se réduit à l'ensemble R_h défini par

$$R_h = \{(v_i) \in \mathbb{R}^{N+1}, v_0 = v_1 = 0, v_N = 0, v_i \geq q_i(x_i), i = 0, 1, \dots, N\} \quad (3.11)$$

En prenant

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x) \quad (3.12)$$

Pour simplifier les notations on note par

$$u_j(t) = u_h(x_j, t) \quad (3.13)$$

De même, u_h^0 s'écrit sous la forme

$$u_h^0(x) = \sum_{j=1}^N u_j^0 \varphi_j(x). \quad (3.14)$$

IL vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \left[\sum_{j=0}^N u_j'(t) \varphi_j(x) \right] \left[\sum_{j=1}^N (v_i - u_i(t)) \varphi_i(x) \right] dx + \int_0^1 \left[\sum_{j=0}^N u_j(t) \frac{d\varphi_j}{dx}(x) \right] \left[\sum_{i=0}^N (v_i - u_i(t)) \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \right] dx \\ \geq \int_0^1 \sum_{j=1}^N (v_i - u_i(t)) f(x, t) \varphi_i(x) dx \quad \forall (v_i) \in R_h \\ u_j(0) = u_j^0 \text{ pour } 0 \leq j \leq 1 \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N (v_i - u_i(t)) \left[\sum_{j=0}^N u_j'(t) \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{j=0}^N u_j(t) \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \frac{d\varphi_j}{dx}(x) dx \right] \\ \geq \sum_{i=0}^N (v_i - u_i(t)) \int_0^1 f(x, t) \varphi_i(x) dx \quad \forall v_i \in R_h. \\ u_j(0) = u_j^0 \text{ pour } 0 \leq j \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

On posant

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \\ a_{ij} &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx}(x) \frac{d\varphi_j}{dx}(x) dx \\ F_i(t) &= \int_0^1 f(x, t) \varphi_i(x) dx \end{aligned}$$

L'inégalité précédente s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N (v_i - u_i(t)) \left[\sum_{j=0}^N b_{ij} u_j'(t) + \sum_{j=0}^N a_{ij} u_j(t) \right] \geq \sum_{i=0}^N (v_i - u_i(t)) F_i(t) \\ u_j(0) = u_j^0 \end{array} \right. \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 1. \quad (3.16)$$

Les calculs des coefficients donnent

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{ii} = \frac{2}{h} & i = 1, \dots, N-1 \\ a_{00} = a_{NN} = \frac{1}{h} \\ a_{ij} = \frac{1}{h} & \text{pour } |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{pour } |i-j| > 1 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_{ii} = \frac{2h}{3} & i = 1, \dots, N-1 \\ b_{00} = b_{NN} = \frac{h}{3} \\ b_{ij} = \frac{h}{6} & \text{pour } |i-j| = 1 \\ b_{ij} = 0 & \text{pour } |i-j| > 1 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Discretisation complète (en temps)

Pour la discretisation du problème (3.4) par rapport au temps on va utiliser le schéma d'Euler régressif suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1}, x_j) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1}, x_j) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (3.20)$$

On notera $\Delta t = \frac{T}{N}$ le pas de temps et $t_n = n\Delta t$ avec $0 \leq n \leq N$.

On obtient donc le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_j^{n+1} - u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + \Delta t a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \geq \Delta t (f(t_{n+1}, v_h - u_h^{n+1})) \quad \forall v_h \in K_h, \forall t \in]0, T[\\ u^0 \text{ donnée dans } K_h \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N (v_i - u_i^{n+1}) \left[\sum_{j=0}^N b_{ij} (u_j^{n+1} - u_j^n + \Delta t \sum_{j=0}^N a_{ij} u_j^{n+1}) \right] \geq \Delta t \sum (v_i - u_i^{n+1}) f_i^{n+1} \\ u^0 \text{ donnée dans } R_h. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N (v_i - u_i^{n+1}) \left[\sum_{j=0}^N (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_j^{n+1} \right] \geq \sum_{i=0}^N (v_i - u_i^{n+1}) \left[\sum_{j=0}^N b_{ij} u_j^n + \Delta t f_i^{n+1} \right] \quad \forall (v_i) \in R_h \\ u^0 \text{ donnée dans } R_h. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

On peut remplacer le problème (3.24) par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ (C_h u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \geq \left(\sum_{j=1}^N b_{ij} u_j^n + \Delta t f_i^{n+1}, v_h - u_h^{n+1} \right) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Où

$$C_h(\cdot) = [\Delta t a_{ij} + b_{ij}](\cdot)$$

pour simplifier l'étude de ce problème, on prend dans la suite $f = 0$.

Pénalisation

Considérons le problème discret (3.24), avec le domaine R_h donnée par (3.12).

Pour cela, introduisons une fonction $\varphi : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N ((v_i - q(x_i))^-)^2 \quad (3.25)$$

Pour $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, tel que

$$(v_i - q(x_i))^- = \max \{0, q(x_i) - v_i\}. \quad (3.26)$$

On remarque que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i}(v) = ((v_i - q(x_i))^-) \frac{\partial}{\partial v_i} ((v_i - q(x_i))^-)$$

et donc

$$\nabla \varphi(v) = (-(v_0 - q(x_0))^-, (v_1 - q(x_1))^-, \dots, (v_N - q(x_N))^-)^T \quad (3.27)$$

Définissons maintenant l'opérateur $\beta : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$

$$\beta(v) = \nabla \varphi(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (3.28)$$

Lemme 3.1.1 *L'opérateur $\beta : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ défini par l'équation (3.30) vérifie les propriétés suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ Lipschitzien continu,} \\ \beta(v) = 0 \quad \text{ssi } v \in R_h \\ \beta \text{ monotone} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Le problème pénalisé associé au problème (3.26) s'écrit

$$(C(u_{\varepsilon,h}^{n+1}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_{\varepsilon,h}^{n+1}, v_h) = (\sum_{j=0}^N b_{ij} u_j^n, v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1 \quad (3.30)$$

i.e,

$$C_h(u_{\varepsilon,h}) + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_{\varepsilon,h}) = \sum_{j=0}^N b_{ij} u_j^n \quad (3.31)$$

En posant

$$H_i = \sum_{j=0}^N b_{ij} u_j^n \quad i = 1, N \quad (3.32)$$

ou encore

$$\sum_{j=0}^N (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) - \frac{1}{\varepsilon} (u_{\varepsilon, h}^{n+1} - q_i)^- = H_i \quad (3.33)$$

$$u_0^{n+1} = 0 \quad u_N^{n+1} = 0$$

désignent deux itérations successive de la solution. Pour ne pas alourdir la présentation, on néglige l'indice désignant le paramètre de pénalisation ε , soient

$$u_0^{(n+1, q+1)} = 0 \quad u_N^{(n+1, q+1)} = 0 \quad (3.34)$$

Pour $i = 1, \dots, N$, il existe deux cas

1. soit $u_i^{n+1, q} \geq q_i$, alors $(u_i^{n+1, q} - q_i)^- = 0$, et l'équation (2.29) devient

$$\sum_{j=0}^N (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_{\varepsilon, h}^{n+1} = H_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.35)$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode SOR

$$u_i^{(n+1, q+1)} = (1-\omega) u_i^{(n+1, q)} - \Delta t \frac{\omega}{b_{ii} + \Delta t a_{ij}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_j^{(n+1, q+1)} + \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(n+1, q)} - H_i \right) \quad (3.36)$$

2. Soit $u_i^{n+1, q} < q_i$, alors $(u_i^{n+1, q} - q_i)^- = q_i - u_i^{n+1, q}$ et (2.29) devient

$$\sum_{j=0}^N (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_{h, \varepsilon}^{(n+1, q+1)} + \frac{1}{\varepsilon} (u_i^{(n+1, q)} - q_i) = H_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.37)$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode SOR

$$u_i^{(n+1, q+1)} = -\frac{1}{b_{ii} + \Delta t a_{ij} + \varepsilon^{-1}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_j^{(n+1, q+1)} + \sum_{j=0}^{i-1} (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_j^{(n+1, q)} - \frac{1}{\varepsilon} q_i - H_i \right) \quad (3.38)$$

3.1.3 Résultats numérique (problème d'obstacle d'évolution en 1d)

Nous avons obtenu pour le problème (3.1) sur $\Omega [0, 1]$ avec les paramètres

$u(0) = 0,25$ et $u(1) = 1$, $n = 7$, $n_{\max} = 100$, $tol = 10^{-3}$, $\omega = 1,5$, $eps = 10^{-4}$, $T = 0,25$

ω	ε	$iter$	err_1	err_2	err_∞
1,5	10^{-4}	12	2,6662282	1,284388014	0,835024
1,5	10^{-6}	23	2,6662048	1,28000	0,83501760
1,5	10^{-8}	23	2,6662048	1,284290	0,8350017

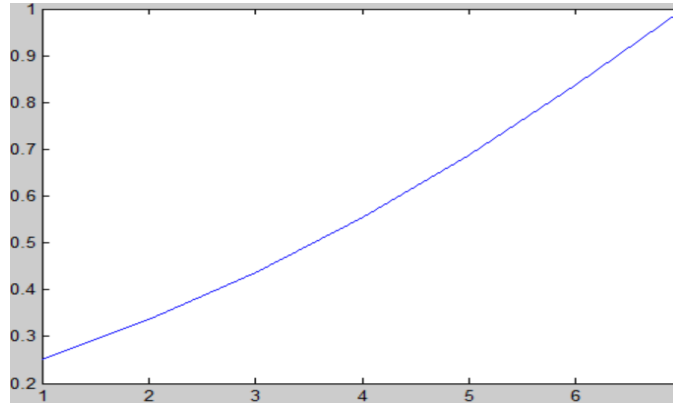


Figure 3.1 – solution problème d evolution de obstacle 1d

3.2 Formulation du problème d'obstacle en dimension deux

Nous nous intéressons à un problème d'inéquations variationnelles d'évolution en 2d.

On cherche la solution $u(x, t) = u \in L^2(0, T, V)$ du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq f & \text{dans } Q \\ u \geq q & \text{dans } Q \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \right) (u - q) = 0 & \text{dans } \sum \\ u = 0 & \text{sur } \sum \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) = 0 & X \in \Omega \quad (X = (x, y)) \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Où $f = f(X, t)$ une fonction donnée, $q = q(X)$ représente l'obstacle, $u^0(x, y)$ est la donnée initiale.

$Q = \Omega \times]0, T[$ avec $\Omega = [0, 1]$ et $\sum = \Gamma \times]0, 1[$

La partition de $Q = Q_1 \cup Q_2$ est comme suit

$$Q_1 = \{X, t / u(t, X) = q(X)\}$$

$$Q_2 = \{X, t / u(t, X) > q(X)\}$$

L'interface S entre Q_1, Q_2 étant une frontière libre.

Le problème (2.39) peut être formulé en

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \quad \text{tel que} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u, v - u \right) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \\ u(X, 0) = u^0(X) = 0 \quad x, y \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.40)$$

$X = (x, y) \in \Omega$, u^0 donnée dans K .

$$K = \{v/v \in V, v \geq q \text{ p.p dans } \Omega\}.$$

D'après le théorème de riez on a

$$a(u, v) = (Au, v)$$

Où l'opérateur $A = -\Delta$.

Alors le problème (3.40) équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \quad \text{tel que} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K, \forall t \in]0, T[\\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) = 0 \quad X \in \Omega \quad (u^0 \text{ donnée dans } K) \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Où $V = H_0^1(\Omega)$ et $a(u, v - u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dX$

3.3 Pénalisation

3.3.1 pénalisation de l'inéquation variationnelle

Introduisons la fonctionnelle $\varphi : v \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

qui vérifie les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est conexe, propre et s.c.i} \\ \varphi(v) \geq 0 \quad \forall v \in V \\ \varphi(v) = 0 \quad \text{sur } v \in K \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Introduisons le problème pénalisé de (2.41)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\varepsilon} \in V \text{ tel que} \\ \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}, u_{\varepsilon} \right) + a(u_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \varphi(v) - \frac{1}{\varepsilon} \varphi(u_{\varepsilon}) \geq (f, v - u_{\varepsilon}) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (3.43)$$

La pénalisation de (3.39) on introduit l'opérateur $\beta : V \rightarrow V'$ qui vérifie les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ lipchitizien continu (globalement ou localement)} \\ \beta(v) \geq 0 \\ \beta(v) = 0 \text{ est monotone} \end{array} \right. \quad \forall v \in V$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ le problème pénalisé associé au problème (3.39) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon) \geq f \quad \forall u_\varepsilon \in V \end{array} \right. \quad (3.44)$$

3.4 Analogie discret du problème

La solution exacte du problème (3.41) est en générale difficile voire impossible à calculer. Nous cherchons donc une solution approchée en utilisant la méthode des éléments finis (MEF) qui possède les propriétés d'interpolation des éléments finis, qui permettent d'approcher les fonctions définies sur un domaine en subdivisant ce domaine puis en choisissant sur chaque grille du maillage des combinaisons linéaires de fonction de forme. Cette méthode permet de remplacer l'espace de Hilbert V par une espace V_h de dimension fini. Le problème approché posé sur V_h se ramène à une simple résolution d'un système linéaire.

On construit V_h de manière à ce que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle soit proche de la solution exacte u dans V .

Considérons l'espace d'éléments finis construit à partir de polynomes de degré 1.

$$\begin{aligned} P_1 &= \{p/p(x, y) = ax + by + c; a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ V_h &= \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_\Gamma = 0 \text{ et } v_h|_\Gamma \in P_1, \forall T \in T_h\} \end{aligned}$$

T_h est la triangulaire de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

D'après [17] V_h est de dimension finie.

$$\begin{aligned} K_h &= \left\{ v_h \in V_h / v_h(p) > q(p), \forall p \in \sum_h \right\} \\ \sum_h &= \{i \in \bar{\Omega}, i \text{ est noeud de } T \in T_h\} \end{aligned}$$

Proposition 3.4.1 [10] K_h est un ensemble convexe, non vide et fermé de V_h .

3.4.1 Semi-discrétisation en espace

Le problème discret approchant (3.41) est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} (u_h(t), v_h - u_h)_V + a(u_h, v_h - u_h) \geq (f_h(t), v_h - u_h)_V \quad \forall v_h \in K_h \\ u(0) = u^0 \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Ce problème admet une solution unique[10].

L'espace V_h est engendré par les fonctions de base $\{\varphi_{kl}\}_{k,l=1}^{N \times M}$, donc $v_h \in V_h$ s'écrit

$$v_h(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} \varphi_{kl}(x)$$

Alors l'équation (3.44) est équivalente au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u'_{kl}(t) \varphi_{ik}(X) \right] \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} - u_{kl}(t) \varphi_{lj}(X) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u_{kl}(t) \nabla \varphi_{ik}(X) \right] \\ \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} - u_{kl}(t) \nabla \varphi_{lj}(X) \right] d\Omega \geq \left[\sum_{t=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{tl} - u_{tl}(t)) f(x, t) \varphi_{ik} \right] d\Omega \\ u_{kl}(0) = u_{kl}^0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq M \end{array} \right. \quad \forall (v_{kl}) \in K_h \quad (3.46)$$

que l'on peut écrire aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}(t)) \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u'_{kl}(t) \int_{\Omega} \varphi_{ik}(X) \varphi_{lj}(X) d\Omega \right] + \\ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u_{kl}(t) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \varphi_{kl}(X) \nabla \varphi_{kl}(X) d\Omega \\ \geq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}(t)) \int_{\Omega} f(X, t) \varphi_{kl}(X) d\Omega \\ u_{kl}(0) = u^0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m \end{array} \right. \quad \forall (v_{kl}) \in K_h \quad (3.47)$$

En posant

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{ik} \nabla \varphi_{lj} d\Omega$$

$$b_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_{ik} \varphi_{lj} d\Omega$$

$$f_{ij} = \int_{\Omega} f_{lj} \varphi_{ik} d\Omega$$

(3.46) S'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}(t)) \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M b_{ij} u'_{kl}(t) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a_{ij} u_{kl}(t) \right] \\ \geq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}(t)) F_{ij} \end{array} \right. \quad \forall v_h = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} \varphi_{kl} \in K_h \quad (3.48)$$

qu'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} b\left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u'_{kl} \varphi_{kl}, \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M v_{kl} - u_{kl}(t)\right) + a\left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u_{kl} \varphi_{kl}, \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}) \varphi_{kl}\right) \\ \geq \left(F, \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (v_{kl} - u_{kl}) \varphi_{kl}\right) \end{array} \right. \quad \forall v_h \in K_h \quad (3.49)$$

Avec le problème de complémentarité

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M b(\varphi_{ik}, \varphi_{lj}) u'_{ij}(t) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a(\varphi_{ik}, \varphi_{lj}) u_{ij}(t) \geq F_{ij} \\ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M b(\varphi_{ik}, \varphi_{lj}) u'_{ij}(t) + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a(\varphi_{ik}, \varphi_{lj}) u_{ij}(t) - F_{ij} (u_{ij} - q_{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

Où

$$K_h = \{ v_h \in V_h / v_h(p^{ij}) > q(p_{ij}) \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M \\ P^{ij} \text{ les points intérieurs du maillage de } \Omega$$

Nous obtenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 & \dots \\ C & B & C & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & C & B & C & \\ 0 & \dots & 0 & C & B & \end{pmatrix}$$

tel que

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$F = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3.4.2 discrétisation complète (en temps)

Nous utilisons le schéma Euler régressif suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1}, x_j) &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + o(\Delta t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1}, x_j) &\simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

On note $\Delta t = \frac{T}{N}$ le pas de temps et $t_n = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N$

On obtient alors

$$\begin{cases} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + \Delta t a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \geq \Delta t (f(t_{n+1}), v_h - u_h^{n+1}) \quad \forall v_h \in K_h, \forall t \in]0, T[\\ u^0 \text{ est donnée dans } K_h. \end{cases} \quad (3.50)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \left[\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N (v_{ij} - u_{ij}^{n+1}) \left[\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N b_{ij} (v_{ij} - u_{ij}^{n+1}) \right] + \Delta t \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^N a_{ij} u_{ij}^{n+1} \right] \geq \Delta t \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N (v_{ij} - u_{ij}^{n+1}) f_{ij}^{n+1} \\ u^0 \text{ est donnée dans } R_h. \end{cases} \quad (3.51)$$

d'où

$$\begin{cases} \left[\sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m (v_{ij} - u_{ij}^{n+1}) \left[\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N (b_{ij} + \Delta t a_{ij}) u_{ij}^{n+1} \right] \right] \geq \left[\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N b_{ij} u_{ij}^{n+1} + \Delta t f_{ij}^{n+1} \right] \\ u^0 \text{ est donnée dans } R_h. \end{cases} \quad (3.52)$$

qu'on peut l'écrire

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ (C_h u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \geq (\sum \sum b_{ij} u_{ij}^n + \Delta t \cdot f_{ij}^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \end{cases}$$

Où

$$C_h(.,.) = \Delta t a_{ij} + b_{ij}$$

pénalisation

Le problème pénalisé s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\varepsilon h} \in V_h^1 \\ (A_h(u_{\varepsilon h}), v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_{\varepsilon h}), v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Le problème est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\varepsilon i} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^J c_{ij} u_{\varepsilon, j} - \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon, i}^- - F_i = 0 \quad i = 1, \dots, J \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Ainsi nous obtenons les itérations suivantes

$$u_i^{n+1} = (1 - \omega)u_i^n - \frac{\omega}{c_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^J c_{ij} u_j^n + F_i \right) \quad \text{si } u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, \dots, J}$$

$$- \frac{1}{c_{ii} + \varepsilon^{-1}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^J c_{ij} u_j^n + F_i \right) \quad \text{si } u_i < 0, \quad i = \overline{1, \dots, J}$$

Nous considérons les conditions aux limites en compte, cet algorithme permet de résoudre le problème.

Chapitre 4

Conclusion

Nous nous sommes intéressés à la résolution numérique d'une classe de problèmes à frontière libre par la méthode de pénalisation et nous avons utilisé la méthode itérative de relaxation (SOR), les résultats numériques obtenus sont généralement satisfaisants, nous avons discrétisé les problèmes par la méthode des éléments finis MEF.

Cependant, il existe un inconvénient majeur dans l'application de cet algorithme dans l'analyse de ces problèmes, il n'y a pas aucune méthode rigoureuse pour le choix du paramètre de pénalisation. Ce paramètre est très important d'un point de vue numérique.

Afin de généraliser le champ d'application, nous proposons l'appliquer sur d'autres problèmes plus compliqués. On songe à utiliser la méthode des volumes finis MVF (convergence et estimation d'erreur).

Bibliographie

- [1] **A.Capitina**, Inéquations variationnelles et problèmes de contacte avec *frottement*, pre-print n10/2011 series of the institute of mathematics of Romanian Academy.
- [2] **A.Hannache.,A.Laouar.and Sissaoui.H**, A Mixed Formulation in conjunction with the penalization Methode for Solving the Bilaplacian problem with obstacle type constraints, malysian journal of mathematical scienes,13(1),pp41-60,(2019).
- [3] **A.Munnier**, Espace de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Université de Nancy, 2007-2008.
- [4] **Arnãut u,V and P.Neittaanmäki**, Optimal control from theory to computer programs.Kluwer academic publishers, London(2003) .
- [5] **Charles-Michel Marle et Philippe pilibossian**, inéquations aux dérivées partielles et leurs approximations, Universit Pierre et Marie curie,2004.
- [6] **C.Eck,J.Jarusek and M.Krbec**, Unilateml contact problems variationnelles methods and existence theorems, In pure and Applied mathematics, Chapman Hall/CRC Press, New York, 270(2005)
- [7] **David Manceau**, Résolution pratique des équations aux dérivées partielles.
- [8] **F.Brezzi.and Fortin.M.**, Mixed and hybrid finite element methods, Springer series in computational Mathematics,15 Springer Verlag, New york,(1991) .
- [9] **F.Jedrzejewsk**, Introduction aux Méthode, numérique, Springer,2005.
- [10] **G.Allaire**, Analyse numérique et optimisation. Edition de l'école polytechnique-91128 Palaiseau Cedex(2006)
- [11] **Glowinski,R**.Numerical methods for nonlinear variational problems.Sppringer-Verlag.New york,(1984)

-
- [12] **Hlavacek J.Haslinger,J.Necas,J.Lovisek**, Numerical Solution of variational Inequalities. Éditions Springer,1988.
- [13] **H.Brezis**, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.Éditions Masson, paris(1987) .
- [14] **J.Chaskaloviec**, Méthodes des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur, Edition lavoisier.
- [15] **J.L.Lion**, Inéquations variationnelles d'évolution. Actes, Congrèsint , Math,Tome 2,1970,P.841-851.
- [16] **K.Ghennam**, L'algorithme de pénalisation pour les problèmes à frontière libre. Mémoire de Magister, Université baji-Mokhter-Annaba,(2005).
- [17] **Kikuchi.N, J.T.Oden**, Contact Problems in Elasticity: A Study of variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia,1988.
- [18] **P.C.Ciarlet**, Introduction à l'analyse numérique matricielle à l'optimisation, Edition Masson.
- [19] **PH.Ciarlet et P.A.Raviart**.Comp, Methods in appl.Mech and Eng.2,p17-31.(1973) .
- [20] **P.Lesaint**, cours sur les inéquation variationnelles, Université de Besançon.
- [21] **R.Burden and J.D.Faires**, Numerical analysis Books / Cole Thomson Learning.
- [22] **R.Glowinski.J.L.Lions et R.Trémolière**, Analyse numérique des inéquations variationnelles. edit Dunod.
- [23] **S.Lagraf**, Méthodes variationnelles pour les problèmes avec contraintes de type inégalité, thèse de Doctorat, Annaba,(2013) .
- [24] **S.Saadi**, Sur l'analyse numérique du problème de signorini, Mémoire magister, Université Badji Mokhtar-Annaba(1997) .