

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية

العلوم

قسم الرياضيات

N<sup>o</sup> : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### Méthode des éléments finis de la Lagrange en dimension 2 des polynômes d'ordre 1

Option : Analyse numérique des EDP.

Par :

1. *Boughazi Nehla.*

2. *Cheriti Hadjer.*

Encadré par : Slimani Kamel  
SKIKDA

MCB U.

Devant le jury :

Président : Lakhel Hakim  
Examineur: Latrache Abdelkrim

MCA U. SKIKDA  
MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

# Remerciements

Tout d'abord nous tenons à remercier "Allah" qui nous a aidé et nous à donné la patience et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je voudrais tout d'abord adresser toute magratitude a mon encadreur de ce mémoire **Kamel Slimani pour sa patience , disponibilité est ses précieux conseils.** Je voudrais églement remercier les membres du jury pour accepter d'évaluation ce travail , et pour toutes leurs remarque et critique .

Je tiens à remercier aussi tout personne qui a participe de près ou loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicace



*Je tiens c'est avec grande plaisir que je dédie ce modeste travail  
À l'être le plus cher de ma vie ma mère.*

*À Celui qui m'a fait de moi un homme mon père À mes chers  
frères et soeur.*

*À mes grande parent que dieu les bénisse. À tous mes proofs et  
surtout mon cadreur Kamel Slimani et tous mes amis de  
promotion de 2 ème année master ce en mathématiques et tous  
personne qui occupe une place dans mon coeur.*

*À mon fiancé, qui m'a soutenu et encouragé dans mon parcours  
universitaire.*

*À mon cher ami et ma binôme hadjar.*

*À tous les membres de ma famille et toute personne qui port le  
non boughazi.*

*Je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé ma réussite*

*Merci!*

*Bougharzi & Nehla*





## Dédicace

*Du profond de cœur je dédie ce modeste travail :*

*A l'homme, mon précieux offre du dieux, mon exemple éternel,  
ma réussite à mon amour cher père : **Ahsen**.*

*A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir ,qui n'a  
épargné aucun effort pour me rendre heureuse :mon adorable  
mère : **Noura**.*

*A mes chères sœurs : **Hala** , **Aya** , **Mayssa** , **Hiba** , **Rahef** , **Houda**  
pour leurs oncouragement permanents et leur soutien morale.*

*Et aux enfants de mes sœurs **Abdelmoumin** , **Bahaa dine** ,  
**Ansem** , **Darin** , **Dayla** , **Fadjer alislem** .*

*Sans oublier mon binôme **Nehla** pour son soutien moral sa  
patience et sa compréhension tout au long de ce travail.*

**A tout ceux qu'on aime...**

**A tout qui nous aime...**

**Hadjer**



---

## Résumé

---

Ce mémoire est consacré à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles et le calcul de la solution approchée par la méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 1 et deux, en utilisant des polynômes d'ordre un.

Mots clés : Formulation Variationelle , méthode des éléments finis de Lagrange , solution approchée , estimation d'erreur .

---

## ملخص

---

هذه المذكرة مكرسة للتحليل العددي للمعادلات ذات الاشتقاق الجزئي و طريقة حساب الحل التقريبي باستعمال طريقة العناصر المنتهية لاغرانج في بعد ١ و بعد ٢ باستعمال كثيرات حدود ذات درجة ١ .

كلمات مفتاحية: الطريقة التفاضلية ، طريقة العناصر المنتهية ، الحل التقريبي ، تقديرات الخطأ

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espace de Lebesgue <math>L^p(\Omega)</math>, Espace de Sobolev <math>W^{m,p}(\Omega)</math></b>	<b>1</b>
1.1	Les espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	1
1.2	Les espaces de Sobolev . . . . .	3
1.2.1	Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	3
1.2.2	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	5
1.2.3	L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	6
1.2.4	L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	6
1.3	Théorème de Lax-Milgram . . . . .	7
1.4	Application du théorème de Lax-Milgram . . . . .	8
1.4.1	Cas dimension 1 . . . . .	8
1.4.2	Cas dimension 2 . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Méthode des éléments finis 1D et approximation variationnelle</b>	<b>15</b>
2.1	Approximation interne et système matriciel équi valent . .	15
2.2	Convergence de la méthode . . . . .	16
2.3	Méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 1 .	18
2.3.1	Éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ . . . . .	18
2.3.2	Convergence et estimation d'erreur pour la méthode $\mathbb{P}_1$ . . . . .	23
2.4	Cas d'une condition de Neumann . . . . .	26
2.5	Illustration numérique . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Méthode des élément finis en dimension 2 <math>\mathbb{P}_1</math></b>	<b>29</b>
3.1	Position du problème . . . . .	29
3.2	Méthode des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ en 2D . . . . .	30
3.3	Les fonctions de forme sur triangle . . . . .	31
3.4	Description de l'espace d'approximation . . . . .	34
3.5	Mise en oeuvre de la méthode . . . . .	35
3.5.1	Assemblage du matrice globale et de vecteur se- conde membre . . . . .	36
3.6	Convergence . . . . .	37
3.7	Illustration numérique . . . . .	41
3.7.1	La PDE Toolbox de Matlab . . . . .	41
3.7.2	Étape typique pour résoudre un E.D.P . . . . .	41

# Introduction

L'étude des phénomènes de la biologie, de la médecine,... Nous conduisent à trouver des modèles mathématiques qui les interprètent. Ces derniers sont constitués de systèmes d'équations aux dérivées partielles et d'équations. Il existe plusieurs techniques pour montrer l'existence et parfois l'unicité de la solution mais dans la plupart des cas il est impossible de déterminer analytiquement la solution exacte des problèmes d'où le besoin d'outils de calcul approché de la solution, parmi ces outils la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une technique générale pour construire des sous-espaces de dimension finie d'un espace de Hilbert  $V$  dans le but d'appliquer la méthode de Galerkin pour traiter un problème variationnel.

Comme il est impossible de déterminer analytiquement la solution exactes des problèmes, pratiquement on remplace alors le modèle mathématiques par un modèle approché, généralement basé sur une méthode par éléments finis, dont on est capable de déterminer la solution, approximation plus au moins précise de la solution exacte. Décrivons maintenant l'articulation de ce travail.

Dans le premier chapitre, nous présentons un rappel des espaces classiques de Lebesgue et de Sobolev ainsi quelques théorèmes fondamentaux Riesz, Lax-Milgram que nous avons appliqué pour prouver l'existence et l'unicité de la solution des problèmes étudiés.

Dans le deuxième chapitre, nous avons expliquée le principe général de la méthode des éléments finis, application de la méthode pour un problème en dimension 1 par les polynôme de degré 1. On termine par un exemple de calcul de la solution approchée par programmation sous Matlab.

Dans le troisième chapitre, On applique la méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 2 pour les polynôme de degré 1 sur un problème elliptique, étude de la convergence, on termine par une illustration numérique.

# Chapitre 1

## Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ , Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Le but de ce chapitre est de présenter un résumé sur les espaces fonctionnels, les théorèmes fondamentaux : Riesz, Lax-Milgram. Lax-Milgram et nous terminons

### 1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble ouvert non vide .

**Définition 1.1** ([?]). Si  $p = 1$  on définit l'espace :

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f| dx < \infty\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| dx$$

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 < p < \infty$ , on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $p = \infty$  on définit l'espace :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et } \exists c > 0; |f(x)| \leq c, \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Si  $p = 2$ , l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$L^1_{loc}$  désigne l'ensemble des fonction localement intégrable sur  $\Omega$  :

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega\}$$

**Proposition 1.1** (voir [?]).

• **Inégalité de Young** :  $\forall p, q \geq 1$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \forall a, b \geq 0 : ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .

• **Inégalité de Hölder** : Soient  $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors :

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Si de plus :  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  pour  $i = \overline{1, k}$  avec  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$  alors

$$f = \prod_{i=1}^k f_i \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}$$

• **Inégalité de Minkowski** :

Soient  $f, g \in L^p(\Omega)$  avec  $p \geq 1$  alors

$$f + g \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

• **Inégalité d'interpolation** :

Soit  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  et  $p \leq r \leq q$  alors :

$$f \in L^r(\Omega)$$

**Proposition 1.2** (voir[?]).  $L^p$  espace  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , séparable pour tout  $1 \leq p < \infty$  et réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Théorème 1.1** (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi, voir[?]).

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que  $\sup_n \int f_n < \infty$ .

Alors  $f_n(x)$  converge p.p. sur  $\Omega$  vers une limite finie notée  $f(x)$ ; de plus  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ .

**Théorème 1.2** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue, voir[?]).

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$ . On suppose que

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$
- il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n; |f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ .

**Proposition 1.3.** [Inverse du théorème de convergence dominée, voir[?]]

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $L^p(\Omega)$  et  $f \in L^p(\Omega)$  tels que  $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Alors il existe une sous-suite extraite de  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $h \in L^p(\Omega)$  tel que :

- $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$  p.p. sur  $\Omega \forall k$  p.p. sur  $\Omega$ .

**Lemme 1.1** (Lemme de Fatou, voir[?]). Soit  $f_n$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que :

- $\forall n, f_n(x) \geq 0$  p.p. sur  $\Omega$
- $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty$ .

## 1.2 Les espaces de Sobolev

---

Pour chaque  $x \in \Omega$  on pose  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

**Théorème 1.3** (Théorème de densité voir[?]).

L'espace  $C_c(\Omega)$  des fonctions continue sur  $\Omega$  à support compact est dense dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p \leq \infty$  i.e :

$$\forall f \in L^p(\Omega) \text{ et } \forall \epsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\Omega) \text{ telle que } \|f - f_1\|_{L^p} < \epsilon$$

$C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact est dense dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Théorème 1.4.** [Théorème de représentation de Riesz voir[?]]

Soient  $1 < p < \infty$  et  $\phi \in (L^p(\Omega))'$  alors il existe  $u \in L^{p'}(\Omega)$  unique telle que

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^p(\Omega) \text{ et } 1/p + 1/p' = 1.$$

**Théorème 1.5.** (voir[?])

Soit  $\phi \in (L^1(\Omega))'$  alors il existe  $u \in L^\infty(\Omega)$  unique tel que

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^1$$

de plus

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Le dual de  $L^\infty(\Omega)$  contient  $L^1(\Omega)$  (puisque  $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ ) et il est strictement plus grand que  $L^1(\Omega)$  : il existe des formes  $\phi$  linéaires et continues sur  $L^\infty(\Omega)$  qui ne sont pas de type

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } u \in L^1(\Omega)$$

## 1.2 Les espaces de Sobolev

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert non vide et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

### 1.2.1 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.2.** (voir[?]) L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

On pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  on note :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad}(u)$$

$L^p$ -l'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente :

$$\left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty$$

$L^2$ -l'espace  $H^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Proposition 1.4.** (voir[?])

- $L^p$ -l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
- $L^p$ -l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .
- $L^p$ -l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^2$ -l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

**Théorème 1.6** (Friedrichs voir[?]).

Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$  alors il existe une suite  $(u_n)$  de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que :

1.  $u_n|_\Omega \rightarrow u$  dans  $L^p(\Omega)$ .
2.  $\nabla u_n|_\omega \rightarrow \nabla u|_\omega$  dans  $L^p(\omega)^N$  pour tout  $\omega$  ouvert tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$  et  $\bar{\omega}$  est compact.

**Proposition 1.5** (Dérivation d'un produit voir[?]).

Soient  $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  alors

$$uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

**Proposition 1.6** (Dérivation d'un produit de composition voir[?]). Soit  $G \in C^1(\mathbb{R})$  telle que  $G(0) = 0$  et  $|G'(s)| \leq M \forall s \in \mathbb{R}$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors :

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

### 1.2.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soient  $m \geq 2$  un entier naturel et  $p$  un réel avec  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme :

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty$$

est un espace de Banach.

On pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ;  $H^m(\Omega)$  est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$$

**Remarque 1.1.** (voir[?])

La norme de  $W^{m,p}(\Omega)$  est équivalente à la norme :

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

**Théorème 1.7** (Opérateur de prolongement voir[?]).

On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^1$  avec  $\Gamma$  borné, alors il existe un opérateur de prolongement :

$$P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

linéaire, tel que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  :

1.  $Pu|_\Omega = u$ .
2.  $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{L^p(\Omega)}$
3.  $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Où  $c$  dépend seulement de  $\Omega$ .

**Corollaire 1.1** (Densité voir[?]).

On suppose  $\Omega$  de classe  $C^1$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$ . Alors il existe une suite  $(u_n)$  de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que  $u_n|_\Omega \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Autrement dit, les restrictions à  $\Omega$  des fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  forment un sous-espace dense de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Théorème 1.8** (voir[?]).

On suppose que  $\Omega = \mathbb{R}^N$  On a

$$\text{Si } 1 \leq p < N \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \quad \text{avec } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

$$\text{Si } p = N, \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

$$\text{Si } p > N, \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$$

avec injections continues.

**Corollaire 1.2.** [voir[?]] Soient  $m \geq 1$  un entier et  $1 \leq p < \infty$ , on a

$$\text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0 \text{ alors } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \text{ avec } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

$$\text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0 \text{ alors } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \text{ avec } q \in [p, \infty[.$$

$$\text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0 \text{ alors } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

avec injections continues.

### 1.2.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.3.** (voir[?])

Soit  $1 \leq p < \infty$ ;  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne la fermeture de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . On note :

$$H_0^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

L'espace  $W_0^{1,p}$  muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable; il est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

$H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ .

**Remarque 1.2.** (voir[?])

Comme  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  est dense dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  on a :  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

**Théorème 1.9** (voir[?]). On suppose  $\Omega$  de classe  $C^1$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$  Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u = 0$  sur  $\Gamma$ .
2.  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Corollaire 1.3** (Inégalité de Poincaré voir[?]).

On suppose que  $\Omega$  un ouvert borné. Alors il existe une constante  $C$  (dépendante de  $\Omega$  et  $p$ ) telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad 1 \leq p < \infty$$

### 1.2.4 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

On désigne par  $W^{-1,p'}(\Omega)$  l'espace dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  pour  $1 \leq p < \infty$  et par  $H^{-1}(\Omega)$  le dual de  $H_0^1(\Omega)$  on a :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

– Si  $\Omega$  est borné on a :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{si } \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty$$

avec injections continues et denses.

### 1.3 Théorème de Lax-Milgram

---

– Si  $\Omega$  n'est pas borné on a :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2$$

On peut caractériser les éléments de  $W^{-1,p'}(\Omega)$  par la proposition suivante :

**Proposition 1.7.** (voir[?])

Soit  $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$  alors il existe  $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$  telle que

$$\langle F, v \rangle = \int f_0 v + \sum_{i=1}^N \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}$$

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|f_i\|_{L^{p'}} = \|F\|$$

### 1.3 Théorème de Lax-Milgram

On considère le problème abstrait suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H \end{array} \right. \quad (P)$$

avec :  $H$  espace de Hilbert ,  $a$  forme bilinéaire et  $L$  forme linéaire.

Le théorème de Lax- Milgram donne des hypothèses suffisantes pour les quelles le problème (P) admet une unique solution .

**Théorème 1.10.** (Lax-Milgram) : Soit  $H$  un espace de Hilbert réel,  $a$  une forme bilinéaire sur  $H \times H$  ,  $L$  une forme linéaire sur  $H$ . on suppose que :

1.  $a$  est continue :

$$\exists M > 0, \quad \forall u, v \in H : |a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H$$

2.  $a$  est coercive : s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall v \in H : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2.$$

3.  $L$  est continue :

$$\exists m > 0, \forall v \in H : |L(v)| \leq m \|v\|_H.$$

Alors, il existe un unique  $u$  dans  $H$  qui vérifie ,  $\forall v \in H : a(u, v) = L(v)$  et celui-ci vérifie

$$\|u\|_H \leq \frac{m}{\alpha}$$

si de plus  $a$  est symétrique , alors  $u$  est aussi l'unique élément de  $H$  que minimise la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v).$$

## 1.4 Application du théorème de Lax-Milgram

### 1.4.1 Cas dimension 1

Problème de Dirichlet dimension 1 :

**Exemple 1.1.** On cherche une fonction  $u \in H^2(I)$  vérifiant

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{p.p sur } I = ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{P1})$$

Avec  $f \in L^2(I)$

Une solution forte du Problème (P1) est une fonction  $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ . Formulation variationnelle du problème, soit  $v \in D(I)$ , multipliant par  $v$  l'équation et intégrant sur  $I$ , il vient

$$\int_0^1 (-u''v + uv) dx = \int_0^1 f v dx.$$

D'après la définition de la dérivée au sens de distribution, on obtient

$$\int_0^1 u''v dx = - \int_0^1 u'v' dx.$$

on a alors  $\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx$  pour tout  $v \in D(I)$ .

Comme  $D(I)$  est dense dans  $H_0^1(I)$  alors on cherche à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V = H_0^1(I) \\ \int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(I) \end{cases} \quad (\text{Pf1})$$

On cherche donc  $u \in V$  et

$$a(u, v) = l(v) \text{ pour tout } v \in V$$

avec

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle_{H_0^1(I)} = L(v). \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx.$$

On remarque que  $a(.,.)$  est bilinéaire continue ( Inégalité de Cauchy Schwartz) sur l'espace de Hilbert  $V = H_0^1(I)$  et que :  $\forall v \in V, a(v, v) = \|v\|_V^2$  donc  $a(.,.)$  est coercive . De plus

$$\forall v \in V : |L(v)| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_V$$

Ce que montre que la forme linéaire  $l$  est continue sur  $V$ . Utilisant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'un unique  $u \in V$  solution de (Pf1).

Réciproquement, soit  $u \in V$  solution (on dit que  $u$  est solution faible) de (Pf1) on a  $u \in V = H_0^1(I)$  donc  $u(0) = u(1) = 0$ , les conditions aux limites sont bien vérifiées .

Comme  $D(I) \subset V$ , on a

## 1.4 Application du théorème de Lax-Milgram

$$\int_0^1 u' \varphi' dx = \int_0^1 (f - u) \varphi dx \text{ pour tout } \varphi \in D(I),$$

d'où  $T_{u'}' = T_{f-u}$ , ce qui montre que  $(u')' \in L^2(I)$  car  $u - f \in L^2(I)$ . Comme on a aussi  $u' \in L^2(I)$ , alors  $u \in H^2(I)$  et  $u'' = u - f$  au sens des distributions.

**Exemple 1.2.**

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p \frac{du}{dx}) + qu = f & \text{p.p sur } I = ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{P2})$$

avec  $q \in C(\bar{I})$ ,  $f \in L^2(I)$  deux fonctions données,  $p \in C^2(\bar{I})$  avec  $p(x) \geq \alpha > 0$  et  $q \geq 0$  sur  $I$ . Une solution forte du problème (P2) est une fonction  $u \in H^2(\bar{I}) \cap H^1(\bar{I})$ .

**Formulation variationnelle :** multipliant par une fonction  $v \in V = H_0^1(I)$  et intégrant par parties on a

$$\int_0^1 (-(pu')'v + quv) dx = \int_0^1 f v dx$$

$\Leftrightarrow$

$$[-pu'v(1) + pu'v(0)] + \int_0^1 (pu'v + quv) dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 (pu'v' + quv) dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V$$

Donc on cherche :  $u \in V = H_0^1(I)$

$$a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv) dx = L(v) \text{ et } L(v) = \int_0^1 f v dx \quad (\text{Pf2})$$

On muni  $V$  de la norme  $\|v\|_V = \|v'\|_{L^2(I)}$  cette norme est équivalente à la norme de  $H^1(I)$ , alors on sait que  $L$  est continue sur  $V$  d'après l'inégalité de Poincaré.

Soit

$$M \geq \max(\|p\|_\infty, \|q\|_\infty)$$

On a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M(\|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)}) \\ &\leq M(1+c) \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

ce qui montre que  $a(.,.)$  est continue. De plus, tenant compte du fait que  $q \geq 0$ , on a pour tout  $v \in V$

$$a(v, v) = \int_0^1 p(v')^2 + qv^2 dx \geq \alpha \int_0^1 (v')^2 dx = \alpha \|v\|_V^2$$

ce qui montre bien la coercivité. d'après le théorème de Lax-Milgram le problème (Pf2) a une unique solution  $u \in V = H_0^1(I)$ .

Réciproquement, soit  $u \in V = H_0^1(I)$  l'unique solution de (Pf2) . Pour tout  $\varphi \in D(I) \subset V$ , on a

$$\int_0^1 (pu' \varphi' + qu\varphi) dx = \int_0^1 f\varphi dx$$

ce qui s écrit

$$-T'_{pu'}(\varphi) = T_{-qu}(\varphi) + T_f(\varphi)$$

pour tout  $\varphi \in D(I)$ , d 'ou

$$(pu')' = qu - f \in L^2(I)$$

au sens des distributions. Utilisant le fait que  $pu' \in L^2(I)$ , il en résulte que

$pu' \in H^1(I)$  et  $-\frac{d(pu')}{dx} + qu = f$  p.p sur  $I$ . Comme  $u' = \frac{1}{p}(pu') \in H^1(I)$  et  $\frac{1}{p} \in C^1(\bar{I})$ , on obtient que  $u'' \in L^2(I)$  et  $u \in H^2(I)$  et  $-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f$  p.p sur  $I$

donc  $u$  est solution au sens forte de (Pf2) .

### Problème de Newman en dimension 1

**Exemple 1.3.** On considère le problème de Newman en dimension 1 suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + u = f & \text{p. p sur } I \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{P3})$$

Avec  $f \in L^2(I)$ .

Une solution forte du Problème (P3) est une fonction  $u \in H^2(I)$ .

Formulation variationnelle du problème,

Soit  $V = H^1(I)$ , multipliant l'équation du problème (P3) pour tout  $v \in V$  et on intègre et par l'intégration par partie dans les espace de Sobolev on obtient

$$\int_0^1 u'v' dx - [u'(1)v(1) - u'(0)v(0)] = \int_0^1 fvdx$$

Posons

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \int_0^1 (u'v' + uv) dx \text{ et } L(v) = \int_0^1 fvdx.$$

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram ( $a$  est continue par l'inégalité de Cauchy-schwarz, coercive  $\alpha = 1$  et  $L$  est continue ) qui donne l'existence de  $u \in V$  unique vérifiant

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V = H^1(I). \quad (\text{Pf3})$$

On déduit la régularité comme dans les exemples précédent que  $u \in H^2(I)$  et que  $-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f$  p.p sur  $I$ .

## 1.4 Application du théorème de Lax-Milgram

---

Cherchons les conditions aux limites vérifiées par  $u$ . Intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'v' dx = [u'v']_0^1 - \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v dx$$

donc

$$[u'v]_0^1 + \int_0^1 \left( -\frac{d^2u}{dx^2} + u - f \right) v dx = 0$$

Il en résulte :  $[u'v]_0^1 = 0$  pour tout  $v \in V$ .

Choissant  $v(t) = t$  on a  $v \in V$  ce qui donne :  $u'(1) = 0$ .

Et pour  $v(t) = 1 - t$  on obtient :  $u'(0) = 0$ .

La solution est la solution du problème aux limites

Réciproquement soit  $u \in H^2(I)$  une solution de (Pf3) alors on a d'après le résultat précédent  $u$  est solution de (P3).

**Exemple 1.4.**

Etant donné  $f \in L^2(I)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ , on cherche une fonction  $u \in H^2(I)$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ p.p sur } I = [0, 1] \\ u'(0) = \alpha \text{ et } u'(1) = \beta \end{cases} \quad (\text{P4})$$

**Formulation variationnelle du problème,**

Multiplions par  $v \in H^1(I)$  et intégrons par parties. il vient

$$-\int_0^1 (u''v + uv) dx = \int_0^1 f v dx$$

On a

$$-[u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx$$

donc

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 f v dx - \alpha v(0) + \beta v(1)$$

Posons pour tout :

$$u, v \in H^1(I)$$

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx = (u, v)_{H^1(I)}$$

et

$$L(v) = l_1(v) + l_2(v) \text{ avec } l_1(v) = \int_0^1 f v dx \text{ et } l_2(v) = -\alpha v(0) + \beta v(1)$$

Donc on cherche une fonction  $u \in H^1(I)$  vérifie :

$$a(u, v) = l(v) \text{ pour tout } v \in V = H^1(I) \quad (\text{Pf4})$$

Il est clair d'après les exemples précédents que  $a(.,.)$  est bilinéaire continue, coercive et  $l_1$  est une forme linéaire continue sur  $V = H^1(I)$ . De plus comme l'injection de  $H^1(I)$  dans  $L^\infty$  est continue on a

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(I), \quad |l_2(v)| &\leq |\alpha||v(0)| + |\beta||v(1)| \\ &\leq |\alpha||v|_{L^\infty(I)} + |\beta||v|_{L^\infty(I)} \\ &\leq (|\alpha| + |\beta|)|v|_{L^\infty(I)} \\ &\leq c(|\alpha| + |\beta|)|v|_{H^1(I)} \end{aligned}$$

Ce qui montre bien la continuité de  $l_2$  sur  $V$ , donc  $L$  est continue comme somme de deux formes continues. D'après Lax-Milgram il existe une unique solution  $u \in H^1(I)$  de (Pf4).

En choisissant  $v \in D(I)$  on montre comme dans les exemples précédents que

$$u \in H^2(I) \text{ et } -u'' + u = f \text{ p.p sur } I$$

Pour tout  $v \in V = H^1(I)$  et  $u \in H^2(I)$  solution de (Pf4) on a alors

$$-\int_0^1 u''v dx = [-u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = -v(0)u'(0) + v(1)u'(1) + \int_0^1 u'v' dx$$

donc

$$v(0)(\alpha - u'(0)) - v(1)(\beta - u'(1)) = 0$$

par des choix simples de  $v$  on obtient alors  $u'(0) = \alpha$  et  $u'(1) = \beta$ .

## 1.4.2 Cas dimension 2

**Exemple 1.5.** Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ , un ouvert borné non vide de frontière régulière,  $N \geq 2$ . On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla(c\nabla u) + au = f \text{ p.p. dans } \Omega \\ c.\vec{n}.\nabla u + qu = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P5})$$

Avec les données :  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $c \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $a \in L^\infty(\Omega)$ ;  $c(x) \geq c_0 > 0$  et  $a(x) \geq a_0 > 0$  pour tout  $x \in \Omega$ , de plus  $q \in L^\infty(\partial\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  et  $q \geq 0$ .

Une solution forte du Problème (P5) est une fonction  $u \in H^2(\Omega)$ .

Formulation variationnelle du problème, multipliant l'équation du problème (P5) par une fonction  $v \in V = H^1(\Omega)$  et intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} -\nabla.(c\nabla u)v + auv dx = \int_{\Omega} fv dx$$

On utilise la formule de Green on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c\nabla.u\nabla v + auv dx - \int_{\partial\Omega} (c\nabla u.\vec{n})v ds &= \int_{\Omega} fv dx \\ \iff \int_{\Omega} c.\nabla u.\nabla v dx + \int_{\Omega} auv dx - \int_{\partial\Omega} (c\nabla u.\vec{n}).v ds &= \int_{\Omega} fv dx \end{aligned}$$

## 1.4 Application du théorème de Lax-Milgram

---

On utilise la condition aux bord  $c\nabla u \cdot \vec{n} + qu = g \implies c\nabla u \cdot \vec{n} = g - qu$ , on obtient

$$\int_{\Omega} c \cdot \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} auv \, dx + \int_{\partial\Omega} quv \, ds = \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, ds \quad \forall v \in V$$

Donc on le problème faible suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists u \in V \\ \tilde{a}(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \text{ avec} \\ \tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} c \cdot \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} auv \, dx + \int_{\partial\Omega} quv \, ds \\ L(v) = \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, ds \end{array} \right. \quad (\text{Pf5})$$

Montrons que le problème (Pf5) admet une unique solution faible  $u \in V$ , en effet on applique le théorème de Lax-Milgram :

La continuité de  $\tilde{a}$  :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, |\tilde{a}(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |c| |\nabla u| |\nabla v| dx + \int_{\Omega} |a| |u| |v| dx + \int_{\partial\Omega} |q| |u| |v| d\Omega \\ &\leq |c|_{\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|a\|_{L^{\infty}} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|q\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

**On utilise la norme de  $V$  et le théorème de trace on a**

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, |\tilde{a}(u, v)| &\leq |c|_{\infty} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|a\|_{L^{\infty}} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|q\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)} \gamma \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &\leq (|c|_{\infty} + \|a\|_{L^{\infty}} + \|q\|_{L^{\infty}(\partial\Omega)} \gamma) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

**La coercivité de  $\tilde{a}$  :**

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(\Omega), |\tilde{a}(u, u)| &= \int_{\Omega} c \cdot |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} a u^2 dx + \int_{\partial\Omega} q u^2 ds \\ &\geq c_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + a_0 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq \min(c_0, a_0) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

**La continuité de  $L$  :**

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega), |L(v)| &\leq \int_{\Omega} |f| |v| dx + \int_{\partial\Omega} |g| |v| ds \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \gamma \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \gamma \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

**La régularité on suppose que si  $u \in H^1(\Omega)$  est solution de (Pf5) alors  $u \in H^2(\Omega)$ .**

**Il reste à montrer que si  $u \in H^2(\Omega)$  et vérifier (Pf5) alors elle est solution de (P5). On a :**

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} c \nabla u \nabla v dx + a \int_{\Omega} uv dx + \int_{\partial\Omega} quv ds = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} vg ds$$

**On applique la formule de Green ( $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ ) nous obtenons**

$$\begin{aligned} \forall v \in D(\Omega); - \int_{\Omega} \nabla \cdot (c \nabla u) v dx + \int_{\Omega} auv dx &= \int_{\Omega} fv dx \\ \iff \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (c \nabla u) + au) v dx &= \int_{\Omega} fv dx \\ \Rightarrow -\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f \text{ p.p dans } (\Omega) & \quad (1.1) \end{aligned}$$

**On utilisant la formule de Green avec  $v \in H^1(\Omega)$  et par choix de  $v$  nous obtenons la condition aux bord.**

# Chapitre 2

## Méthode des éléments finis 1D et approximation variationnelle

Dans ce chapitre, on décrit la méthode générale d'approximation d'une formulation variationnelle définie dans un espace de Hilbert qui servira de base pour l'élaboration de la méthode des éléments finis. On termine par des applications en dimension 1 de la méthode .

### 2.1 Approximation interne et système matriciel équivalent

Soit  $V$  un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et la norme associée  $\|\cdot\|_V$ . Soient  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V$  et  $f \in V$ . On considère la formulation variationnelle générale .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \forall v \in V, a(u, v) = (f, v)_V \end{array} \right. \quad (2.1)$$

L'existence et l'unicité de la solution  $u \in V$  de (3.3) est assurée par le théorème de Lax-Milgram.

Dans cette section, on cherche à déterminer une suite  $(u_h)_h$  de  $V$  telle que  $\|u - u_h\|_V$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

L'approximation interne consiste à considérer une suite  $V_h$  de sous - espaces fermés de  $V$  de dimension finie )(qui sont des espaces de Hilbert car fermés dans  $V$ ).

On s'intéresse alors aux problèmes approchés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \forall v_h \in V_h a(u_h, v_h) = (f, v_h)_V . \end{array} \right. \quad (2.2)$$

la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  étant encore coercive et continue sur les sous-espaces  $V_h$ , par le théorème de Lax-Milgram, on a l'existence et l'unicité de la solution  $u_h \in V_h$  du problème (2.2).

Soit  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  une base de  $V_h$  alors il existe  $u_1^h, \dots, u_N^h \in \mathbb{R}$  tels que la solution  $u_h \in V_h$  de (2.2) s'écrit

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j^h \phi_j(x).$$

Pour que l'égalité  $a(u_h, v_h) = (f, v_h)_V$  ait lieu pour tout  $v_h \in V_h$ , il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour tous les vecteurs de base  $\phi_1, \dots, \phi_N$ . En utilisant la bilinéarité de  $a(\cdot, \cdot)$ , le problème (2.2) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_1^h, \dots, u_N^h \in \mathbb{R}^N, \text{ tels que :} \\ \forall i = 1, \dots, N, \sum_{j=1}^N u_j^h a(\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i)_V \end{array} \right. \quad (2.3)$$

En posant  $U_h := (u_1^h, \dots, u_N^h)^T \in \mathbb{R}^N$ , on obtient que le problème (2.2) est équivalent au problème matriciel  $K_h U_h = b_h$ , où  $K_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $b_h \in \mathbb{R}^N$  sont définis par :

$$K_h := (a(\phi_j, \phi_i))_{i \leq i, j \leq N} \quad \text{et} \quad b_h := ((f, \phi_i)_V)_{1 \leq i \leq N}$$

On note  $m$  et  $M$  les constantes de coercivité et de continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ , i.e.

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \text{et} \quad \forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V.$$

**Proposition 2.1.** *On suppose de plus que  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique. Alors, la matrice  $K_h$  est définie positive. En particulier,  $K_h$  est inversible et donc le système  $K_h U_h = b_h$  admet une solution unique  $U_h \in \mathbb{R}^N$ .*

**Preuve.** Par définition de  $K_h$ , il est clair que si  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique alors  $K_h$  aussi. Soit  $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ,  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ . On pose  $\tilde{\xi} := \xi_1 \phi_1 + \dots + \xi_N \phi_N \in V_h$ . puisque  $a(\cdot, \cdot)$  est bilinéaire et coercive, on a :

$$K_h \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a(\phi_i, \phi_j) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^N a(\xi_i \phi_i, \xi_j \phi_j) = a(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq m \|\tilde{\xi}\|_V^2 > 0.$$

donc  $K_h$  est définie positive.  $\spadesuit$ .

## 2.2 Convergence de la méthode

Il reste à montrer que la solution  $u_h \in V_h$  de (2.2) est bien une approximation de  $u$ . Pour cela, on utilise le résultat suivant :

**Lemme 2.1.** (Lemme de Céa) *Soit  $u \in V$  la solution de (3.3) et  $u_h \in V_h$  la solution de (2.2), alors on a :*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

**Preuve.** En prenant  $w_h$  comme fonction test dans (3.3) et (2.2) on obtient

$$a(u, w_h) = (f, w_h)_V = a(u_h, w_h)$$

## 2.2 Convergence de la méthode

d'où, par la bilinéarité de  $a$  on a :  $a(u - u_h, w_h) = 0$ .

Soit  $v_h \in V_h$ , alors  $w_h := v_h - u_h \in V_h$  donc  $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$ . On en déduit

$$\begin{aligned} m \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \end{aligned}$$

donc on a

$$\forall v_h \in V_h, \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\|_V,$$

ce qui donne le résultat .

**Théorème 2.1.** (Théorème de convergence) . On suppose qu'il existe un sous-espace  $V_h$  de  $V$  dense dans  $V$  tel qu'il existe une application linéaire  $r_h$  de  $V$  dans  $V_h$  vérifiant

$$\forall v \in V \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_V = 0 \quad (2.4)$$

L'application  $r_h$  est appelée **opérateur d'interpolation** de  $V$  sur  $V_h$ . alors, la solution  $u_h \in V_h$  de (2.2) converge vers la solution  $u \in V$  de (3.3), au sens où on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0 \quad (2.2) \quad (2.5)$$

**Remarque 2.1.** Le point important du théorème de convergence est l'existence d'un opérateur d'interpolation . Le théorème de convergence est l'analogue du théorème de convergence pour la méthode des différences finies, ici la notion de stabilité correspond à la coercivité de  $a(.,.)$  et la notion de consistance correspond au lemme l'interpolation .

**Preuve.** Soit  $\varepsilon > 0$ , comme  $V_h$  est dense dans  $V$  il existe  $v \in V$  tel que  $\|u - v\|_V \leq \varepsilon$ . De plus, l'existence de l'opérateur d'interpolation vérifiant (2.4) entraîne qu'il existe  $h_0 > 0$  tel que si  $h \leq h_0$  alors  $\|v - r_h v\|_V \leq \varepsilon$ .

Puisque  $r_h v \in V_h$ , on a d'après le lemme de Céa :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \frac{M}{m} \|u - r_h v\|_V \\ &\leq \frac{M}{m} \|u - v\|_V + \frac{M}{m} \|v - r_h v\|_V \leq \frac{2M}{m} \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.  $\square$

En résumé l'approximation variationnelle consiste à construire des sous-espace  $V_h$  de  $V$  dont on détermine une base  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  pour aboutir au système matriciel  $K_h U_h = b_h$ . Pour avoir la convergence de la méthode et aboutir à un système matriciel simple, il faut que l'espace  $V_h$  vérifie

1. Qu'il existe un sous-espace dense dans  $V$  sur lequel est défini un opérateur d'interpolation  $r_h$  vérifiant (2.4).
2. Qu'il existe une base  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  telle que la résolution du système matriciel  $k_h U_h = b_h$  soit é conomique (typiquement que la matrice  $k_h$  soit creuse).

La méthode des éléments finis repose sur le choix d'espace  $V_h$  constitués de fonctions continues localement polynomiales et qui vérifient les deux points précédents.

## 2.3 Méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 1

On décrit la méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 1 pour le problème modèle de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{p.p sur } I = ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{P1})$$

Avec  $f \in L^2(I)$

La première étape de discrétisation consiste à choisir un maillage de  $[0, 1]$  : c-à-d une partition de  $I$  en  $N + 1$  élément (maille) . Soit  $(x_j)_{j=0, \dots, N+1}$  une subdivision de  $[0, 1]$  telle que :

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1 \text{ l'élément est } I_k = [x_k, x_{k+1}]; k = \overline{0, N}$$

Pour simplifier, on suppose le pas d'espace uniforme donné par  $h := \frac{1-0}{N+1} = 1/(N+1)$ .

La formulation variationnelle de (P1) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V = H_0^1(I) \\ \int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(I) \end{cases} \quad (\text{Pf1})$$

**Notation 2.1.** On note  $P_k$  l'espace des polynômes sur  $\mathbb{R}$  à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $k$ .

La méthode des éléments finis consiste à définir comme espace d'approximation de  $H^1(0, 1)$  :

$$V_h := \{v \in C([0, 1]); \quad v|_{I_j=[x_j, x_{j+1}]} \in P_k, \quad \forall j = 0, \dots, N\}.$$

Suivant le choix de  $k \in \mathbb{N}^*$ , on parle de méthode des éléments finis  $P_k$ .

### 2.3.1 Éléments finis de Lagrange $P_1$

La deuxième étape consiste à définir la forme de la fonction dans l'espace approchée sur chaque élément  $I_k$ . Nous rappelons que pour un élément  $I_k$  il existe un unique polynôme de degré 1 de la forme  $\phi(x) = ax + b$  et  $\phi(x_k) = \alpha$ ,  $\phi(x_{k+1}) = \beta$ , la dimension de cet espace est 2.

On pose :

$$\begin{aligned} V_h &:= \{v \in C([0, 1]); \quad v|_{I_j=[x_j, x_{j+1}]} \in P_1, \quad \forall j = 0, \dots, N\} \\ \text{et} & \\ V_{0h} &:= \{v \in V_h; \quad v(0) = v(1) = 0\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'espace  $V_h$  est l'espace d'approximation de  $H^1(0, 1)$  par la méthode des éléments finis  $P_1$  tandis que  $V_{0h}$  est l'espace d'approximation de  $H_0^1(0, 1)$ . D'après la section précédente, il faut montrer que ce sont des sous-espace respectivement de  $H^1(0, 1)$  et  $H_0^1(0, 1)$  en détermine une base et nous montrons l'existence d'un opérateur d'interpolation défini sur un sous-espace

## 2.3 Méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 1

dense de , respectivement ,  $H^1(0, 1)$  et  $H(0, 1)$ , et à valeurs dans, respectivement,  $V_h$  et  $V_{0h}$ .

On définit les fonctions chapeaux sur  $I$ , elles vérifient  $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ ;  $i, j = \overline{0, N}$  et  $\phi_j \in V_h$  par pour  $j=1, \dots, N$

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j-1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

et pour  $j = 0$  et  $j = N + 1$  par :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} -\frac{x - x_1}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}, \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

**Proposition 2.2.** *L'espace vectoriel  $V_h$  défini par (2.6) est un sous-espace de  $H^1(0, 1)$  de dimension  $N+2$  et la famille  $\{\phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$  est une base . En particulier, pour toute  $v \in V_h$ , on a :*

$$\forall x \in [0, 1], v(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j) \phi_j(x) \quad (2.7)$$

De même , l'espace vectoriel  $V_{0h}$  défini par (2.6) est un sous-espace de  $H(0, 1)$  de dimension  $N$  et la famille  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  est une base . En particulier , pour tout  $v \in V_{0h}$ , on a :

$$\forall x \in [0, 1], v(x) = \sum_{j=1}^N v(x_j) \phi_j(x). \quad (2.8)$$

**Remarque 2.2.** *Toute fonction de  $V_h$  et  $V_{0h}$  est définie de façon unique par ses valeurs aux noeuds  $x_j$ .*

**Preuve.**  $V_h$  est un sous-espace de  $H^1(0, 1)$ , car si  $v \in V_h$  alors  $v \in C([0, 1]) \subset L^2(0, 1)$ , il suffit donc de montrer que  $v' \in L^2(0, 1)$  . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$ , on a :

$$\langle v', \varphi \rangle = - \int_0^1 v \varphi' dx = - \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v|_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi' dx$$

Comme  $v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1 \subset C([0, 1])$  donc d'après la formule d'intégration par parties , on obtient :

$$\langle v', \varphi \rangle = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'|_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi dx - \sum_{j=0}^N (v(x_j) \varphi(x_j) - v(x_{j+1}) \varphi(x_{j+1})).$$

D'autre part , on a :

$\sum_{j=0}^N (v(x_j) \varphi(x_j) - v(x_{j+1}) \varphi(x_{j+1})) = v(x_0) \varphi(x_0) - v(x_{N+1}) \varphi(x_{N+1}) = 0,$   
 car  $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$ . On en déduit

$$\langle v', \varphi \rangle = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'|_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi dx \text{ d'où } v' = \sum_{j=0}^{N+1} v'|_{[x_j, x_{j+1}]} \chi_{[x_j, x_{j+1}]} \in L^2(0, 1).$$

Il reste à montrer que  $V_h$  a pour base  $\{\phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$  et l'égalité (2.7).  
 Soit  $j \in \{0, \dots, N+1\}$ , alors  $\text{supp}(\phi_j) \cap \text{supp}(\phi_{j+1}) = [x_j, x_{j+1}]$ . De plus, est une base de  $P_1$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$ .

En effet,  $P_1$  est de dimension 2 et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vérifient  $\alpha\phi_j(x) + \beta\phi_{j+1}(x) = 0$  pour  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , en prenant  $x = x_j$  on obtient  $\alpha = 0$  et avec  $x = x_{j+1}$  on obtient  $\beta = 0$ . En prenant  $x = x_j$  puis  $x = x_{j+1}$  on obtient

$$v|_{[x_j, x_{j+1}]} = v(x_j) \phi_j(x) + v(x_{j+1}) \phi(x_{j+1}).$$

D'autre part, pour  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ,  $\phi_i(x) = 0$  si  $i \neq j$  et  $j+1$ , donc

$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}], \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \phi_i(x) = v(x_j) \phi_j(x) + v(x_{j+1}) \phi_{j+1}(x) = v|_{[x_j, x_{j+1}]},$$

d'où le résultat.  $\square$

**L'approximation de la formulation variationnelle (Pf1) est**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{0h} \text{ telle que :} \\ \forall v_h \in V_{0h}, \quad \int_0^1 u'_h v'_h + u_h v_h \, dx = \int_0^1 f v_h \, dx. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Comme  $u_h = u_h(x_1) \phi_1 + \dots + u_h(x_N) \phi_N$  alors (2.9) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h(x_1), \dots, u_h(x_N) \in \mathbb{R} \text{ telle que :} \\ \forall i = 1, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N u_h(x_j) \int_0^1 \phi'_i \phi'_j + \phi_i \phi_j \, dx = \int_0^1 f \phi_i \, dx \end{array} \right. \quad (2.10)$$

En posant  $U_h := (u_h(x_1), \dots, u_h(x_N))^T \in \mathbb{R}^N$ , on obtient  $K_h U_h = b_h$ , où  $K_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $b_h \in \mathbb{R}^N$  sont donnés par

$$K_h = R_h + M_h := \left( \int_0^1 \phi'_i \phi'_j \, dx \right)_{1 \leq i, j \leq N} + \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

et

$$b_h := \left( \int_0^1 f \phi_i \, dx \right)_{1 \leq i \leq N}.$$

La matrice  $K_h$  est appelée matrice globale,  $R_h$  de rigidité et  $M_h$  de Masse.

Calcul des coefficients de la matrice

On calcule les coefficients  $K_{ij}$  en sommant les contributions des différents éléments selon :

$$\begin{aligned} K_{ij} = R_{ij} + M_{ij} &= \int_0^1 \phi'_j \phi'_i dx + \int_0^1 \phi_j \phi_i dx \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} u_h(x_k) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi'_j \phi'_i dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_j \phi_i dx \right) \end{aligned}$$

et

$$b_i := \sum_{k=1}^{N-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_i dx \right).$$

Considérons par exemple l'élément  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  : Sur cet élément, il n'y a que deux fonctions de base non nulles :  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$ . L'élément  $I_i$  produira donc effectivement une contribution non nulle aux quatre coefficients  $K_{i,i}$ ,  $K_{i+1,i}$ ,  $K_{i+1,i+1}$  et  $K_{i,i+1}$  de la matrice globale  $K$ . Calculons les contributions élémentaires de  $I_i$  et disposons les sous la forme d'une matrice élémentaire 22 :

$$E_{K_i} = \begin{pmatrix} R_{1,1}^i + M_{1,1}^i & R_{1,2}^i + M_{1,2}^i \\ R_{2,1}^i + M_{2,1}^i & R_{2,2}^i + M_{2,2}^i \end{pmatrix}$$

avec :

$$R_{1,1}^i + M_{1,1}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'^2 + \phi_i^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h^2} dx = \frac{1}{h} + \frac{h}{3}.$$

$$R_{1,2}^i + M_{1,2}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i' \phi_{i+1}' + \phi_i \phi_{i+1} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h} \frac{x - x_i}{h} dx = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}.$$

$$R_{2,1}^i + M_{2,1}^i = R_{1,2}^i + M_{1,2}^i.$$

$$R_{2,2}^i + M_{2,2}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}'^2 + \phi_{i+1}^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_{i+1})^2}{h^2} dx = \frac{1}{h} + \frac{h}{3}.$$

Calcul des composantes du second membre

Chaque composante  $b_i$  du vecteur second-membre global est calculée également par assemblage de contributions élémentaires, On a

$$E_{b_i} = \begin{pmatrix} b_{1,1}^i = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_i dx. \\ \\ b_{2,1}^i = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_{i+1} dx. \end{pmatrix}$$

Pour calculer le second membre du vecteur élémentaire  $E_{b_i}$ , lorsque la fonction  $f$  est compliquée, il faut utiliser une formule d'approximation d'intégral numérique, on donne quelques exemples :

-Formule du rectangle

$$\int_a^b \psi(x) dx \simeq (b-a)\psi(a) \simeq (b-a)\psi(b).$$

\_ Formule du point milieu

$$\int_a^b \psi(x) dx \simeq (b-a)\psi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

\_ Formule du trapèze

$$\int_a^b \psi(x) dx \simeq \frac{1}{2}(b-a)(\psi(a) + \psi(b)).$$

\_ Formule de Simpson

$$\int_a^b \psi(x) dx \simeq \frac{1}{6}(b-a) \left[ \psi(a) + \psi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \psi(b) \right]$$

Pour les fonctions régulières, ces formules sont approchées avec un reste d'ordre  $O(h)$ ,  $O(h^2)$ ,  $O(h^3)$  respectivement. on utilise la formule de Simpson on a

$$E_{b_i} = \begin{pmatrix} b_{1,1}^i = \frac{h}{6}(f(x_i) + f((x_i + x_{i+1})/2)/2). \\ b_{2,1}^i = \frac{h}{6}(f(x_{i+1}) + f((x_i + x_{i+1})/2)/2). \end{pmatrix}$$

Technique d'assemblage

Considérons un maillage à  $N$  éléments et  $K_h$  la matrice globale à assembler ( $b_h$  le vecteur global du second membre),  $E_{K_i}$  les matrices d'élémentaires correspondantes relatives à chaque élément  $I_i$  ( $E_{b_i}$  les vecteurs élémentaires correspondant à chaque élément  $I_i$ ). L'algorithme d'assemblage est très simple dès lorsque l'on dispose d'un tableau associant les points d'un élément  $I_i$  et les noeuds du maillage global. Son schéma en le suivant :

Pour des matrices :

POUR  $K = 1 : N$  FAIRE ! boucle sur les éléments

POUR  $i = 1 : 2$  FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

POUR  $j = 1 : 2$  FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = K + i - 1$  ! numéros globaux

$J = K + j - 1$  ! numéros globaux

$K(I, J) = K(I, J) + E(i, j)$

FIN DES 3 BOUCLES

Pour second membre :

POUR  $K = 1 : N$  FAIRE ! boucle sur les éléments

POUR  $i = 1 : 2$  FAIRE ! boucle sur les numéros locaux

$I = K + i - 1$  ! numéros globaux

$b(I) = b(I) + E_{b(i)}$

FIN DES 2 BOUCLES

### 2.3.2 Convergence et estimation d'erreur pour la méthode $\mathbb{P}_1$

D'après Théorème de convergence pour obtenir la convergence de la méthode  $\mathbb{P}_1$ , il suffit qu'il existe un sous-espace dense  $V$  de  $H_0^1(0,1)$  sur lequel est défini un opérateur d'interpolation à valeur dans  $V_h$ . En dimension 1, le fait que  $H^1(0,1)$  est un sous-espace de  $C(0,1)$  permet de prendre pour  $V$  l'espace  $H_0^1(0,1)$  tout entier.

**Définition 2.1.** L'opérateur d'interpolation  $\mathbb{P}_1$  est l'application  $r_h$  définie de  $H^1(0,1)$  dans  $V_h$  par :

$$\forall v \in H^1(0,1), \quad r_h v(x) := \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j) \phi_j(x).$$

En particulier, sur  $H_0^1(0,1)$  l'opérateur  $r_h$  vérifie

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad r_h v(x) = \sum_{j=1}^N v(x_j) \phi_j(x).$$

**Remarque 2.3.** 1. D'après la proposition 2.2, il est clair que  $r_h v \in V_h$  et, si  $v \in V_h$ , Alors  $r_h v = v$ .

2. La définition a un sens car  $H^1(0,1)$  est un sous-espace de  $C(0,1)$  et donc toute fonction de  $H^1(0,1)$  est définie en tout point de  $]0,1[$ . En dimension supérieure, les fonctions  $H^1$  ne sont pas nécessairement continues et donc définies seulement presque partout et la définition précédente n'a plus sens. Pour définir un opérateur d'interpolation, il sera nécessaire de considérer un sous-espace  $V$  dense dans  $H^1$  et constitué de fonctions régulières.

**Lemme 2.2** (lemme d'interpolation  $\mathbb{P}_1$ ).

1. Pour tous  $v \in H^2(0,1)$  il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|v''\|_{L^2(0,1)} \quad (2.11)$$

2. Pour tous  $v \in H^1(0,1)$  on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} = 0 \quad (2.12)$$

**Preuve.** 1) On montre (2.11) pour  $v \in C^2([0,1])$  par densité on déduit 2.11 Pour  $v \in H^2(0,1)$ . Il faut estimer  $\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)}$  et  $\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)}$  en fonction de  $h$ . Soit  $x \in I_j = [x_j, x_{j+1}]$ , Comme  $r_h v \in V_h$  on a  $r_h v(x) = \alpha x + \beta$ , de plus  $r_h v(x_j) = v(x_j)$  et  $r_h v(x_{j+1}) = v(x_{j+1})$  donc :

$$r_h v(x) = v(x_j) + \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} (x - x_j).$$

On obtient

$$\begin{aligned} v(x) - r_h v(x) &= v(x) - v(x_j) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} (x - x_j) \\ &= \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissement finis, il existe  $y \in [x_j, x]$  et  $z \in [x_j, x_{j+1}]$  tels que

$$v(x) - r_h v(x) = (x - x_j)v'(y) - (x - x_j)v'(z) = (x - x_j) \int_z^y v''(t) dt.$$

Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |v(x) - r_h v(x)|^2 &\leq h^2 \left( \int_z^y |v''(t)| dt \right)^2 \leq h^2 \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)| dt \right)^2 \\ &\leq h^2 \left( \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} dt \right)^{1/2} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq h^3 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

On intègre  $x$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt.$$

En sommant sur  $j = 0, \dots, N$ , on obtient :

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

Il reste à obtenir une estimation sur les dérivées. Pour  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , on a

$$\begin{aligned} v'(x) - (r_h v)'(x) &= v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} = v'(x) - \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(x) - v'(t) dt = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x |v''(y)| dy dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient donc

$$\begin{aligned} |v'(x) - (r_h v)'(x)|^2 &\leq \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x |v''(y)| dy dt \right)^2 \leq \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(y)| dy dt \right)^2 \\ &\leq h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

En intégrant  $x$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$ , on a

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(x) - r_h v'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(y)|^2 dy.$$

On en déduit  $\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq h \|v''\|_{L^2(0,1)}^2$ , d'où

$$\begin{aligned} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)}^2 &= \|v - r_h v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq h^4 \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 + h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

pour  $h < 1$ , ce qui donne (2.11)

## 2.3 Méthode des éléments finis de Lagrange en dimension 1

2) On montre (2.12) pour  $v \in C^1([0, 1])$ . Le raisonnement est le même que pour 1). On montre tout d'abord que  $\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)}$  converge vers 0. soit  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , on a

$$v(x) - r_h v(x) = \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt,$$

d'où

$$|v(x) - r_h v(x)| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt + 2h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq 2h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)|^2 dt,$$

donc  $\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{2h} \|v'\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0$ .

Il reste à montrer que  $\|(r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $C^2([0, 1])$  est dense dans  $C^1([0, 1])$ , il existe  $\phi \in C^2([0, 1])$  telle que

$$\|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

pour  $u \in C^1([0, 1])$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(r_h v)'(x)|^2 dx &= \frac{1}{h} (u(x_{j+1}) - u(x_j))^2 = \frac{1}{h} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u'(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

donc  $\|(r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$ . Alors, on en déduit

$$\|(r_h v)' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} = \|(r_h(v - \phi))'\|_{L^2(0,1)} \leq \|v - \phi\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

En appliquant l'inégalité à  $\phi$ , on obtient

$$\|\phi' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq ch \|\phi''\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

pour  $h$  suffisamment petit, d'où

$$\begin{aligned} \|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} &\leq \|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} + \|\phi' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} + \|(r_h \phi)' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq c\varepsilon \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.  $\square$

**Théorème 2.2** (convergence de la méthode  $\mathbb{P}_1$ ). Soit  $u \in H_0^1(0, 1)$  la solution de (P1) et  $u_h \in V_h$  la solution de (Pf2). Alors, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0 \quad (10.2.3)$$

Autrement dit, la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  converge. De plus, si  $u \in H^2(0, 1)$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|f\|_{L^2(0,1)}. \quad (10.2.4)$$

On dit que la convergence est linéaire.

**Preuve.** La convergence est la conséquence du lemme et du théorème (2.5). L'estimation s'obtient à partir du lemme de Céa :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} &\leq c \inf_{v_h \in V} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \leq c \|u - r_h v\|_{H^1(0,1)} \\ &\leq ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = ch \|f\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

car  $-u'' + u = f$  p.p. dans  $]0, 1[$ .

## 2.4 Cas d'une condition de Neumann

Dans cette section, on étudie la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  pour le problème de Neumann :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ p.p.dans } ]0, 1[ \\ u'(0) = \alpha ; u'(1) = \beta \end{cases} \quad (10.3.1)$$

où  $f \in L^2(0, 1)$ . La formulation variationnelle du problème est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(0, 1) \text{ telle que :} \\ \forall v \in H^1(0, 1), \int_0^1 u'v' + uv dx = \int_0^1 f v dx + \beta v(1) - \alpha v(0) \end{cases} \quad (10.3.2)$$

Avec les notions de la section précédente, le problème approché est alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que :} \\ \forall v_h \in V_h, \int_0^1 u_h'v_h' + u_h v_h dx = \int_0^1 f v_h dx + \beta v_h(1) - \alpha v_h(0) \end{cases} \quad (10.3.3)$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h(x_0), \dots, u_h(x_{N+1}) \in \mathbb{R} \text{ telle que :} \\ \forall i = 0, \dots, N+1, \sum_{j=0}^{N+1} u_h(x_j) \int_0^1 \phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j dx = \int_0^1 f \phi_i dx + \beta \phi_i(1) - \alpha \phi_i(0). \end{cases}$$

On remarque que l'on a

$$\phi_i(1) = \phi_i(x_{N+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = N+1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\phi_i(0) = \phi_i(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, on définit  $b_h \in \mathbb{R}^{N+2}$  par :

$$(b_h)_i := \begin{cases} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \phi_i dx & \text{si } 1 \leq i \leq N \\ \int_{x_1}^{x_{i-1}} f \phi_0 dx - \alpha & \text{si } i = 0 \\ \int_{x_N}^0 f \phi_{N+1} dx + \beta & \text{si } i = N+1. \end{cases}$$

Ainsi, si on pose  $U_h := (u_h(x_0), \dots, u_h(x_{N+1}))^T \in \mathbb{R}^{N+2}$ , on obtient que  $U_h$  est solution de  $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ , où la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}$  est définie par

$$\mathcal{K}_h := \left( \int_0^1 \phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j dx \right)_{0 \leq i, j \leq N+1}.$$

**Remarque 2.4.** Le théorème de convergence de la méthode  $\mathbb{P}_1$  reste vrai pour la condition de Neumann.

## 2.5 Illustration numérique

On applique sur le problème (P1) avec :  
 la solution exacte est :  $u(x) = (x^2 - x)\exp(x)$  et  $f(x) = -4x\exp(x)$  On a  
 le programme suivant sous matlab qui calcule la solution approchée et  
 l'erreur en norme  $L^\infty$  et  $L^2$

```
% -u''+u=f dans ]a,b[ et zero sur le bord
clc
clear
hold off
a=input('entrer le premier bord = ');
b=input('entrer le deuxieme bord = ');
n=input('entrer le nombre delement = ');
h=(b-a)/n;
% calcul des neouds
p=zeros(1,n+1);
for i=1:n+1
p(i)=a+(i-1)*h;
end
% les noeud de bords
b=[n,n+1];
% calcul des elements
T=zeros(2,n);
for k=1:n % nombre des elements
for i=1:2 % nombre des sommet d'un elemnt
I=k+i-1;
T(i,I)=I;
end
end
% calcul des matrice de rigidite+masse =global
% 1 erement on calcule la matrice elementaire
Ke=1/h*[1 -1;-1 1]; % rigidite
Me=1*h/6*[2 1;1 2]; % masse
K=zeros(n+1,n+1);M=zeros(n+1,n+1);
for k=1:n % boucle sur chaque element
for i=1:2% nd locales
I=k+i-1;
for j=1:2
J=k+j-1;
K(I,J)=K(I,J)+Ke(i,j);
M(I,J)=M(I,J)+Me(i,j);
end
end
end
A=K+M% matrice global
%mettre les conditions au bord
A(1,:)=0;A(1,1)=1;
A(n+1,:)=0;A(n+1,n+1)=1;
% partie la source
f=@(x)(-4*x).*exp(x);
```

```

F=zeros(n+1,1);
for k=1:n
for i=1:2
I=k+i-1;
F(I)=F(I)+h/2*f(p(I)); % trapeze
end
end
F(1)=0;F(n+1)=0;
% solution du probleme
hold on
Uh=A\F;
plot(p,Uh,'r+');
ue=@(x)(x.^2-x).*exp(x);
uue=ue(p);
plot(p,uue,'b*');
e0=norm(uue-Uh',Inf)
e2=norm(uue-Uh',2)
plot(p,uue-Uh', 'g. ')

```

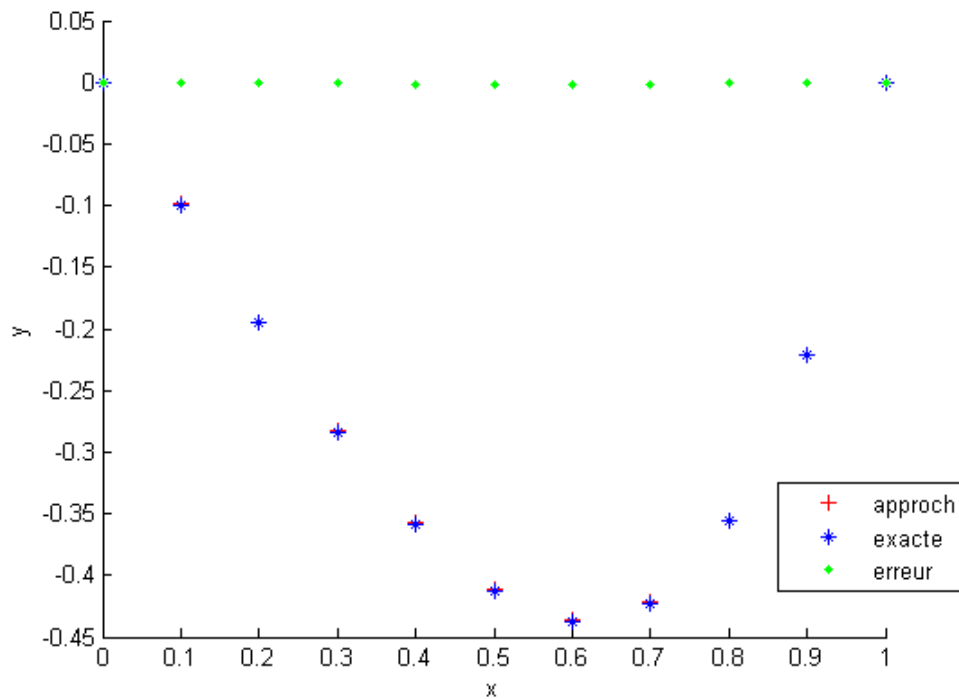


FIGURE 2.1 – Solution exacte, approchée et l'erreur pour  $h=0.1$  et  $n=10$

Nombre des élément	le pas h	l'erreuren norme L2
10	0.1	0.0030
50	0.0200	2.7114e-04
100	0.001	9.5867e-05

TABLE 2.1 – l'erreur pour  $n=10,50,100$

# Chapitre 3

## Méthode des élément finis en dimension 2 P1

Dans ce chapitre nous étudions numériquement un problème elliptique en dimension 2 par la méthode des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_1$ (pôlynome d'ordre un), Nous intéressant par le calcul de la solution approchée l'existence , l'unicité de solution , estimation d'erreur par suite ; nous proposons une méthode de programmation en Matlab par Pdetoolboxe, et nous donnons un exemple d'applications (reselta/numérique).

### 3.1 Position du problème

On considère le problème posé dans le chapitre 1 Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ , un ouvert borné non vide de frontière régulière,  $N \geq 2$ . On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f & \text{p.p. dans } \Omega \\ c \cdot \vec{n} \cdot \nabla u + qu = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P5})$$

Avec les données :  $f \in L^2(\Omega)$  ,  $c \in C^1(\bar{\Omega})$  ,  $a \in L^\infty(\Omega)$ ;  $c(x) \geq c_0 > 0$  et  $a(x) \geq a_0 > 0$  pour tout  $x \in \Omega$ , deplus  $q \in L^\infty(\partial\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  et  $q \geq 0$ .

Donc on a la formulation variationnelle du problème :

$$\begin{cases} \exists u \in V = H^1(\Omega) \\ \tilde{a}(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \text{ avec} \\ \tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega} c \cdot \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} auv \, dx + \int_{\partial\Omega} quv \, ds \\ L(v) = \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, ds \end{cases} \quad (\text{Pf5})$$

Ce problème admet un unique solution par le théorème de Lax-Milgram

D'après le principe de la méthode des éléments finis , on remplace l'espace  $V$  par un espace  $V_h$  de dimension fini , donc nous obtenons le problème approchée suivant :

$$\begin{cases} \exists u_h \in V_h \\ \tilde{a}(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (P_{F_h})$$

Soit  $N$  la dimension de  $V_h$ ,  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  une base de  $V_h$  alors :

$$u_h \in V_h \Leftrightarrow \exists (u_1, u_2, \dots, u_N) : u_h(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x, y)$$

On remplace dans  $(P_{F_h})$  et on utilisé la linéarité de  $\tilde{a}$  on a :

$$\sum_{j=1}^N u_j \tilde{a}(\varphi_j, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\Leftrightarrow \langle (u_1, \dots, u_N), (a(\varphi_1, v_h), \dots, a(\varphi_N, v_h)) \rangle_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} = L(v_h)$$

On cherche  $N$  inconnues, donc on choisit :  $v_h = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N}$

$$\sum_{j=1}^N u_j \tilde{a}(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (3.1)$$

On pose

- $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ , avec  $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$
- $U = (u_j)_{1 \leq j \leq N}$  et  $F = (L(\varphi_i))_{1 \leq i \leq N}$

Donc le problème  $(P_{F_h})$  consiste à résoudre le système linéaire :  $AU = F$ .  
 Nou rappelons que si  $A$  est symétrique alors elle est inversible donc on a

l'existence la solution approchée :  $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j$ .

Dans le cas général on a l'estimateur de l'erreur d'après lemme de Cèa (chapitre 2) est

$$\|u - u_h\|_V \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

## 3.2 Méthode des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ en 2D

On définit les polynômes d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$\mathbb{P}_1[x, y] = \{p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad p(x, y) = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

C'est un sous espace de dimension 3, de l'espace de fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , son base canonique est  $\{1, x, y\}$ .

**Proposition 3.1.** *Soit  $T$  un triangle non-dégénéré de  $\mathbb{R}^2$ , de sommets  $A_1, A_2, A_3$ , il existe un unique polynôme de  $\mathbb{P}_1$  prenant des valeurs fixées aux sommets de  $T$*


### 3.3 Les fonctions de forme sur triangle

**Preuve.** Pour  $i = 1, 2, 3$ , notons  $(x_i, y_i)$  les coordonnées du sommet  $A_i$  et  $f_i = p(x_i, y_i)$  la valeur imposée au même sommet, nous devons trouver 3 nombres  $a, b, c$ . Ces conditions sont équivalentes au système linéaire

$$ax_i + by_i + c = f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \text{Aire}(T)$$

est égal à la surface du triangle  $T$ , Comme ce triangle est supposé non-dégénéré, le déterminant est non-nul, et le système possède une solution unique. 

Pour construire l'espace approchée  $V_h$  nous suivants les deux étapes suivants :

**Étape 1 :** Pour définir l'espace d'approximation  $V_h$  nous commencons par remplacer l'ouvert  $\Omega$  par une structure discrète (par les triangle)on subdivise  $\Omega$  en  $N$  éléments .

**Définition 3.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert connexe polyédrique de  $\mathbb{R}^2$ . Un maillage triangulaire ou une triangulation de  $\bar{\Omega}$  est un ensemble  $T_h$  (non dégénérés)  $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$  qui vérifient :

- $T_i \subset \bar{\Omega}$  et  $\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq i \leq N} T_i$
- l'intersection  $T_i \cap T_j$  de deux triangle distincts soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune entière. les sommets ou noeuds du maillage  $T_h$  sont les sommets des  $T_i$  qui le composent. Par convention, le paramètre  $h$  désigne le maximum des diamètres des  $T_i$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $\Omega = [0, 1]^2$  on subdivise le domaine par la méthode de Delaunay. La triangulation de Delaunay d'un ensemble de  $n$  points est l'unique triangulation telle qu'un cercle passant par les trois points d'un triangle ne contienne aucun autre point

triangulation simple voire la figure 3.2

**Étape 2 :** écrire la forme de la fonction sur chaque élément de  $\Omega$  et cette écriture permet de trouver la base et la dimension  $V_h$ .

Nous arrivons maintenant à l'étape de création de l'espace d'approximation  $V_h$  Nous posons tout d'abord

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v_h|_T \in \mathbb{P}_1[x, y], \forall T_i \in T_h\} \quad (3.2)$$

Les fonction de  $V_h$  sont Affines sur chaque triangle de  $T_h$

### 3.3 Les fonctions de forme sur triangle

Dans chaque triangle  $T_i$  de sommets  $A_1, A_2, A_3$ , il n'y a que 3 fonctions de base non-nulles. Les restrictions de ces fonctions de base  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , sont les trois fonctions polynomiales de degré un prenant la valeur 1 en un des sommets et nulles aux deux autres sommets. Notons les respectivement

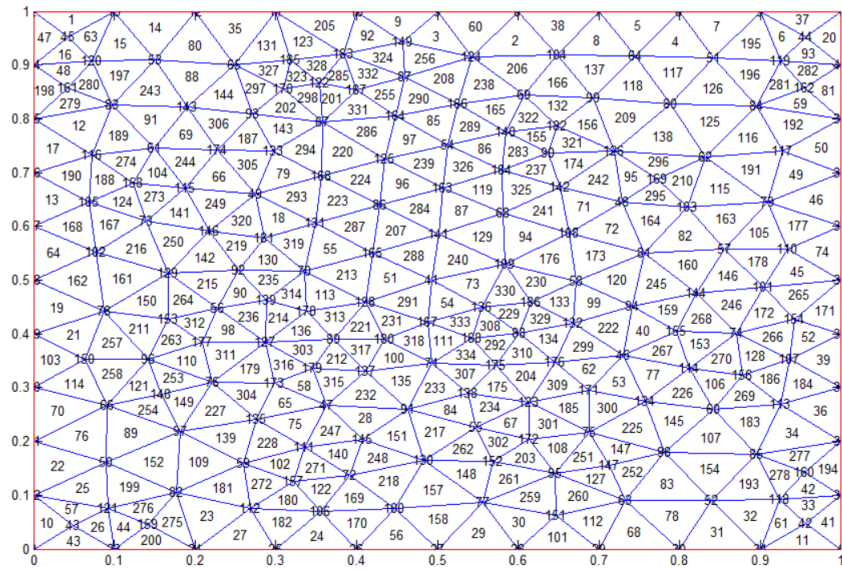


FIGURE 3.1 – Maillage : triangulation de Delaunay

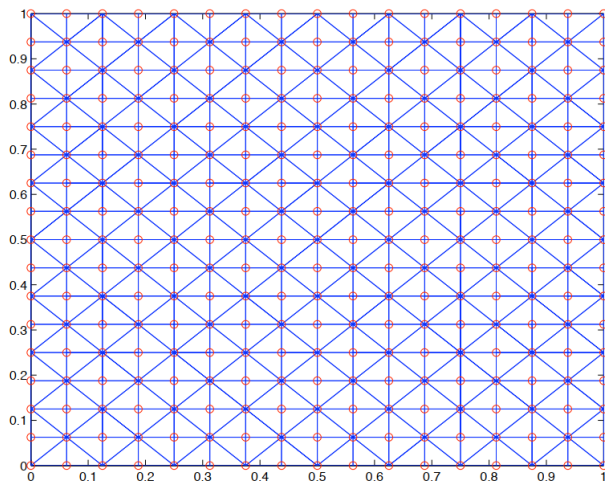


FIGURE 3.2 – Maillage : triangulation simple

### 3.3 Les fonctions de forme sur triangle

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

$\lambda_1$  est le polynôme de degré un prenant la valeur 1 en  $A_1$  et nul en  $A_2$  et  $A_3$

$$\lambda_1(x, y) = ax + by + c$$

$\lambda_1$  est donc déterminé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c = 1 \\ \lambda_1(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c = 0 \\ \lambda_1(x_3, y_3) = ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2.Aire(T)$$

est différent de zéro si les points  $A_1, A_2, A_3$  ne sont pas alignés.

En résolvant le système  $3 \times 3$  ci-dessus et les systèmes analogues pour  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  on obtient les formules suivantes :

$$\lambda_1(x, y) = \frac{x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2y_3 - y_2x_3}{2.Aire(T)} \quad (3.3)$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{x_1(y - y_3) - y_1(x - x_3) + xy_3 - yx_3}{2.Aire(T)} \quad (3.4)$$

$$\lambda_3(x, y) = \frac{x_1(y_2 - y) - y_1(x_2 - x) + x_2y - y_2x}{2.Aire(T)} \quad (3.5)$$

On en déduit les expressions suivantes des gradients :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2.Aire(T)}, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2.Aire(T)} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2.Aire(T)}, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2.Aire(T)} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2.Aire(T)}, \quad \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2.Aire(T)} \quad (3.8)$$

Les trois fonctions  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , s'appellent les coordonnées barycentriques du triangle  $T$ , car elles représentent en chaque point  $M(x, y)$  le rapport des aires algébriques des triangles  $MA_iA_j$  et  $T$ .

par exemple

$$\lambda_1(M) = \frac{Aire(A_2A_3M)}{Aire(T)} \text{ et } \lambda_1(M) + \lambda_2(M) + \lambda_3(M) = 1$$

Une fonction quelconque de  $V_h$  prenant les valeurs  $v_1, v_2, v_3$  aux sommets  $A_1, A_2, A_3$  du triangle  $T_i$  s'écrit dans  $T_i$  sous la forme

$$v_h(x, y) = v_1\lambda_1(x, y) + v_2\lambda_2(x, y) + v_3\lambda_3(x, y) \quad (3.9)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont linéairement indépendantes car  $\lambda_i(A_j) = \delta_{ij}$  pour  $i, j = 1, 2, 3$  et

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R}; \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \forall M \in T_i : \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i(M) = 0$$

en particulier si  $M = A_j : \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i(A_j) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$  pour  $j = 1, 2, 3$

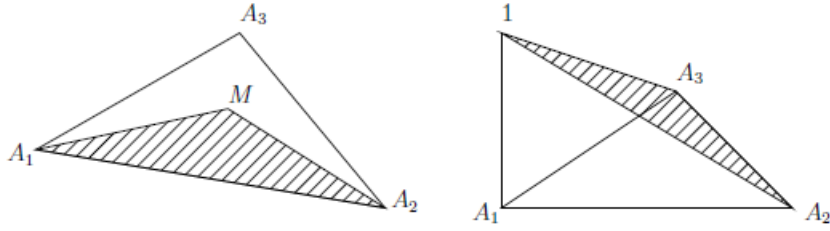


FIGURE 3.3 – Les fonctions barycentriques

### 3.4 Description de l'espace d'approximation

**Lemme 3.1.** :  $V_h$  est une approximation interne de  $H^1(\Omega)$  :  $V_h \subset H^1(\Omega)$ .

**Preuve.** Toute fonction  $v \in V_h$  appartient à  $L^2(\Omega)$  montrons qu'elle possède une dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$ .

Pour cela , définissons la fonction  $v \in L^2(\Omega)$  par sa restriction à chaque triangle  $T_i \in T_h$  et on note par

$$w_j|_{T_i} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)|_{T_i}$$

par la formule de Green , nous avons alors , pour  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \sum_{T_i \in T_h} \int_T v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= \sum_{T_i \in T_h} \left( - \int_{T_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial T_i} \varphi(x) v(x) n_j|_{T_i} d\gamma(x) \right) \end{aligned}$$

Comme  $v$  est continue sur  $T$  , étant donné deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  ayant une arête commune  $L$  , on a  $v|_{T_1} = v|_{T_2}$  sur  $L$  , et également  $n_{T_1} = -n_{T_2}$  Par ailleurs ,  $\phi$  s'annule sur le bord de  $\Omega$  , En regroupant la dernière somme de la précédente équation il vient

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \int_{\Omega} \varphi(x) w_j(x) dx + \sum_L \int_L (v|_{T_1} - v|_{T_2}) \varphi n_{T_1,j} d\gamma(x) = - \int_{\Omega} \varphi(x) w_j(x) dx$$

ce qui prouve que  $\frac{\partial v}{\partial x_j} = w_j \in L^2(\Omega)$  Il est alors immédiat de voir que  $V_h \subset H^1(\Omega)$

☞.

Nous construisons maintenant une base particulière de  $V_h$  , liée à la triangulation  $T_h$  , Notons  $N_s$  le nombre de sommets, et  $N_s^D$  le nombre de sommets non situés sur  $\partial\Omega$ , Pour tout sommet  $A_i$  de  $T_h$ , définissons la fonction  $\lambda_i$  par

$$\lambda_i(A_j) = \delta_{ij}.$$

**Proposition 3.2.** la fonction  $\lambda_i$  est élément de  $V_h$ . L'ensemble  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_s}$  forme une base de  $V_h$ .

### 3.5 Mise en oeuvre de la méthode

---

**Preuve.** Pour chaque triangle  $T \in T_h$ , la fonction  $\lambda_i$  est bien définie, d'après la proposition 3.1, il nous reste à montrer que  $\lambda_i$  est continue pour conclure qu'elle est élément de  $V_h$ .

Pour la continuité, il suffit d'examiner ce qui se passe sur une arête commune à deux triangles, soit donc  $T$  et  $T'$  deux triangles ayant une arête commune  $L$ , Alors la trace sur  $L$  de la restriction de  $\lambda_i$  à  $T$  est une fonction affine, et il en est de même sur  $T'$ , Or les deux traces coïncident aux extrémités de  $L$ , par hypothèse, et sont donc égales sur tout  $L$ , ce qui prouve la continuité de  $\lambda_i$ .

D'après la définition de  $\lambda_i$ , on a pour toute fonction  $v \in V_h$  :

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{N_s} v(a_i) \lambda_i(x, y)$$

puisque cette relation est vraie sur chaque triangle  $T \in T_h$  la famille  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N_s}$ , forme donc un système générateur et libre de  $V_h$ .

☞.

le support de  $\lambda_i$  est réduit à l'union des triangles ayant le noeud  $A_i$  pour sommet.

### 3.5 Mise en oeuvre de la méthode

Du point de vue de la mise en oeuvre, et en supposant que le maillage est donné, les tâches principales sont la formation et la résolution du système linéaire (3.1). Donc nous nous attachons au calcul de la matrice  $A$  et du second membre  $F$  de ce système linéaire.

D'après l'équation, les éléments de la matrice  $A$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} c \cdot \nabla \lambda_j \cdot \nabla \lambda_i \, dx + \int_{\Omega} a \lambda_j \lambda_i \, dx + \int_{\partial\Omega} q \lambda_j \lambda_i \, ds \\ &= \sum_{T \in T_h} \left( \int_T c \cdot \nabla \lambda_j \cdot \nabla \lambda_i \, dx + \int_T a \lambda_j \lambda_i \, dx \right) + \sum_{T \in T_h} \int_{\partial\Omega \cap T} q \lambda_j \lambda_i \, ds \\ &= \sum_{T \in T_h} (R_{ij} + M_{ij}) + \sum_{T \in T_h} Q_{ij} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{\Omega} f \lambda_i \, dx + \int_{\partial\Omega} g \lambda_i \, ds \\ &= \sum_{T \in T_h} \int_T f \lambda_i \, dx + \sum_{T \in T_h} \int_{\partial\Omega \cap T} g \lambda_i \, ds = \sum_{T \in T_h} (f_i + G_i) \end{aligned}$$

La matrice  $A$  apparaît comme la somme de trois matrices  $R$ ,  $M$  et  $Q$ . Elle est donnée par la formule d'approximation de l'intégrale par point au milieu. Soit  $T$  un triangle de  $T_h$  de sommet  $A_1, A_2, A_3$  alors il existe trois fonctions de base non nulle de contribution dans la matrice globale par une matrice élémentaire de  $3 \times 3$  et pour la seconde membre un vecteur

de  $3 \times 1$  et on a les formules d'approximation suivantes :

$$R_{ij} = \int_T c \cdot \nabla \lambda_j \cdot \nabla \lambda_i dx = \frac{1}{4Air(T)} c(A_c) [y_j, x_i] \cdot [y_j, x_i]^t \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$M_{ij} = \int_T a \lambda_j \lambda_i dx = a(A_c) \frac{air(T)}{12} (\delta_{ij} + 1), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$Q_{ij} = \int_{\partial\Omega \cap T} q \lambda_j \lambda_i ds = q(p_c) (1 + \delta_{ij}) \|A_1 - A_2\| / 6, \quad i, j = 1, 2; p_c \text{ le milieu du segment } [A_1, A_2]$$

$$f_i = \int_T f \lambda_i dx = f(A_c) \frac{air(T)}{3}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$G_i = \int_{\partial\Omega \cap T} g \lambda_i ds = g(p_c) \|A_1 - A_2\| / 2, \quad i = 1, 2$$

(3.11)

avec  $A_c = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$  centre de gravié de triangle, et on a  $\lambda_i(A_c) = 1/3$

On obtient ainsi la matrice élémentaire de coefficients :

**Exemple 3.2.** En particulier, dans le cas du triangle rectangle isocéle de sommets  $A_1 = (0, 0)$ ,  $A_2 = (1, 0)$ ,  $A_3 = (0, 1)$  souvent utilisé comme triangle de référence, on a la matrice élémentaire pour  $c = 1, a = 1$  suivante :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Et

$$f_i = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$$

### 3.5.1 Assemblage du matrice globale et de vecteur seconde membre

L'assemblage se base sur la forme des éléments de la matrice et du second membre comme somme d'intégrales sur les éléments du maillage.

Pour réaliser ce calcul, nous aurons besoin de supposer que la description du maillage comporte, pour chaque élément, la liste de ses sommets. L'algorithme d'assemblage comporte une boucle principale sur les nombre des éléments. Pour chaque élément  $T$ , on calcul les matrices et les vecteurs élémentaires et on ajoute la contribution dans la matrice globale et le vecteur global.

Algorithme POUR  $k = 1, N$  FAIRE boucle sur les éléments

POUR  $i = 1, 3$  FAIRE boucle sur les numéros locaux

$I = \text{numero}(k,i)$  numéros globaux

POUR  $j = 1, 3$  FAIRE

$J = \text{numero}(k,j)$

$A(I,J) = A(I,J) + a_k(i,j)$   $A$  : matrice globale,  $a$  matrice élémentaire

FIN DES 3 BOUCLES

on applique aussi pour la seconde membre et faire modification pour les conditions aux bord.

## 3.6 Convergence

L'opérateur d'interpolation

La stratégie pour démontrer la convergence sera de construire une fonction  $I_K v$  dont on peut majorer la distance à une fonction  $v \in V$  donnée. Commençons par construire cet opérateur localement.

**Définition 3.2.** Soit  $K$  un triangle de sommets  $A_1, A_2, A_3$ . On appelle opérateur d'interpolation sur un triangle  $K$  l'application

$$I_K : C^0(K) \rightarrow P_1$$

$$v \rightarrow I_K(v) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v(A_i).$$

Le *diamètre* de  $K$ , noté  $\text{diam}(K)$ , est la plus grande distance entre deux points de  $K$ .

La *rondeur* de  $K$  est le diamètre du plus grand cercle inscrit dans  $K$ . Le rapport  $\text{diam}(K)/\rho(K)$  mesure « l'aplatissement » de  $K$ . Il est d'autant plus grand que le triangle est proche d'être dégénéré

**Théorème 3.1.** On a les inégalités suivantes, pour  $v \in C^2(K)$  :

$$\forall P \in K, \quad |(v - I_K v)(P)| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(K)^2 \|D^2 v\|_{L^\infty}, \quad (3.12)$$

$$\forall P \in K, \quad |\nabla(v - I_K v))(P)| \leq \frac{\text{diam}(K)^2}{2\rho(k)} \|D^2 v\|_{L^\infty}, \quad (3.13)$$

Avec

$$\|D^2 v\|_{L^\infty(k)} = \left( \max_{(x,y) \in K} \sup \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) \right|, \sup_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) \right|, \sup_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) \right| \right) \quad (3.14)$$

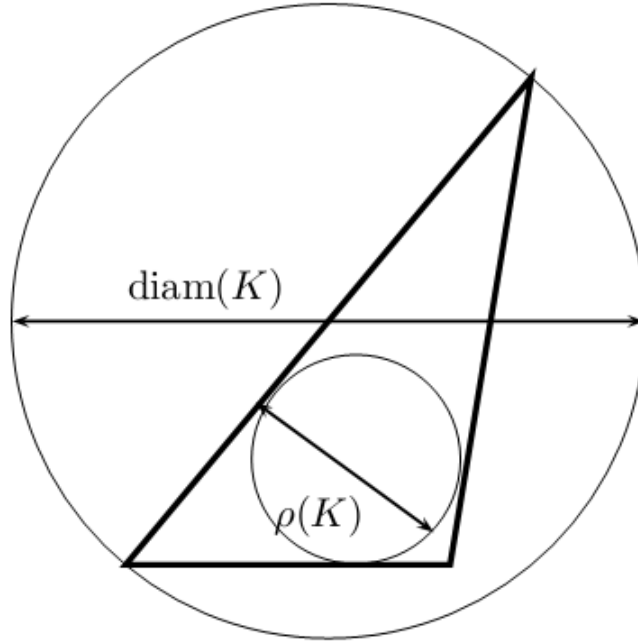


FIGURE 3.4 – Diamètre et rondeur d'un triangle

**Preuve.** Puisque  $V \in C^2(K)$ , nous pouvons utiliser un développement de Taylor en chacun des sommets de  $K$ . Pour tout point  $P \in K$ , il existe trois points  $\xi_I \in [A_I, P]$  tels que

$$v(A_I) = v(P) + \nabla v(P) \cdot (A_I - P) + \frac{1}{2} (A_I - P)^t D^2 v(\xi_I) (A_I - P)$$

Calculons

$$\begin{aligned} I_K v &= \sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) v(A_I) \\ \sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) v(A_I) &= v(P) \sum_{i=1}^3 \lambda_I(P) + \nabla v(P) \cdot \sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) (A_I - P) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) (A_I - P)^t D^2 v(\xi_I) (A_I - P). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mais  $\sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) = 1$  et  $\sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) A_I = P$ , il vient

$$I_K v(P) - v(P) = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^3 \lambda_I(P) (A_I - P)^T D^2 v(\xi_I) (A_I - P).$$

d'où l'estimation puisque  $|A_I - P| \leq \text{diam}(K)$ .

Pour l'estimation 2, multiplions l'équation (3.14) par  $\nabla \lambda_I(P)$  et sommons les 3 équations en remarquant que

$$\sum_{I=1}^3 \nabla \lambda_I(P) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \nabla \lambda_I(P) \cdot P = 1$$

### 3.6 Convergence

relation qui s'obtiennent par différentiation. On en déduit

$$\sum_{I=1}^3 \nabla \lambda_I(P) v(A_I) = v(P) \sum_{I=1}^3 \nabla \lambda_I(P) + \nabla v(P) \cdot \sum_{I=1}^3 \nabla \lambda_I(P) (A_I - P) \quad (3.16)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{I=1}^3 \nabla \lambda_I(P) (A_I - P)^t D^2 v(\xi_I) (A_I - P) \quad (3.17)$$

$$= \nabla v(P) + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^3 \nabla \lambda_I(P) (A_I - P)^t D^2 v(\xi_I) (A_I - P) \quad (3.18)$$

Puis

$$|\nabla(I_k v(P)) - v(P)| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(K)^2 \sup_{P \in K, 1 \leq I \leq 3} |\nabla \lambda_I(P)| \|D^2 v\|_{L^\infty(K)}$$

☞.

En intégrant cette relation, et compte tenu du lemme nous obtenons l'estimation.

**Lemme 3.2.** Pour  $I=1,2,3$  :

$$|\nabla \lambda_I(P)| \leq \frac{1}{\rho(K)}$$

**Preuve.** Puisque les coordonnées barycentriques sont des fonctions affines de  $P$ , leurs gradients sont des constantes. On a donc, pour deux points  $P$  et  $Q$  dans le triangle  $K$ ,

$$\nabla \lambda_I \cdot (P - Q) = \lambda_I(P) - \lambda_I(Q)$$

et donc  $|\nabla \lambda_I \cdot (P - Q)| \leq 1$

Par ailleurs en notant  $S$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$|\nabla \lambda_I| \leq \sup_{u \in S} |\nabla \lambda \cdot u|$$

et comme, pour  $u \in S$  il existe  $P$  et  $Q$  dans  $K$  tels que  $P - Q = \rho(K)u$  il vient :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad |\nabla \lambda_i| \leq \sup_{P, Q \in K} \frac{|\nabla \lambda_i \cdot (P - Q)|}{\rho(K)} \leq \frac{1}{\rho(K)}$$

☞.

### Estimation de l'erreur

Pour déduire le résultat de convergence des estimations précédentes, nous devons faire une hypothèse sur la famille de maillages.

**Définition 3.3.** Nous dirons qu'une famille de triangulations  $T_{h_h} > 0$  est régulière si

1. la suite  $h = \max_{k \in T_h} \text{diam}(K)$  tend vers 0;

2. il existe une constante  $C > 0$ , telle que pour tout  $h > 0$ , et tout  $K \in T_h$

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C$$

**Remarque 3.1.** la condition 2 signifier que les triangles de  $T_h$  ne soit pas trop aplatis.

Pour appliquer les résultats du paragraphe précédent , nous introduisons l'opérateur d'interpolation globale. Pour tout fonction  $v$  continue sur  $\Omega$ , définissons

$$I_h v = \sum_{i=1}^{N_s} \varphi_i v(A_i)$$

Où, rappelons-le,  $A_i$  est le  $i^e$  sommet de la triangulation, et  $\varphi_i$  la fonction de base associée.

Naturellement, l'opérateur d'interpolation global est lié aux opérateurs locaux introduits au paragraphe précédent par

$$\forall K \in T_h, (I_h v)|_K = I_K(v|_K).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce paragraphe.

**Théorème 3.2.** Soit  $T_h$  une famille de triangulations régulières, d'un ouvert polygonal  $\Omega$ . Supposons que la solution exacte  $u \in C^2(\Omega)$ . Alors la méthode des éléments finis converge, et on les estimations

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_0 h^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq C_1 h \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Où  $C_0$  et  $C_1$  sont deux constantes indépendantes de  $h$ .

**Preuve.** D'après le lemme de Céa ,il suffit de montrer qu'il existe une fonction  $v_h \in V_h$  telle que

$$\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Naturellement, la fonction  $v_h$  sera l'interpolé de la solution exacte  $v_h = I_h u$ . C'est ici que nous avons besoin de la régularité  $u \in C^2(\Omega)$ , puisque l'opérateur  $I_h$  n'est pas défini sur  $H^1(\Omega)$  Pour démontrer les estimations du théorème, calculons

$$\int_{\Omega} |u - I_h u|^2 dx = \sum_{K \in T_h} \int_K |u|_K - I_K(u|_K)|^2 dx \leq \frac{1}{2} h^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|$$

Pour la seconde estimation, nous avons de manière similaire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u - I_h(u))|^2 dx &= \sum_{K \in T_h} \int_K |\nabla(u|_K - I_K(u|_K))|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| \sum_{K \in T_h} \frac{\text{diam}(K)^2}{\rho(K)} |K| \end{aligned}$$

### 3.7 Illustration numérique

---

Nous utilisons ici l'hypothèse de régularité du maillage. Pour tout  $K \in T_h$ ,

$$\frac{\text{diam}(K)^2}{\rho(K)} \leq C \text{diam}(K)$$

On en déduit

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - I_h u)|^2 dx \leq C_1 h |\Omega| \|D^2 u\|_{L^\infty}$$

qui est l'estimation cherchée

☞.

## 3.7 Illustration numérique

### 3.7.1 La PDE Toolbox de Matlab

La PDE Toolbox de Matlab est un module de Matlab qui offre à la fois tout un panel de commandes principalement dédiées, à la résolution des équations aux dérivées partielles à l'aide de la méthode des éléments finis de Lagrange  $P1$  en deux dimensions, elle fournit un environnement graphique pratique.

### 3.7.2 Étape typique pour résoudre un E.D.P

1. Définit la géométrie 2-D du problème.
2. Définir les conditions aux limites.
3. Définir les coefficients PDE.
4. Création de maillage ( triangulation de Delaunay)
5. Calcul e la solution approchée et dessiner le graphe.

**Exemple 3.3.** On considère dans le Problème (P5) que  $\Omega = ]0, 1[^2$ ,  $c = 1$ ,  $a = 1$ ,  $q = 1$  et  $f(x, y) = x^3 - 6x$ . on donne la fonction  $g$  par :

$$g(x, y) = \begin{cases} 2 + x^3 & \text{si } y = 0 \wedge x \in [0, 1] \\ 4 + \exp(-y) & \text{si } x = 1 \wedge y \in [0, 1] \\ x^3 & \text{si } y = 1 \wedge x \in [0, 1] \\ \exp(-y) & \text{si } x = 0 \wedge y \in [0, 1] \end{cases}$$

Alors la fonction  $u(x, y) = x^3 + \exp(-y)$  est l'unique solution exacte du (P5). Maintenant calculons la solution approchée par la méthode des éléments finis  $P1$  en utilisant `Pdetoobox`

1. Dessin du domaine, voir la figure 3.5
2. Définir les conditions aux limites, voir la figure 3.6
3. Définir les coefficients E.D.P, voir la figure 3.7
4. Création de maillage ( triangulation de Delaunay) voir la figure 3.8
5. Calcul e la solution approchée et dessiner sa courbe, voir la figure 3.9

Nous terminons par le calcul de l'erreur en norme  $L2$  entre l'exate et l'approch'ee voir le tableau 3.7.2

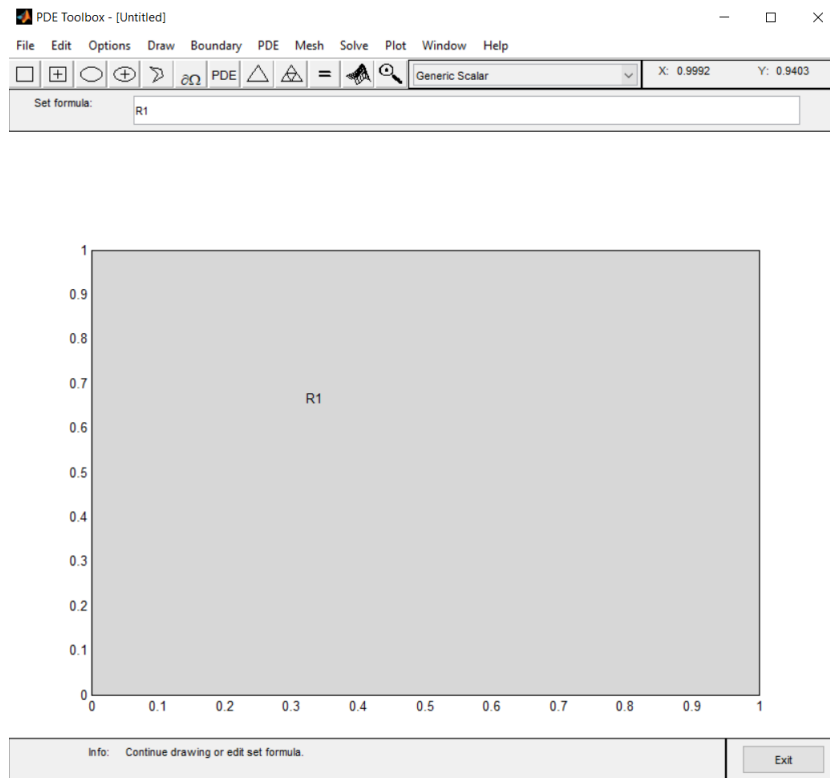


FIGURE 3.5 – Domaine  $\Omega$

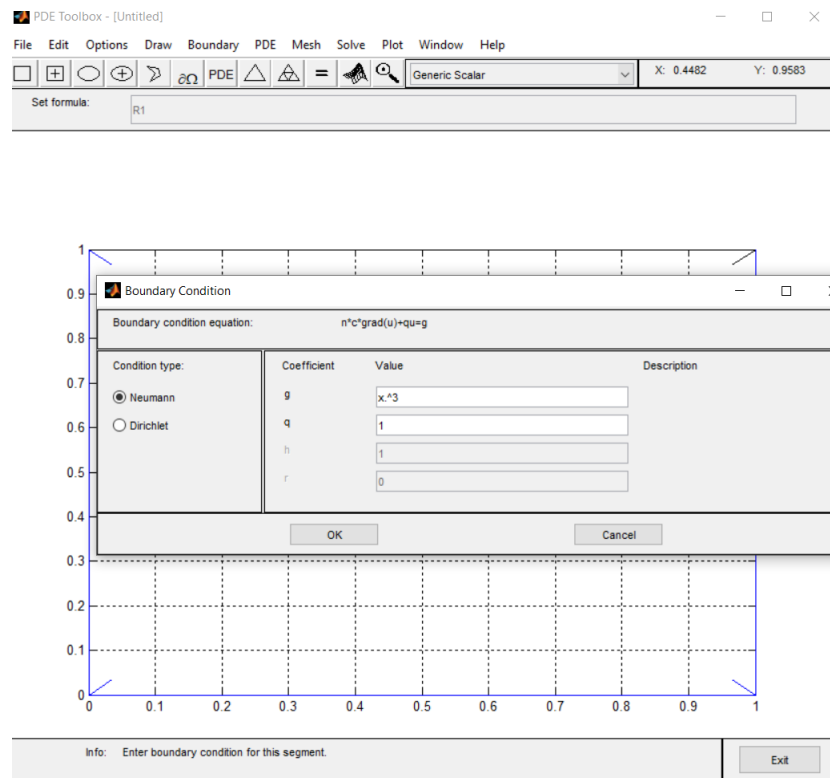


FIGURE 3.6 – Mettre les conditions aux bord

Nombre des élément	nombre des noeuds	l'erreur en norme L2
312	177	0.0271
1248	665	0.0128
19968	10145	0.0030

### 3.7 Illustration numérique

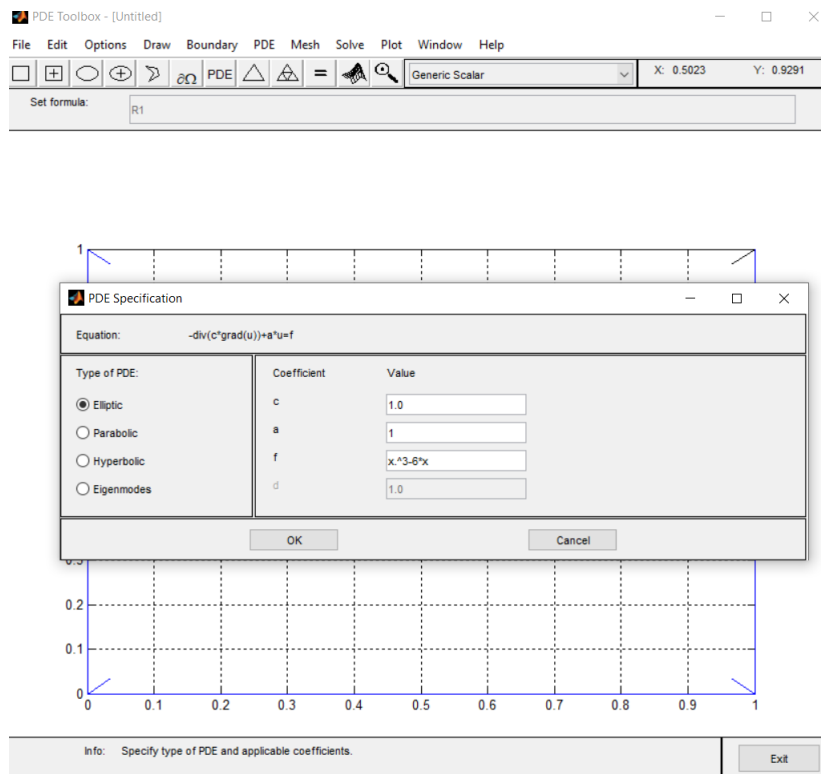


FIGURE 3.7 – Mettre les coefficient  
voir la figure

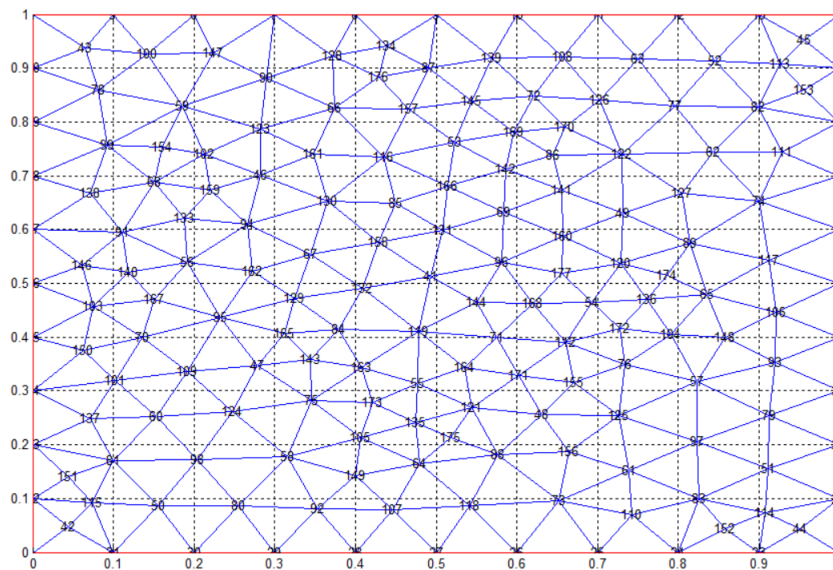


FIGURE 3.8 – Maillage et noeuds

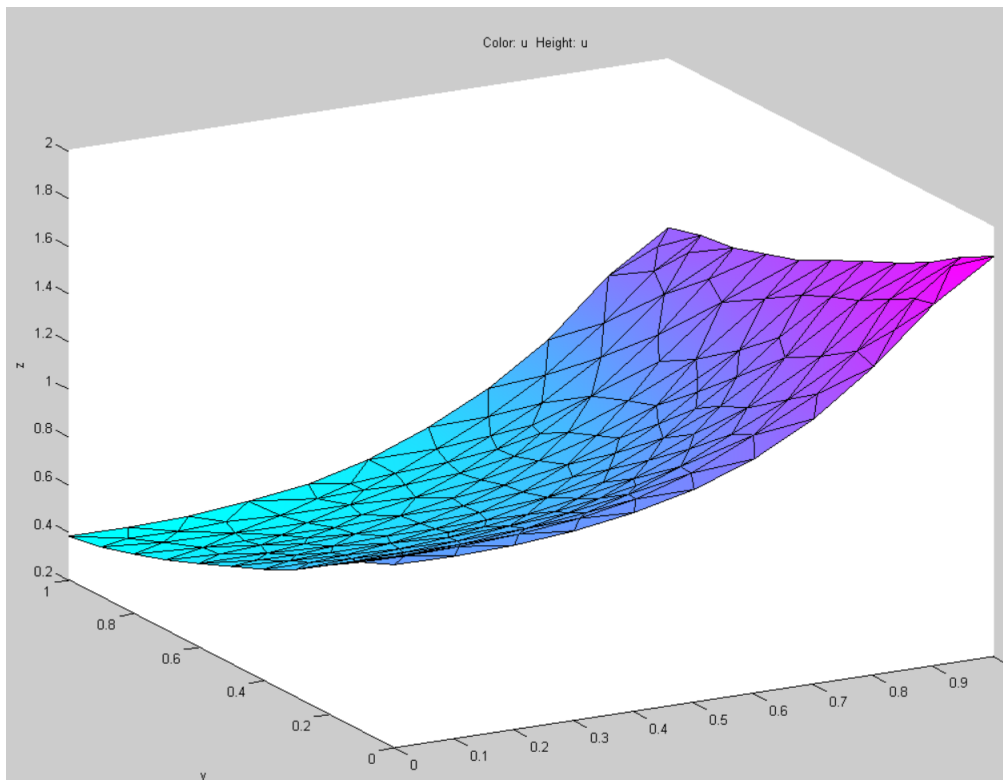


FIGURE 3.9 – Solution approchée

# conclusion

Ce travail, nous présentons une méthode numérique d'approximation de résolution des problèmes aux limites elliptiques. L'idée de base de cette méthode est de remplacer l'espace de Hilbert  $V$  sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace  $V_h$  de dimension finie. La méthode d'éléments finis est une discrétisation plus adaptée pour des problèmes aux limites qui donne la procédure de calcul des fonctions d'interpolation de Lagrange P1 c'est la meilleure technique d'approximation pour les problèmes aux limites dans des domaines d'ingénierie complexes.

# Bibliographie

- [1] Grégoire ALLAIRE *PolycopiÈ DU COURS MAP 431, Ècol Polytechnique, année 2015-2016.*
- [2] Haïm.Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Dunod,PARIS-France,1999.*
- [3] Dominique Azè. *Element d'analyse convexes et variationnelle, Mathématique pour le 2 cycle, ISBN 2-7298-9751-8 ellipser / éditions mareketing S.A, 1997 Paris.*
- [4] M.Kern. *Introduction à la méthode des éléments finis, 2004-2005.*
- [5] M.Kern. *Introduction à la méthode des éléments finis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris,2004-2005.*
- [6] Stéphanie.Marchesseau Dimitri Bettebghor. *Résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires et couplées. ECOLE DES MINES DE NANCY,2006-2007.*
- [7] V.Manet. *Méthode des éléments finis, France,4-14 Nov 2003.*
- [8] J-H Saiac . *Méthode des élément finis, 24 Mars 2005.*
- [9] K.Saleh. *Introduction à la méthode des élément finis ;Université Pierre et Marie Curie,Paris,le 22 décembre 2011.*