

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**



Université du 20 Août 1955 Skikda

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique



N° d'ordre : D012123019D

THÈSE

**Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES
Spécialité : Maintenance Industrielle**

**Par :
Mr. HAMRELAINE Salim**

***Contribution à l'étude d'un écoulement Ferro
Fluide dans un convergent-divergent en rotation
sous l'effet d'un champ magnétique externe***

Soutenue le: 05/10/2023

Devant le Jury composé par :

BOUZAOUIT Azzedine

SARI Mohamed Rafik

BOUCHEHIT Bachir

GUERBAI Salah

DIB Amar

KHERIEF Nacereddine Mohamed

Pr

Pr

MCA

MCA

MCA

MCA

Université 20 Aout 1955 Skikda

Université. Badji Mokhtar Annaba

Université 20 Aout 1955 Skikda

Université Mohamed Khider Biskra

Université. Badji Mokhtar Annaba

ENSET de Skikda

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

DÉDICACE

JE DÉDIE CE TRAVAIL

A ma famille, qui a fait de moi ce que je suis aujourd'hui :

Spécialement ma défunte mère que le bon dieu, l'accueille dans son vaste paradis, qui m'a apporté son soutien, que ça soit moral ou financier, et sans son apport je n'aurais jamais pu poursuivre mes études ou faire quoi que ce soit dans cette vie, jalonnée de difficultés multiples.

A mon père, qui a su nous inculquer l'amour de l'effort, l'honnêteté et la force pour ne jamais baisser les bras.

A mes frères et sœurs, qui m'ont toujours soutenu et encouragé

A mon épouse, qui a été un grand soutien, un apport psychologique et surtout un partenaire qui m'a beaucoup aidé dans la rédaction de cette thèse.

A mes deux enfants (Slimane et Tinhinane), qui me procurent la force et la joie de vivre

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de thèse,

***Le** Professeur **Mohamed Rafik Sari** pour avoir accepté de proposer, diriger, conseiller et surtout, montrer une patience hors pair pour mener à bien ce travail.*

***Mes** remerciements, s'adressent également au professeur **Bouzaouit**, pour son acceptation de présider le jury.*

Sont également destinataires de mes remerciements, messieurs les membres du jury qui n'ont pas hésité un seul instant à répondre présent pour être parmi nous le jour de la soutenance et surtout d'avoir consacré un temps très précieux dans la lecture de cette thèse, malgré leurs nombreuses occupations, surtout, pendant cette période de l'année.



Résumé

Cette thèse étudie l'écoulement hydromagnétique d'un Ferro-nano fluide à travers des canaux rotatifs convergents/divergents.

En utilisant les transformations appropriées, les équations aux dérivées partielles (PDE) issues de la modélisation mathématique sont transformées en équations différentielles ordinaires (ODE).

Par la suite, les équations ordinaires avec les conditions aux limites sont traitées numériquement à l'aide de la méthode de *Runge Kutta* associée à méthode de *Tir* et analytiquement par la méthode de décomposition d'*Adomian* (ADM) [2-4] . Le Ferro-fluide est préparé en dispersant des nanoparticules de type magnétite de **Fer (Fe₃O₄)** dans un liquide à base d'eau.

L'influence de diverses variables physiques telles que le nombre de Reynolds, le demi-angle du canal, le paramètre de rotation, la fraction volumique des nanoparticules et le nombre de *Hartmann* sur l'évolution de la vitesse du *Ferro-fluide* et le coefficient de frottement est considérée.

Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du paramètre de rotation rend la vitesse du *Ferro-fluide* faible dans la moitié supérieure du canal divergent, ce qui conduit à l'apparition du phénomène de retour d'écoulement ; cependant, au niveau de la moitié inférieure du canal, le phénomène de séparation est totalement exclu.

De plus, les résultats obtenus pour les canaux convergents et divergents en rotation révèlent que l'écoulement inversé est complètement éliminé au fur et à mesure que l'intensité du nombre de Hartmann augmente.

Finalement, les résultats obtenus montrent également un excellent accord entre les données numériques et analytiques, ce qui justifie la plus grande précision de la technique analytique ADM adoptée.

Mots-clés : Écoulement de *Ferro fluide*; Canal convergent/divergent ; Rotation ; Parois inclinés ; Champ magnétique; Solution ADM analytique.



This thesis investigates the hydro-magnetic *Ferro-Nano Fluid* flow through rotating converging/diverging channels. Using appropriate transformation, the partial differential equations (PDEs) occurring from mathematical modelling are converted into ordinary differential equations (ODEs).

Thereafter, the obtained ODEs with relevant boundary conditions are resolved computationally and analytically with the help of 4th-5th fifth order *RungeKutta*- Fehlberg method (RKF45) featuring shooting procedure and the *Adomian* de composition method (ADM) separately. The Ferro-fluid flow is prepared by dispersing magnetite (Fe_3O_4) *Ferro nanoparticles* in H_2O conventional liquid.

The influence of diverse physical variables of significance like Reynolds quantity, channel half-angle, rotational parameter, fractional size of *nanoparticle*, and Hartmann quantity on the progression of *Ferro Fluid* rapidity and the skin friction coefficient is considered. It is found that the increase of rotational parameter makes low *Ferro-fluid* rapidity in the higher half of diverging channel which leads to the apparition of flow reversal; however, at the lower half of the channel, the backflow phenomenon is entirely precluded.

Also, results obtained for both rotating convergent and divergent channels reveal that the reverse flowing wholly disappeared as the magnitude of the Hartmann number augment.

Finally, results obtained show an excellent agreement between analytical and numerical data, thus justifying the higher reliable of the adopted ADM method.

Keywords: *Ferro fluid flow; Rotative Converging/Diverging Channel; Inclined walls; Magnetic field; Analytical ADM solution.*



تدرس هذه الأطروحة التدفق الهيدرومغناطيسي للسوائل الحديدية النانوية من خلال القنوات الدوارة المتقاربة والمتباعدة.

باستخدام التحويلات المناسبة، يتم تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) من النمذجة الرياضية إلى المعادلات التفاضلية العادية (ODEs).

بعد ذلك، تمت معالجة المعادلات العادية ذات الشروط الحدودية عددياً باستخدام طريقة Runge Kutta مع طريقة Tir وتحليلياً بواسطة طريقة التحلل Adomian (ADM). يتم تحضير السائل الحديدي عن طريق تشتيت جزيئات الحديد المغننتيت (Fe_3O_4) النانوية في سائل مائي.

تم دراسة تأثير المتغيرات الفيزيائية المختلفة مثل رقم رينولدز ونصف زاوية القناة ومعلمة الدوران والكسر الحجمي للجسيمات النانوية ورقم هارتمان على تطور سرعة الموائع الحديدية ومعامل الاحتكاك. أظهرت النتائج المتحصل عليها أن زيادة معامل الدوران تجعل سرعة المائع الحديدي منخفضة في النصف العلوي من القناة المتباعدة، مما يؤدي إلى ظهور ظاهرة عودة الجريان؛ ومع ذلك، في النصف السفلي من القناة، يتم استبعاد ظاهرة الانفصال تماماً.

علاوة على ذلك، فإن النتائج التي تم الحصول عليها للقنوات المتقاربة والمتباعدة تكشف أن التدفق العكسي قد تم التخلص منه تماماً مع زيادة شدة رقم هارتمان. وأخيراً، أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أيضاً توافقاً ممتازاً بين البيانات العددية والتحليلية، مما يبرر الدقة الأكبر لتقنية تحليل ADM المعتمدة.

الكلمات المفتاحية: تدفق السوائل الحديدية. قناة متقاربة/متباعدة؛ دوران الجدران المائلة حقل مغناطيسي؛ حل ADM التحليلي

Liste des figures

<i>N° Figure</i>	<i>Désignation</i>	<i>N° page</i>
Figure 1-1	Générateur Magnétohydrodynamique	35
Figure 1-2	Pompe à conduction à courant continu	37
Figure 1-3	Schémas d'une pompe MHD conduction	37
Figure 1-4	MHD à induction annulaire	38
Figure 1-5	Schéma de principe du procédé électromagnétique utilisant un champ magnétique alternatif	39
Figure 2-1	Comparaison des solutions numérique avec les solutions analytiques	65
Figure 2-2	Profile de vitesse sur une plaque plane par la méthode de tir	66
Figure 3-1	Géométrie d'un Jeffery-Hamel en Rotation	69
Figure 4-1	Effet du demi-angle d'ouverture sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel dans un canal convergent $Ha = 0$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 100$	84
Figure 4-2	Effet du demi-angle d'ouverture sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel dans un canal divergent $Ha = 0$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 100$	84
Figure 4-3	Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel hydromagnétique dans un canal divergent $\alpha = +3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 55$	85
Figure 4-4	Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel hydromagnétique dans un canal convergent $\alpha = -3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 55$	86
Figure 4-5	Effet du nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel classique dans un canal convergent $\alpha = -3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Ha = 0$	87
Figure 4-6	Effet du nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel classique dans un canal divergent $\alpha = +3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Ha = 0$	88
Figure 4-7	Effet de la fraction volumique φ sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel classique d'un Ferro fluide dans un canal convergent $\alpha = -3^\circ$, $Re = 55$ et $Ha = 0$	89
Figure 4-8	Effet de la fraction volumique φ sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel classique d'un Ferro fluide dans un canal divergent $\alpha = +3^\circ$, $Re = 55$ et $Ha = 0$	89

<i>N°Figure</i>	<i>Désignation</i>	<i>N° page</i>
Figure 4-9	Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse de l'écoulement d'un Ferrofluide dans un canal convergent tournant $Ha = 0$, $\varphi = 0.05$, $Ro = 3000$ and $\alpha = -3^\circ$	91
Figure 4-10	Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse de l'écoulement d'un Ferrofluide dans un canal divergent tournant $Ha = 0$, $\varphi = 0.05$, $Ro = 3000$ and $\alpha = +3^\circ$	92
Figure 4-11	Effet du demi-angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un écoulement <i>Ferro fluide</i> dans un canal convergent en rotation : $Ha = 0$, $Ro = 2000$, $\varphi = 2\%$ And $Re = 60$	93
Figure 4-12	Effet du demi-angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un écoulement <i>Ferro fluide</i> dans un canal divergent en rotation : $Ha = 0$, $Ro = 2000$, $\varphi = 2\%$ And $Re = 60$	94
Figure 4-13	<i>Effet de la fraction volumique des nanoparticules (Fe3O4) sur la vitesse de l'écoulement à l'intérieur d'un canal convergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 50$, $Ro = 4000$, $\alpha = -3$</i>	95
Figure 4-14	<i>14Effet de la fraction volumique des nanoparticules (Fe3O4) sur la vitesse de l'écoulement à l'intérieur d'un canal divergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 50$, $Ro = 4000$, $\alpha = +3^\circ$</i>	96
Figure 4-15	Effets du paramètre de rotation sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal convergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 60$, $\varphi = 3\%$ et $\alpha = -3^\circ$	97
Figure 4-16	Effets du paramètre de rotation sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal divergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 60$, $\varphi = 3\%$ et $\alpha = +3^\circ$	98
Figure 4-17	Effet du nombre de Hartmann sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal convergent en rotation : $Re = 55$, $\varphi = 0.01$, $Ro = 2500$ et $\alpha = -3^\circ$	99
Figure 4-18	Effet du nombre de Hartmann sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal divergent en rotation : $Re = 55$, $\varphi = 0.01$, $Ro = 2500$ et $\alpha = +3^\circ$	100
Figure 4-19	Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure d'un canal divergent en fonction du paramètre de rotation Ro pour différentes valeurs du nombre de Reynolds : $Ha = 0$, $\varphi = 3\%$ et $\alpha = +3^\circ$	101

<i>N° Figure</i>	<i>Désignation</i>	<i>N° page</i>
Figure 4-20	Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure d'un canal divergent en fonction du paramètre de rotation Ro pour différentes valeurs du nombre de Reynolds : $Ha = 0, \phi = 3\%$ et $\alpha = +3^\circ$	102
Figure 4-21	Coefficient de frottement sur la paroi inférieure d'un canal divergent en fonction du nombre de Hartmann Ha pour $\alpha = +3^\circ, Ro = 2000, Re = 50$ et $\phi = 3\%$	102
Figure 4-22	Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure d'un canal divergent en fonction du nombre de Hartmann Ha pour $\alpha = +3^\circ, Ro = 2000, Re = 50$ et $\phi = 3\%$	103
Figure 4-23	Comparaison entre la présente étude et celle de A. Moradi [20] – Visualisation graphique de la distribution des vitesses dans un canal divergent	106

Liste des tableaux

<i>N° Tableau</i>	<i>Désignation</i>	<i>N° page</i>
Tableau 1-1	Matériaux et fluides porteurs utilisés dans les Ferro Fluides	42
Tableau 2-1	Comparaison entre la méthode numérique et la méthode exacte	62
Tableau 4-1	Propriété thermo- physique du Ferro fluide	92
Tableau 4-2	Comparaison entre les résultats numérique (RK4) et les résultats semi-analytiques (ADM) dans un canal convergent en rotation pour $\alpha = -3^\circ, Ro = 3000, Re = 40, \phi = 1\%$ et $Ha = 0$	104
Tableau 4-3	Comparaison entre les résultats numérique (RK4) et les résultats semi-analytiques (ADM) dans un canal convergent en rotation pour $\alpha = -3^\circ, Ro = 3000, Re = 40, \phi = 1\%$ et $Ha = 0$	104
Tableau 4-4	Comparaison entre les résultats semi-analytiques (ADM) et ceux disponibles dans la littérature pour la fonction $F''(0)$ dans un canal convergent : $\alpha = -5^\circ, Ro=0, \phi=0$ et $Ha=0$.	105
Tableau 4.5	Comparaison entre les résultats semi-analytiques (ADM) et ceux disponibles dans la littérature pour la fonction $F''(0)$ dans un canal divergent : $\alpha = +5^\circ, Ro=0, \phi=0$ et $Ha=0$.	105
Tableau 4.6	Étude comparative dans le cas d'un canal divergent entre la présente étude et celle de A. Moradi[20]	106

Classifications

Symbole	Signification
A_n	Polynôme d' <i>Adomian</i>
C_p	capacité calorifique
f	Fonction de la vitesse
$f(\pm \alpha)$	Fonction de la vitesse aux parois
f'	Dérivée de la fonction vitesse
J_n	Polynôme de la méthode d' <i>Adomian</i> généralisée
k_1, \dots, \dots, k_4	Coefficients de <i>Runge-Kutta</i>
\vec{V}	Vecteur vitesse
\overrightarrow{grad}	Gradient
$\overrightarrow{grad}P$	Gradient de pression
F	Fonction vitesse adimensionnelle
F'	Dérivée de la Fonction vitesse adimensionnelle
F''	Dérivée seconde de la Fonction vitesse adimensionnelle
F'''	Dérivée troisième de la Fonction vitesse adimensionnelle
$F_0, F_1, \dots, \dots, F_n$	Termes de la solution analytique (fonction vitesse)
$F(1)$	Dérivée de la Fonction vitesse sur les parois
$G_0, G_1, \dots, \dots, G_n$	Termes de la solution analytique (fonction température)
$G(1)$	Dérivée de la Fonction température sur les parois
$u_0, u_1, \dots, \dots, u_n$	Composantes de la solution
v_r	Vitesse radiale de l'écoulement
v_θ	Vitesse ortho radiale de l'écoulement
V_{max}	Vitesse maximale au niveau de l'axe
L	Operateur linéaire inversible
L^{-1}	Operateur linéaire inverse
N	Operateur non-linéaire
Re	Nombre de Reynolds
P	Pression
f_{max}	vitesse maximale au centre du canal
$F'(1)$	Dérivée de la fonction vitesse adimensionnelle à la paroi
ΔV	Laplacien de la vitesse
\vec{B}_0	Champs magnétique induit

Symboles grecques

Symbole	Signification
η	Angle adimensionnel
α	Demi-angle d'ouverture de la conduite
ρ	Masse volumique (Kg/m^3)
ν	Viscosité cinématique (m^2/s)
μ	Viscosité Dynamique ($\text{kg}.\text{m}^{-1}.\text{s}^{-1}$)
σ	Conductivité électrique ($\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$)
ε_0	Perméabilité électrique
ν_{ff}	viscosité cinématique effective
μ_{ff}	viscosité dynamique effective
ρ_{ff}	Masse volumique effective

Abréviations

Symbole	Signification
EDO	Équations différentielles ordinaires
EDP	Équations différentielles partielles
RK4	Méthode de <i>Runge Kutta</i>
ADM	Méthode d' <i>Adomian</i> standard
GDM	Méthode d' <i>Adomian</i> généralisée
HAM	Méthode d'analyse par homotopie
HPM	Méthode d'homotopie perturbée
MHD	Magnétohydrodynamique
BVP	Problème aux conditions aux limites
IVP	Problème aux conditions initiales

TABLE DES MATIERES

Dédicace.....	2
Remerciements.....	3
Résumé / ملخص / Abstract.....	4
Liste des figures et les tableaux.....	8
Signification/Symbole grecque/Abréviation.....	11
<u>Introduction Générale</u>	
1. Introduction.....	18
2. Contexte de l'étude.....	21
3. Travaux antérieurs	23
<u>CHAPITRE 1 : Généralité sur la magnétohydrodynamique et Ferro Fluides</u>	
1-Introduction à la Magnétohydrodynamique.....	32
1-2- L'accélérateur MHD.....	34
1-3- Générateur MHD.....	34
1-4- Pompes électromagnétiques.....	36
1.4-1 Pompe MHD à conduction.....	36
1.4-2 Pompe MHD à Induction.....	37
1-5- Application de la MHD en biomédicale (micro-pompe).....	38
1-6- Application de la MHD en métallurgie.....	38
1.6.1-Le four à Induction.....	39
1.6.2-Pompage des métaux.....	39
1.6.3-Affinage des métaux.....	39
1.6.4-Brassage électromagnétique.....	39
2. Les Ferro Fluides	
2-1Historique.....	40
2.2-Introduction.....	40

2.3-Les Fluides magnétiques	42
2.4-Fluides magnéto-rhéologiques (MR)	42
2.5-Interactions entre nanoparticules et fluide de base	43
2.5.1-Le diamagnétisme.....	44
2.5.2-Le paramagnétisme.....	45
2.5.3-Le ferromagnétisme.....	45
2-6- Comportement thermique et rhéologique des <i>Ferro Fluides</i>	46
2.6.1- Conductivité thermique des <i>Ferro Fluides</i>	46
2.6.2- Synthèse d'un <i>Ferro Fluide</i>	46
2-7- Applications des <i>Ferro Fluides</i>	47
2.7.1-Étanchéité dynamique.....	47
2.7.2-Amortissement.....	47
2.7.3-Biomédical.....	48
2.7.4-Dans le domaine des biotechnologies.....	48
2.7.5-Dans le domaine des technologies et de la mécanique.....	49
2.7.6-Dans le domaine del'Art	49
 <u>CHAPITRE 2: Méthode de résolution</u>	
2-1 Résolution analytique	51
2-1-1 Introduction.....	51
2-1-2 Principe de la méthode de décomposition d' <i>Adomian</i>	51
2-1-3 Tableau référence des polynômes d' <i>Adomian</i>	52
2-1-4 Exemples d'applications de la méthode d'Adomian (ADM)	52
2-1-5 Application aux équations différentielles ordinaires	56
2-2 Méthodes de traitement Numérique	58
2-2-1 Méthodes d'Euler.....	58
2-2-2 Méthodes de Runge Kutta.....	59
a) <i>Runge Kutta</i> d'ordre 2.....	59
b) <i>Runge Kutta</i> d'ordre 4.....	59

2-3 Méthode de Tir	62
--------------------------	----

CHAPITRE 3 : Équations gouvernantes et modélisation mathématique

3-1-Introduction	69
3-2-Les équations gouvernantes	70
3-2-1- Équation de continuité.....	70
3-2-2- Les équations de Maxwell.....	71
3-2-3- Équation de quantité de mouvement.....	73
3-2-3-1 Vitesse et accélération dans un référentiel tournant.....	73
3-3-Traitement Analytique du problème dynamique de l'écoulement de Jeffery-Hamel M.H.D.....	78

CHAPITRE 4 : Discussion et Résultats

4-1 Profil de vitesse de l'écoulement magnétohydrodynamique (écoulement traditionnel sous l'effet d'un champ magnétique externe).....	83
4-1-1 Effet du demi-angle α	83
4-1-2 Effet de la variation du nombre de Hartmann Ha	85
4-1-3-Effet du nombre de Reynolds Re	86
4-1-4Effet de la fraction volumique (φ).....	88
4-2- Champ de vitesse de l'écoulement magnétohydrodynamique d'un Jeffery Hamel en rotation.....	90
4-2-1-Effet du nombre de Reynolds(Re).....	91
4-2-2-Effet du demi-angle.....	92
4-2-3-Effet de la fraction volumique.....	94
4-2-4-Effet du paramètre de rotation.....	96
4-2-5-Effet du nombre de <i>Hatmann</i> Ha	98
4-3- Évolution du coefficient de frottement.....	100
4-4- Étude comparative et Validation.....	103
4-5 -Conclusion Générale.....	108

Perspectives	111
Références Bibliographiques	112



*Introduction
Générale*

1. Introduction

Les études des écoulements incompressibles visqueux à travers un divergent-convergent occupent une place prépondérante dans les domaines de la mécanique des fluides.

Les pionniers dans les discussions de ce cas très spécial, étaient incontestablement *Jeffery* [5] et *Hamel* [6], ils présentèrent une solution exacte des équations de *Navier-Stokes* dans le cas d'un écoulement permanent radial bidimensionnel d'un fluide visqueux incompressible à partir d'une ligne source à l'intersection de deux parois planes formant un angle entre elles.

Il s'en est suivi par la suite un véritable engouement pour ce type d'écoulement. Très nombreux, en effet, sont les chercheurs, les ingénieurs et les scientifiques qui ont consacré leurs travaux de recherche sur la compréhension et le traitement de ce cas, et ce n'est pas un hasard que sa réputation c'est répandue telle une trainée de poudre pour toucher plusieurs domaines industriels tels que le génie mécanique, le génie civil, la bio mécanique ainsi que l'environnement.

Cet intérêt particulier accordé à ce domaine, a encouragé les scientifiques à fructifier cette découvertes, en essayant d'insuffler quelques améliorations et retouches nécessaires, dans le but bien précis de l'exploiter à bon escient, et par la même, apporter quelques réglages aux domaines de son application, et c'est dans ce contexte, que la théorie de la magnétohydrodynamique a été introduite par *Bansal* [7] en 1994, cette dernière, s'intéresse à l'induction du courant dans un fluide conducteur en mouvement sous l'effet d'un champ magnétique externe.

Dans ce cas de figure, le contrôle et l'amortissement du fluide électriquement conducteur se fait grâce à la présence de la force de *Lorentz*. Mais la première apparition de l'écoulement magnétohydrodynamique a été initiée par *Hartmann* et *Lazarus(1937)* [8] lorsqu'ils ont étudié l'influence d'un champ magnétique transverse uniforme sur un écoulement visqueux électriquement conducteur entre deux plaques infinies parallèles, isolantes et stationnaires.

Notre curiosité et quête de nouvelles sensation, nous a poussé à tenter de faire intervenir la rotation dans un écoulement de *Jeffery Hamel*.

Il faut signaler à cet égard que l'étude de ces écoulements tournants est motivée par le grand nombre et la variété des applications naturelles ou industrielles, dans lesquelles on les rencontre, ils se manifestent sous forme de tornades dans le domaine géophysique, et ils sont présents également dans le dispositif de mélange et de séparation de constituants par centrifugation en chimie. La rotation est très présente en aérodynamique interne, notamment au sein des turboréacteurs et des systèmes de combustion, elle permet un meilleur mélange entre comburant et combustible. Les phénomènes générés par les rotations sont dus à la présence des forces centrifuges et de Coriolis.

En tenant compte de la demande galopante des technologies modernes qui englobent les produits chimiques, les stations d'énergie, et le microélectronique, il était urgent de développer de nouveaux types de fluides plus efficace en matière de transfert de chaleur et d'électricité et par conséquent une plus grande capacité à se faire attirer par des aimants, qualité rare et oh combien précieuse, que l'on trouve dans les *Ferro fluides*.

Ils sont très utilisés dans le domaine magnétique tels que les capteurs, les densimètres, les accéléromètres. Ils sont aussi très utilisés comme contrôleur de chaleur dans les moteurs électriques.

Cette catégorie de fluide fait partie de la large gamme de nano fluides, et qui est le fruit d'un mélange de particules de taille nanométrique qui peut être le fer, le nickel, le cobalt ou les oxydes ferreux et ferrique, plongés dans une solution de base qui peut être l'eau ou l'huile .

La résolution de notre cas a nécessité l'utilisation d'une approche analytique, nous avons choisi la méthode de décomposition d'*Adomian (ADM)* qui est l'une des méthodes semi-exacte qui ne requièrent ni linéarisation ni discrétisation.

C'est une technique utilisée pour résoudre une large gamme de problèmes physiques. L'avantage de cette méthode est qu'elle fournit une approximation analytique sans aucune simplification, ce qui fait que les résultats qu'elle apporte, sont plus réalistes, chose qui a poussé nombreux chercheurs à s'y intéresser.

On trouve son application dans la résolution de nombreux problèmes dans le domaine de l'ingénierie, la physique, la biologie et la chimie. Cette technique est basée sur une décomposition de la solution d'une équation fonctionnelle non linéaire dans une série de fonctions.

Chaque terme de la série est obtenu à partir d'un polynôme généré par un développement en série de puissance d'une fonction analytique.

2. Contexte de l'étude

Dans ce travail, nous avons mis en relief, les effets combinés de la rotation et du champ magnétique sur le comportement dynamique de l'écoulement d'un *Ferro fluide*.

Les équations différentielles qui gouvernent cet écoulement, ont été résolues analytiquement, par la méthode d'*Adomian* (ADM) et numériquement, grâce à la méthode de *Runge Kutta* d'ordre 4 et de tir.

L'organisation retenue pour mener à bien ce travail, est la suivante :

- **Le Premier chapitre :**

Nous présentons l'état de l'art de la magnétohydrodynamique et une description des *Ferro fluides*.

- **Le Deuxième chapitre :**

On s'est penché sur la description de la méthode analytique, notre dévolu est tombé sur la méthode de décomposition d'*Adomian*, étant donné sa simplicité d'utilisation, ainsi que son efficacité avérée et confirmée, en témoigne la multitude d'auteurs qui ne se sont pas privé de l'appliquer pour la résolution de leur problème.

Dans ce chapitre, il a été question également, de mettre en relief la méthode de *Runge Kutta* ainsi que la méthode de *Tir* (Shooting method), en leur qualité de méthodes numériques les plus fréquemment utilisées.

- **Le Troisième chapitre :**

Dans ce chapitre, on apporte les formulations mathématiques nécessaires à la résolution de ce type de problèmes.

Les équations gouvernant l'écoulement, sont celle de *Navier –Stokes*, elles englobent le comportement dynamique du fluide en mouvement.

Notre modèle mathématique, à la particularité d'ajouter les termes de rotation et de Hartmann aux équations. Sans omettre de signaler la présence des équations de Maxwell, du fait de la présence d'un champ magnétique.

On s'est également intéressé aux résolutions numérique et analytique des équations différentielles de troisième ordre régissant le problème, après avoir été préalablement adimensionnées et normalisées.

Les résultats obtenus, qui vont nous renseigner sur l'état dynamique de l'écoulement du fluide considéré, sous formes de profils de vitesse relatifs aux différents paramètres qui entrent en jeu et leur influence sur l'écoulement.

- *Le Quatrième chapitre :*

Dans cette partie du travail, on s'est focalisé sur la visualisation et l'observation de l'influence des différents paramètres sur l'écoulement du fluide, en exploitant les figures et les tableaux propres à chaque situation. Les résultats apportés, sont ponctués par des commentaires et des explications.

Il a été donc, question de disséquer le comportement du fluide en faisant varier le paramètre de rotation, le nombre de *Hartmann*, le nombre de *Reynolds* ainsi que l'angle d'ouverture du canal convergent–divergent.

Et pour clore ce travail, une conclusion s'impose pour résumer et faire le bilan de ce qui a été réalisé et les perspectives à venir que nous espérons réaliser ultérieurement.

3-Travaux antérieurs

Nous assistons depuis des décades à un intérêt sans précédent pour les écoulements entre des parois, qu'elles soient parallèles ou inclinées formant un angle entre elles, de par leurs grandes disponibilités dans de multiples applications industrielles, ou on peut citer entre autres, l'aérodynamique, les ingénieries mécanique, civil et chimique.

Dans ce travail, notre dévolu est tombé sur un écoulement incompressible visqueux bidimensionnel à travers un canal divergent-convergent.

Ce type d'écoulement radial a été magistralement décrit par *Jeffery* [5] et indépendamment par *Hamel* [6], qui ont réussi à se procurer une solution exacte, aux équations de *Navier Stokes*, dans le cas d'un écoulement bidimensionnel entre deux parois inclinées formant un angle entre elles et se rencontrant au sommet en présence d'une source ou d'un puits.

Il y'a eu par la suite de multiples travaux réalisés dans ce sens par multiples chercheurs ou on peut citer entre autres *L. Rosenhead* [9] qui a consacré son travail sur un écoulement radial bidimensionnel visqueux incompressible et stationnaire entre deux parois qui converge ou diverge. Les résultats obtenus ont montré qu'à l'entrée, la vitesse est maximale au centre du canal et tend à s'annuler sur les parois.

De plus une augmentation du nombre de *Reynolds* aplatit le profil de vitesse et chute rapidement pour s'annuler au milieu, dans le cas d'un convergent.

Pour ce qui est du divergent, la situation est différente, pour les faibles nombres de *Reynolds*, La vitesse est maximale au milieu et diminue uniformément en se dirigeant vers les parois.

Avec l'augmentation du nombre de *Reynolds*, l'écoulement devient de plus en plus concentré au centre du canal jusqu'à une certaine valeur critique du nombre de Reynolds **Re**.

Un écoulement entrant apparaît dans la région de sortie, en d'autre termes on est en présence d'un retour d'écoulement, avec un flux plus important vers l'extérieur que celui associé au *Reynolds* critique.

Il existe deux possibilités de retour d'écoulement, il se pourrait qu'il soit au voisinage de l'une des parois ou des deux ensembles.

Dans ce cas, on décrit un canal bidimensionnel avec des parois dont le rayon de courbure est uniformément large, relativement à la largeur du canal local, le champ de vitesse de l'écoulement laminaire à travers ces canaux est obtenu.

Fraenkel [10] a apporté une expansion asymptotique de la fonction de courant dans le cas d'un canal courbé en débutant avec la solution de **Jeffery Hamel** pour le premier ordre.

Tout comme son prédécesseur **L Rosenhead**, il a pris comme paramètres physiques : l'angle α et le nombre de **Reynolds Re** basé sur le débit volumique à travers le canal

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} u r d\theta \quad Re = \frac{Q}{\nu}$$

Mais ce qui diffère de **Rosenhead**, c'est le fait de prendre $\eta = \frac{\theta}{\alpha}$ comme variable indépendante est considérer que $\frac{\Psi(\theta)}{Q} = G(\eta; Re, \alpha)$

Makinde [11] a étudié le problème d'un écoulement non linéaire d'un fluide conducteur visqueux incompressible dans un convergent-divergent sous l'influence d'un champ magnétique externe, les équations qui gouvernent l'écoulement sont résolues en utilisant un type spécial d'une approche semi-numérique de l'approximation de **Hermite –Padé**. Cette technique, d'après son expérience, a offert quelques avantages par rapport aux solutions obtenues par d'autres méthodes, telles que, les différences finies et la méthode spectrale.

KnosMillsaps et Karl Pohlhausen [12] apportent une solution exacte pour la distribution thermique dans le cas d'un écoulement stationnaire et laminaire d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques planes non parallèles maintenues à une température et une densité du fluide, toutes deux constantes. Le profil de vitesse est déterminé grâce à la fonction elliptique Jacobéenne, en utilisant la solution de **Jeffery Hamel** du problème hydrodynamique. Les auteurs ont montré dans ce cas spécial, que l'équation d'énergie qui donne le profil de température, peut être réduite à une équation différentielle ordinaire, avec des coefficients variables.

Terril [13] a axé ses recherches, en tenant compte des effets de transpiration et a présenté des solutions analytiques, pour un écoulement lent, à travers un canal non uniforme.

Pour ce qui est de **Yang et Price [14]**, les caractéristiques du développement de l'écoulement et le transfert de chaleur dans un canal convergent, sont traités par la méthode des différences

finies. Les profils de température et de vitesse dans les directions angulaire et radiale, le nombre de *Nusselt* moyen et la pression sont calculés pour trois valeurs de l'angle. Les résultats obtenus, montrent que le processus de transport est gouverné par trois paramètres, le nombre de *Reynold* d'entrée, le nombre de *Peclet* et l'angle d'ouverture, il a montré aussi que l'augmentation de l'angle, conduit à une augmentation du nombre de *Nusselt* et une diminution de la chute de pression.

Avec *Rita Choudhury et al* [15], l'écoulement de couche limite à deux dimensions, à travers un divergent d'un fluide viscoélastique, électriquement conducteur, en présence d'un champ magnétique, a fait l'objet d'une recherche qui a mis en avant l'influence de ce champ, lorsqu'il s'agit de vitesse ou de coefficient de frottement.

La solution numérique du problème de transfert de chaleur dans un canal convergent, avec des températures de paroi uniformes et non uniformes, sous des approximations de couche limite, a été présentée par *Dey et Nath*[16]. En outre, une solution semi-analytique pour une température de paroi uniforme a été obtenue.

Ôzrsff, M et al [17] ont développé des profils de vitesse approximatifs et une nouvelle transformation est introduite, pour réduire le problème de transfert de chaleur par convection forcée, laminaire, à l'intérieur d'un conduit symétrique, plan, divergent ou convergent, soumis à une température de paroi uniforme.

Des solutions numériques et analytiques, sont proposées et discutées par *Riley* [18], pour étudier la distribution de température, dans un écoulement incompressible, visqueux d'un gaz conducteur de chaleur, entre deux parois non-parallèles.

Le problème classique de *Jeffery-Hamel* a été enrichi par *Axford*[19], pour inclure les effets d'un champ aimanté externe, sur un fluide électriquement conducteur.

Moradiet al [20] sont intéressés à l'influence du transfert de chaleur sur un problème d'écoulement de *Jeffery Hamel*. Ce problème a été résolu par la méthode de transformation différentielle (DTM).

Quelques années plus tard, on a enregistré l'apparition de la magnétohydrodynamique (MHD), cette théorie, s'intéresse à l'interaction qui existe entre un champ magnétique et un fluide conducteur en mouvement, ou plus précisément, de l'induction d'un courant électrique dans un fluide en mouvement en présence d'un champ magnétique.

Mais il faut reconnaître que, la palme d'or, revient incontestablement à **Hannes Alfvén** [21], le physicien suédois, fut le premier à employer le terme magnétohydrodynamique en 1942. Il a d'ailleurs reçu le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux sur le sujet. Il est également à souligner que les travaux de Hannes Alfvén sont poursuivis par plusieurs auteurs, dont on peut citer par exemple **Bansal** [7].

En magnétohydrodynamique, le contrôle et l'amortissement du fluide électriquement conducteur, se fait grâce à la présence de la force de **Lorentz**, mais la première apparition de l'écoulement magnétohydrodynamique a été initiée par **Hartmann** et **Lazarus** (1937) lorsqu'ils ont étudié l'influence d'un champ magnétique homogène sur l'écoulement d'un liquide conducteur (mercure) dans une tuyère circulaire ou rectangulaire. **Harada et al** [22], étudièrent théoriquement et numériquement les caractéristiques fondamentales de magnétohydrodynamique (MHD) linéaire de Faraday.

Plusieurs auteurs, ont apporté leur contribution dans ce domaine, ou on peut citer **Makinde et Motsa** [23] qui, dans cette dynamique de développement de ce domaine, ont axé leur travail sur la stabilité hydrodynamique d'un écoulement de poiseuille plan.

Plus récemment, **Ganji** [24] et al, ont étudié analytiquement l'écoulement magnétohydrodynamique de **Jeffery Hamel** ont appliqué la méthode (ADM) pour trouver la solution approximative des équations différentielles non linéaires qui gouvernent l'écoulement de **Jeffery-Hamel**MHD.

L'article de **Syed Tauseef Mohyud-Din et al** [25], est consacré à l'analyse du transfert de chaleur dans un écoulement d'un **nano fluide** à base d'eau, dans un canal, avec des parois étirables et non-parallèles. La nature magnétohydrodynamique (MHD) du fluide est considérée.

Imani [26] a fait appel à la technique de reconstruction de la méthode des itérations vibrationnelles (RVIM), dans le but de voir les effets du champ magnétique et des nano particules sur l'écoulement de **Jeffery-Hamel**.

Sadhu Ramprasad et al. [27], ont diligenté un travail dans le cas d'un écoulement bidimensionnel biphasique, visqueux, incompressible et stable d'une suspension dans un canal

divergent asymétrique avec une source de la chaleur. Les effets du paramètre magnétique, du nombre de Reynolds, du paramètre de la source de la chaleur et du nombre de Prandtl sont exposés graphiquement.

Khidir [28] a résolu l'écoulement de *Jeffery Hamel* en considérant les effets du champ magnétique et les nanoparticules dans un objectif de démontrer l'efficacité d'une nouvelle modification de la méthode de perturbation par homotopie (**HPM**).

Ananthaswamy et Yogeswari [29] sont penchés sur l'étude de l'effet des *Nano fluides* sur l'écoulement de *Jeffery-Hamel* en utilisant une méthode d'homotopie modifiée. Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec la méthode de transformations différentielles (**DTM**).

Un autre aspect de notre travail et que nous allons tenter d'introduire, consiste à faire intervenir la rotation dans un écoulement de *Jeffery Hamel*. Il faut signaler à cet égard que l'étude de la rotation, phénomène qui se trouve sous les feux des projecteurs de nombreux ingénieurs, chercheurs et scientifiques est motivée par le grand nombre et la variété des applications naturelles ou industrielles, de par sa grande importance dans l'industrie et son exploitation dans différents domaines.

Les phénomènes générés par les rotations, sont dus à la présence des forces centrifuges et de Coriolis, ils sont présents dans le dispositif de mélange et de séparation de constituants par centrifugation en chimie.

En aérodynamique interne, notamment au sein des turboréacteurs et propulseurs, dans les systèmes de combustion, ou ils permettent un meilleur mélange entre comburant et combustible. La rotation est notamment mentionnée dans la compression et la détente qui permettent la propulsion des engins volants ou maritimes, la création du courant électrique grâce à la dualité stator/rotor, pour se contenter de ne citer que ces domaines tout en sachant pertinemment que la présence de la rotation est beaucoup plus fréquente.

Plusieurs travaux ont été réalisés, et qui ont mis l'accent spécialement sur la rotation des fluides entre deux plaques parallèles en mouvement ou au repos.

Pour mieux étayer cette réalité, on peut citer le travail de *Sheikholeslami* et al [30] qui ont axé leur étude sur un écoulement hydrodynamique entre deux plaques planes, l'une poreuse

tandis que l'autre étirable dans un système en rotation. Ils ont mis en relief le transfert de chaleur dans un fluide électriquement conducteur.

Sethi et al [31], ont travaillé sur un écoulement stationnaire magnétohydrodynamique de Couette de classe-II pour un fluide incompressible, visqueux et électriquement conducteur dans un système tournant.

Das [32], quant à lui, il s'est penché sur l'effet *Hall* dans le cas d'un écoulement magnétohydrodynamique stationnaire d'un fluide incompressible électriquement conducteur dans un canal horizontal poreux avec un gradient de pression variable dans un système en rotation.

Alam et Khan [33] ont utilisé la méthode des éléments finis pour investiguer les effets hydromagnétiques sur un écoulement à convection mixte, à travers un canal divergeant avec obstacle circulaire. *Vikas Kumar* [34] a mené une investigation de l'effet magnéto-visqueux sur l'écoulement d'un *ferro fluide* passant par un disque poreux en rotation assujéti à un champ magnétique.

Osman Anwar Beg [35] a présenté un modèle mathématique qui étudie l'écoulement magnétohydrodynamique stationnaire axisymétrique d'un fluide incompressible visqueux électriquement conducteur dans un milieu poreux intercalé entre deux cylindres concentriques en rotation en présence d'un champ magnétique radial.

Récemment, en raison des exigences de plus en plus croissantes dans les technologies modernes, tels que les produits chimiques, la microélectronique, les stations d'énergie, il était urgent d'aller vers le développement de nouveaux fluides, renfermant des caractéristiques qui répondent aux besoins des technologies modernes.

La valeur ajoutée de ces fluides, est d'avoir une meilleure conductivité thermique et ce, dans le but d'avoir un meilleur échange de chaleur avec l'extérieur.

Les nano fluides sont produits par la dispersion de particules solides nanométriques, leur taille ne dépassant pas les 100 nm, dans un liquide de base de faible conductivité thermique tel que l'eau, l'éthylène glycol, le kérosène, les huiles,etc.

Le terme *Nano fluide* fut introduit par **Choi** [1] pour décrire ce type de fluide. Les résultats expérimentaux réalisés, montrent que l'ajout d'une certaine quantité de *Nanoparticules* aux fluides traditionnels, peut améliorer, et d'une manière appréciable, les propriétés thermiques du fluide traditionnel de base. Nous pouvons aisément citer un nombre important d'études théoriques et expérimentales consacrées aux *Nano fluides* [36-46].

Ces dernières années, une catégorie de fluides, nommés *Nano fluides* magnétiques (ou *Ferro fluides*) a fait son apparition dans le but de se substituer aux fluides caloporteurs classiques.

Tels ont été les principaux axes de recherches des deux chercheurs français qui viennent d'inventer un liquide doué de propriétés magnétiques et en même temps conducteur d'électricité et de la chaleur, il s'agit d'*Emanuelle Dbois et jean Chevalet* de la CNRS.

Les *Ferro fluides*, traditionnellement utilisés en tant qu'amortisseurs (haut-parleur) ou centreurs d'axes sont produits en dispersant des particules magnétiques dans une base, soit aqueuse ou huileuse.

Les *Ferro fluides* sont à l'instar des autres *Nano fluides*, des solutions colloïdales stables contenant des particules magnétiques en suspension dans un liquide porteur tel que l'eau ou l'huile.

Les études rhéologique, thermique ou magnétique menées sur les *Ferro fluides*, les présentent a priori comme des fluides éligibles à l'intensification des échanges de chaleur.

On peut citer le travail réalisé par *Sivaraj et Sheremet* [47] qui consistait à une analyse numérique sur la convection naturelle combinée avec la génération d'entropie d'un *Ferro fluide* dans une conduite carrée, avec une plaque non uniformément chauffée, sous l'influence d'un champ magnétique inclinée et uniforme.

MohdRijalLias et al [48] ont examiné la convection naturelle d'un *Ferro fluide* magnétohydrodynamique sur une plaque plane. Les résultats ont montré les effets du champ magnétique transverse et aligné. Il y'a eu également une multitude de travaux [49-54] qui ont réservé un intérêt particulier pour cette catégorie de fluides.

Les méthodes de variation des itérations ainsi que la méthode d'*Adomian*, figurent également parmi les techniques les plus utilisées dans ce genre de problème. Plusieurs auteurs ont exploité la méthode de décomposition d'*Adomian* pour résoudre analytiquement les équations régissant l'écoulement étudié, pour étayer notre thèse, on peut citer entre autres, les travaux de *Kezzar [55-57]* et consorts, qui ont à mainte reprise font appel à cette méthode pour la résolution des équations régissant l'écoulement entre deux plaques non parallèles et qui ont par la suite démontré son efficacité.

Sans omettre de citer d'autres travaux qui ont utilisé cette méthode, et c'est le cas de *Luo [58]* qui a axé son travail sur la résolution des équations d'onde et de la chaleur.

Quant à *Basto et CO [59]*, qui avaient comme préoccupation la résolution de l'équation de Burger, ils ont trouvé en la méthode **ADM**, le meilleur moyen pour arriver à leur fin.



CHAPITRE 1

Généralités sur la magnétohydrodynamique **et les Ferro Fluides**

1.1-Introduction à la Magnétohydrodynamique

Pour qu'un liquide soit conducteur il doit contenir des ions. Une solution aqueuse est donc conductrice si un solide ionique y a été dissout. L'eau salée est par exemple conductrice car elle contient des ions de chlorure et des ions de sodium.

Dans une solution aqueuse un courant électrique est le fruit des déplacements des cations vers la borne négative et des anions vers la borne positive.

La magnétohydrodynamique est un domaine qui s'intéresse à l'étude des mouvements des fluides conducteurs ainsi que la description de leur comportement en présence d'un champ magnétique.

Un champ électrique est généré suite à l'application d'un champ magnétique, ils sont alors perpendiculaire entre eux et à la direction du déplacement. D'une manière réciproque, une différence de potentiel appliquée à un fluide placé dans un champ magnétique, provoque un mouvement de ce fluide.

L'effet Hall apparait dès qu'on est en présence d'un flot d'électrons d'un courant électrique dans le fluide. On peut également définir ce phénomène comme un couplage de la dynamique des fluides ou de l'hydrodynamique, régie par les équations de *Navier Stokes*, et de l'électromagnétisme, gouverné par les équations de *Maxwell*.

En 1820, Le physicien *Danois Hans Christian Oersted*, s'affiche comme étant le premier à mettre en évidence l'interaction entre l'électricité et le magnétisme, en démontrant la capacité d'un fil conducteur du courant à faire bouger l'aiguille magnétisée d'une boussole.

En 1821, Humphry **Davy** montre qu'un arc électrique peut être dévié par un champ magnétique. Quelques années plus tard, *Michael Faraday*, s'illustre en démontrant qu'un conducteur électrique en déplacement est le siège d'une force électromotrice, une fois qu'il est soumis à un champ magnétique terrestre, c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

C'est dans cet ordre d'idée, qu'il a eu l'ingéniosité de mettre au point en **1832** un générateur **MHD** testé sur le pont *Waterloo* à Londres, et c'est grâce à cette expérience que la loi de *Lenz Faraday* se met en évidence et fait son apparition.

Le physicien suédois *Hannes Alfven*, est connu pour être le premier à employer le terme magnétohydrodynamique en **1942**, et fait de l'étude de la propagation des ondes d'*Alfven* dans le plasma son cheval de bataille. Il établit également, dans le cas d'un fluide dont la conductivité électrique est infinie, que les lignes de champ magnétique sont prisonnières à l'intérieur de ce fluide et se déplacent avec celui-ci.

Le nombre de *Reynolds* magnétique Re_m , est le rapport entre les phénomènes de convection et de diffusion dans un fluide soumis à un champ magnétique, il est analogue au nombre de *Reynolds* en Hydrodynamique, ce qui nous amène à deux classes en **MHD** :

- *la MHD pour Reynolds magnétique fort*

Il est très supérieur à 1. Dans ce cas, le fluide soumis à un champ magnétique résiste électriquement d'une manière très faible, ce qui nous pousse à le considérer comme étant un conducteur parfait ou la diffusion du champ magnétique est négligée, avec une prépondérance de l'advection du champ magnétique.

- *la MHD à faible nombre de Reynolds magnétique*

Dans ce cas, le nombre Re_m est très inférieur à 1 et par conséquent le fluide n'est plus considéré parfaitement conducteur. Les collisions entre les constituants du plasma, engendrent une résistivité, de ce fait, l'énergie magnétique est transformée en chaleur par effet *Joule*. L'advection et la diffusion du champ magnétique doivent être prises en considération. Ce type de **MHD** intervient dans les applications industrielles à plasmas froids.

1.2-L'accélérateur MHD

C'est un convertisseur **MHD** qui est principalement conçu pour mettre en mouvement un fluide conducteur au moyen d'un champ magnétique et d'un champ électrique. D'ailleurs, il repose sur le même principe de base d'un moteur électrique, étant donné qu'ils disposent tous deux d'un inducteur (électroaimant) et génèrent un champ magnétique dans un induit.

L'induit qui est une bobine solide constituée d'un enroulement de fil métallique dans le cas d'un moteur conventionnel, tandis qu'un accélérateur **MHD** dispose d'un induit fluide qui peut être un liquide conducteur comme l'eau salée, le métal liquide ou le gaz ionisé (plasma).

L'un des avantages des accélérateurs **MHD**, c'est le fait qu'ils n'utilisent pas de pièce mécanique mobile, contrairement aux autres moteurs électriques traditionnels. Les accélérateurs **MHD**, de manière générale, trouvent leurs applications dans différents domaines, notamment liés à la propulsion navale.

Ce genre de propulsion, possède la particularité d'une propulsion directe par réaction, qui consiste à aspirer de l'eau de mer à l'avant qui est naturellement conductrice, et la rejette à l'arrière, mécanisme qui permet de se passer de l'hélice et toute pièce mécanique mobile qui assurait cette fonction de propulsion dans d'autres accélérateurs.

Le forçage d'écoulement ou en d'autres termes, le contrôle de celui-ci magnétiquement, permet un déplacement silencieux et un écoulement laminaire.

On retrouve également, la **MHD** dans les applications militaires de sous-marins ou même la propulsion spatiale au moyen de propulseur plasma dynamique ou à effet hall qui utilise un gaz comme le xénon.

1.3-Générateur MHD

Le générateur MHD (Figure 1-1) est défini comme étant un convertisseur qui transforme les énergies thermique et cinétique directement en électricité en utilisant le cycle de *Brayton*.

Ce qu'il faut retenir de ces générateurs, c'est leur fonctionnement sans aucune pièce mobile telle que les Turbines ou autres pièces tournantes, les fluides conducteurs sont remplacés par un gaz conducteur chaud (plasma) de très grande vitesse dans un champ magnétique intense.

Ils peuvent assurer des rendements thermodynamiques très élevés.

On distingue deux types de conducteurs, Ils peuvent être à conduction ou à induction.

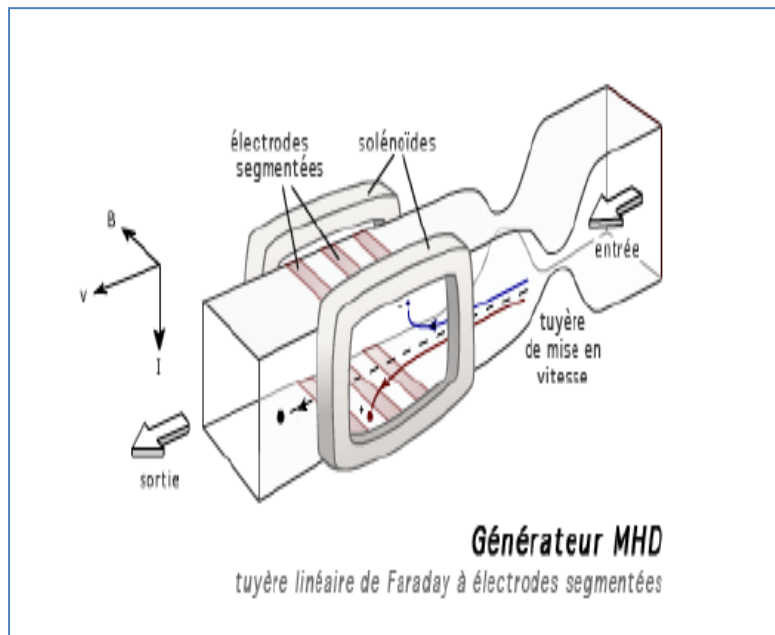


Figure 1-1 Générateur Magnétohydrodynamique [60]

A- Les Générateurs à Conduction :

Ils disposent du même principe de base est fondamentalement des autres générateurs électrique classique, mais requièrent la présence d'électrodes au contact du fluide et le courant continu est fourni à basse tension et forte intensité.

Les deux types de générateur utilisent un inducteur (électroaimant ou aimant permanent) générant un champ magnétique dans un induit ou canal.

B- Les Générateurs à Induction

Ce générateur n'a pas besoin pour son fonctionnement d'électrode. Avec des champs magnétiques variables, le courant électrique est généré à distance par induction alternative.

Quant à la tension de sortie, on peut lui faire subir des ajustements pour élever sa valeur et permettre son utilisation.

1.4- Pompes électromagnétique

La coexistence ou la présence d'un champ magnétique et d'un courant électrique non colinéaires, donne naissance à une force de Laplace qui permettrait la circulation du fluide conducteur.

On distingue deux types de pompes :

1.4-1 Pompe MHD à conduction

Le principe de fonctionnement de ces pompes à conduction (Figures 1.2 et 1.3) repose sur l'accélération du fluide par les forces de **Laplace**, qui sont le fruit de l'action d'un champ magnétique généralement uniforme sur un courant injecté dans le métal.

Elles sont constituées d'un canal dans lequel s'écoule à une certaine vitesse, un fluide électriquement conducteur. Il existe deux grandes familles de pompes à conduction :

Les pompes à conduction à courant continu (**DC**), qui utilisent des courants continus circulant dans les canaux ou le bobinage. Les fluides conducteurs sont en général les plasmas et les métaux liquides.

Et les pompes à conduction à courant alternatif (**AC**) exigent la présence d'un électro-aimant. Le courant alternatif entrainerait la présence de courants de Foucault.

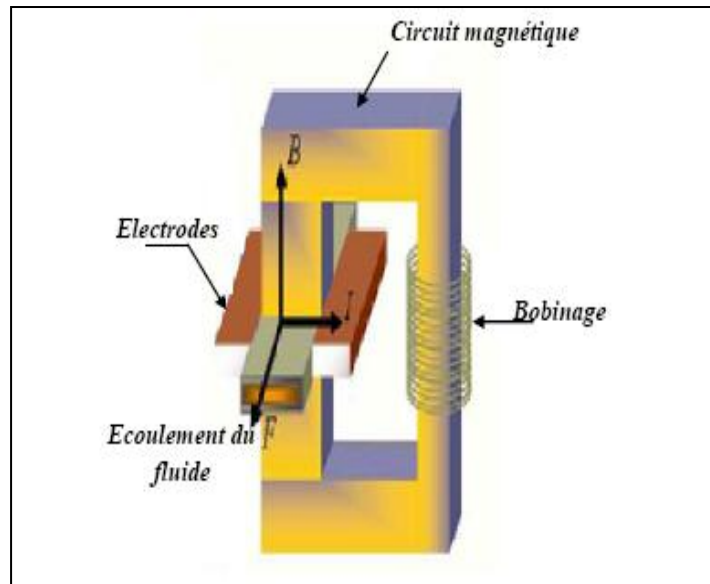


Figure 1-2 Pompe à conduction à courant continu [61]

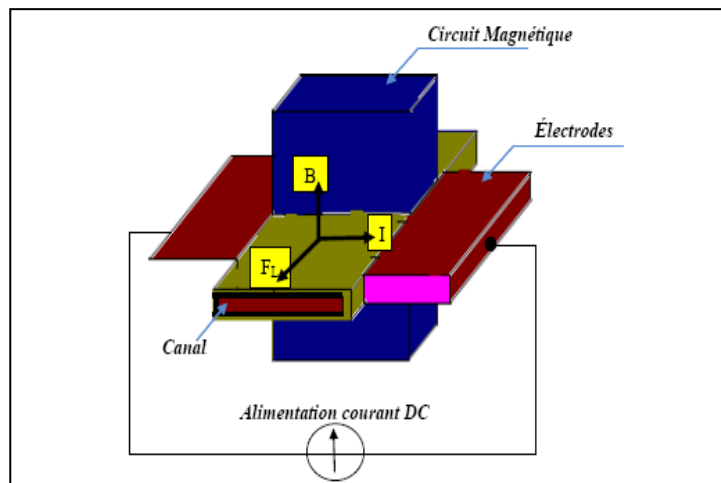


Figure 1-3 Schémas d'une pompe MHD conduction [61]

1.4-2 Pompe MHD à Induction (Figure 1.4)

Un champ magnétique variable induit un courant qui traverse le fluide, une force de Laplace est créée par conséquent, et qui permet le mouvement du fluide. Ces pompes ont l'avantage de se passer des électrodes.

L'aluminium et le sodium sont les mieux indiqués, de par leur conductivité électrique élevée.

Mais le principal inconvénient dans l'utilisation de ce type de pompe, réside dans la complexité et le volume pour des systèmes miniaturisés.

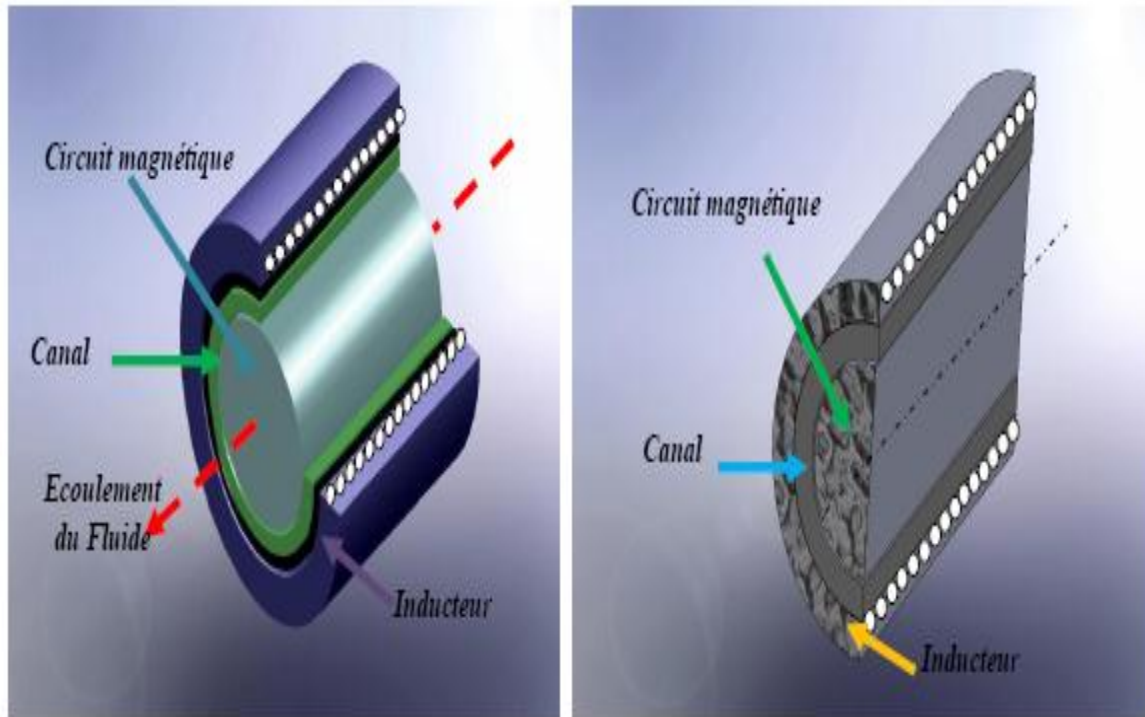


Figure 1-4 MHD à induction annulaire [62]

1.5-Application de la MHD en biomédicale (micro-pompe)

Les micro-pompes (MHD) assurent le contrôle du flux à l'intérieur du système micro fluide. Les variations de l'intensité du courant électrique et du champ magnétique permettent de générer une différence de pression le long du micro-canal, ce qui permet aux espèces ioniques de se mouvoir.

On trouve les applications de ces pompes dans les appareils médicaux tels que les pompes d'infusion ou le cœur artificiel.

1.6- Application de la MHD en métallurgie

Le brassage qui est le déplacement du métal liquide, la sustentation ou lévitation ainsi que le formage des métaux sont assurés par des forces magnétiques.

1.6.1-Le four à Induction

Cette technique (Figure 1.5) est utilisée en métallurgie, afin de mélanger et chauffer les métaux par effet Joule pour les liquéfier.

Les fours à induction se composent essentiellement d'une bobine inductrice refroidie par circulation d'eau, entourant un creuset dans lequel se trouve la masse métallique à fondre et à traiter.

Le champ magnétique offre la possibilité d'agir à distance et de façon contrôlée sur un fluide électro conducteur.

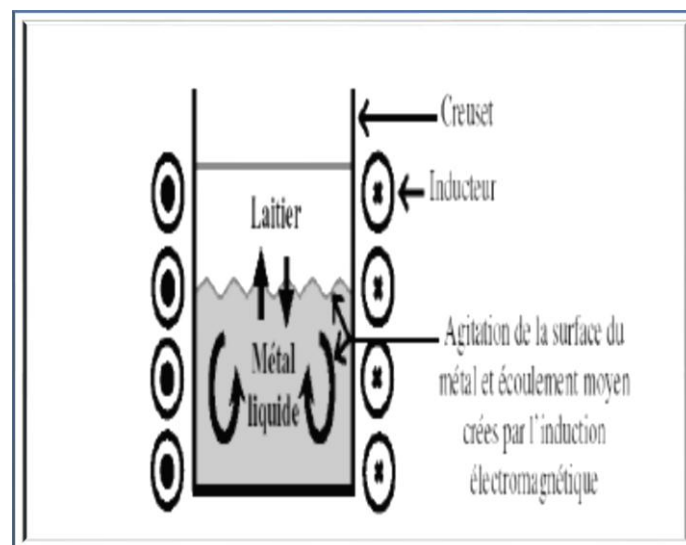


Figure 1-5 Schéma de principe du procédé électromagnétique utilisant un champ magnétique alternatif [63]

1.6.2-Pompage des métaux

Qui se fait grâce aux deux types de pompes que nous avons cités ci-dessus.

1.6.3-Affinage des métaux

Qui a pour but de purifier un métal des éléments chimiques indésirables .la séparation de ces impuretés se fait grâce à la présence du champ magnétique.

1.6.4-Brassage électromagnétique

Les brasseurs électromagnétiques, permet l'élimination de bulles, de saletés et l'accélération du mélange .ils ne disposent pas de partie mobile.

2. Les Ferro Fluides

2.1- Historique

En 1779, *Wilson* eu la lumineuse idée d'introduire de fines particules de fer dans de l'eau. *Maxwell* (1881), parmi les pionniers à opter pour cette technique dans le but d'améliorer la conductivité thermique du mélange fluide-particules.

Mais c'est au début des années 1990, grâce à l'essor du domaine des nanotechnologies qu'est apparu la possibilité d'utiliser des particules de taille nanométrique pour améliorer les propriétés thermo-hydrauliques des fluides caloporteurs.

Le terme **Nano-fluide** a été proposé pour la première fois par un certain *Choi [1]* et qui est l'œuvre de ses propres travaux sur la caractérisation de l'ajout des nanoparticules dans un fluide de base.

Depuis, les recherches sur les *Nano fluide* sont englobées plusieurs disciplines pour ne citer que la mécanique des fluides, la thermique, la rhéologie et la chimie.

En 1963, *Stephen Papell [64]* a mélangé de la poudre de magnétite **Fe₃O₄** à du kérosène en présence d'acide oléique agissant comme tensioactif. Il broya le liquide pendant 10 mois, dans le but d'obtenir des nanoparticules. L'objectif était de fabriquer un liquide de propulsion pour fusées en l'absence de gravité.

Mais depuis il y'a eu une plus grande maîtrise et avancées technologiques dans la synthèse de ces liquides, on cite par exemple, le *Ferrofluide* magnétique permanent qui conserve son magnétisme crée par les chercheurs américains et chinois [65].

2.2- Introduction

Ces dernières décennies nous avons assisté à l'apparition de nouveaux fluides possédant des propriétés thermiques améliorées comparées à celle des fluides caloporteurs classiques, en introduisant des nanoparticules.

L'ensemble ainsi constitué, est appelé *Nano fluide*.

Les *Ferrofluides* font partie de cette catégorie de fluide, avec en plus la particularité qui se caractérise par le fait que l'ensemble liquide et nanoparticules, acquiert alors un comportement magnétique sous l'influence d'un champ magnétique.

En l'absence du champ magnétique, les *Ferrofluides* présentent des propriétés similaires aux **Nano fluides**.

les *Ferrofluides* sont des suspensions colloïdales stables de particules ferromagnétiques ou *Nano fluides* magnétiques de l'ordre de 10 nm plongées dans un liquide porteur, la fraction volumique des nanoparticules est généralement inférieure à 15%.

Comme dans le cas d'un *Nano fluide*, la stabilité du *Ferrofluide* est assurée par le surfactant enrobant la nanoparticule. Ils sont présentés comme étant des fluides qui favorisent les échanges de chaleur.

Ils n'existent pas dans la nature mais plutôt, ils sont le fruit d'une synthèse.

En présence d'un champ, les particules magnétiques qui sont constituées d'un matériau qui peut être ferromagnétique ou ferrimagnétique, possèdent la particularité d'avoir des moments qui ont tendance à s'aligner avec le champ auquel elles sont soumises et s'alignent le long des lignes de champ et forment des chaînes de particules aussi appelées agrégats.

On dit alors que le fluide est polarisé. Dans ce cas, l'homogénéité du fluide ainsi que son isotropie sont modifiées. De cette façon, les propriétés thermo-hydrauliques du fluide peuvent être ajustées en fonction de l'intensité et de la direction du champ magnétique appliqué. Ceci s'explique par la forte interaction entre les nanoparticules magnétiques et le fluide de base. Ainsi, le comportement magnétique des nanoparticules est transféré à l'ensemble du liquide.

L'aimantation globale du *Ferrofluide* est nulle et chaque particule est orientée aléatoirement. Les *Ferrofluides* présentent des propriétés similaires aux *Nano fluides* en l'absence de champs magnétique.

<i>Matériaux magnétiques</i>		<i>Fluides porteurs</i>	
Métallique	Oxyde magnétique	Solvants organique	Solvant polaire
Fe : fer	Fe ₃ O ₄ : magnétite	Kérosène	Eau
Co : cobalt	γ – Fe ₂ O ₃ : maghémite	Diester carboxylique	Méthanol
Ni : nickel	Fe ₂ CoO ₄ : ferrite cobalt	Huile de silicone	Ethanol
Fe-Co	Fe ₂ MnO ₄ : ferrite manganèse	Polyphényléthers	Ethylène glycol

Tableau 1-1 *Matériaux et fluides porteurs utilisés dans les Ferro Fluides*

2.3- Les Fluides magnétiques

Selon la taille des particules, nous pouvons distinguer deux types de fluides magnétiques : les fluides magnéto-rhéologiques et les *Ferrofluides*.

2.4-Fluides magnéto-rhéologiques (MR)

Ces fluides sont des suspensions de particules magnétiques constitués de microparticules solides (sphériques ou elliptiques) ferromagnétiques ou ferrimagnétiques dont la taille varie de 0,1 à 10 μm dans un fluide suspendant.

Ils présentent généralement une fraction volumique (en microparticules) comprise entre 20 et 40%. Des additifs chimiques sont souvent rajoutés dans les fluides MR afin de les stabiliser et par la même éviter une sédimentation et une agrégation des particules, et assurer leur homogénéité.

Les fluides **MR** sont caractérisés par une capacité importante à se structurer sous l'effet d'un champ magnétique (forte interaction magnétique entre les particules).

En l'absence de champ magnétique, ces particules ne présentent pas de moment magnétique global, chaque mono domaine d'une particule est orienté de façon différente de son voisin, et l'aimantation qui en résulte est nulle.

L'énergie d'interaction magnétique est alors négligeable devant les autres énergies de liaison. D'autre part, ces particules ne sont que très peu sensibles à l'agitation thermique, car elles sont suffisamment grosses pour ne pas se disperser au sein du liquide porteur.

Lorsque l'on applique un champ magnétique, chaque domaine de Weiss d'une particule de fluide **MR** s'oriente dans la direction du champ imposé.

La viscosité dynamique des fluides **MR** augmente très fortement (1000 fois par rapport au cas sans champ), à tel point qu'ils se comportent comme des solides viscoélastiques. De plus, lorsque le champ magnétique est intense (dépassant l'aimantation à saturation du fluide **MR**).

2.5- Interactions entre nanoparticules et fluide de base

Comme nous l'avons dit auparavant, le **Ferrofluide** doit être homogène. En effet, lors de la mise en suspension des particules dans un solvant, le fluide s'organise autour de la particule et forme une structure en peau d'oignon.

Cette dernière présente une superposition de couche de fluide les unes sur les autres.

Les couches (peaux) les plus externes sont les plus mobiles et les plus fluides.

Par conséquent, lors d'une sollicitation extérieure par un champ magnétique, le déplacement de la particule entraîne les molécules les plus proches du solvant qui sont insensibles au champ magnétique.

Ce phénomène s'explique par le fait qu'au voisinage de la particule, il existe une forte interaction entre la particule et les molécules du solvant. Quand le solvant est polaire, la particule porte une charge de surface arbitraire (positive ou négative) qui interagit avec la charge du solvant. À titre d'exemple, si la particule est chargée négativement, les charges positives du solvant (ions) vont s'adsorber à la surface de la particule et ainsi former un nuage très dense (ou peau d'oignon).

Dans ce cas, la couche formée est appelée couche dense. Au-delà, les charges du solvant s'organisent autour de la couche dense pour assurer la neutralité du colloïde, c'est la couche diffuse caractérisée par des interactions électrostatiques.

Ce mécanisme est connu sous le nom de double couche électrique. Quand le solvant est apolaire (organique), la surface de la particule subit un greffage covalent d'une chaîne *alkyle*. Grâce à ces chaînes, une interaction par forces de *Van der Waals* est assurée entre les particules et les molécules du solvant. Par conséquent, le solvant est organisé autour de la particule, et le *Ferrofluide* forme donc une seule phase.

2.5.1- Le diamagnétisme

Lorsque toutes les couches atomiques ou moléculaires sont saturées, le moment magnétique résultant est nul, donc l'aimantation est inexistante.

Une fois le matériau est soumis à un champ magnétique, il présente un effet magnétique qui le repousse, ou autrement dit, les aimants élémentaires s'alignent contre le champ extérieure, il en résulte une répulsion.

C'est le cas des supraconducteurs qui sont considérés comme de parfaits diamagnétiques, ou tout champ magnétique entraîne en son sein des super courants sans apport d'énergie du fait de l'absence de résistance électrique.

Ces courants créent un champ magnétique qui compense exactement le champ extérieur, propriété propice pour assurer la lévitation magnétique, donc dans le cas du diamagnétisme les matériaux sont repoussés par le champ magnétique.

Les orbites électroniques sont modifiées sous l'effet du champ magnétique appliqué, et un moment magnétique est induit parallèlement au champ appliqué opposés au champ externe appliqué avec un module proportionnel à l'excitation magnétique.

L'état magnétique des matériaux diamagnétiques ne varie pas avec la température car l'agitation thermique n'intervient pas dans leur état magnétique.

2.5.2- Le paramagnétisme

Dans le cas où l'atome possède une couche électronique incomplète, il possède un moment magnétique non nul, comme le cas du fer, certains électrons qui sont situés sur la périphérie de l'atome et qui ne participent pas aux liaisons atomiques sont orientables, on parle de moment magnétique de l'électron qui s'aligne dans le même sens que les lignes du champ externe, dans ce cas on dit que les matériaux sont attirés par le champ magnétique.

Lorsque l'énergie thermique est plus forte que l'énergie d'interaction de ces moments magnétiques, ou bien lorsqu'ils n'interagissent pas entre eux, le matériau est dit paramagnétique. Les directions des moments sont aléatoires, et le matériau ne possède pas d'aimantation résultante. C'est le cas de l'aluminium, du magnésium, du dioxygène, du sodium. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les moments tendent à être orientés par le champ magnétique.

Un corps paramagnétique sera ainsi attiré par un champ intense, mais cette attraction est faible et l'aimantation revient à zéro lorsque le champ extérieur est annulé. D'après la loi de **Curie**, le paramagnétisme diminue lorsque la température augmente.

2.5.3- Le ferromagnétisme

Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, la structure parallèle des moments magnétiques est favorisée. L'état paramagnétique à haute température cède ainsi la place à un état ordonné avec alignement des moments magnétiques à une température de transition appelée température de **Curie**, étant donné qu'à une certaine température suffisamment élevée, l'énergie cinétique des électrons devient si grande qu'elle interfère avec les interactions des spins électroniques. C'est le cas du fer, nickel, cobalt.

Pour le fer, cette température est de 770 °C. Les matériaux magnétiques durs, communément appelés aimants, présentent un fort phénomène d'hystérésis. Lorsque l'excitation magnétique extérieure est retirée, l'alignement et donc l'effet magnétique est partiellement conservé même sans champ magnétique. Un Matériau dur garde un champ magnétique dit rémanent : c'est désormais une source de champ magnétique, un aimant. Tous les matériaux ferromagnétiques sont fortement attirés par les zones de champs intenses.

2.6- Comportement thermique et rhéologique des Ferro Fluides

2.6.1- Conductivité thermique des Ferro Fluides

Comme dans le cas d'un *Nano fluide*, la conductivité thermique d'un *Ferrofluide* dépend de plusieurs paramètres à savoir :

la fraction volumique des nanoparticules, leur taille, la nature du fluide de base, la nature du surfactant et l'intensité du champ magnétique.

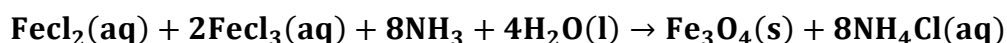
De récentes études ont montré une amélioration significative du coefficient de conductivité thermique des *Ferrofluides* lorsqu'un champ magnétique est appliqué. En augmentant l'intensité du champ magnétique, la conductivité thermique augmente.

Le même raisonnement est valable pour la fraction volumique. L'amélioration ainsi obtenue atteint les 130% par rapport au fluide de base.

2.6.2- Synthèse d'un Ferro Fluide

Finalement et ce qu'il faut retenir, un *Ferrofluide*, est créé en plongeant des particules ferromagnétiques dans un milieu suspensif. Un tensioactif est introduit dans la composition du mélange, dans le but d'éviter que les particules ferromagnétiques ne s'agglomèrent, et permettre au *Ferrofluide* de conserver les propriétés d'un liquide

L'une des méthodes employée pour l'obtention du *Ferrofluide* est faite par précipitation chimique de formule. Dans ce cas, il est présenté un *Ferrofluide* à base de magnétite



Réactifs:

- Solution de chlorure de **fer II (FeCl₂)**
- Solution de chlorure de **fer III (FeCl₃)**
- Solution d'ammoniac (**NH₃**)
- Eau distillée **H₂O**

Produits :

- Magnétite (**Fe₃O₄**)
- Hydroxyde de Tétraméthylammonium **NH₄Cl** : il joue le rôle de tensioactif. L'eau en excès forme le suspensif, c'est-à-dire le liquide dans lequel la magnétite est en suspension. On peut dire qu'il s'agit d'une suspension aqueuse.

2.7-Applications des Ferro Fluides

Les **Ferrofluides** sont employés dans l'impression des billets de banque qui sont aisément attirés par un aimant pour limiter la contrefaçon. Ils sont aussi utilisés en tant qu'isolant destinés à protéger les disques durs des éléments nuisibles extérieurs.

21.7.1-Etanchéité dynamique

L'utilisation d'un joint liquide (**Ferro fluide**) peut être intéressante dans le cas de systèmes arbre-alésage comme dans le cas d'un pont de boîte. Ils jouent également un rôle très important dans la lubrification et l'étanchéité des axes de moteurs de disque durs.

Les **Ferro fluides**, de par leur viscosité élevée sous champ magnétique, en les insérant dans l'entrefer de l'aimant, le mouvement de la bobine des hauts parleurs est amorti par conséquent, une distorsion des signaux audio qui compromettrait ainsi la qualité du son sera évitée.

De plus, la dissipation thermique des bobines mobiles pourrait causer leur destruction.

D'autre part, la conductivité thermique élevée du **Ferrofluide** sous champ magnétique permet une diminution de la résistance thermique et une bonne évacuation de la chaleur.

Ils permettent donc la régulation de la chaleur dans les haut-parleurs et augmenter leur durée de vie, et améliorent leur puissance acoustique et permettent l'obtention d'un son de haute qualité.

2.7.2-Amortissement

Dans les applications automobiles, le **Ferro fluide** remplace l'huile d'amortisseur.

L'efficacité d'amortissement est contrôlée via une bobine asservie par un calculateur qui régule le courant injecté (induction créée dans la bobine) selon les besoins d'amortissement (vitesse, état de la route).

L'objectif est ici de faire varier la viscosité du **Ferro fluide**.

2.7.3-Biomedical

Dans le domaine de la médecine et de la biologie, les *Ferro fluides* détruisent des cellules cancéreuses en se fixant sur celles-ci, ils les isolent par centrifugation. Ils sont aussi injectés dans des tissus cancéreux, qui une fois soumis à un champ magnétique, entrainerait une élévation de température de la tumeur entre 41° et 46°C. Cette méthode est nommée hyperthermie, permet de les rendre inactives.

Les chercheurs ont découvert que sous un champ magnétique, des particules magnétiques placées à l'intérieur des cellules cancéreuses sont capables de rompre la membrane des cellules cancéreuses et ainsi de les détruire.

Une source de champ magnétique permet également la séparation des nanoparticules du milieu considéré et capturer les virus et les bactéries.

➤ **Traitement des ulcères et des fistules**

La méthode comprend l'insertion de *Ferrofluides* dans la fistule et la fixation d'un aimant permanent à son ouverture extérieure. La position fixe du *Ferrofluide* scelle soigneusement la fistule et n'interfère pas avec le processus de guérison.

➤ **En imagerie**

En imagerie par résonance magnétique **IRM**, les *Ferrofluides* sont utilisés comme agent de contraste en modifiant le temps de relaxation du proton.

Afin de magnétiser les tissus, un aimant supraconducteur est utilisé : il produit un champ stationnaire et uniforme dont l'intensité est comprise selon les appareils entre 0,1 et 7 T.

Cette méthode d'imagerie est sans aucun traumatisme et sans injection de produits radioactifs.

La qualité de l'image obtenue étant liée à la valeur de l'intensité du champ magnétique dans lequel sont placés les tissus à observer.

2.7.4-Dans le domaine des biotechnologies (La Bioséparation)

Elle permet la récupération et la purification de protéines ainsi que la séparation de cellules.

La méthode est basée sur l'introduction de microsphères de *Nano cristaux* d'oxyde ferreux (oxyde de Fer II) super paramagnétiques, d'une taille de 20-25nm, à une substance biologique comme l'ADN ou les anticorps.

Exposer les cellules à un champ magnétique déclenche le processus de séparation : les cellules liées sont attirées par le champ magnétique et les cellules sélectionnées peuvent être extraites.

2.7.5- Dans le domaine des technologies et de la mécanique :

➤ **Les Hauts parleurs :**

Les *Ferrofluides* permettent d'améliorer le transfert thermique au sein des enceintes audio de haute qualité, afin d'obtenir un son de haute performance et sans surchauffe.

L'air autour de la bobine de ces haut-parleurs conduit très mal la chaleur, il est donc remplacé par du *Ferrofluide*.

Dans le domaine des turbomachines, le contrôle des épaisseurs des aubes ainsi que le diamètre des canaux de refroidissement se fait par introduction des *Ferrofluides*.

➤ **Les amortisseurs :**

Il est aujourd'hui envisageable de modifier les caractéristiques des amortisseurs de voitures haute gamme selon les conditions de route telles que la vitesse. Sous l'action d'un champ magnétique, Il est également très utile, de créer des amortisseurs antisismiques réglés sur la fréquence de résonance d'un bâtiment car la viscosité d'un *Ferro fluide* dépend du champ magnétique qu'il subit.

➤ **Matériel informatique**

Les *Ferro fluides* sont utilisés pour la lubrification et l'étanchéité des axes de moteur de disques durs en étant introduits entre l'enroulement et l'aimant assurant la lubrification et empêchant les poussières de se glisser dans l'interstice.

2.7.6- Dans le domaine de l'Art

De nombreux artistes ont pris le parti d'exploiter les formes géométriques en dents que prennent les *Ferro fluides* sous l'action d'un champ magnétique afin d'en faire des œuvres d'art qui sont même parfois en mouvement. Parmi ces artistes on compte notamment la japonaise *Sachiko Kodama*.



CHAPITRE 2

Méthodes de résolution

2-1 Résolution analytique

2-1-1 Introduction

La méthode de décomposition d'*Adomian*(ADM), est une méthode destinée à la résolution de nombreux problèmes physiques, c'est l'une des méthodes semi-exacte capable de fournir une approximation analytique à une large gamme d'équations non linéaires sans avoir besoin de linéarisation, perturbation, fermeture ou discrétisation, ce qui fait que les résultats obtenus sont plus réalistes .

Les capacités et les avantages de cette méthode ont attirés l'attention de plusieurs auteurs qui n'ont pas hésité à l'utiliser pour la résolution de nombreux problèmes de dynamique des fluides.

2-1-2 Principe de la méthode de décomposition d'Adomian

On considère une équation $\mathbf{Fu}(t)=\mathbf{g}(t)$, où \mathbf{F} représente un opérateur général, partiel ou ordinaire qui englobe les termes linéaires et non linéaires. Les termes linéaires sont décomposés en $\mathbf{L}+\mathbf{R}$, où « \mathbf{L} » est facilement inversible et « \mathbf{R} » est le résidu de l'opérateur linéaire. L'équation peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{Lu}+\mathbf{Nu}+\mathbf{Ru}=\mathbf{g} \quad (2.1.1)$$

\mathbf{Nu} indique les termes non linéaires. En résolvant cette équation pour \mathbf{Lu} , du moment que \mathbf{L} est inversible, on peut l'écrire :

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{Lu} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Ru} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Nu} \quad (2.1.2)$$

Si, par exemple, \mathbf{L} est un opérateur du second ordre, \mathbf{L}^{-1} est un double intégral. La résolution de l'équation (2.1.2) nous donne :

$$\mathbf{U}=\mathbf{a}+\mathbf{bt}+\mathbf{L}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Ru} - \mathbf{L}^{-1} \quad (2.1.3)$$

Où \mathbf{a} et \mathbf{b} représentent des constantes d'intégration que l'on pourra calculer aisément à partir des conditions initiales ou aux limites.

La méthode d'**Adomian** suppose que la solution de $u(t)$ peut être développé en série tel que :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n \quad (2.1.4)$$

De même, le terme non linéaire \mathbf{Nu} va s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{Nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \quad (2.1.5)$$

Où \mathbf{A}_n sont les polynômes d'Adomian qui dépendent de $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{L}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \quad (2.1.6)$$

Finalement, et après quelques itérations et un rapprochement suffisant de l'exactitude, la solution de l'équation (2.1.1) peut être exprimée par :

$$u = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad (2.1.7)$$

Les polynômes d'Adomian peuvent être générés par différentes méthodes. On peut utiliser la formulation récursive suivante :

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} [\mathbf{N}(\sum_{i=0}^n \lambda^i \mathbf{u}_i)] \right]_{\lambda=0} \quad (2.1.8)$$

2-1-3 Tableau référence des polynômes Adomian

Généralement, les polynômes d'Adomian sont décrits de la manière suivante :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{u}_1 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{u}_0) \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{u}_2 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \left(\frac{1}{2!}\right) \mathbf{u}_1^2 \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{u}_3 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \left(\frac{1}{3!}\right) \mathbf{u}_1^3 \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{u}_4 \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \left(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 + \left(\frac{1}{2!}\right) \mathbf{u}_2^2\right) \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{u}_0) + \left(\frac{1}{2!}\right) \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2 \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{u}_0) + \left(\frac{1}{4!}\right) \mathbf{u}_1^4 \mathbf{f}^{(4)}(\mathbf{u}_0)$$

2-1-4 Exemples d'applications de la méthode d'Adomian (ADM)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 \text{ Avec } \mathbf{u}(0) = -2$$

Selon l'algorithme ADM, on peut mettre :

$$\mathbf{L}u = u'(x), \quad \mathbf{R}u = -u(x), \quad \mathbf{N}u = 0, \quad f(x) = x^2$$

\mathbf{L}^{-1} : Qui est l'inverse de l'opérateur ' \mathbf{L} ', n'est autre que l'intégrale simple par rapport à x , ce qui donne comme solution :

$$u(x) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} u_n = u(0) + \mathbf{L}^{-1} x^2 - \mathbf{L}^{-1} \sum_{n \geq 0}^{\infty} u_n$$

$$u_0 = u(0) + \mathbf{L}^{-1} x^2 = -2 + \int_0^x (x^2) dx = -2 + \frac{x^3}{3}$$

$$u_1 = \mathbf{L}^{-1}(u_0) = \int_0^x \left(-2 + \frac{x^3}{3}\right) dx = -2x + \frac{x^4}{12}$$

$$u_2 = \mathbf{L}^{-1}(u_1) = \int_0^x \left(-2x + \frac{x^4}{12}\right) dx = -x^2 + \frac{x^5}{60}$$

$$u_3 = \mathbf{L}^{-1}(u_2) = \int_0^x \left(-x^2 + \frac{x^5}{60}\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{360} :$$

$$u_n = \mathbf{L}^{-1}(u_{n-1}) = -2 \frac{x^n}{n} + 2 \frac{x^{n+3}}{n!}$$

$u(x) = -2 - 2x - x^2$ est la solution exacte d'une équation différentielle linéaire de premier ordre.

Exemple 2

Dans cet exemple, on se propose de résoudre l'équation de *Blasius*, qui est bien connue pour être, une équation différentielle ordinaire non linéaire, et qui intervient dans certains problèmes de couches limites en dynamique des fluides.

Cette équation est donnée par :

$$u'''(x) + \frac{1}{2} u(x) u''(x) = 0$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(x=0) = 0$$

$$u'(x=0) = 0$$

$$u'(x=\infty) = 1$$

Par utilisation de la méthode de décomposition d'*Adomian*, on a :

$$u''' = -\frac{1}{2}uu''$$

$$L = \frac{d}{dx} \text{ Ce qui nous amène à qui écrire } L^3u = -\frac{1}{2}uL^2u$$

$$u = c_1 + c_2x + c_3x^2 - \frac{1}{2}L^{-3}uL^2u$$

Dans ce cas :

$$u_0 = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

Par application des conditions aux limites, on aura :

$$u_0 = c_3x^2 = cx^2$$

$$L^2u_0 = L^2(cx^2) = 2c$$

$$A_0 = u_0L^2u_0 = 2c^2x^2$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}L^{-3}A_0 = -\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x\int_0^x 2c^2x^2 dx dx dx = -c^2\frac{x^5}{60}$$

$$L^2u_1 = -c^2\frac{x^3}{3}$$

$$A_1 = u_1L^2u_0 + u_0L^2u_1 = -11c^3\frac{x^5}{30}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}L^{-3}A_1 = -\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x\int_0^x -11c^3\frac{x^5}{30} dx dx dx = 11\frac{5!}{8!}c^3\frac{x^8}{60} = \frac{11c^3x^8}{20160}$$

$$A_2 = u_0L^2u_2 + u_1L^2u_1 + u_2L^2u_0$$

$$A_2 = 11c^4\frac{x^8}{360} + c^4\frac{x^8}{180} + 11c^4\frac{x^8}{10080} = \frac{c^4375x^8}{10080} = \frac{c^425x^8}{672}$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}L^{-3}A_2 = -\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{c^425x^8}{672} dx dx dx = -\frac{8!}{11!}\frac{c^425x^{11}}{1344} = -\frac{5c^4x^{11}}{266112}$$

$$A_3 = u_0 L^2 u_3 + u_1 L^2 u_2 + u_2 L^2 u_1 + u_3 L^2 u_0$$

$$A_3 = -\frac{9299c^5 x^{11}}{3326400}$$

$$u_4 = -\frac{1}{2} L^{-3} A_3 = -\frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \frac{9299c^5 x^{11}}{3326400} dx dx dx = \frac{9299c^5 x^{14}}{14529715200}$$

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \dots + u_n$$

Exemple 3

$$u'(x) + u(x)^2 = 0$$

$$u(0) = 1$$

$$Lu = u'(x) \text{ et } Nu = u(x)^2$$

$$L^{-1}Lu = -L^{-1}Nu$$

$$u = -L^{-1}u^2 + c$$

D'après des conditions initiales, on a : $c=1$

Les termes de la solution et des polynômes d'Adomian sont :

$$u = -L^{-1}u^2 + 1$$

$$u_0 = 1$$

$$A_0 = u_0^2 = 1$$

$$u_1 = -L^{-1}A_0 = -x$$

$$A_1 = 2u_1u_0 = -2x$$

$$u_2 = -L^{-1}A_1 = x^2$$

$$A_2 = 2u_2u_0 + u_1^2 = 3x^2$$

$$u_3 = -L^{-1}A_2 = -x^3$$

$$A_3 = 2u_3u_0 + 2u_1u_2 = -4x^3$$

$$u_4 = -L^{-1}A_3 = x^4$$

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}_n = \mathbf{1} - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$$

2-1-5 Application aux équations différentielles ordinaires

Soit l'équation différentielle d'ordre n

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}(x,0)=1$$

Que l'on écrit sous la forme : $\mathbf{L}(\mathbf{u})+\mathbf{N}(\mathbf{u})=\mathbf{f}$

Avec $\mathbf{L}(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\mathbf{L}^{-1}(\cdot) = \int_0^t(\int_0^t(\cdot)dt)dt$, $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = 4\mathbf{u}$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u})+\mathbf{R}(\mathbf{u})=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\cdot)$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}'(0)t$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) - t\mathbf{u}'(0) - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n) .$$

$$\text{Par identification, on trouve} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) - t\mathbf{u}'(0) = a + bt \\ \mathbf{u}_1 = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_0) = -\mathbf{L}^{-1}(4\mathbf{u}_0) = -2at^2 - \frac{2}{3}bt^3 \\ \mathbf{u}_2 = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_1) = -\mathbf{L}^{-1}\left(4\left(-2at - \frac{2}{3}bt^3\right)\right) = \frac{2}{3}bt^4 + \frac{2}{15}bt^5 \\ \dots \dots \\ \mathbf{u}_n = a\left[1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 + \dots\right] + b\left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \dots\right] \end{array} \right.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n = a\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2t)^{2n}}{(2n)!}\right] + \frac{b}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \sin 2t$$

Donc: $\mathbf{u} = \mathbf{a}\cos(2t) + \frac{1}{2}\mathbf{b}\sin 2t$

Ce qui représente la solution exacte.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 2\mathbf{x} + 1 \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{cos x} \end{cases}$$

$$\mathbf{L}_{xx}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}, \mathbf{L}_{tt}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2}, \mathbf{L}_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \left(\int_0^t (\cdot) dt \right) dt$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_0^t \mathbf{L}_{xx}(\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)) dt dt \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_0 = (2\mathbf{x} + 1) + t\mathbf{cos x}$$

$$\mathbf{u}_1 = \int_0^t \int_0^t \mathbf{L}_{xx}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)) dt dt = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} dt dt = -\frac{t^3}{3!} \mathbf{cos x}$$

$$\mathbf{u}_2 = \int_0^t \int_0^t \mathbf{L}_{xx}(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)) dt dt = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial x^2} dt dt = \frac{t^5}{5!} \mathbf{cos x}$$

$$\mathbf{u}_3 = \int_0^t \int_0^t \mathbf{L}_{xx}(\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)) dt dt = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial x^2} dt dt = -\frac{t^7}{7!} \mathbf{cos x}$$

$$\mathbf{u}_4 = \int_0^t \int_0^t \mathbf{L}_{xx}(\mathbf{u}_3(\mathbf{x}, t)) dt dt = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{u}_3}{\partial x^2} dt dt = \frac{t^9}{9!} \mathbf{cos x}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = (2\mathbf{x} + 1) + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} \right) \mathbf{cos x}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (2\mathbf{x} + 1) + \mathbf{cos x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Sachant que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbf{sin t}$

On aura finalement comme solution :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (2\mathbf{x} + 1) + \mathbf{cos x sin t}$$

2-2 Méthodes de traitement Numérique

Parmi les méthodes numériques classiques, on distingue l'algorithme à pas séparés ou chaque point de la solution y_{n+1} est calculé à partir de la solution en x_i . Les calculs commencent par le point de départ (x_0, y_0) .

Les systèmes d'équations différentielles que l'on rencontre en science peuvent se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre du type :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), 0 \leq t \leq T \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Où $y(t)$ est la fonction que l'on cherche, y_0 sa valeur initiale et f une fonction connue. En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} , on aura la relation :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (2.2.2)$$

2-2-1 Méthode d'Euler

Soit l'équation différentielle du premier ordre $y'=F(x)$ à résoudre sur $[a, b]$ avec la condition initiale $f(x_0)=y_0$. Le problème consiste à échantillonner l'intervalle $[a, b]$ avec un pas régulier, c'est-à-dire subdiviser le segment en n intervalles de longueur h et de ce fait constituer une suite de points d'abscisses x_0, x_1, \dots, x_k avec $x_k = x_0 + kh$. La solution sera recherchée aux bornes de chaque sous intervalle $[x_n, x_{n+1}]$. En utilisant les différences divisées progressives.

L'idée principale de cette méthode consiste à approcher l'intégrale précédente par la méthode du rectangle $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = h * f(t, y(t))$

D'où le schéma itératif suivant :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (2.2.3)$$

$$y_0 = y(0)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$y'_n = f(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

Écrivons le développement en série de Taylor autour du point $x=x_n$

$$y_{n+1} = y_n + y'_n \Delta x + \frac{1}{2} y''_n (\Delta x)^2 + \dots$$

A l'ordre 1, on peut écrire :

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n \tag{2.2.4}$$

2-2-2 Méthode de Runge Kutta

a) Runge Kutta d'ordre 2

La méthode de Runge-Kutta, est une amélioration de l'estimation de l'intégrale en calculant l'aire d'un trapèze au lieu de celui d'un rectangle.

La méthode des trapèzes consiste en l'approximation suivante :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{2} * [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \tag{2.2.5}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right) \text{ avec} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + h k_1) \\ y_0 = y(0) \end{cases} \tag{2.2.7}$$

b) Runge Kutta d'ordre 4

C'est une forme de raffinement du calcul de l'intégrale et qui consiste à utiliser la méthode de *Simpson* au lieu de la méthode des *trapèzes*. La fonction intégrée, est remplacée par une parabole passant par les points extrêmes et le point de milieu. On a:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \tag{2.2.8}$$

Appliquée à l'intégrale (2.28), cela donne :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{6} * [f(t_n, y(t_n)) + 4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})\right) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \tag{2.2.9}$$

Pour rendre le schéma explicite, il faut estimer $4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})\right)$ et $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ à partir de t_n, y_n et h .

$$4f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})\right) = 2f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})\right) + 2f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})\right)$$

Dans le premier, on remplace $y_{n+\frac{1}{2}}$ par sa valeur déduite de la méthode d'Euler explicite; à

savoir : $y_{n+\frac{1}{2}}^a = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y(t_n))$. Dans le deuxième terme, on remplace $y_{n+\frac{1}{2}}$ par sa valeur

déduite de la méthode d'Euler Implicite $y_{n+\frac{1}{2}}^b = y_n + \frac{h}{2}f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y(t_{n+\frac{1}{2}})\right)$.

Que l'on va approcher par $y_{n+\frac{1}{2}}^b = y_n + \frac{h}{2}f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}^a\right)$.

Quant au terme $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$, on l'approche en estimant y_{n+1} par la méthode du point milieu, c'est-à-dire en appliquant la méthode du rectangle au milieu :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}^b\right). \quad (2.2.10)$$

Finalement on obtient le schéma explicite, dit de **Runge Kutta** d'ordre 4 :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right) \quad (2.2.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Exemple1

Prenons l'équation $\frac{dy(t)}{dt} = 1 - y$ avec $y(0) = 0$

Le schéma numérique donne :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0, y_0) \\ k_2 &= f\left(\frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) = 1 - \frac{1}{2}h \\ k_3 &= f\left(\frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{1}{2}h^2\right) \\ k_4 &= f(h, y_0 + hk_3) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2\right) \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + h\left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right] = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^6 - \frac{1}{24}h^4$$

Exemple2

On utilise la méthode de *Runge-Kutta* d'ordre 4 avec un pas $h=0.2$ pour obtenir une solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$, $y(0) = 1$

Nous avons la solution exacte de l'équation qui est : $y(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$k_1 = -2x_n y_n^2 = -2(0)(1)^2 = 0$$

$$k_2 = -2(x_n + 0.1), (y_n + 0.1k_1)^2 = -2(0.1)(1+0.1*0)^2 = -0,2$$

$$k_3 = -2(x_n + 0.1), (y_n + 0.1k_2)^2 = -2(0.1)(1 + 0.1 * (-0.2))^2 = -0,192$$

$$k_4 = -2(x_{n+1}), (y_n + 0.2k_3)^2 = -2(0.2)(1 + 0.2 * (-0.192))^2 = -0,37$$

$$y_1 = 1 - \frac{0.2}{6}(2 * 0,2 + 2 * 0,192 + 0,37) = 0,9615$$

Pour la deuxième itération, on aura :

$$k_1 = -2x_1 y_1^2 = -2(0,2)(0,9615)^2 = -0,37$$

$$k_2 = -2(x_1 + 0,1), (y_1 + 0,1k_1)^2 = -0,512$$

$$k_3 = -2(x_1 + 0,1), (y_1 + 0,1k_2)^2 = -0,497$$

$$k_4 = -2(x_2), (y_1 + 0,2k_3)^2 = -0,594$$

$$y_1 = 0,9615 - \frac{0.2}{6}(0,37 + 2 * 0,512 + 2 * 0,497 + 0,594) = 0,8621$$

n	x_n	y_n	Valeur exacte	Erreur absolue
0	0	1.0	1.0	0.0
1	0.2	0.9615	0.9615	0.0
2	0.4	0.8621	0.8620	0.0001
3	0.6	0.7353	0.7352	0.0001
4	0.7	0.6098	0.6097	0.0001
5	0.8	0.5	0.5	0.0

Table 2-1 : Comparaison entre la méthode numérique et la méthode exacte

2-3 Méthode de Tir

L'appellation de cette méthode, trouve son origine, dans sa similitude avec le tir d'un canon qui fut sa source d'inspiration. Cela s'explique, du fait que le principe de cette méthode, repose sur un point de départ et un point d'arrivée ou, autrement dit la cible que l'on souhaite atteindre. De ce fait, on doit bien régler l'angle que fait l'axe du canon avec l'horizontale en cherchant la hauteur idéale ou le point culminant qui permet au projectile d'arriver à son but.

Plusieurs tentatives successives sont nécessaires pour arriver à une meilleure précision.

Mathématiquement parlant, c'est la reformulation d'un problème de conditions aux limites (**BVP**) à celui de valeurs initiales (**IVP**), choisi de façon à approcher les conditions aux limites à l'autre extrémité.

Si nous considérons un problème à valeurs limites composés de deux points a et b.

$$y''=f(x, y, y') ; \text{ avec } y(a)=\alpha \text{ et } y(b)=\beta$$

La méthode de tir permet la résolution des problèmes à valeurs initiales

$$y(a)=\alpha \text{ et } y'(a)=s$$

On doit choisir s qui est la dérivée première de $y(x)$ en $x=a$ de façon que la condition $y(b)=\beta$ soit satisfaite, donc s représente la pente initiale de la solution. Cette approche consiste à choisir la pente ou la trajectoire idéale qui assure que $y(x)=\beta$ en $x=b$.

Exemple 1

Soit $f = f(x)$ une fonction à déterminer par un problème à valeurs limite

$$f''+f=0, f(0)=0, f(1)=1 \tag{2.3.1}$$

La solution exacte de l'équation différentielle s'écrit :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)} \tag{2.3.2}$$

Adoptons le changement de variables suivant :

$$f'=g$$

$$f''=g'=-f$$

$$\frac{df}{dx} = g(x, s) \quad \frac{dg}{dx} = -f(x, s), f(0,s)=0, g(0,s)=0 \tag{2.3.3}$$

s est à déterminer peut être résolue numériquement en utilisant la méthode de pas d'Euler par exemple.

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$$x_i = (i - 1)\Delta x \text{ avec } i=1..n+1, \text{ de telle manière que } x_1 = 0 \text{ et } x_{n+1} = 1$$

Le problème étudié peut s'écrire :

$$f_{n+1} = f_n + \frac{df_n}{dx} \Delta x = f_n + g_n \Delta x$$

$$g_{n+1} = g_n - f_n \Delta x$$

$$f_1 = 0 \quad (2.3.4) \quad g_1 = s$$

$$R(s) = f(1, s) - 1 \text{ et le choix de } s \text{ doit se faire de telle sorte que } R(1, s) = 0$$

Pour chaque choix de s , on aura :

$$s_{new} = s - \frac{R(s)}{\frac{dR}{ds}} \tag{2.3.5}$$

d'après la méthode de *Newton Raphson* nous aurons maintenant une fonction qui dépend également de s , donc $f(x,s)$ et par conséquent, nous aurons des paramètres variationnels suivants :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f(x,s)}{\partial s}$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial g(x,s)}{\partial s}$$

(2.3.6)

$$\frac{\partial F(x,s)}{\partial x} = \mathbf{G}(x,s) \quad , \quad \mathbf{F}(0,s) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial G(x,s)}{\partial x} = -\mathbf{F}(x,s) \quad , \quad \mathbf{G}(0,s) = \mathbf{1}$$

On peut maintenant résoudre le problème variationnel en utilisant la méthode de pas **d'Euler**

$$\mathbf{F}_{i+1} = \mathbf{F}_i + \mathbf{G}_i \Delta x$$

$$\mathbf{G}_{i+1} = \mathbf{G}_i - \mathbf{F}_i \Delta x \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{s}_{\text{new}} = \mathbf{s} - \frac{f_{n+1} - 1}{F_{n+1}} \quad (2.3.8)$$

Il est très facile de vérifier, estimer la valeur de s , résoudre les équations (2.3.7) et (2.3.4) pour trouver f , g , F and G .donc on aura une meilleure estimation de s , à partir de l'équation (2.3.8) et répéter jusqu'à obtenir la convergence de s .

Puisque la solution exacte de l'équation existe, il est facile de calculer la valeur de s .

$$s = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(x)}{\sin(1)} \right] = 1.188 \quad (2.3.9)$$

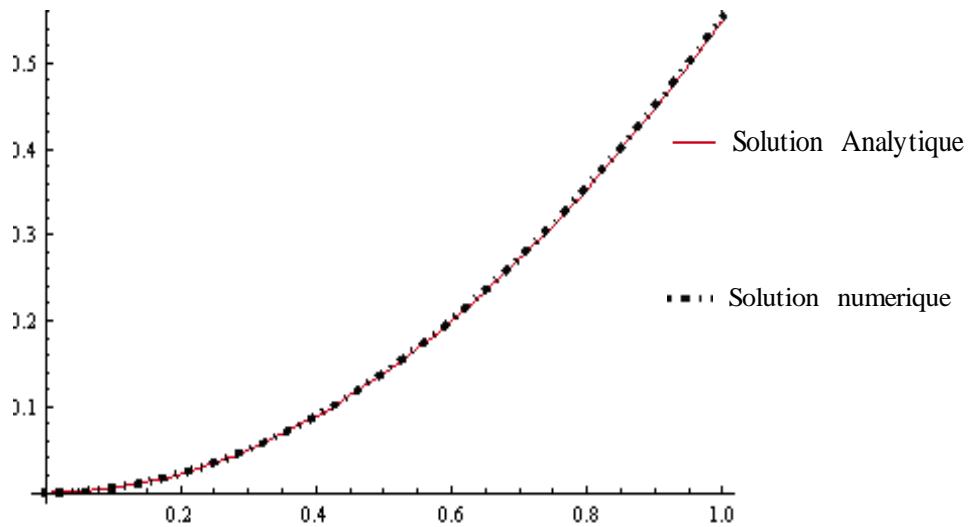


Figure 2. 1 Comparaison des solutions numériques avec les solutions analytiques

Exemple 2

Soit l'équation différentielle de Blasius $y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0$

Avec comme conditions aux limites :

$y(0)=0$, $y'(0)=0$ et $y''(0)$ reste inconnue, c'est une valeur qu'il faut varier de façon à avoir une valeur finale de $y'(1) = 0.5$.

Le programme suivant, écrit sous *Matlab*, utilise la méthode d'Euler associée à la méthode de Tir pour résoudre l'équation de *Blasius*.

```

i = 1;
F(i) = 0; % F = F
F1(i) = 0; % F1 = F'
F2(i) = 0.5549; % F2 = F'' <<< l'objectif de la méthode de tir est
% de varier la condition initiale F2 pour obtenir la valeur finale de F1 = 2
x(i) = 0; eta = (y/2)*sqrt(Uinf/(nu*x))
dx = 0.001; % pas d'intégration de x
xfinal = 1; % la valeur finale de eta
% intégrer en utilisant la méthode d' Euler
while x < xfinal

```

```

% calcul des dérivées
dFdx = F1(i);
dF1dx = F2(i);
dF2dx = - (1/2)*F(i) * F2(i);
% mise à jour des valeurs estimées
F(i+1) = F(i) + dFdx * dx;
F1(i+1) = F1(i) + dF1dx * dx;
F2(i+1) = F2(i) + dF2dx * dx;
x(i+1) = x(i) + dx;
i = i + 1;
end
F1(i)
plot(F1/2,n)
title('solution couche limite')
xlabel('Ux / Uinf')
ylabel('eta')

```

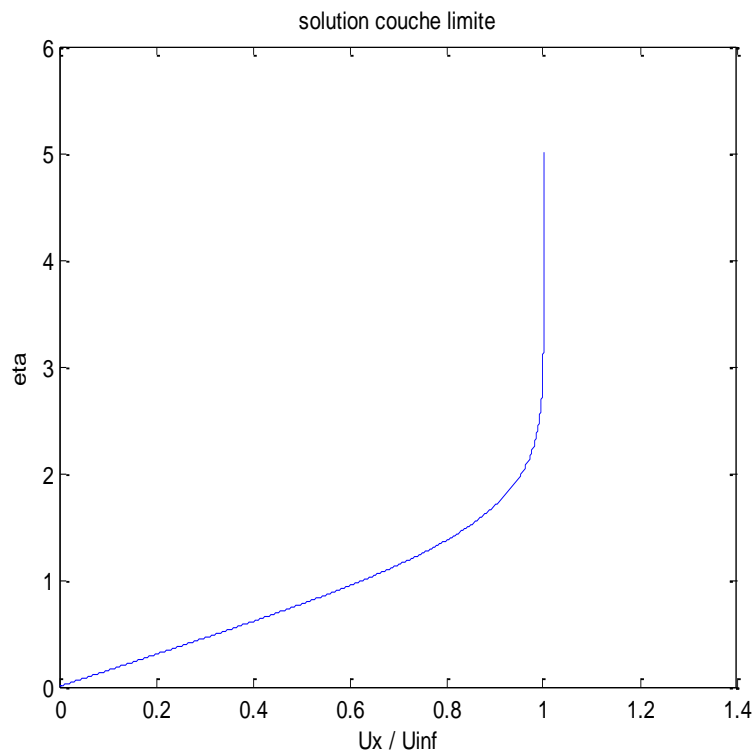


Figure 2.2 Profil de vitesse sur une plaque plane par la méthode de tir

Finalemment, les résultats obtenues par les deux méthodes, à savoir la méthode analytique d'*Adomian* et celle numérique de tir et d'*Euler*, se sont avérées très concordantes, ce qui laisse présager des résultats très concluants pour la suite de notre travail.



CHAPITRE 3

Équations gouvernantes

et

Modélisation mathématique

3-1-Introduction

Dans ce travail de recherche nous nous intéressons principalement à l'écoulement hydromagnétique radial généré par une source de densité uniforme et formée par l'intersection de deux parois planes non parallèles. En effet, il s'agit du célèbre écoulement dit de *Jeffery-Hamel*.

Cette étude considère donc l'écoulement d'un *Ferro fluide* hydromagnétique bidimensionnel stable à travers un canal convergent/divergent tournant autour d'un axe perpendiculaire à l'écoulement.

La configuration géométrique de l'écoulement de *Jeffery-Hamel* hydromagnétique rotatif d'un *Ferro fluide* est illustrée par la **Figure 3.1**.

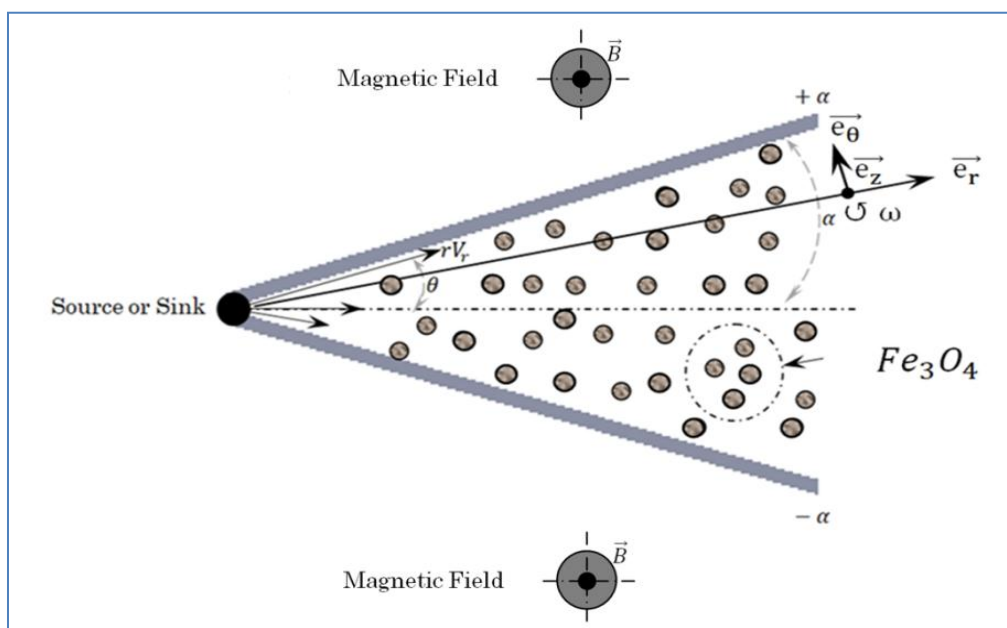


Figure 3-1 Géométrie de l'écoulement de Jeffery-Hamel dans un canal convergent/divergent en rotation

Pour l'écoulement hydro-magnétique radial de **Jeffery-Hamel** considéré, nous adoptons comme composantes de vitesse les grandeurs suivantes :

$$V_r = V(r, \theta); V_\theta = V_z = 0$$

D'autre part, le canal tourne avec une vitesse angulaire constante $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega})$.

De plus, comme illustré par la **Figure 3.1**, il est évident que le champ magnétique agit transversalement à la direction de l'écoulement.

3-2 -Les équation gouvernantes

Ici, on s'intéresse aux équations fondamentales de la dynamique des fluides basés sur les lois de conservation universelles suivantes : conservation de masse, de quantité de mouvement. En effet, les équations de continuité et de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide ferromagnétique à travers un canal convergent/divergent en rotation s'expriment comme suit :

3-2-1 Équation de continuité

Elle est dérivée du principe de conservation de la masse. Elle se base sur deux principes fondamentaux :

Le premier principe stipule que sous les conditions normales, la masse du fluide est conservée, cela veut dire qu'elle est ni créée ni détruite. La seconde loi, nous apprend qu'il n'existe pas d'espace libre entre les particules qui sont en contact et que le volume du fluide n'est pas affecté par une augmentation de pression, pour dire que l'écoulement est continu. Les coordonnées cylindriques $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z})$ sont utilisées.

Sous forme vectorielle, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}[\rho(\vec{V} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{r})] = \mathbf{0} \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{r})\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}\vec{V} + \rho\vec{V}(\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{r}) = \mathbf{0} \quad (3.2.2)$$

$\vec{\nabla}\rho = 0$: Le fluide est considéré incompressible, donc sa masse volumique constante

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; Le régime d'écoulement est permanent

Sa forme générale en notation vectorielle est donnée par

$$\vec{\nabla}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \mathbf{0}$$

Dans ce cas-là, l'équation de continuité est réduite à l'expression suivante :

$$\rho \vec{\nabla} \vec{V} = \mathbf{0} \tag{3.2.3}$$

En coordonnées cylindriques, l'équation (3.2.3) s'écrit :

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta + V_z \vec{k}) = 0 \tag{3.2.4}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{3.2.5}$$

Les vitesses tangentielles et perpendiculaires sont nulles ($V_\theta = V_z = 0$) , donc l'équation (3.2.5) se réduit à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} = 0 \tag{3.2.6}$$

3-2-2 Les équations de Maxwell

Pour analyser et décrire l'action des particules chargées entre elles, on utilise le concept de la charge ponctuelle. La loi de conservation de charge électrique et les équations de densité de courant sont nécessaires pour la description du problème relative au champ électrique \vec{E} , au champ magnétique \vec{B} , à la densité de courant électrique \vec{J} et à la charge électrique q . Les équations de Maxwell s'écrivent de la manière suivante :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.2.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.2.8}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{3.2.9}$$

Ce sont les lois de *Faraday*, d'*Ampère* et de *Gauss* successivement. La loi de *Faraday* nous informe qu'un circuit électrique immobile dans un champ magnétique variable ou vice versa, c'est-à-dire un circuit mobile dans un champ magnétique constant créent une force électromotrice.

La loi d'*Ohm*, quant à elle, exprime la capacité d'un fluide à transporter des charges électriques sous l'influence d'un champ magnétique. Un fluide conducteur se déplaçant avec une vitesse \vec{V} en présence d'un champ magnétique d'intensité \vec{B} est considéré. Le déplacement relative induit un courant électrique qui exerce une force électrique sur la particule chargée donnant lieu à une densité de courant \vec{J} . La densité de courant est définie comme étant un vecteur dont l'intensité est le courant électrique par unité de surface :

$$\mathbf{I} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (3.2.10)$$

Où $d\vec{A}$ est le vecteur élément de surface.

En appliquant la loi d'*Ohm*, la densité de courant électrique induite dans un fluide conducteur est donnée par

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (3.2.11)$$

Étant donné qu'il n'existe pas de champ électrique externe ($\vec{E} = \vec{0}$)

$$\text{L'équation se réduit à } \vec{J} = \sigma(\vec{V} \times \vec{B}) \quad (3.2.12)$$

L'équation (3.2.12) représente la densité de courant électrique pour un fluide conducteur se déplaçant à la vitesse \vec{V} en présence d'un champ magnétique appliqué d'intensité \vec{B} .

$$\text{La force de Lorentz } \vec{F} = \frac{1}{\rho}(\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}). \quad (3.2.13)$$

Dans notre cas, la force électrique $\rho\vec{E}$ est négligeable comparativement à la force électromagnétique $\vec{J} \times \vec{B}$, donc on aura :

Cette force de **Lorentz** surgit à partir du moment que le fluide conducteur coupe les lignes du champ magnétique.

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}(\vec{J} \times \vec{B}). \quad (3.2.14)$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma}{\rho} ((\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}) = -\frac{\sigma}{\rho} (\vec{B} \times (\vec{V} \times \vec{B})) = -\frac{\sigma}{\rho} [(\vec{B} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{V} - (\vec{B} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{B}] \quad (3.2.15)$$

Puisque le champ magnétique est appliqué dans la direction perpendiculaire au déplacement du fluide, $\vec{B} \cdot \vec{V} = 0$. On suppose que $\vec{B} = (B_0, 0, 0)$ et $\vec{V} = (V_r, 0, 0)$.

$$\text{Donc la force de volume est : } \vec{F} = -\frac{\sigma}{\rho_{ff}} [(\vec{B} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{V}] = -\frac{\sigma}{\rho_{ff}} B_0^2 V_r \vec{u}_r \quad (3.2.16)$$

3-2-3. Equation de quantité de mouvement

Elle est dérivée de la deuxième loi de Newton qui stipule que le taux de variation de quantité de mouvement est égal à la résultante des forces agissant sur le corps.

L'équation générale du mouvement dans une notation vectorielle pour un fluide incompressible est donnée par :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{V} + \rho \vec{f}_v \quad (3.2.17)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \quad (3.2.18)$$

L'équation (3.2.18) représente la dérivée particulière. Puisque l'écoulement est supposé permanent, donc indépendant du temps on aura :

$$\frac{D}{Dt} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \quad (3.2.19)$$

3-2-3-1 Vitesse et accélération dans un référentiel tournant

Nous considérons un référentiel tournant avec une vitesse angulaire, ω . Une particule fluide en mouvement dans un référentiel tournant occupant une position r et se déplaçant avec une vitesse relative \vec{V} . En plus, elle est soumise à la rotation du référentiel, ce qui provoque une rotation de la particule avec une vitesse, $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Donc, un observateur positionné en dehors du référentiel tournant observe une vitesse $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\frac{D\vec{V}'}{Dt} = \frac{\partial(\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{r})}{\partial t} + (\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} (\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (3.2.20)$$

En développant l'équation (3.2.20), on obtient

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{\partial t} + \vec{V}\vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{V}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{V} + (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\vec{V}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\partial(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{\partial t} = \vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} = \mathbf{0} \quad (3.2.22)$$

Par la suite les dérivées par rapport au temps vont s'annuler étant donnée l'hypothèse qui stipule que l'écoulement est stationnaire

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{V} \quad \vec{V} \cdot \vec{V}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{V} \quad (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{V}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Nous aurons finalement l'équation suivante

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{V}\vec{V} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (3.2.23)$$

Les premiers termes à droite de l'équation représente le terme convective, le deuxième est l'accélération de Coriolis, le troisième, est perpendiculaire et qui représente le terme centrifuge qui sera égal à $-\mathbf{r}\omega^2\vec{u}_r$.

Donc à partir de cette équation on remarque que l'effet de la rotation est la cause de l'apparition de deux termes

- Une force centrifuge qui vaut $\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{V}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2$
- Une accélération (force de Coriolis) $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}$

Finalement on aura l'équation sous sa forme générale.

$$\vec{V}\vec{V} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} - \frac{1}{2}\vec{V}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \mathbf{v}\Delta\vec{V} - \frac{\sigma}{\rho}[[\vec{B}, \vec{B}]] \cdot \vec{V} \quad (3.2.24)$$

$$\vec{V}\vec{V} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2\right) + \mathbf{v}\Delta\vec{V} - \frac{\sigma}{\rho}[[\vec{B}, \vec{B}]] \cdot \vec{V} \quad (3.2.25)$$

Soit $\frac{p'}{\rho} = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2$ qui représente la pression réduite ou modifiée, et par souci de simplification nous allons par la suite l'appeler p . en faisant la projection des cette équation selon les coordonnées cylindriques, nous aurons

Selon la direction \vec{u}_r :

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{v}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + \mathbf{v}_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial r} + \mathbf{v}_{ff} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \mathbf{f}_r \quad (3.2.26)$$

Selon la direction \vec{u}_θ :

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{u}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{r\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mathbf{v}_{ff} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \mathbf{f}_\theta \quad (3.2.27)$$

Selon la direction \vec{k} :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{u}_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \mathbf{u}_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial z} + \mathbf{v}_{ff} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \mathbf{f}_z \quad (3.2.28)$$

F_z et F_θ qui représentent les forces de volume dans les directions z et θ sont nulles. Par ailleurs, du fait que l'écoulement dans la direction z est sans limite, de plus que les vitesses tangentielles et perpendiculaires sont nulles, nous pouvons écrire :

$(\mathbf{V}_r = \mathbf{V}(r, \theta), \mathbf{V}_\theta = \mathbf{0}, \mathbf{V}_z = \mathbf{0})$; Par conséquent, les équations (3.2.26 – 3.2.28) se réduisent à :

$$\mathbf{u}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_{ff}} \frac{\partial P}{\partial r} + \mathbf{v}_{ff} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho_{ff} r^2} v_r \quad (3.2.29)$$

$$2\omega v_r = -\frac{1}{r\rho_{ff}} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mathbf{v}_{ff} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.2.30)$$

Avec :

ρ_{ff} est la masse volumique du *Ferro fluide*, \mathbf{v}_{ff} est la viscosité cinématique du ferrofluide et P la pression du fluide.

A partir de l'équation (3.2.6), on aura :

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{f}(r) \Rightarrow \mathbf{V}_r = \frac{\mathbf{f}(r)}{r} \quad (3.2.31)$$

Tenant compte de (3.2.31), les termes des équations (3.2.29) et (3.2.30) deviennent:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{f^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \frac{2f}{r^3}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{f}{r^3}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} = \frac{f''}{r^3}$$

$$\frac{V_r}{r^2} = \frac{f}{r^3}$$

$$\frac{r^2 \sigma B_0^2}{r^2 \rho_{ff}} V_r = \frac{\sigma B_0^2 f}{r^3 \rho_{ff}}$$

Ce qui permet d'avoir :

$$\frac{1}{\rho_{ff}} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f^2}{r^3} + \frac{\nu_{nf}}{r^3} (f'') - \frac{r^2 \sigma B_0^2}{r^3 \rho_{ff}} f \quad (3.2.32)$$

$$\frac{1}{\rho_{ff}} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -2 \frac{r^2}{r^2} \Omega f + \nu_{ff} \left(\frac{2}{r^2} f' \right) \quad (3.2.33)$$

La dérivation des équations (3.2.32) et ((3.2.33) par rapport à θ et r respectivement et l'élimination du terme de pression, conduit à une équation différentielle non linéaire du troisième ordre de la forme:

$$f'''' - \frac{4r^2 \Omega f}{\nu_{ff}} + \frac{2ff'}{\nu_{ff}} + \left(4 - \frac{\sigma B_0^2}{\nu_{ff} \rho_{ff}} \right) f' = 0 \quad (3.2.34)$$

L'introduction de la variable sans dimension η nous permet d'avoir les écritures suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\eta) = \frac{f(\eta)}{f(0)} \\ \eta = \frac{\theta}{\alpha} \text{ tel que } -1 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (3.2.35)$$

La forme adimensionnelle des dérivées de la fonction $\mathbf{F}(\theta)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}'(\theta) = \mathbf{F}'(\eta) \frac{1}{\alpha} \\ \mathbf{F}''(\theta) = \mathbf{F}''(\eta) \frac{1}{\alpha^2} \\ \mathbf{F}'''(\theta) = \mathbf{F}'''(\eta) \frac{1}{\alpha^3} \end{cases} \quad (3.2.36)$$

Les équations (3.2.35) et (3.2.36), une fois introduites dans l'équation (3.2.34), apportent les changements suivants :

$$\mathbf{F}''' - \frac{4r^2\alpha^3\Omega}{\nu_{ff}}\mathbf{F} + \frac{2f_{\max}\alpha^2}{\nu_{ff}}\mathbf{F}\mathbf{F}' + 4\alpha^2\mathbf{F}' - \frac{\alpha^2r^2\sigma B_0^2}{\nu_{ff}\rho_{ff}}\mathbf{F}' = 0 \quad (3.2.37)$$

Les constants ρ_{ff} et μ_{ff} sont données par [27]:

$$\rho_{ff} = \rho(1 - \phi) + \rho_s\phi_s \quad (3.2.38)$$

$$\mu_{ff} = \frac{\mu}{(1-\phi)^{2.5}} \quad (3.2.39)$$

On peut mettre :

$$\mathbf{V}_{ff} = \frac{\mu_{ff}}{\rho_{ff}} \quad (3.2.40)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\rho_{ff}}{\rho} = (1 - \phi) + \frac{\rho_s}{\rho}\phi_s \quad (3.2.41)$$

$$\mathbf{A2} = \frac{c_{pff}}{c_p} = (1 - \phi) + \frac{\rho_s c_{ps}}{\rho c_p}\phi_s \quad (3.2.42)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{Pour } (\theta = \pm\alpha): \quad \mathbf{f}(\pm\alpha) = 0 \quad (3.2.43.a)$$

$$\text{Pour } (\theta = 0): \quad \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_{\max} \text{ et } \mathbf{f}'(0) = 0 \quad (3.2.43.b)$$

Avec : $f_{\max} = r.V_{\max}$ et qui représente la fonction maximale sur l'axe du canal.

Ou ρ_{nf} , ν_{nf} et μ_{nf} représentent, la masse volumique, la viscosité cinématique et la viscosité dynamique du nano fluide, tandis que ρ , μ et ν sont celles du fluide de base, ρ_s est la masse volumique des nanoparticules.

Finalement l'équation (3.2.37) prendra la forme suivante :

$$\mathbf{F}''' - 4\text{Ro} \alpha^3 \left(1 - \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}\phi\right) (1 - \phi)^{2.5}\mathbf{F} + 2\alpha\text{Re} \left(1 - \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}\phi\right) (1 - \phi)^{2.5}\mathbf{F}\mathbf{F}' + \left(4 - (1 - \phi)^{2.5}\text{Ha}\right)\alpha^2\mathbf{F}' = 0 \quad (3.2.44)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\pm 1) = \mathbf{0} \text{ sur les parois (pour } \eta = \pm 1) \\ \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \mathbf{F}'(\mathbf{0}) = \mathbf{b} \text{ sur l'axe de la conduite (pour } \eta = \mathbf{0}) \end{cases} \quad (3.2.45)$$

Si on met : $\mathbf{A} = (1 - \phi + \frac{\rho_s}{\rho_f} \phi)(1 - \phi)^{2.5}$ et $\mathbf{B} = (1 - \phi)^{2.5}$

L'équation (3.2.44) peut s'écrire :

$$\mathbf{F}''' - 4\mathbf{Ro}\alpha^3\mathbf{A}\mathbf{F} + 2\alpha\mathbf{Re}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{F}' + (4 - \mathbf{B}\mathbf{H}\alpha^2)\mathbf{F}' = \mathbf{0} \quad (3.2.46)$$

Le nombre de Reynolds \mathbf{Re} , celui-ci est définie par la relation suivante :

$$\mathbf{Re} = \frac{r \cdot V_{\max} \cdot \alpha}{\nu} = \frac{f(\mathbf{0}) \cdot \alpha}{\nu} \begin{cases} \alpha > 0, f(\mathbf{0}) > 0 \text{ pour un canal divergent} \\ \alpha < 0, f(\mathbf{0}) < 0 \text{ pour un canal convergent} \end{cases} \quad (3.2.47)$$

Quant au nombre de **Hartmann** \mathbf{Ha} , il s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{Ha} = \mathbf{R} \sqrt{\frac{\sigma \mathbf{B}_0^2}{\rho \nu}} \quad (3.2.48)$$

Tandis que le paramètre de rotation \mathbf{Ro} est défini par :

$$\mathbf{Ro} = \frac{\Omega r^2}{\nu} \quad (3.2.49)$$

3-3 Traitement Analytique du problème dynamique de l'écoulement de Jeffery-Hamel M.H.D.

Dans le but de résoudre l'équation différentielle non-linéaire de troisième ordre qui gouverne cet écoulement, nous avons jugé utile d'opter pour la méthode de décomposition d'*Adomian*, comme solution analytique, pour étudier le comportement dynamique de l'écoulement qui se caractérise par l'évolution du profil de la vitesse et du coefficient du frottement.

En tenant compte de l'équation (2.1.1), l'équation (3.2.46), s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{F}''' = 4\mathbf{Ro}\alpha^3\mathbf{A}\mathbf{F} - 2\alpha\mathbf{Re}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{F}' - (4 - \mathbf{B}\mathbf{H}\alpha^2)\mathbf{F}' \quad (3.3.1)$$

Où : \mathbf{L} est un opérateur différentiel tel que :

$$\mathbf{L} = \frac{d^3}{d\eta^3}$$

Il vient :

$$\mathbf{L}(\mathbf{F}) - 4\mathbf{Ro}\alpha^3\mathbf{AF} + 2\alpha\mathbf{ReAFF}' + (4 - \mathbf{BH}\alpha^2)\mathbf{F}' = \mathbf{0} \quad (3.3.2)$$

L'opérateur inverse L^{-1} de l'opérateur différentiel L s'écrit:

$$\mathbf{L}^{-1} = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \mathbf{d}\eta\mathbf{d}\eta\mathbf{d}\eta \quad (3.3.3)$$

En tenant compte des équations (3.3.2) et (3.3.3), nous aurons le résultat suivants :

$$\mathbf{F}(\eta) = \mathbf{F}(\mathbf{0}) + \mathbf{F}'(\mathbf{0})\eta + \mathbf{F}''(\mathbf{0})\frac{\eta^2}{2} + \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{Nu}) \quad (3.3.4)$$

$$\text{Avec } \mathbf{Nu} = -4\mathbf{Ro}\alpha^3\mathbf{AF} + 2\alpha\mathbf{ReAFF}' + (4 - \mathbf{BH}\alpha^2)\mathbf{F}' \quad (3.3.5)$$

Les constantes $\mathbf{F}(\mathbf{0})$, $\mathbf{F}'(\mathbf{0})$ et $\mathbf{F}''(\mathbf{0})$ dépendent des conditions aux limites (3.2.45)

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \\ \mathbf{F}'(\mathbf{0}) = \mathbf{b} \\ \mathbf{F}''(\mathbf{0}) = \mathbf{c} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

En appliquant les conditions aux limites (3.2.45), l'équation (3.3.4) s'écrira de la manière suivante :

$$\mathbf{F}(\eta) = \mathbf{1} + \mathbf{b}\eta + \mathbf{c}\frac{\eta^2}{2} + \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{Nu}) \quad (3.3.7)$$

Pour avoir finalement :

$$\mathbf{F}(\eta) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{Nu}) \quad (3.3.8)$$

$$\text{Avec } \mathbf{F}_0 = \mathbf{1} + \mathbf{b}\eta + \mathbf{c}\frac{\eta^2}{2} \text{ ou } \mathbf{c}=\mathbf{F}''(\mathbf{0}) \text{ est à déterminer ultérieurement} \quad (3.3.9)$$

En utilisant l'algorithme ADM, les premiers termes des polynômes d'*Adomian* et de la solution s'écrivent :

$$\mathbf{A}_0 = \alpha\mathbf{AcRo} - 4\alpha^2\mathbf{c}\eta + \alpha^2\mathbf{BcHa}\eta - 2\alpha\mathbf{AcRe}\eta - \alpha\mathbf{Ac}^2\mathbf{Re}\eta^3 \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned}
 & 0.014285714285714285aA^2b(1. -1. \text{phi})^5 \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^7 + \\
 & 0.02857142857142857aAb(1. -1. \text{phi})^{2.5} \text{Re} \alpha^3 \eta^7 - \\
 & 0.007142857142857143aA^2b\text{Ha}(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Re} \alpha^3 \eta^7 - \\
 & 0.009523809523809523a^2A^2(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{ReRo} \alpha^4 \eta^7 - \\
 & 0.019047619047619046A^2b(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{ReRo} \alpha^4 \eta^7 - \\
 & 0.006349206349206351Ab(1. -1. \text{phi})^{2.5} \text{Ro} \alpha^5 \eta^7 + \\
 & 0.0015873015873015877A^2b\text{Ha}(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Ro} \alpha^5 \eta^7 + \\
 & 0.003174603174603175aA^2(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Ro}^2 \alpha^6 \eta^7 + 0.003273809523809523a^2A^2b(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^8 \\
 & 0.0017857142857142854A^2b^2(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^8 + \\
 & 0.003571428571428571Ab^2(1. -1. \text{phi})^{2.5} \text{Re} \alpha^3 \eta^8 - \\
 & 0.0008928571428571427A^2b^2\text{Ha}(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Re} \alpha^3 \eta^8 - \\
 & 0.00476190476190476aA^2b(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{ReRo} \alpha^4 \eta^8 + \\
 & 0.00039682539682539677A^2b(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Ro}^2 \alpha^6 \eta^8 + \\
 & 0.0009259259259259257aA^2b^2(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^9 - \\
 & 0.0005291005291005291A^2b^2(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{ReRo} \alpha^4 \eta^9 + \\
 & 0.00009259259259259259A^2b^3(1. -1. \text{phi})^5 \cdot \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^{10}
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Enfin, la solution du problème s'écrit :

$$F(\eta) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \tag{3.3.13}$$

Les constantes a et b se déterminent par utilisation des conditions aux limites (3.2.45).



CHAPITRE 4

Résultats et Discussions

4-1 Profil de vitesse de l'écoulement traditionnel de Jeffery-Hamel (Avec et sans présence d'un champ magnétique externe)

Avant d'étudier l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un ferrofluide dans un convergent/divergent en rotation, on a jugé utile d'aborder en premier l'écoulement de Jeffery-Hamel classique avec et sans présence d'un champ magnétique. En effet, on a essayé de visualiser la distribution des vitesses dans un canal convergent/divergent sous l'effet de l'angle d'ouverture du canal, du nombre de Reynolds, du nombre de Hartmann et de la fraction volumique des nanoparticules. Donc, il a été question au passage de résoudre l'équation différentielle ordinaire non linéaire (3.3.46) issue de la modélisation mathématique analytiquement et numériquement en omettant le terme de rotation ($Ro=0$).

La solution analytique est obtenue par le biais de la méthode de décomposition **d'Adomian (ADM)**, tandis que la solution numérique est obtenue à l'aide de la méthode de **Runge Kutta** du quatrième ordre (**RK4**) associée à la méthode de Tir.

Dans cette étude, une comparaison entre les données analytiques et numériques est également effectuée afin de valider la solution **ADM**.

4-1-1 Effet du demi-angle α

D'après les résultats obtenus, l'effet de l'angle α sur la distribution des vitesses dans le canal convergent, (**Figure 4.1**), nous informe clairement que l'accroissement de l'angle α entrainerait un gradient de pression favorable. Dans cette situation, la vitesse de l'écoulement croît et par conséquent l'épaisseur de la couche limite se verra diminuée.

Par contre, pour l'écoulement dans un canal divergent (**Figure 4.2**), le comportement de la vitesse est tout à fait contraire; on voit clairement que la vitesse décroît avec l'accroissement de l'angle α et par conséquent l'épaisseur de la couche limite augmente. Dans le cas d'un écoulement purement divergent, le phénomène de séparation ou de retour d'écoulement est fortement envisageable.

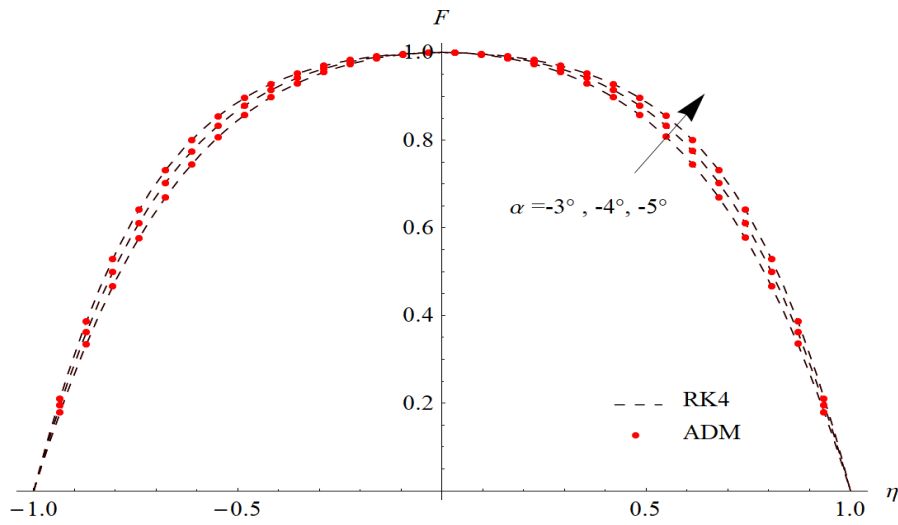


Figure 4-1 Effet du demi-angle d'ouverture sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel dans un canal convergent $Ha = 0$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 100$

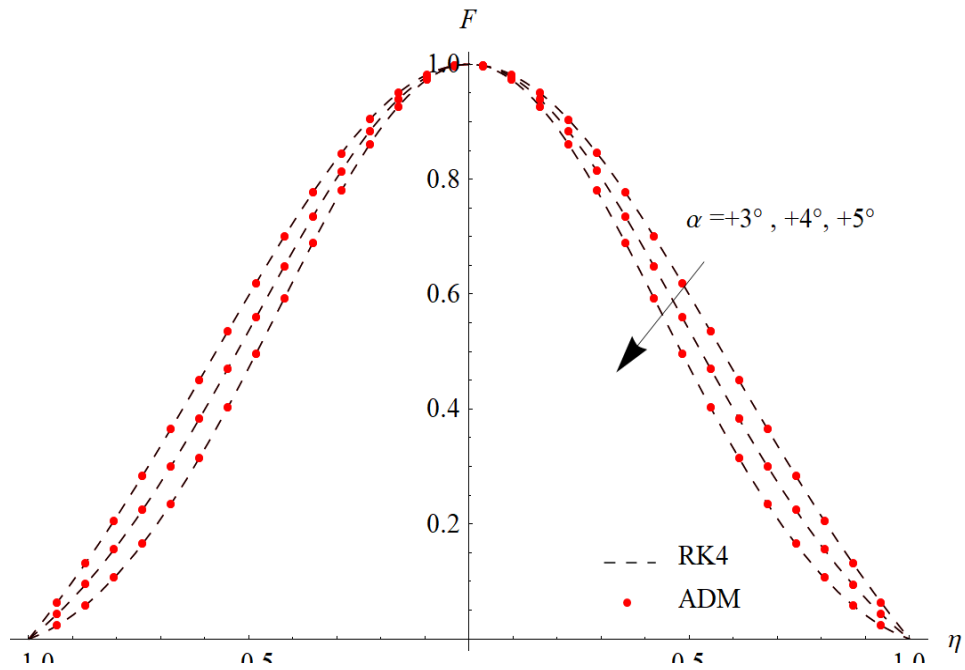


Figure 4-2 Effet du demi-angle d'ouverture sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel dans un canal divergent $Ha = 0$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 100$

4-1-2 Effet de la variation du nombre de Hartmann Ha

Dans cette partie, on s'intéresse aux effets de la variation du nombre de *Hartmann* sur la distribution de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel classique.

Dans l'exemple considéré, on a pris un angle $\alpha = -3^\circ$ pour le cas d'un écoulement dans un canal convergent et un angle $\alpha = +3^\circ$ pour le cas d'un écoulement dans un canal divergent. Tandis que le nombre de Reynolds est pris égal à $Re = 55$ pour les deux types d'écoulements convergent et divergent.

D'après les résultats obtenus (*Figures 4.3 et 4.4*), on constate que la vitesse croît avec l'accroissement du nombre de *Hartmann* et par conséquent les chances d'apparition du phénomène de retour d'écoulement sont entièrement écartés dans les deux canaux convergent et divergent. En effet, l'application du champ magnétique crée une force dite de Lorentz qui s'oppose à la direction de l'écoulement. Dans ces conditions, le champ magnétique agit comme un agent stabilisateur et par conséquent tout défaut tel qu'un retour d'écoulement se verra retardé.

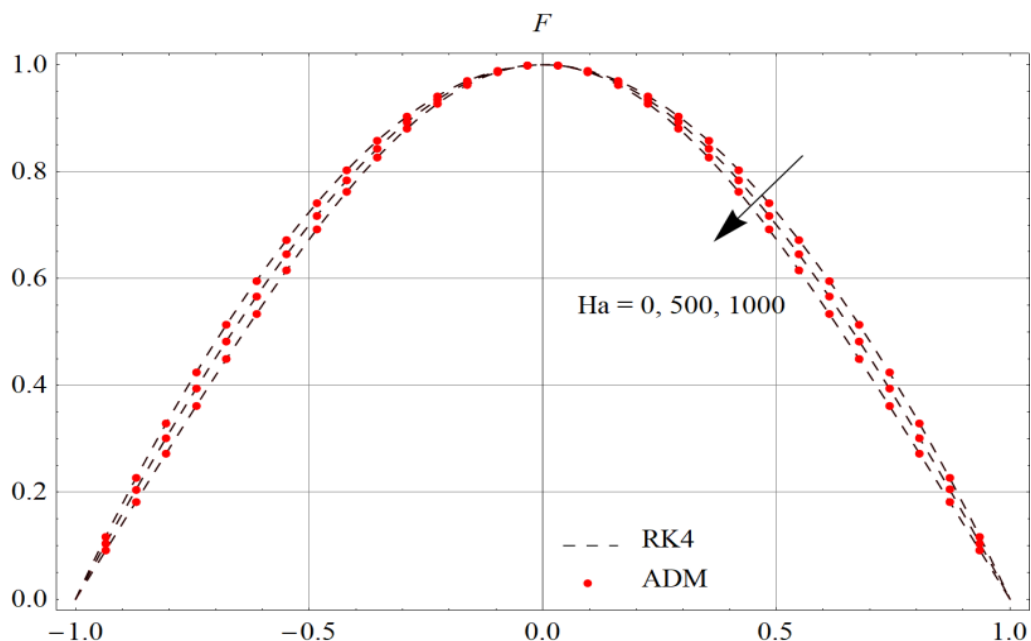


Figure 4-3 Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel hydromagnétique dans un canal divergent $\alpha = +3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 55$

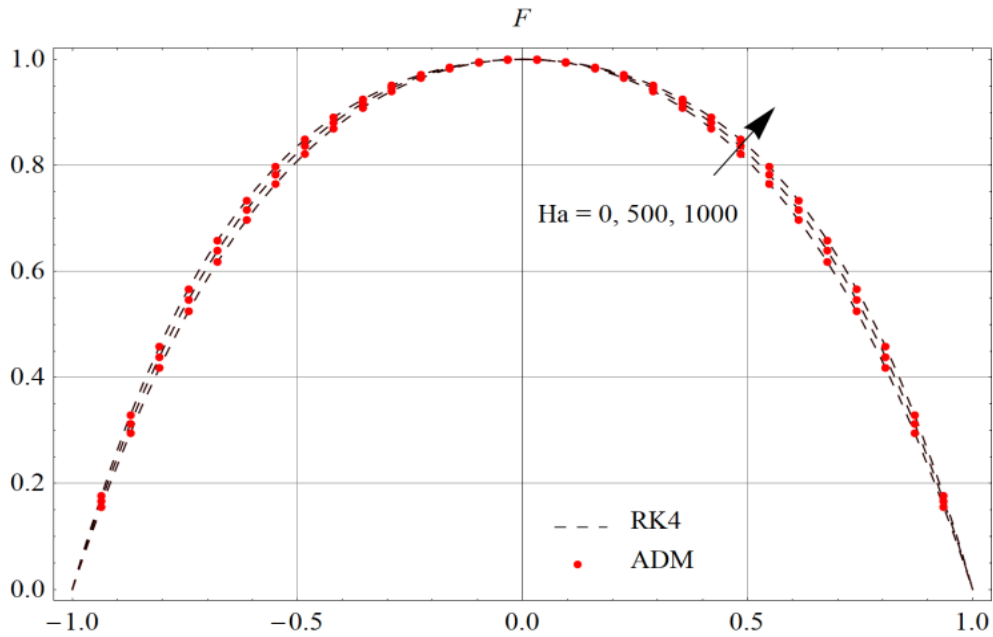


Figure 4-4 Effet du nombre de Hartmann Ha sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamelhydromagnétique dans un canal convergent $\alpha = -3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Re = 55$

4-1-3 Effet du nombre de Reynolds Re

Les **Figures (4.5-4.6)** montrent l'effet du nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse de l'écoulement **Jeffery-Hamel** traditionnel dans un canal convergent/divergent.

A partir des résultats obtenus, on constate une symétrie qui caractérise les profils de vitesse aussi bien pour le convergent que pour le divergent. D'autre part, la vitesse maximale se positionne au niveau de l'axe du canal pour les deux cas étudiés.

Pour l'écoulement convergent (Figure 4.5) (débit entrant $Q < 0$), la vitesse se dirige vers le sommet de l'angle et varie d'une manière croissante de la valeur 0 sur les parois fixes solides du canal ($\theta = \pm\alpha$) jusqu'à la valeur maximale $F(0)$ sur l'axe du canal ($\theta = 0$). On constate également que l'augmentation du nombre de **Reynolds** fait croître la vitesse et par conséquent un profil plat est observée à proximité du centre de la conduite. Dans ces conditions, le gradient de vitesse est élevé proche des parois et par conséquent l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'accroissement du nombre de Reynolds.

Concernant l'écoulement divergent (débit sortant, $Q>0$), la vitesse est dirigée dans le sens opposé au sommet de l'angle. Pour ce type d'écoulement, la vitesse varie également d'une manière monotone de la valeur 0 sur les parois du conduit ($\theta=\pm\alpha$) jusqu'à la valeur $F(0)$ sur l'axe du canal ($\theta=0$).

Pour le canal divergent, la vitesse décroît avec l'accroissement du nombre de **Reynolds** Re et par conséquent le débit du fluide est concentré au centre du canal. D'autre part, le phénomène de séparation ou de retour d'écoulement est largement favorisé pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds. Par ailleurs, un faible gradient de vitesse est observé à proximité des parois. Dans cette situation, l'épaisseur de la couche limite s'accroît au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

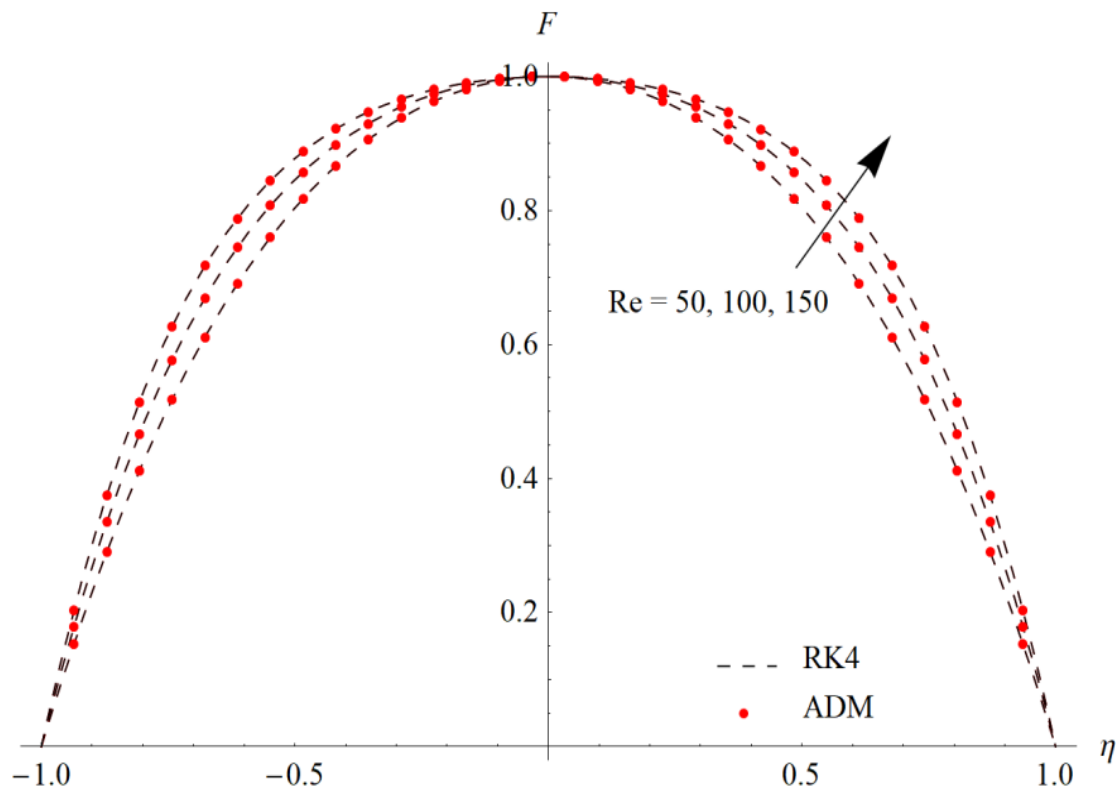


Figure 4-5 Effet du nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel classique dans un canal convergent $\alpha = -3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Ha = 0$

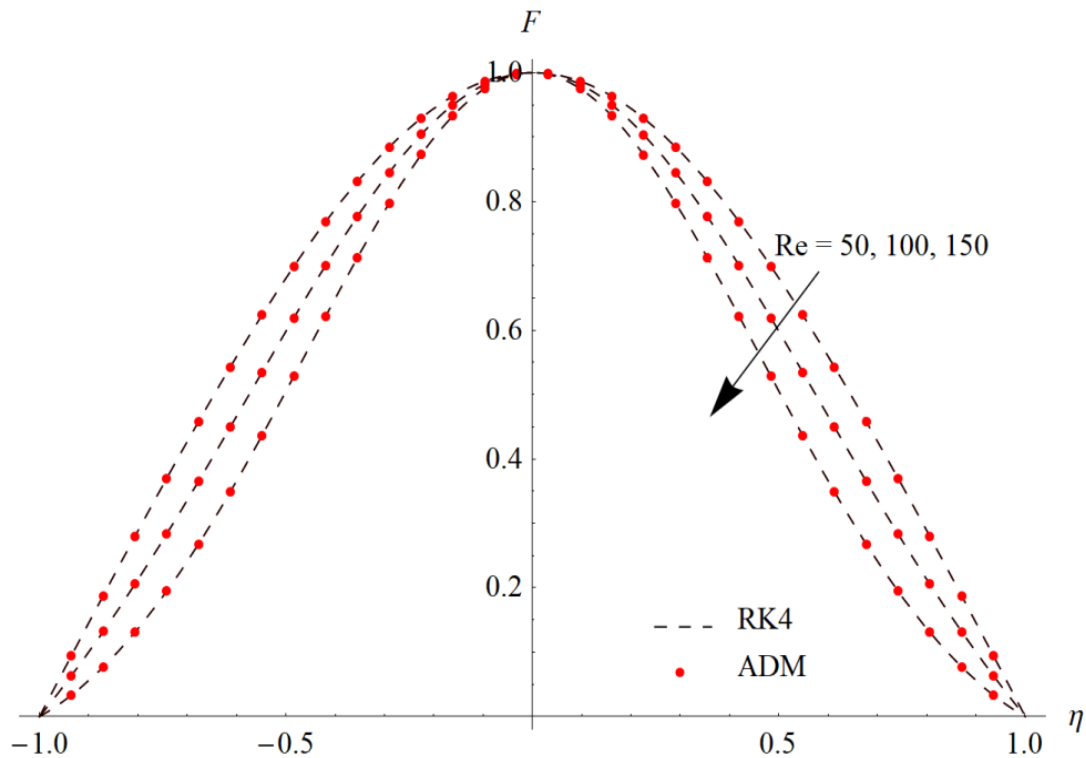


Figure 4-6 Effet du nombre de Reynolds Re sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-hamel classique dans un canal divergent $\alpha = +3^\circ$, $\varphi = 0\%$ et $Ha = 0$

4-1-4 Effet de la fraction volumique φ

Les **Figures (4.7) et (4.8)** illustrent l'effet de la fraction volumique des nanoparticules (Fe_3O_4) sur l'évolution du profil de la vitesse dans un canal convergent-divergent. Les résultats obtenus montrent une faible variation de la vitesse avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules pour les canaux convergents-divergents. Par ailleurs, il est clairement constaté (Figure 4-7) que la vitesse croît avec l'accroissement du paramètre φ et par conséquent l'hypothèse d'apparition du phénomène de séparation est complètement rejeté dans le canal convergent. Par contre, l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules dans le canal divergent (Figure 4-8), fait décroître la vitesse de l'écoulement. Dans cette situation, on peut aisément constater un penchant vers le retour de l'écoulement pour des fractions plus élevées. Ce penchant sera sans doute notable pour des nombres de **Reynolds** plus ou moins prononcés.

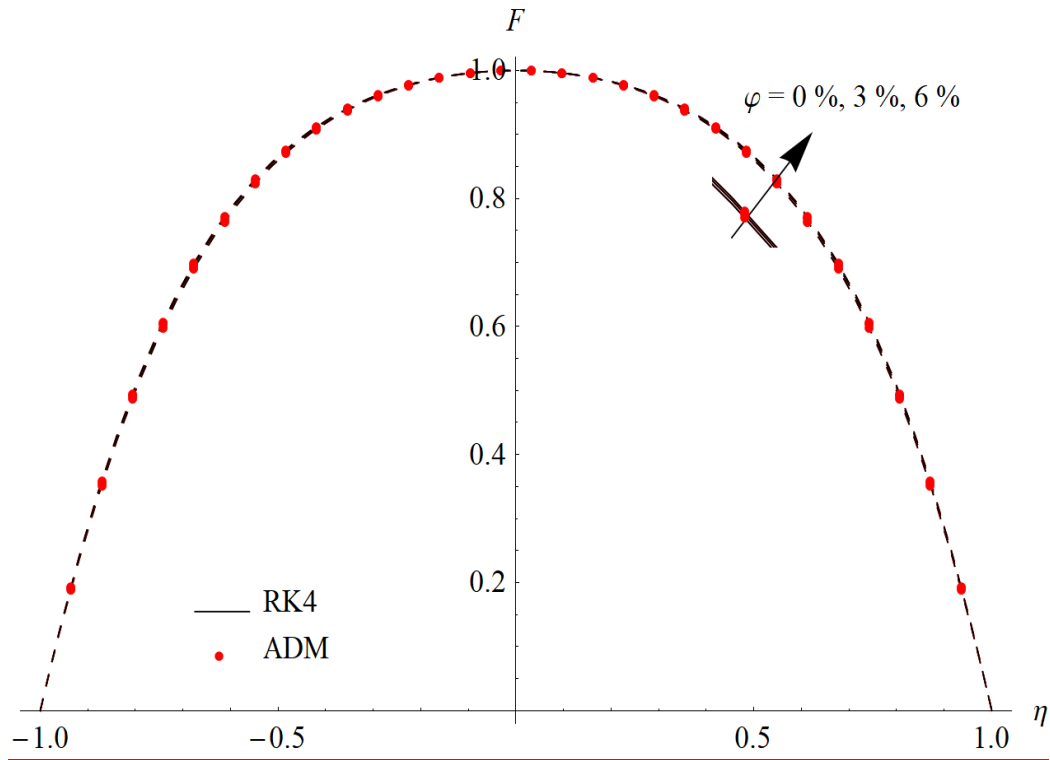


Figure 4-7 Effet de la fraction volumique ϕ sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel classique d'un *Ferro fluide* dans un canal convergent : $\alpha = -3^\circ$, $Re = 55$ et $Ha = 0$

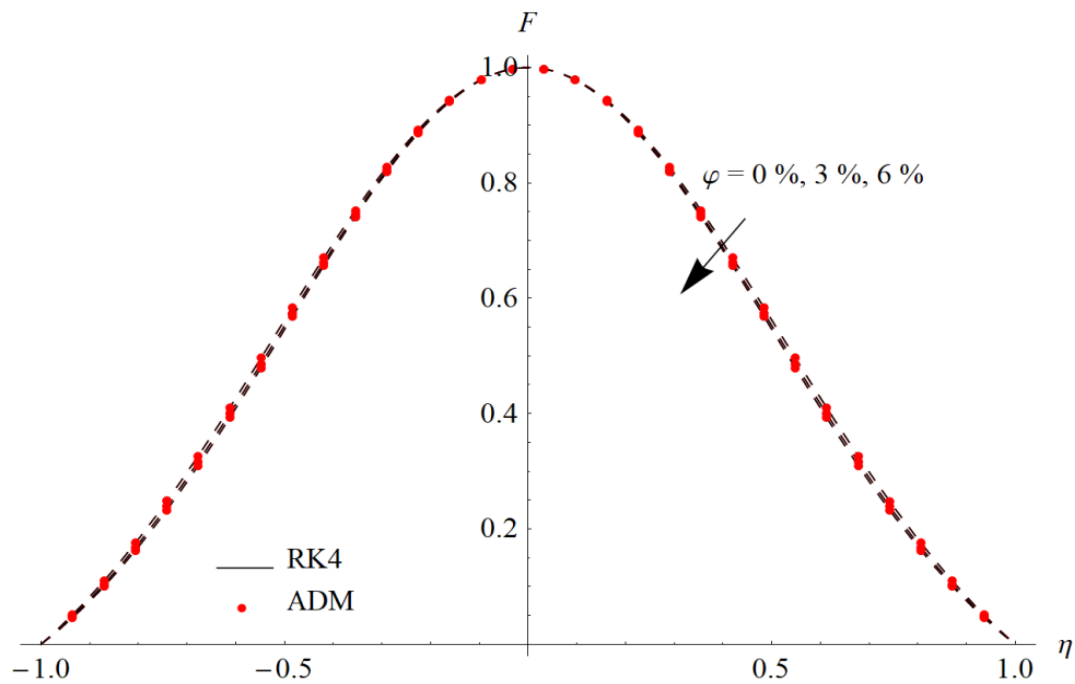


Figure 4-8 Effet de la fraction volumique ϕ sur le profil de vitesse de l'écoulement de Jeffery-Hamel classique d'un *Ferro fluide* dans un canal divergent $\alpha = +3^\circ$, $Re = 55$ et $Ha = 0$

4-2 Champ de vitesse de l'écoulement magnétohydrodynamique

De Jeffery Hamel pour un ferro fluide dans un canal convergent en rotation

Cette étude a été une occasion de se pencher sur l'écoulement d'un *Ferro-fluide hydro-magnétique* à travers un canal convergent/divergent rotatif. De même, l'équation différentielle (3.2.46) a été également traitée analytiquement par utilisation de la méthode décompositionnelle d'*Adomian* et numériquement via la méthode de *Runge Kutta* du quatrième ordre (**RK4**) et celle de Tir.

La présente étude montre l'influence des paramètres physiques comme le nombre de *Reynolds* (**Re**), le nombre de *Hartmann* (**Ha**), le paramètre de rotation (**Ro**) et la fraction volumique du *Ferro-fluide* (ϕ) sur l'évolution du profil de vitesse et le coefficient de frottement de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal convergent-divergent en rotation. Il est à souligner que la conduite, dans laquelle s'écoule le Ferro-fluide, a la particularité d'être rotatif et en plus soumise à un champ magnétique externe.

Les propriétés thermo-physiques du Ferro-fluide objet d'étude sont visualisées par le Tableau 4.1.

Propriété	Magnétite	eau
Densité (Kg /m ³)	5200	997.1

Tableau 4.1 : Propriétés thermo-physiques du Ferro-fluide

Au cours de cette contribution, il est à noter que, dans la plupart des cas étudiés représentés par les Figures (4.9) à (4.16) renseignant sur les effets de différents paramètres physiques sur le profil de vitesse de l'écoulement objet d'étude, nous observons un changement de position (cross-over-point) au niveau du milieu du canal convergent/divergent. En effet, ce changement de position se produit à cause de la rotation de la conduite. La présence d'un point de changement de position renseigne sur le comportement inverse de la vitesse du *Ferro fluide* entre la moitié inférieure et la moitié supérieure du canal considéré.

4-2-1 Effet du nombre de Reynolds Re

Ici, on s'intéresse aux effets du nombre de *Reynolds* sur la distribution des vitesses de l'écoulement de *Jeffery-Hamel* pour un *Ferro fluide* dans un canal convergent-divergent en rotation. En effet, dans l'exemple considéré, le nombre de *Hartmann* a été pris égal à $Ha=0$, la fraction volumique du *Ferro fluide* $\varphi = 0.05$, le paramètre de rotation $Ro=3000$, l'angle d'ouverture = $\pm 3^\circ$.

D'après les résultats obtenus, nous voyons clairement, dans le cas du canal convergent, Figure (4.9), que l'augmentation du nombre de Reynolds entrainerait une augmentation de la vitesse du *Ferro fluide* dans les deux moitiés inférieures et supérieures du canal, ce qui se répercute sur l'épaisseur de la couche limite qui s'amincit, conduisant ainsi à la disparition totale du phénomène de retour de l'écoulement. Par contre, dans le cas du canal divergent, *Figure (4.10)*, on enregistre une augmentation de la vitesse dans la partie inférieure du canal et une diminution brutale de cette vitesse au niveau de la partie supérieure. Dans cette dernière zone, l'épaisseur de la couche limite se verra augmenté, ce qui favorise le phénomène de séparation et par conséquent l'écoulement devient de plus en plus instable.

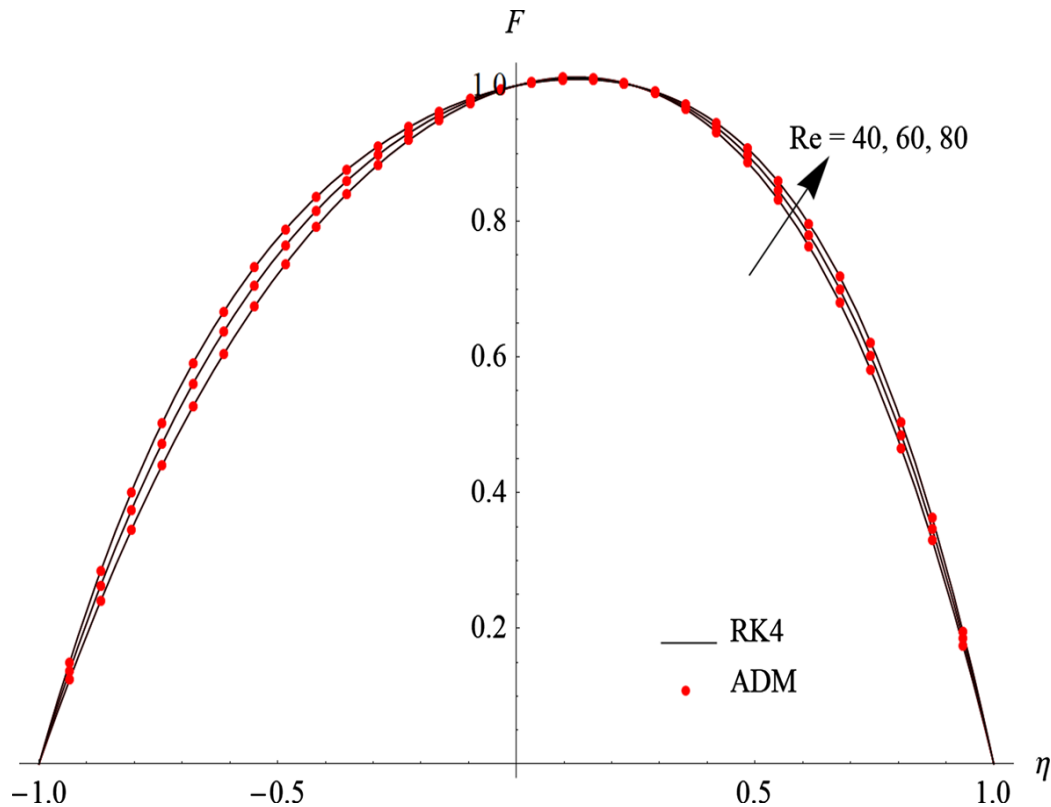


Figure. 4-9 Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse de l'écoulement d'un Ferrofluide dans un canal convergent tournant $Ha = 0$, $\varphi = 0.05$, $Ro = 3000$ and $\alpha = -3^\circ$

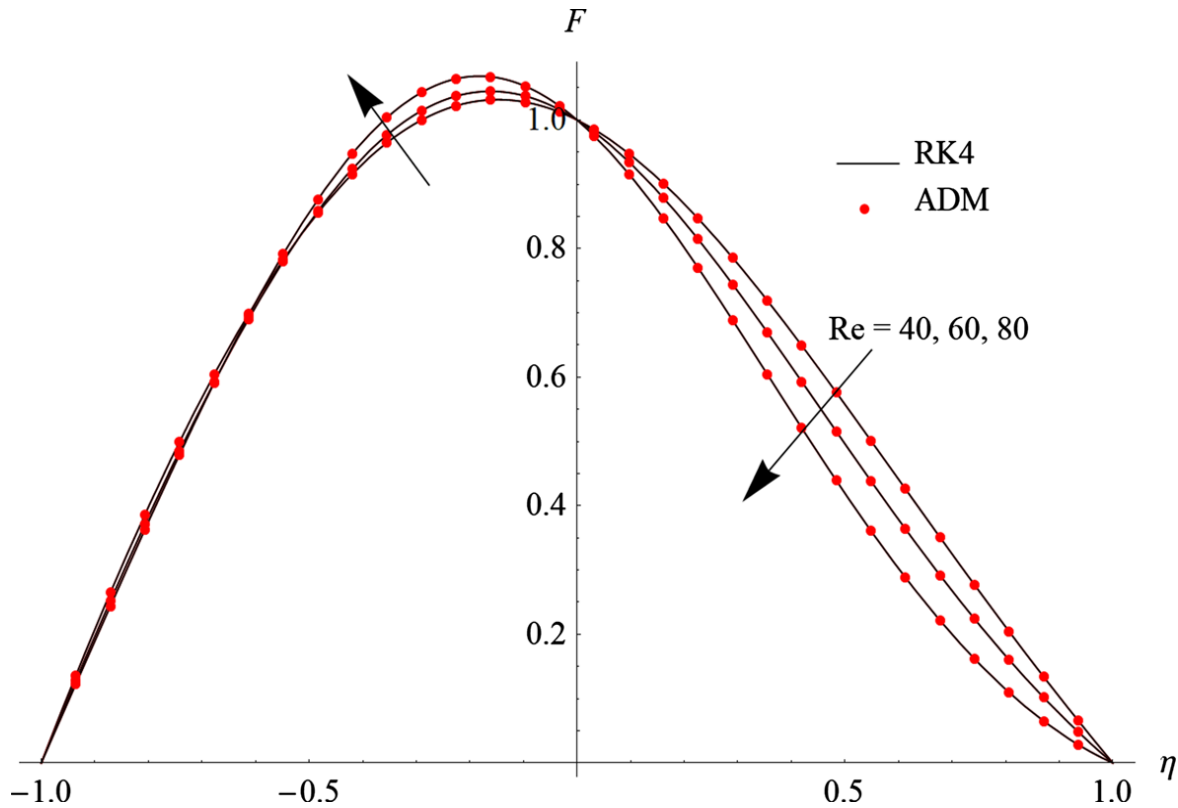


Figure. 4-10 Effet du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse de l'écoulement d'un Ferrofluide dans un canal divergent tournant $Ha = 0$, $\varphi = 0.05$, $Ro = 3000$ and $\alpha = +3^\circ$

4-2-2 Effet du demi-angle

Les **Figures (4.11) et (4.12)** représentent le profil de vitesse en fonction du demi-angle α . D'après la **Figure (4.11)**, il est clairement constaté que la vitesse du **Ferro fluide** varie légèrement près de la paroi inférieure du canal convergent en rotation, mais en s'éloignant de celle-ci, et plus près de la ligne centrale, on enregistre une diminution de la vitesse du **Ferro fluide**. De plus, la **Figure (4.11)** montre que le comportement de la vitesse dans la moitié supérieure du canal apparaît comme une fonction décroissante de α ou le retour d'écoulement commence une fois le gradient de pression défavorable est plus grand. Par contre, dans la

moitié supérieure du canal convergent, on constate que la vitesse croit avec l'accroissement de α , ce qui conduit à la diminution de l'épaisseur de la couche limite et par conséquent le retour d'écoulement est entièrement exclu dans cette zone.

Dans le cas d'un canal divergent tournant, comme illustré par la *Figure (4.12)*, un comportement inverse est observé. En fait, la vitesse du *Ferro fluide* dans la moitié inférieure du canal augmente au fur et à mesure que l'angle α augmente, conduisant à la diminution de l'épaisseur de la couche limite, ce qui élimine l'apparition du phénomène de séparation. La *Figure (4.12)* montre également que l'accroissement de α fait diminuer la vitesse du *Ferro fluide* dans la partie supérieure du canal divergent, ce qui provoque une augmentation de l'épaisseur de la couche limite et signalant par conséquent le déclenchement du phénomène de séparation.

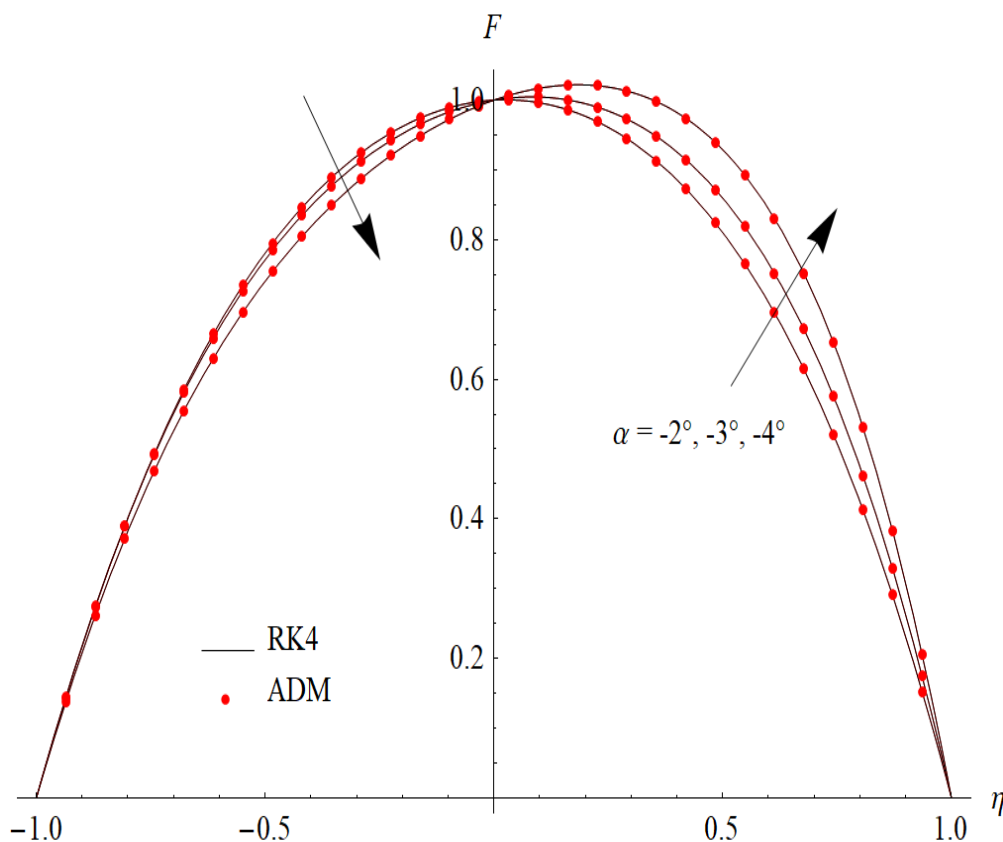


Figure 4-11 Effet du demi-angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un écoulement *Ferro fluide* dans un canal convergent en rotation : $Ha = 0$, $Ro = 2000$, $\varphi = 2\%$ And $Re = 60$

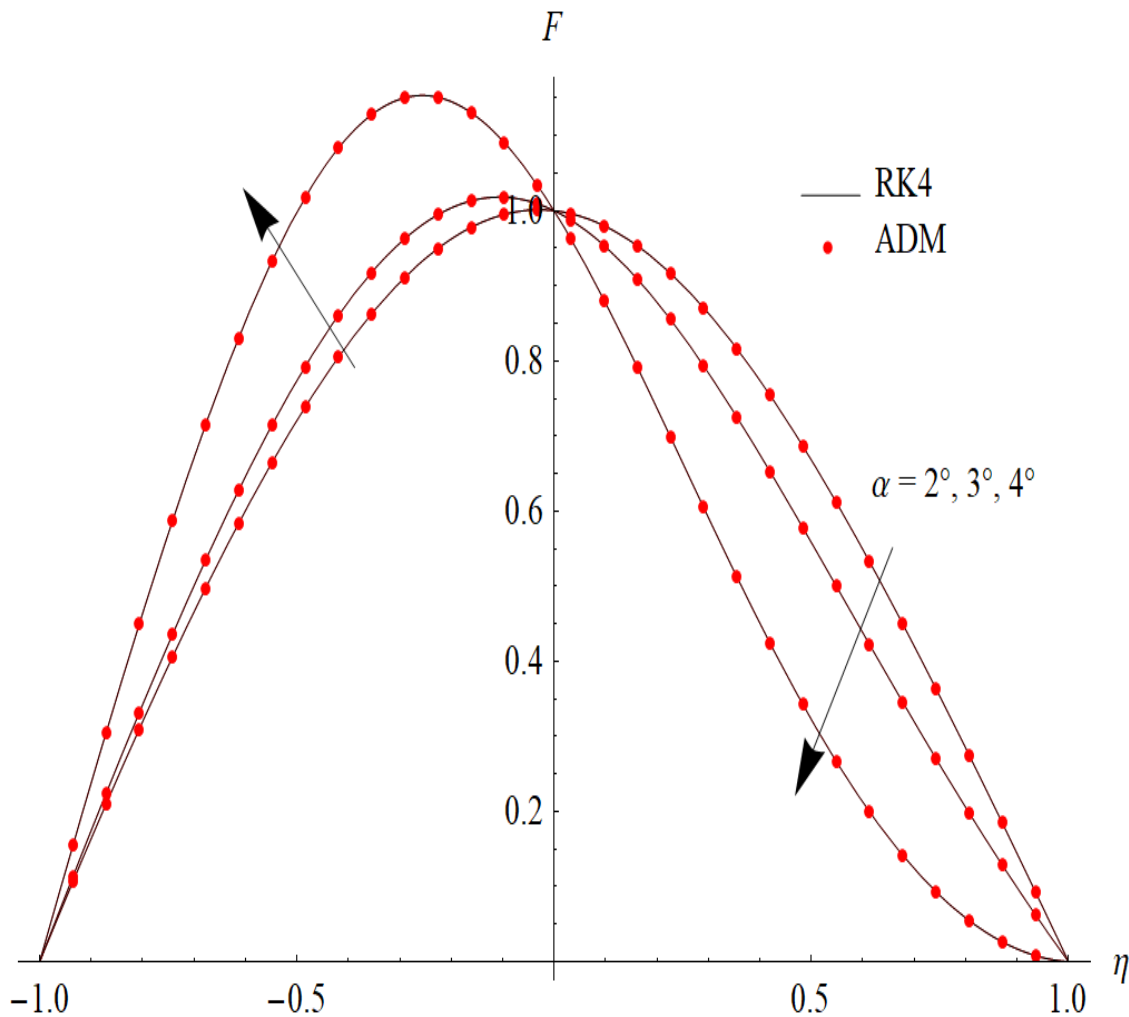


Figure 4-12 Effet du demi-angle d'ouverture α sur le profil de vitesse dans un écoulement *Ferro fluide* dans un canal divergent en rotation : $Ha = 0$, $Ro = 2000$, $\phi = 2\%$ And $Re = 60$

4-2-3 Effet de la fraction volumique

Les *Figures. (4.13) et (4.14)* visualisent les effets de la fraction volumique ϕ des nanoparticules (Fe_3O_4) sur le champ de vitesse d'un convergent/divergent en rotation.

Les résultats obtenus, montrent que dans les deux cas, qu'il s'agit d'un canal convergent ou un autre divergent, la vitesse croit légèrement avec l'accroissement de la fraction volumique des nanoparticules, ce qui freine l'apparition du retour d'écoulement dans la moitié inférieure des canaux convergents/divergents.

Par ailleurs, il y'a une très grande possibilité d'assister à un retour d'écoulement surtout au niveau de la moitié supérieure du canal divergent. Dans cette zone, on assiste à un décroissement de la vitesse avec l'accroissement de la fraction volumique φ . Par contre, au niveau de la partie supérieure du canal divergent, ce risque est totalement exclu.

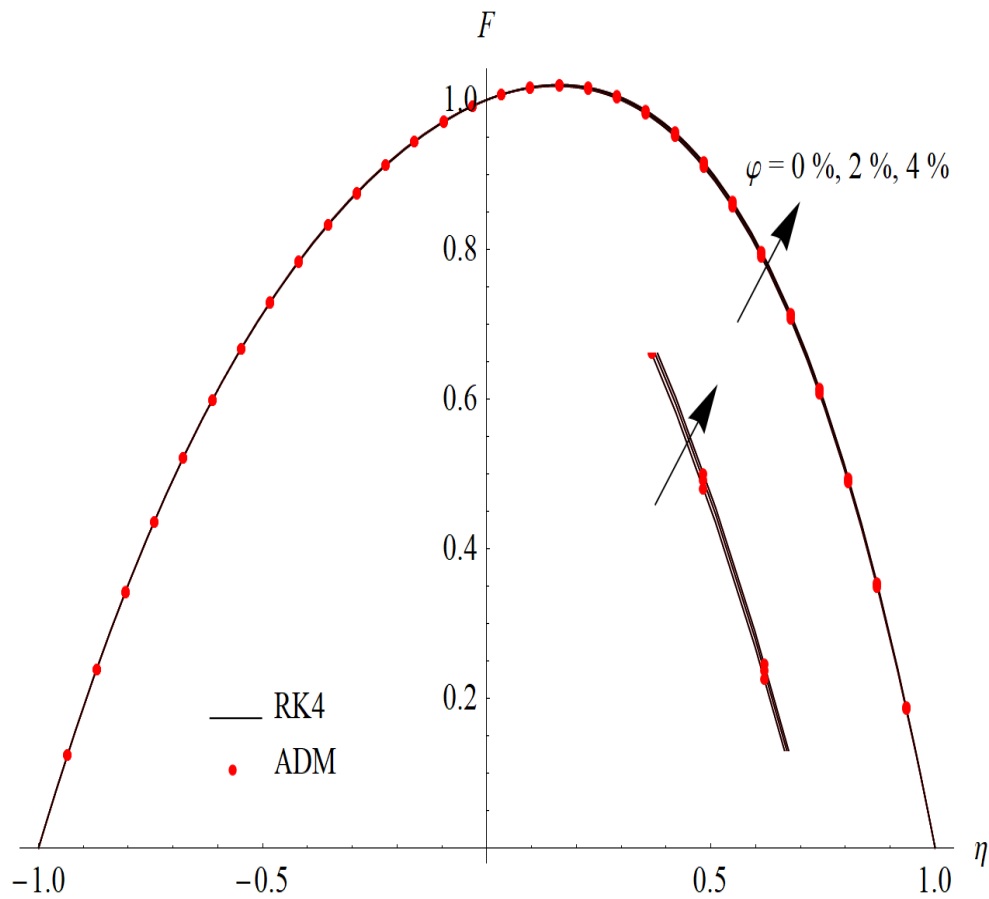


Figure4-13 Effet de la fraction volumique des nanoparticules (Fe_3O_4) sur la vitesse de l'écoulement à l'intérieur d'un canal convergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 50$, $Ro = 4000$, $\alpha = -3$

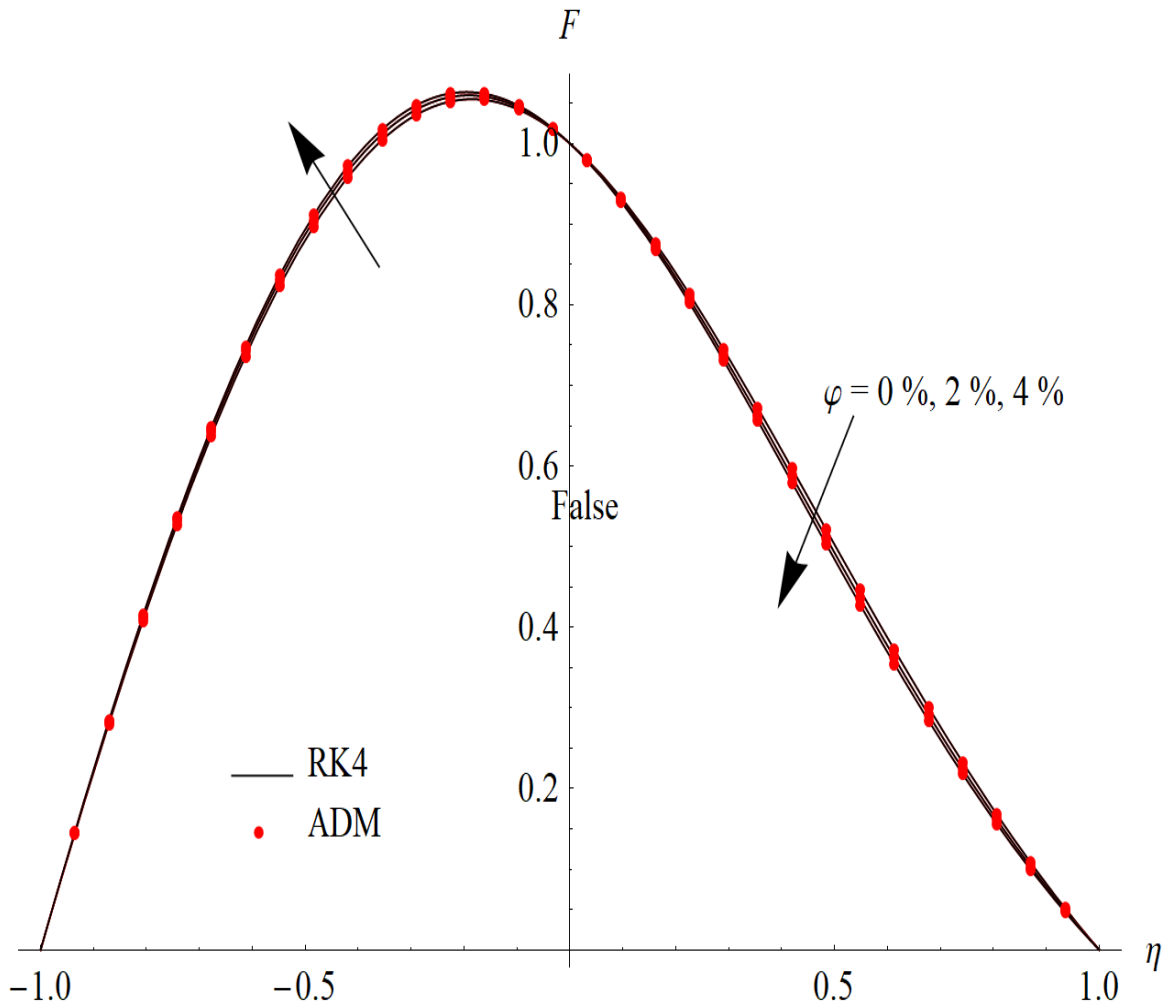


Figure4-14 Effet de la fraction volumique des nanoparticules (Fe_3O_4) sur la vitesse de l'écoulement à l'intérieur d'un canal divergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 50$, $Ro = 4000$, $\alpha = +3^\circ$

4-2-4 Effet du paramètre de rotation

Tel qu'il est visualisé par la **Figure (4.15)**, on voit clairement que la vitesse de l'écoulement diminue avec l'augmentation du paramètre de rotation **Ro** dans une zone plus loin de la paroi inférieure du canal convergent; par contre, au niveau de la partie supérieure du canal, la vitesse croit avec l'accroissement du paramètre de rotation **Ro**, ce qui fait disparaître le risque d'apparition du phénomène de retour de l'écoulement.

Un comportement inverse est observé dans le cas du canal divergent comme le représente la **Figure (4.16)**. **En effet**, une augmentation de la vitesse du **Ferro-fluide** est enregistré avec l'augmentation du paramètre **Ro** dans la moitié inférieure du canal. Dans cette

situation, une diminution notable de l'épaisseur de quantité de mouvement et par conséquent un possible retour d'écoulement est entièrement éliminé.

Par contre, dans la partie supérieure du canal divergent, quand la force de Coriolis devient importante du fait de l'accroissement de la vitesse de rotation, la vitesse du Ferro-fluide connaîtra une diminution notable, conduisant ainsi à l'accroissement de l'épaisseur de la couche limite de quantité de mouvement et par conséquent un éventuel retour d'écoulement est favorisé. En d'autres termes, lorsque le paramètre de rotation est important, la force de Coriolis qui agit à l'encontre du gradient de pression conduit à l'apparition du phénomène de retour d'écoulement.

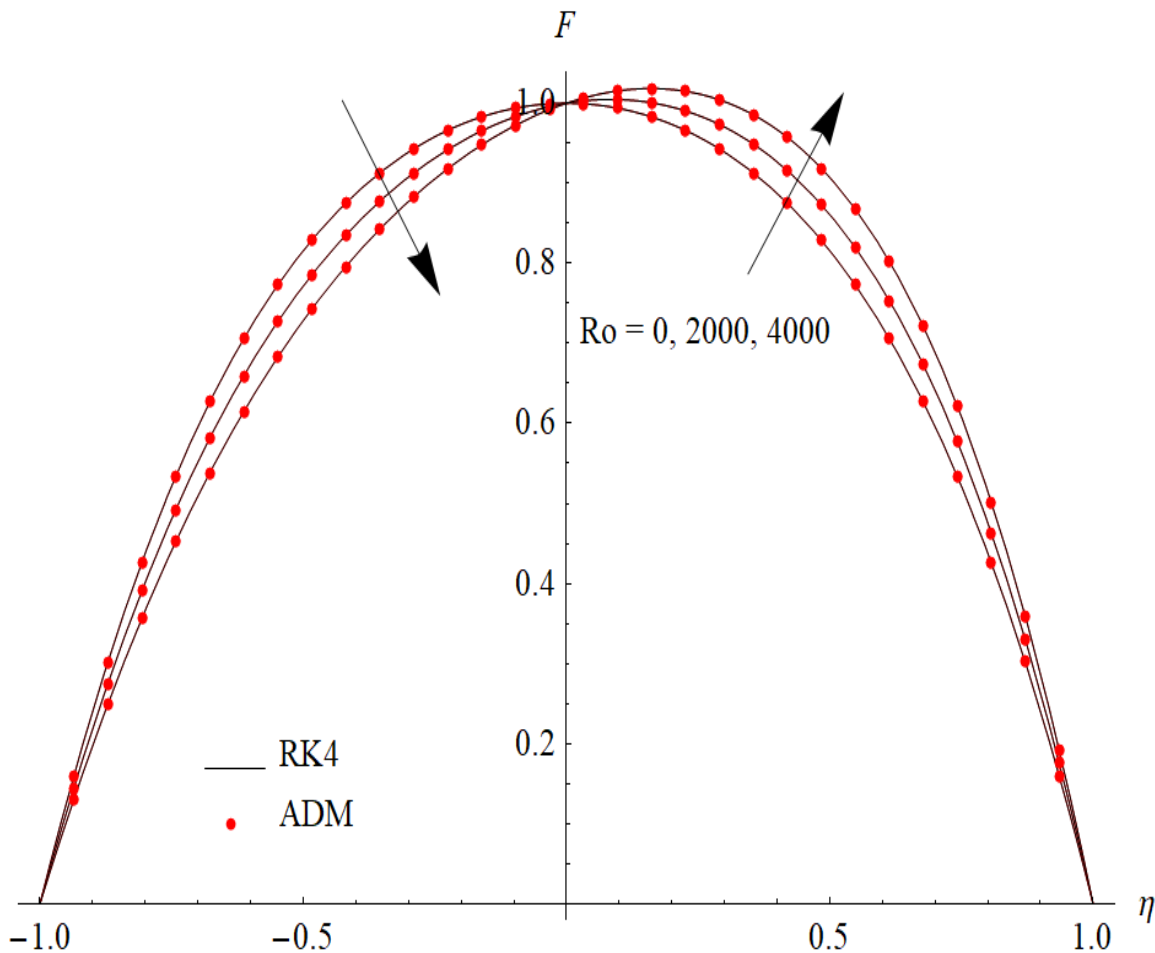


Figure4-15 Effets du paramètre de rotation sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal convergent en rotation : $Ha = 0$, $Re = 60$, $\varphi = 3\%$ et $\alpha = -3^\circ$

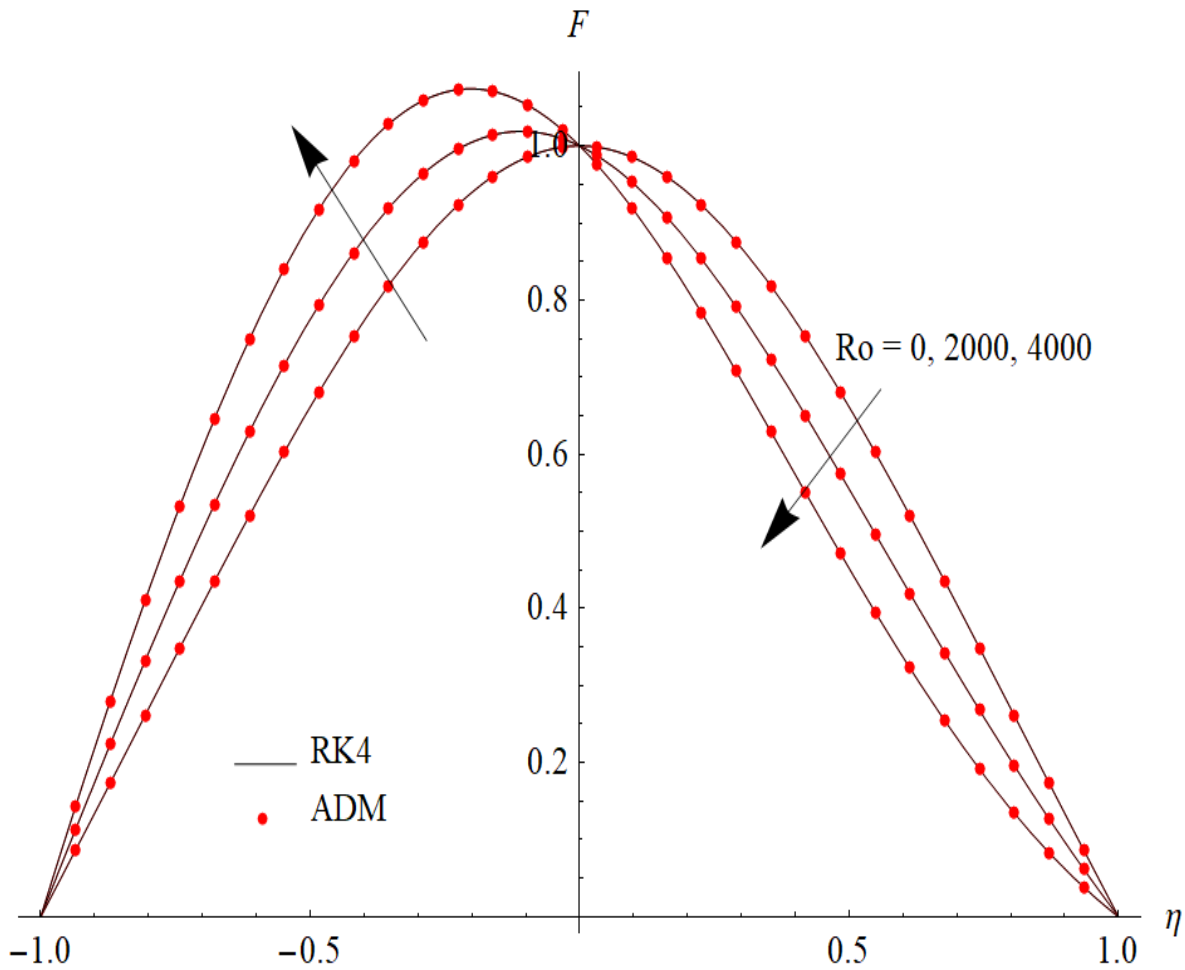


Figure4-16 Effets du paramètre de rotation sur la vitesse de l'écoulement

d'un Ferro-fluide dans un canal divergent en rotation :

$$Ha = 0, Re = 60, \varphi = 3\% \text{ et } \alpha = +3^\circ$$

4-2-5 Effet du nombre de Hartmann Ha

L'effet du nombre de **Hartmann Ha** sur l'évolution de la vitesse de l'écoulement d'un **Ferro-fluide** à l'intérieur d'un canal convergent-divergent en rotation est visualisé par les Figures (4.17) et (4.18).

La **Figure (4.17)** visualisant montre clairement qu'il existe une relation explicite entre la vitesse du Ferro-fluide et le nombre de **Hartmann** dans le cas du canal convergent en rotation. En effet, toute augmentation du nombre de **Hartmann** est synonyme d'augmentation de la vitesse du Ferro-fluide dans tout le canal et par conséquent le phénomène de séparation est

entièrement exclu au niveau des parties supérieure et inférieure du canal convergent. Par ailleurs, au niveau du canal divergent, comme le montre la Figure (4.18), on constate que la vitesse apparait comme une fonction croissante du nombre de Hartmann au niveau des parois inférieure et supérieure, ce qui empêche l'apparition du phénomène de retour d'écoulement. Ceci est principalement expliqué par l'effet stabilisateur de la force de Lorentz qui s'oppose à la direction de l'écoulement et par conséquent le phénomènes de séparation est complètement éliminé au niveau des deux moitiés inférieure et supérieure du canal divergent. Également, à partir de la Figure (4.18), on note clairement l'apparition d'un nouveau point de croisement près de l'axe du canal où la vitesse diminue entre le nouveau point et l'axe du canal.

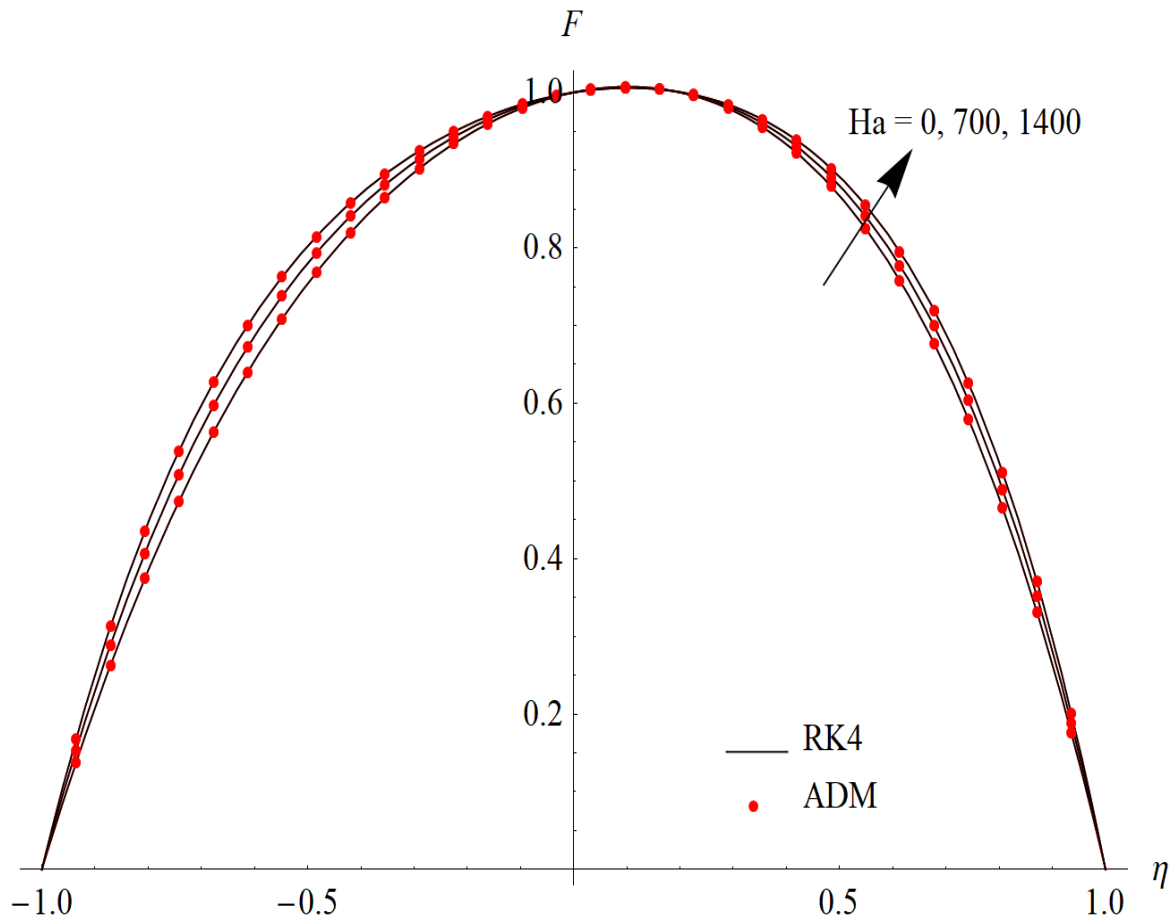


Figure 4- 17 Effet du nombre de Hartmann sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal convergent en rotation :

$$Re = 55, \varphi = 0.01, Ro = 2500 \text{ et } \alpha = -3^\circ$$

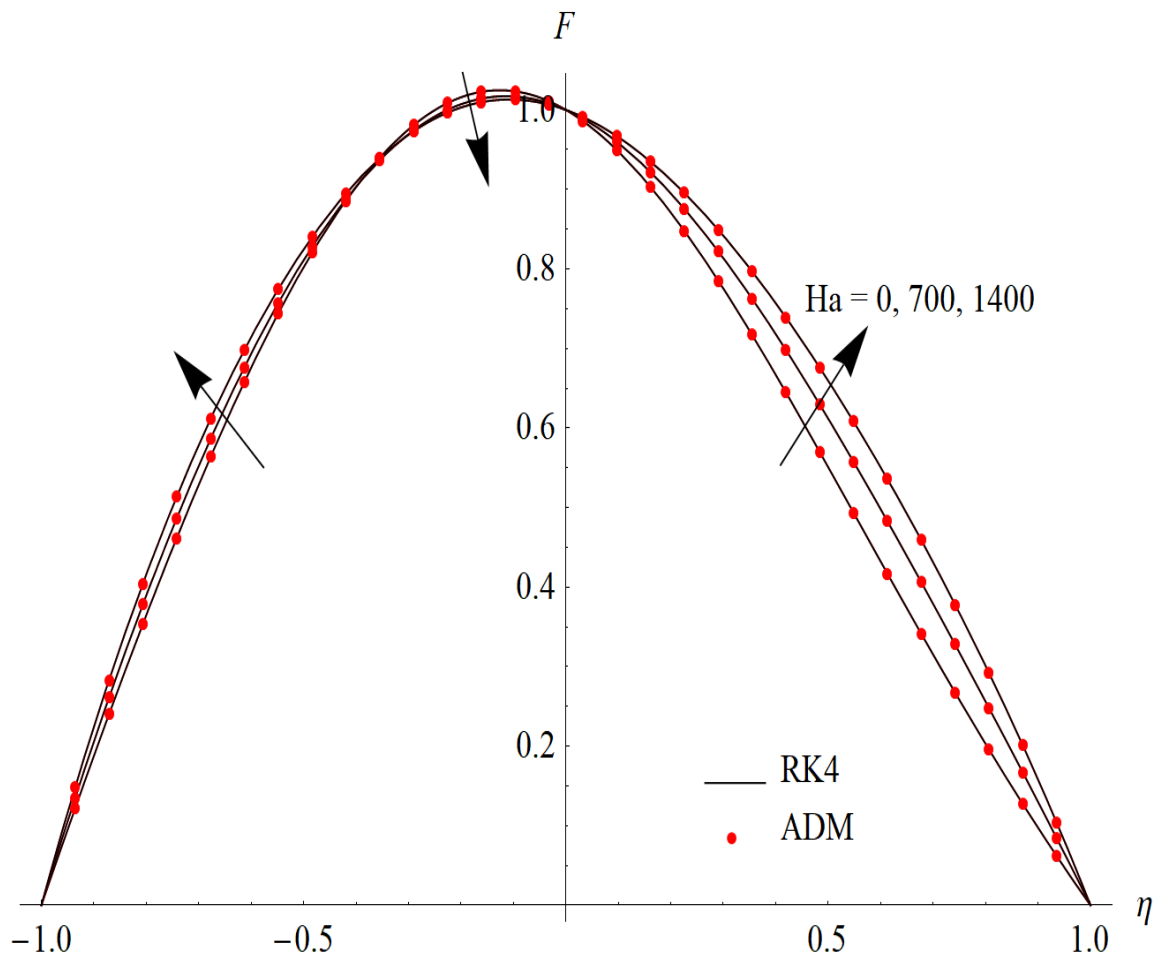


Figure 4- 18 Effet du nombre de Hartmann sur la vitesse de l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal divergent en rotation :
 $Re = 55, \varphi = 0.01, Ro = 2500$ et $\alpha = +3^\circ$

4-3Évolution du coefficient de frottement

Dans cette étude, nous nous sommes également intéressés au comportement du coefficient de frottement au niveau des parois inférieure et supérieure du canal divergent. En effet, au niveau de la paroi inférieure, lorsque $\eta = -1$, il convient de mentionner que les valeurs positives du coefficient de frottement ($f'(-1) > 0$) indiquent la non apparition du phénomène de retour d'écoulement; cependant, les valeurs négatives indiquent le début de ce phénomène. Pour le cas de la paroi supérieure, lorsque $\eta = +1$, un comportement inverse se produit où les valeurs négatives du coefficient de frottement ($f'(1) < 0$) révèlent l'exclusion du phénomène de séparation, tandis que les valeurs positives visualisent l'apparition d'un flux inversé.

Le comportement du coefficient de frottement en fonction du paramètre rotation ‘‘Ro’’ pour diverses valeurs du nombre de Reynolds ‘‘Re’’, au niveau des parois inférieure et supérieure dans un canal divergent rotatif, est illustré sur les Figures (4.19) et (4.20). En effet, pour les parois inférieure et supérieure, les résultats révèlent que le coefficient de frottement croît avec la croissance du paramètre de rotation ‘‘Ro’’ et du nombre de Reynolds ‘‘Re’’. Les valeurs obtenues pour le coefficient de frottement démontrent que le phénomène de retour d’écoulement ne se produit pas. De plus, le coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure, comme illustré par la Figure 21, augmente avec l’augmentation de l’intensité du nombre de Hartmann. Dans le cas de la paroi supérieure, visualisé par la Figure 22, un comportement inverse est observé ou le coefficient de frottement apparaît comme une fonction décroissante du nombre de Hartmann. Comme mentionné ci-dessus, les valeurs négatives du coefficient de frottement sont une indication sur l’exclusion du phénomène de séparation au niveau de la paroi supérieure. Finalement, on peut admettre, pour les parois inférieure et supérieure (Figures 21 et 22), que la force magnétohydrodynamique a la fonction d’un agent stabilisateur qui retarde sans aucun doute l’apparition du phénomène de retour d’écoulement.

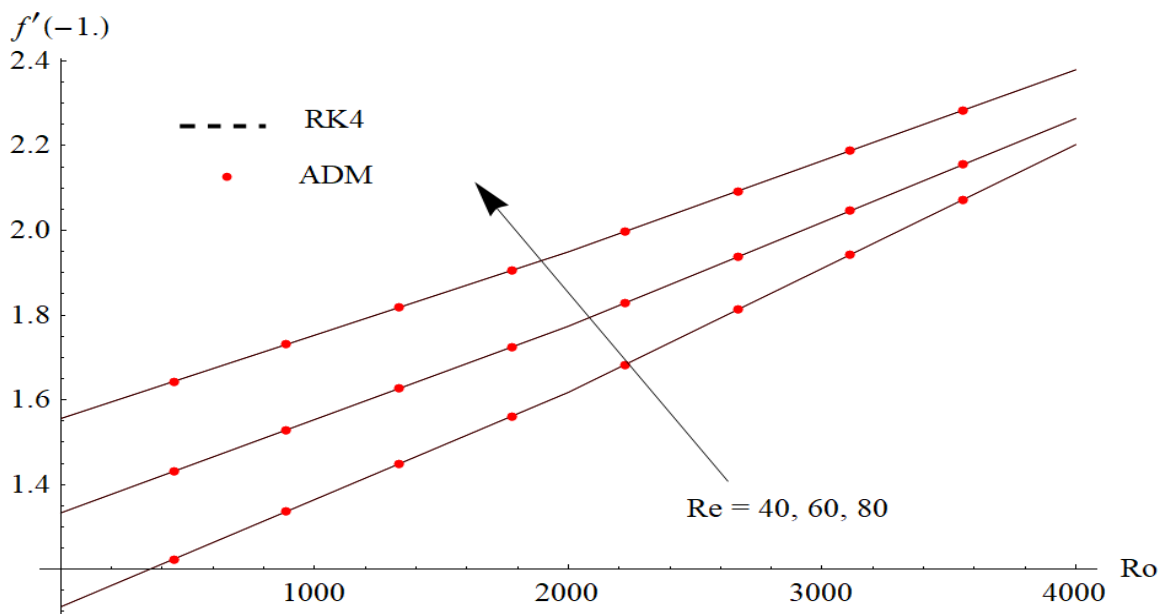


Figure 4-19 Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure d’un canal divergent en fonction du paramètre de rotation Ro pour différentes valeurs du nombre de Reynolds : $Ha = 0$, $\varphi = 3\%$ et $\alpha = +3^\circ$

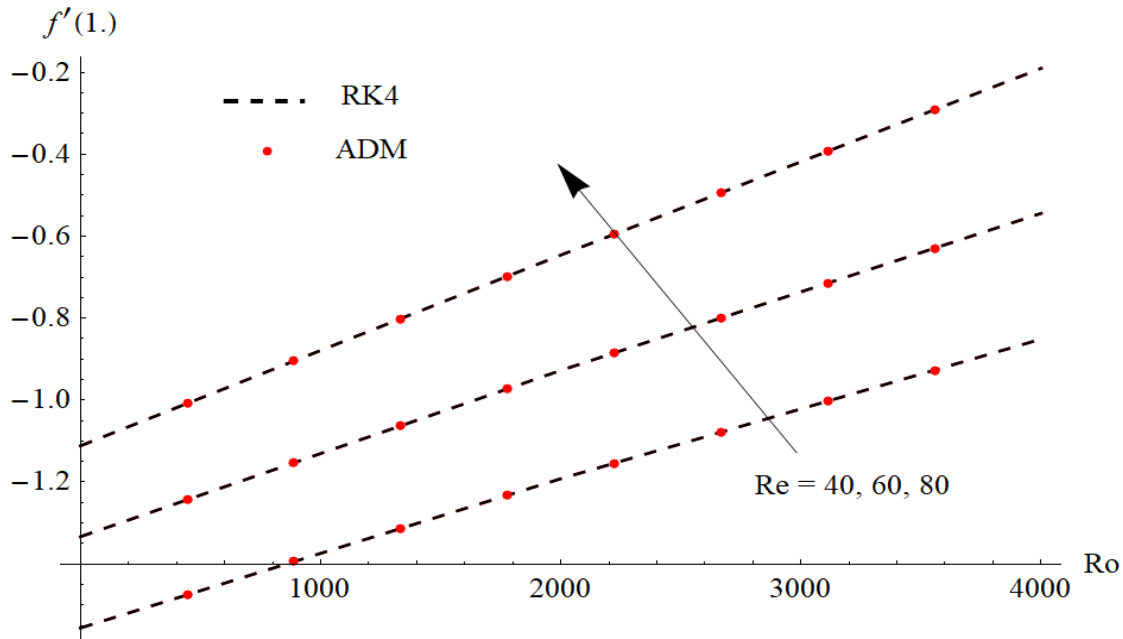


Figure 4-20 Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure d'un canal divergent en fonction du paramètre de rotation Ro pour différentes valeurs du nombre de Reynolds : $Ha = 0$, $\varphi = 3\%$ et $\alpha = +3^\circ$

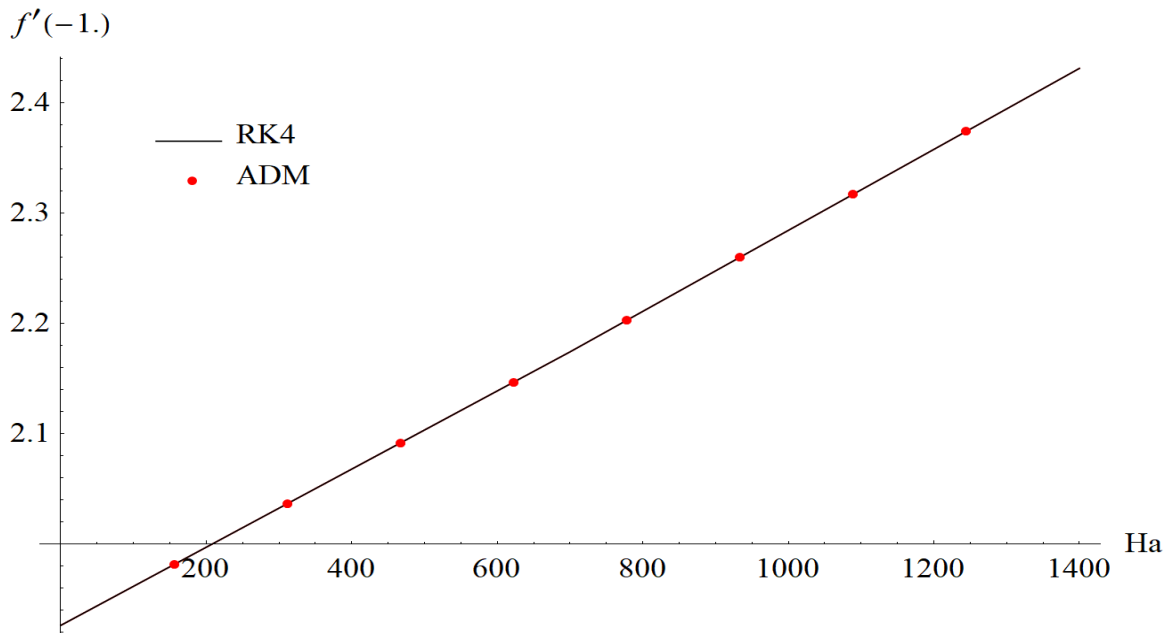


Figure 4-21 Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure d'un canal divergent en fonction du nombre de Hartmann Ha pour $\alpha = +3^\circ$, $Ro = 2000$, $Re = 50$ et $\phi = 3\%$

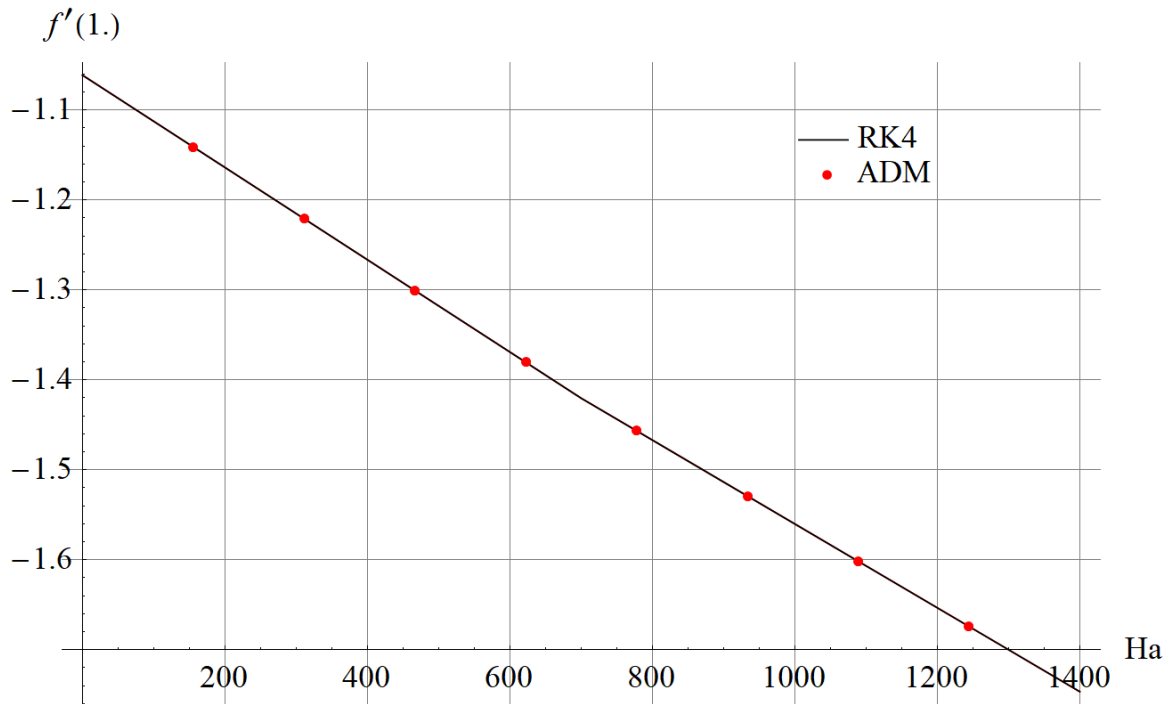


Figure4-22 Évolution du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure d'un canal divergent en fonction du nombre de Hartmann Ha pour $\alpha = +3^\circ$, $Ro = 2000$, $Re = 50$ et $\phi = 3\%$

4-4 Etude comparative et Validation

Afin de démontrer l'efficacité et la robustesse de la méthode décompositionnelle d'Adomian (ADM), une étude comparative entre les résultats semi-analytiques ADM et la solution numérique de **Runge-Kutta** d'ordre 4 (RK4) utilisée comme guide est présentée dans les Tableaux 2 et 3. En effet, ces tableaux décrivent les données numériques de la vitesse du Ferro-fluide lorsque $\alpha = \pm 3^\circ$, $Ro=3000$, $Re=40$, $\phi= 1\%$ et $Ha= 0$. Pour visualiser la précision de la méthode ADM, l'erreur dans le calcul de la vitesse est estimée comme suit :

$$E = |F(\eta)_{Num} - F(\eta)_{ADM}|$$

Selon les résultats obtenus, un parfait accord entre la technique numérique de Runge–Kutta d'ordre 4 (RK4) et la méthode semi-analytique de décomposition d'Adomian (ADM) est clairement observée, ce qui valide l'efficacité et la précision élevée de la technique analytique ADM adoptée. De plus, les Tableaux 4 et 5 montrent les valeurs numériques de la fonction $F''(0)$ pour diverses valeurs du nombre de Reynolds lorsque le nombre de Hartmann $Ha=0$. Comme visualisé, un excellent accord est également observé entre les solutions analytiques

ADM et celles disponibles dans la littérature [67–71], justifiant ainsi la plus grande précision de la solution semi-analytique ADM

Tableau 4.2 Comparaison entre les résultats numérique (RK4) et les résultats semi-analytiques (ADM) dans un canal convergent en rotation pour $\alpha = -3^\circ, Ro = 3000, Re = 40, \phi = 1\%$ et $Ha = 0$

η	F^{RK4}	F^{ADM}	$ F^{RK4} - F^{ADM} $
-1.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.00000
-0.75	0.4292354064799944	0.4292356743224542	2.6784×10^{-7}
-0.50	0.7227220565707008	0.7227221876546784	1.3108×10^{-7}
-0.25	0.9074098644371521	0.9074097623098642	1.0213×10^{-7}
0.00	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.00000
0.25	0.9972131561923011	0.9972133487219867	1.9253×10^{-7}
0.50	0.870430113548542	0.8704302562109886	1.4266×10^{-7}
0.75	0.5628907560428037	0.5628906784321380	7.7611×10^{-8}
1.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.00000

Tableau 4.3 Comparaison entre les résultats numérique (RK4) et les résultats semi-analytiques (ADM) dans un canal convergent en rotation pour $\alpha = -3^\circ, Ro = 3000, Re = 40, \phi = 1\%$ et $Ha = 0$

η	F^{RK4}	F^{ADM}	$ F^{RK4} - F^{ADM} $
-1.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.00000
-0.75	0.48222849465243844	0.4822276554987326	8.3915×10^{-7}
-0.50	0.8319698726541129	0.8319687209812343	1.1517×10^{-6}
-0.25	1.0099057216060972	1.0099065981274376	8.7652×10^{-7}
0.00	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.00000
0.25	0.8316669292628193	0.8316646732808218	2.2560×10^{-6}
0.50	0.5684079850546326	0.5684057823409834	2.2027×10^{-6}
0.75	0.27650011629312055	0.2765025468323692	2.4305×10^{-6}
1.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.00000

Tableau 4.4 Comparaison entre les résultats semi-analytiques (ADM) et ceux disponibles dans la littérature pour la fonction $F''(0)$ dans un canal convergent : $\alpha = -5^\circ$, $Ro=0$, $\varphi=0$ et $Ha=0$.

Re	F''(0) [66]	F''(0) [67]	F''(0) [68]	F''(0) [69]	F''(0) [70]	ADM (Présente étude)
10	1.784546	1.784546	1.784547	1.784547	1.784546	1.78454676648462
30	1.413692	1.413692	1.413692	1.413692	1.413692	1.41369209135674
50	1.121989	1.121989	1.121989	1.121989	1.121989	1.2198919535324

Tableau 4.5 Comparaison entre les résultats semi-analytiques (ADM) et ceux disponibles dans la littérature pour la fonction $F''(0)$ dans un canal divergent : $\alpha = 5^\circ$, $Ro=0$, $\varphi=0$ et $Ha=0$.

Re	F''(0) [66]	F''(0) [67]	F''(0) [68]	F''(0) [69]	F''(0) [70]	ADM (Présente étude)
20	2.527192	2.527192	2.527192	2.527192	2.527192	2.5271921099786
60	3.942140	3.942140	3.942140	3.942140	3.942140	3.9421401298765
100	5.869165	5.869165	5.869165	5.869165	5.869165	5.8691652309549

Nous avons également procédé à une comparaison des valeurs numériques de la distribution des vitesses, illustrée sur le Tableau (4.6) et la Figure (4.26), avec le travail réalisé par Amir *Moradi*[20] qui a utilisé la méthode des transformations différentielles (DTM), avec un Reynolds $Re=50$ et un demi-angle $\alpha = 5^\circ$. Les résultats obtenus montrent également un excellent accord entre les méthodes utilisées.

Tableau 4.6 Étude comparative dans le cas d'un canal divergent entre la présente étude et celle de A. Moradi[20]

η	Résultats de A Moradi et al [20]	Présente étude
0	1	1
0.1	0.982431	0.982439
0.2	0.931226	0.931253
0.3	0.850611	0.850666
0.4	0.746791	0.7476876
0.5	0.626948	0.627057
0.6	0.498234	0.498356
0.7	0.366966	0.367085
0.8	0.238124	0.238222
0.9	0.115152	0.11521
1	0	0

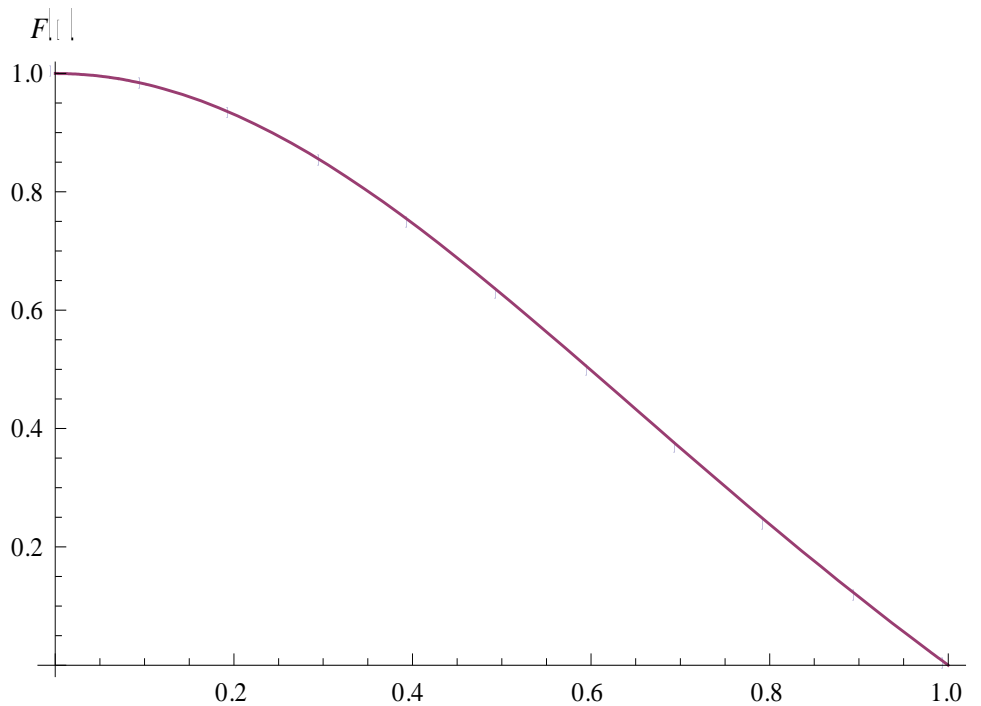


Figure 4.23 : Comparaison entre la présente étude et celle de A. Moradi[20] – Visualisation graphique de la distribution des vitesses dans un canal divergent



Conclusion Générale

Conclusion Générale

Cette thèse a eu le mérite d'étudier, d'une part, l'écoulement d'un Ferro-fluide dans un canal convergent-divergent en rotation et, d'autre part, de mettre la lumière sur l'efficacité de la méthode décompositionnelle d'Adomian utilisée pour résoudre le problème non linéaire régissant la problématique étudiée. Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux effets de divers paramètres thermo-physiques tels que : le nombre de Hartmann, le nombre de Reynolds, le demi-angle d'ouverture du canal, la fraction volumique des nanoparticules et le paramètre adimensionnel de rotation sur l'évolution de la vitesse du Ferrofluide dans les canaux convergents-divergents et le coefficient de frottement au niveau des parois supérieure et inférieure du canal divergent.

Dans cette contribution, on a donc étudié deux situations. La première concerne l'écoulement de Jeffery-Hamel hydromagnétique classique d'un Ferro-fluide. En effet, on a pu constater dans cette partie une parfaite symétrie des profils de vitesse dans les deux canaux convergent et divergent sans être affecté par la variation des paramètres thermo-physiques comme le nombre de Hartmann, le nombre de Reynolds, le demi angle d'ouverture et la fraction volumique des nanoparticules solides. Par contre, un comportement différent est apparu avec l'entrée en lice de la rotation du canal, et qui s'est soldé par la non symétrie des profils de la vitesse entre les parties supérieure et inférieure du canal.

Nous avons également, à l'aide de la méthode de décomposition d'**Adomian** et celle de **Runge-Kutta d'ordre 4**, pu résoudre analytiquement et numériquement respectivement le problème nonlinéaire de l'écoulement hydromagnétique de **Jeffery-Hamel** pour un Ferro-fluide s'écoulant dans un canal convergent-divergent en rotation. Les principales conclusions que l'on peut tirer de cette étude sont:

- Aucun retour d'écoulement n'a été observé au niveau de la paroi inférieure dans le cas de l'écoulement dans un canal convergent en rotation.
- En raison du phénomène de rotation, un point de croisement (cross over point) a été observé à l'axe du canal convergent-divergent, signalant ainsi un comportement inverse de la vitesse du Ferro-fluide entre les moitiés inférieure et supérieure du canal.
- L'accroissement du nombre de Reynolds dans un convergent en rotation fait croître la vitesse du Ferro-fluide dans les deux moitiés inférieure et supérieure du canal. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite augmente avec l'augmentation de l'intensité du nombre de Reynolds.
- Dans un canal divergent en rotation, l'impact du nombre de Reynolds montre une légère augmentation de la vitesse du Ferro-fluide au voisinage de la paroi inférieure; cependant, au niveau de la moitié supérieure du canal, une augmentation notable de l'épaisseur de la couche limite est diagnostiquée et par conséquent le phénomène de séparation est fortement favorisé.
- L'accroissement du demi-angle α du canal conduit au retour de l'écoulement dans la moitié supérieure des canaux convergents-divergents.
- L'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules empêche l'inversion de l'écoulement dans les moitiés supérieure et inférieure du canal convergent en rotation.
- Dans la moitié inférieure du canal divergent, la vitesse du Ferro-fluide augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules; tandis, elle apparaît comme une fonction décroissante de la fraction volumique dans la moitié supérieure du canal où le phénomène de retour d'écoulement peut se produire.
- Avec l'accroissement de l'intensité du paramètre de rotation Ro , le retour d'écoulement est entièrement exclu dans le canal convergent.
- Une forte diminution de la vitesse du Ferro-fluide est observée avec l'accroissement du paramètre de rotation "Ro" dans la moitié supérieure du canal divergent, ce qui conduit à une augmentation notable de l'épaisseur de la couche limite, conduisant ainsi à l'apparition du phénomène de retour d'écoulement. En effet, pour des valeurs

élevées du paramètre de rotation Ro , l'effet de la force de Coriolis avec les gradients de pression affectent notablement le de retour de l'écoulement.

- Le retour d'écoulement a entièrement disparu avec l'accroissement du nombre de Hartmann pour les deux canaux rotatifs convergent et divergent.
- Le coefficient de frottement, au niveau des parois supérieure et inférieure du canal divergent, croît avec l'accroissement du nombre de Reynolds et du paramètre de rotation.
- L'application d'un champ magnétique fait croître le coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure du canal divergent, tandis qu'il décroît au niveau de la paroi supérieure.
- Un excellent accord entre la méthode ADM et celle de Runge-Kutta d'ordre 4 est observé, démontrant ainsi la fiabilité, la robustesse et la plus grande précision de l'approche analytique ADM adoptée.



Perspectives

Cette étude nous a permis de défricher un sujet original assez nouveau et offre par conséquent un certains nombres de perspectives qui mériteront d'être développées. Il s'agit bien évidemment :

- d'investiguer les phénomènes de transfert de chaleur et de masse pour un écoulement Ferro-fluide dans un canal convergent-divergent en rotation.
- d'étudier les phénomènes d'injection et d'aspiration pour ce type d'écoulement.

Enfin, pour les aubes des turbomachines, les résultats obtenus pourraient nous permettre d'envisager des géométries totalement différentes que celles utilisées actuellement tel que le profil NACA.



Références Bibliographiques

- [1] **S. U. S. Choi**, *Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles in developments and application of non newtonien flows*, *ASME FED*-vol. 231/MD 66, pp. 99–105, 1995.
- [2] **G. Adomian** , **On Kdv**, *Type equations* ,*Applied Mathematics and computation* ,Volume 88 , pp131-135, 1997.
- [3] **G. Adomian** ,*Optical propagation in random media* , *Applied Mathematics and computation* ,Volume 88 ,pp 127-129, 1997
- [4] **G. Adomian**, *Explicit solution of nonlinear partial differential equations* , *Applied Mathematics and computation* ,Volume 88 ,Dec 30 1997 pp117-126
- [5] **G. B. Jeffery**, “*The two-dimensional steady motion of a viscous fluid*,” *Philosophical Magazine*, vol. 6,pp. 455–465, 1915.
- [6] **G. Hamel**, “*Spiralförmige Bewegungen Zäher Flüssigkeiten*,” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 25, pp. 34–60, 1916.
- [7] **L. Bansal**, *Magnetofluidynamics of Viscous Fluids*, Jaipur Publishing House, Jaipur, India, 1994.
- [8] **Jul. Hartmann and Freimut Lazarus** ,**Hg-Dynamics***2experimental investigation on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field* ,*Det kgl. Danske Videnskabernes Selskab .Mathematisk –fysiske Meddelelser* 1937

- [9] **L. Rosenhead**, *The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls*, *Proc. Royal Soc. A* 175 (1940) 436_467.
- [10] **L.E. Fraenkel**, *Laminar flow in symmetrical channels with slightly curved walls. I: on the Jeffery_Hamel solutions for flow between plane walls*, *Proc. R. Soc. Lond. A* 267 (1962) 119_138.
- [11] **O.D. Makinde, P.Y. Mhone, Hermite_Padé** “Approximation approach to MHD Jeffery_Hamel flows, *Appl. Math. Comput.*181 (2006) 966_972.
- [12] **Millsaps, K; etPohlhausen, K. (1953)**.*Thermal distributions in Jeffery-Hamel flows between non-parallel plane walls*, *J. Aero. Sci.*, 20, 187-196.
- [13] **Terril, R. (1965)**. *Slow laminar flow in a converging or diverging channel with suction at one blowing at the other wall*, *ZAMP* 16, pp. 306-308.
- [14] **Yang, J; et Price G. (1972)**.*Laminar flow development and heat transfer in converging plane -walled channels*, *Appl. Sci. IRes.*25, pp. 361-321.
- [15] **Rita Choudhury et Kamal Debnath** ,*hydromagneticdiverгент channel flow of a viscoelastic electrically conducting fluid* , *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*Vol. 3 No. 10 October 2011
- [16] **Dey, J; et Nath, G. (1981)**.*Boundary layer convective heat transfer in a convergent channel*, *Heat and mass transfer* 08, pp. 37 t-377.
- [17] **OzrsffM ,Trpp CH et Egolf H (1982)***Laminar forced convectionin converging or diverging planar symmetric ducts heat and mass transfer* 25 pp 1477-1480
- [18] **Riley N (1989)** *Heat transfer in Jeffery Hamel flow* ,*quarterly journal of mechanics and apploied mathematics* 42 pp 203-211
- [19] **W. I. Axford**, “*The magnetohydrodynamic Jeffrey-Hamel problem for a weakly conducting fluid*,”*Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 14, no. 3, pp. 335–351, 1961.
- [20] **Amir Moradi ,AhmedAlsaedi and Tasawar Hayat (2015)**, *investigation of heat transfer and viscous dissipation effects on the Jeffery –Hamel flow of nanofluids thermal science* vol 19No2 pp 563-578
- [21] **Alfven,H (1942)**, ‘*existence of electromagnetic-hydrodynamique waves* ‘*Nature* 150(3805):405-406
- [22] **N. Harada, J. Ikewada, and Y. Terasaki**, “*Basic studies on an MHD accelerator*,” *The American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 2175, 2002

- [23]. **Makinde, O. D., Motsa, S. S.**, “Hydromagnetic stability of plane Poiseuille flow using Chebyshev spectral collocation method”, *International Journal of Mathematics and Computer Science*, Vol. 12 (2), (2001), 175-183.
- [24] **D. D. Ganji, M. Sheikholeslami, and H. R. Ashorynejad**, *Analytical Approximate Solution of Nonlinear Differential Equation Governing Jeffery-Hamel Flow with High Magnetic Field by Adomian Decomposition Method*, *International Scholarly Research Network*, Volume 2011, 16 pages
- [25] **Syed Tauseef Mohyud-Din, Umar Khan, Naveed Ahmed and Saleh M. Hassan** *Magnetohydrodynamic Flow and Heat Transfer of Nanofluids in Stretchable Convergent/Divergent Channels*, *applied sciences*, 2015, 5, 1639-1664
- [26] **A.A Imani et al** ” *Analytical Investigation of Jeffery-Hamel Flow with High Magnetic Field and Nano particle by RVIM*”, *International journal of engineering*, vol 25 n°3
- [27] **Sadhu Ramprasad1, S. H. C. V. Subba Bhatta, and Bandaru Mallikarjuna**, *Computational study on two-phase MHD buoyancy driven flow in an asymmetric diverging channel*, *Songklanakarin J. Sci. Technol*, 415-423, Mar.-Apr.2020
- [28] **Ahmed A. Khidir**” *A New Spectral-Homotopy Perturbation Method and Its Application to Jeffery-Hamel Nanofluid Flow with High Magnetic Field* ”, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Computational Methods in Physics* Volume 2013,
- [29] **V. Ananthaswamy& N. Yogeswari**, *a study on MHD Jeffery-Hamel flow in Nanofluids using new Homotopy analysis*, *International Journal of Scientific Research and Modern Education (IJSRME)*, Volume I, Issue I, 2016
- [30] **M. Sheikholeslami, H. R. Ashorynejad, D. D. Ganji, and A. Kolahdooz**,” *Investigation of Rotating MHD Viscous Flow and Heat Transfer between Stretching and Porous Surfaces Using Analytical Method* “, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in engineering* Volume 2011
- [31] **G. S. Seth, S. M. Hussain and J. K. Singh**, “*MHDCouette flow of class-II in a rotating system* “, *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, vol.1, no.1, 2011, 31-54
- [32] **S.Das , H.K.Mandal , R. N.Jana** “*Hall effects on unsteady rotating MHD flow through porous channel with variable pressure gradient* “, *International journal of computer applications* volume 83 n°1 december 2013.
- [33] **Alam,S et Khan,M** .*MHD diverging effects on mixed convection flow à travers un canal divergent avec un obstacle circulaire* .*procediaengineering* ,90,403-410.2014
- [34] **Vikas Kumar**, “*Magnetoviscous Effects on Axi-Symmetric Ferrofluid Flow over a porous Rotating Disk with Suction/Injection* ”, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering* Vol:7 No:12, 2013

- [35] **Osman Anwar Beg, Oluwole Daniel Makinde, Joaquin Zueco and Swapan, Swapan Kumar Ghosh,** " *Hydromagnetic viscous flow in a rotating annular high-porosity medium with nonlinearforchheimer drag effects: numerical study* ", *World Journal of Modelling and Simulation* , Vol. 8 (2012) No. 2, pp. 83-95
- [36] **M.C.S. Reddy, V.V. Rao,** *Experimental studies on thermal conductivity of blends of ethylene glycol-water-based TiO₂ nanofluids*, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 46 (2013) 31–36.
- [37] **L.S. Sundar, M.K. Singh, A.C.M. Sousa,** *Thermal conductivity of ethylene glycol and water mixture based Fe₃O₄ nanofluid*, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 49 (2013) 17–24.
- [38] **M. R. Sari, M. Kezzar and R. Adjabi,** *Heat transfer of copper-water nanofluid flow through converging-diverging channel*, *J. of Cent. South Univ.*, Vol. 23, pp. 484-496, 2016.
- [39] **R. Mohebbi, M. M. Rashidi,** *Numerical simulation of natural convection heat transfer of a nanofluid in an L -shaped enclosure with a heating obstacle*, *J. of the Taiw. Inst. of Chem. Eng.*, vol. 72, pp. 72-84, 2017.
- [40] **M. Garoosi and M. M. Rashidi,** *Two phase flow simulation of conjugate natural convection of the nanofluid in a partitioned heat exchanger containing several conducting obstacles*, *Int. J. of Mech. Sci.*, vol.130, pp. 282-306, 2017.
- [41] **M. Kezzar and M. R. Sari,** *Series Solution of Nanofluid Flow and Heat transfer Between Stretchable/Shrinkable Inclined Walls*, *Int. J. of app. and comp. math.*, vol. 3, pp. 2231–2255, 2017.
- [42] **M. M. Rashidi, M. Reza and S. Gupta,** *MHDStagnation point flow of micropolar nanofluid between parallel porous plates with uniform blowing*, *Powder Technology*, vol. 301, pp. 876–885, 2016.
- [43] **M. I. Pryazhnikov, A. V. Minakov, V. Ya. RudyakandD. V. Guzei,** *Thermal conductivity measurements of nanofluids*, *Int. J. of Heat and Mass Tran.*, vol. 104, pp. 1275–1282, 2017.
- [44] **G. J. Tertsinidou, C. M. Tsolakidou, M. Pantzali, and M. J. Assael,** *New Measurements of the Apparent Thermal Conductivity of Nanofluids and Investigation of Their Heat Transfer Capabilities*, *J. of Chem. Eng. Data*, Vol. 62, pp. 491-507, 2017.
- [45] **M.K. Nayak, S. Shaw, H. Waqas, O.D. Makinde, M. Alghamdi, T. Muhammad,** *Comparative study for magnetized flow of nanofluids between two parallel permeable stretching/shrinking surfaces*, *Case Studies Thermal Eng.* 28 (2021) 101353,
- [46] **Ragupathi, P., Saranya, S., Hakeem, A.A. and Ganga, B., 2021, May.** *Numerical analysis on the three-dimensional flow and heat transfer of multiple nanofluids past a Riga plate. In Journal of Physics: Conference Series, 1850(1), Article No. 012044, IOP Publishing.*

- [47] **C.Sivaraj et M.A.Sheremet** :*MHD natural convection and entropy generation of ferrofluids in a cavity with a non-uniformly heated horizontal plate* ,international journal of mechanical sciences 149 october 2018
- [48] **MohdRijalLias**” *Natural convection of ferrofluid from a fixed vertical platewithalignedmagnetic field and convective boundary condition* :Malaysian journal of fundamental and appllied sciences.
- [49] **Borglin, S. E., Moridis, G. J. and Becker, A.: 1998**, *Magnetic detection of ferrofluid injection zones*,Lawrence Berkeley National Laboratory Report LBL-40127, Berkeley, California.
- [50]**Neuringer, J.L.; Rosensweig, R.E. Ferrohydrodynamics.** *Phys. Fluids* 1964, 7, 1927–1937.
- [51]**Akbarzadeh,A.; Samiei,M.;Davaran, S.***Magnetic nanoparticles: Preparation, physical properties, and applications in biomedicine.* *Nanoscale Res. Lett.***2012**, 7, 144.
- [52] **Frey, N.A.; Peng, S.; Cheng, K.; Sun, S.** *Magnetic nanoparticles: Synthesis, functionalization, and applications in bioimaging and magnetic energy storage.* *Chem. Soc. Rev.* **2009**, 38, 2532–2542.
- [53] **Ghosh, D.; Gupta, T.; Sahu, R.P.; Das, P.K.; Puri, I.K.** *Three-dimensional printing of diamagnetic microparticles in paramagnetic and diamagnetic media.* *Phys. Fluids* **2020**, 32, 072001.
- [54] **Haq, R.U.; Noor, N.F.M.; Khan, Z.H.** *Numerical simulation of water based magnetite nanoparticles between two parallel disks.* *Adv. Powder Technol.* **2016**, 4, 1568–1575.
- [55] **M. Kezzar and M. R. Sari (2015)**, *Application of the generalized decomposition method for solving the nonlinear problem of Jeffery–Hamel flow*, *Computational Mathematics and Modeling*, 26(2), 284-297.
- [56] **M. Kezzar, M. R. Sari, R. Adjabi and A. Haiahem(2015)**, *A modified decomposition method for solving nonlinear problem of flow in converging-diverging channel*, *Journal of Engineering Science and Technology*, 10(8), 1035-1053.
- [57] **M. Kezzar, I. Tabet , N. Nafir and A. Khentout(2018)**, *A new analytical investigation of natural convection of non-Newtonian nanofluids flow between two vertical flat plates by the generalized decomposition (GDM)*, *Journal of Thermal Engineering*, 4(6), 2496-2508.
- [58] **X. G. Luo, Q. B. Wu and B. Q. Zhang (2006)**,*Revisit on partial solutions in the Adomian decomposition method: solving heat and wave equations*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 321(1), 353-363.
- [59] **M. Basto, V. Semiao and F. L. Calheiros (2007)**, *Numerical study of modified Adomian's method applied to Burgers equation*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(2), 927-949.

- [60] R. Goffaux, « Les générateurs magnétohydrodynamiques », CDU 538.3 : 621.311.29, Acec- Revue N°4 -1965.
- [61] M. Tawk, « Etude et réalisation d'un système de refroidissement pour l'électronique de puissance basé sur la mise en mouvement d'un fluide conducteur électrique » Thèse
- [62] N. Bergoug, « Etude de l'influence des matériaux ferromagnétiques sur les Performances d'une machine MHD par la modélisation numérique 2D », Thèse de Magister, Université de Batna, 2006.
- [63] T. Christophe, « Modélisation numérique du couplage Magnétohydrodynamique (MHD) fort. Application à la propulsion MHD navale », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995
- [64] S.Papell, Low magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles, Brevet US 3.215.572.1963
- [65] New laws of attraction scientists print magnetic droplets, phys.org
- [66] U. Khan, A. Naveed, S.T. Mohyud-Din, D. Baleanu, I. Khan, K.S.A. Nisar, A novel hybrid model for Cu–Al₂O₃/H₂O nanofluid flow and heat transfer in convergent/divergent channels. *Energies* **13**, 1686 (2020)
- [67] U. Khan, A. Naveed, S.T. Mohyud-Din, Thermo-diffusion, diffusion-thermo and chemical reaction effects on MHD flow of viscous fluid in divergent and convergent channels. *Chem. Eng. Sci.* **141**, 17–27 (2016)
- [68] S.S. Motsa, P. Sibanda, G. Marewo, On a new analytical method for flow between two inclined walls. *Numer. Algorithms* **61**, 499–514 (2012)
- [69] M. Turkyilmazoglu, Extending the traditional Jeffery-Hamel flow to stretchable convergent/divergent channels. *Comput. Fluids* **100**, 196–203 (2014)

[70] U. Khan, A. Naveed, S.T. Mohyud-Din, Thermo-diffusion and diffusion-thermo effects on flow of second grade fluid between two inclined plane walls. *J. Mol. Liq.* **224**, 1074–1082 (2016)