

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université du 20 Août 1955 - Skikda

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique



Numéro d'ordre : D012121023D

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité: Electromécanique

Par :

GAHGAH Mounir

THEME

**Contribution à l'étude numérique et analytique de l'écoulement
d'un fluide non-newtonien dans un convergent-divergent**

Soutenue le :

Devant le Jury composé de :

Président : HADDAD Salim Professeur Université 20 Aout 1955 Skikda

Rapporteur : SARI Mohamed Rafik Professeur Univ. Badji Mokhtar - Annaba

Examineur : BENRETEM A.Wahab Professeur Univ. Badji Mokhtar – Annaba

Examineur : BOUZAOUIT Azzedine Professeur Université 20 Aout 1955 Skikda

Examineur : BENCHOUIA N. EDDINE Professeur Université de Souk Ahras

Examineur : ZAHZOUH Zoubir M.C.A. Université de Souk Ahras

Dédicaces

A mes deux défunts frères

A ma défunte sœur

A mes Parents

A ma sœur et sa petite famille

A mes Frères

A ma Femme et mes chères Filles

A mes Amis

Remerciements

Tout d'abord c'est grâce à Allah le tout puissant qui ma donné la foi et la force pour pouvoir accomplir ce travail, je ne peux être que reconnaissant envers sa bonté et sa générosité.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mon cher ami et encadreur Professeur SARI MOHAMED RAFIK, Professeur à l'Université Badji Mokhtar Annaba, pour avoir été tout le temps à mes coté, je le remercie pour tous ce qu'il a fait pour moi, ses précieux conseils, ses orientations tout au long de cette thèse, sa disponibilité, sa patience et ses encouragements. Je ne peux lui dire que mille Merci RAFIK, votre accompagnement et de votre confiance dans ce parcours si long et si pénible.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes amis qui sont également mes collègues Monsieur MADI BELGACEM, Professeur BOUZAOUIT AZZEDINE et Dr. KEZZAR MOHAMED, je leur exprime ma profonde gratitude pour leur aide précieuse durant la finalisation de ce travail et bien sur leur soutien moral lors des moments difficiles. Sans oublier, leur disponibilité, leurs conseils et leur collaboration dans la réalisation de ce travail doctoral.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail. Je leur remercie d'avoir consacré leur temps si précieux pour juger ce modeste travail.

J'adresse tous mes remerciements à mes chers collègues qui m'ont toujours encouragé et ont cru en moi, sans oublier tout le personnel du département de génie mécanique.

Je dois exprimer une autre fois mon énorme gratitude et mes profondes reconnaissances à mes très chers parents, ma femme, ma sœur et mes frères qui m'ont apportée leurs soutiens indéfectibles et pour leurs encouragements tout au long de la thèse.

Je remercie mes amis qui m'ont soutenu pendant les moments difficiles.

Résumé

Ce travail de thèse est axé essentiellement sur l'étude du comportement dynamique de l'écoulement d'un fluide non newtonien de type viscoélastique dans un canal convergent/divergent (écoulement connu sous le nom de Jeffery-Hamel). En effet, la distribution des vitesses et l'évolution du coefficient de frottement sous l'effet de plusieurs paramètres physiques tels que le nombre de Weissenberg (Wi), le nombre de Reynolds (Re) et l'angle d'ouverture (α) ont été étudiées et discutées.

L'équation différentielle ordinaire du troisième ordre du problème étudié, résultant de la modélisation mathématique, a été traitée numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (RK45) associée à la méthode de Tir et analytiquement par une technique de décomposition modifiée dite de Duan Rach (Duan Rach Approach).

Les résultats analytiques DRMA comparés aux données numériques utilisées comme guide, ainsi qu'aux ceux reportés dans la littérature scientifique (méthode de perturbation d'homotopie (HPM) et celle de décomposition d'Adomian (ADM classique) montrent la supériorité, l'efficacité et la robustesse de la technique de Duan Rach adoptée.

Mots clés: convergent/divergent , Fluide non newtonien, viscoélastique, Runge Kutta, Duan Rach

Abstract

This thesis work is mainly focused on the study of dynamical behavior of a non-Newtonian visco-elastic fluid flow in convergent/divergent channel (i.e. the well known Jeffery-Hamel flow). In fact, the velocity distribution and Skin friction coefficient evolution under the effect of several physical parameters like Weissenberg number (Wi), Reynolds number (Re) and channel half-angle (α) were studied and discussed.

The third order ordinary differential equation of the studied problem arising from mathematical modeling was treated numerically via the Runge-Kutta-Fehlberg (RK45) method featuring shooting technique and analytically by a modified decomposition technique known as Duan Rach Approach (DRMA).

The DRMA analytical results compared to the numerical ones, as well as those reported in scientific literature (Homotopy Perturbation Method (HPM) and classical Adomian method (ADM)) show the superiority, efficiency and robustness of the adopted Duan Rach technique.

Keywords: Convergent/divergent , non newtonian Fluid, viscoélastic, Runge Kutta, Duan Rach

ملخص

يركز عمل الأطروحة هذا بشكل أساسي على دراسة السلوك الديناميكي لتدفق مائع مرن غير نيوتوني في قناة متقاربة / متباعدة (أي تدفق جيفري هامل المعروف). في الواقع، تمت دراسة ومناقشة توزيع السرعة وتطور معامل الاحتكاك الجلاي تحت تأثير العديد من العوامل الفيزيائية مثل عدد (Weissenberg Wi) وعدد رينولدز (Re) ونصف زاوية فتحة القناة (α).

تمت معالجة المعادلة التفاضلية العادية من الدرجة الثالثة للمشكلة المدروسة الناشئة عن النمذجة الرياضية عددياً عبر طريقة Runge-Kutta-Fehlberg RK45 التي تتميز بتقنية التصوير وتحليلياً باستخدام تقنية التحلل المعدلة المعروفة باسم (Duan Rach Approach DRMA).

تُظهر النتائج التحليلية لـ DRMA مقارنة بالنتائج الرقمية ، وكذلك تلك الواردة في الأدبيات العلمية (طريقة HPM Homotopy Perturbation) وطريقة Adomian الكلاسيكية (ADM)) تفوق وكفاءة وقوة تقنية Duan Rach المعتمدة.

الكلمات الرئيسية: قناة متقاربة / متباعدة، تدفق غير نيوتوني، رنج كوتة، ديان راش

Table des matières

Notations générales	1
Liste des figures	3
Liste des tableaux	5
Introduction générale	6
Revue bibliographique	9

Chapitre I

Généralités sur les fluides non-newtoniens

I.1 Introduction	13
I.2 Equations gouvernantes	13
I.1.1 Equation de continuité	14
I.1.2 Equations de Navier-Stokes	14
I.1.3 Equation énergétique	16
I.1.4 Equation de concentration	16
I.3 Couche limite	17
I.4 Fluide non-Newtonien	18
I.4.1 Classification des fluides non newtonien	19
I.5 Conclusion	26

Chapitre II

Outils mathématiques

II.1 Introduction	28
II.2 Méthodes de traitement numériques	28
II.2.1 Méthode de Runge-Kutta	29

II.2.2	Méthode de Tir	32
II.3	Méthodes de traitement analytique	34
II.3.1	La méthode de décomposition d'Adomian (ADM)	34
II.3.2	La méthode de décomposition d'Adomian généralisée (GDM)	38
II.3.3	Méthode modifiée : approche de Duan-Ruch	41
II.4	Conclusion	43

Chapitre III

Formulation et résolution du problème non-linéaire de l'écoulement d'un fluide viscoélastique entre deux parois non parallèles

III.1	Introduction	45
III.2	Etude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel (traditionnel) ... ;..	46
III.2.1	Formulation mathématique	46
III.2.2	Traitement numérique et analytique	49
III.2.3	Implémentation de la méthode ADM	51
III.3	Etude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel (Hesseinberg)	52
III.3.1	Formulation mathématique	52
III.3.2	Traitement numérique et analytique de l'écoulement	55
III.3.3	Implémentation de la méthode DRMA	58
III.4	Conclusion	59

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1	Introduction	61
IV.2	Écoulement traditionnel (nombre de Weissenberg nul, $W_i = 0$)	
IV.2.1	Effet du nombre de Reynolds R_e	62
IV.2.2	Effet de l'angle α	64
IV.2.3	Évolution du coefficient de frottement	65
IV.3	Écoulement d'un fluide viscoélastique ($W_i \neq 0$)	
IV.3.1	Effets de divers paramètres physiques	66
IV.3.1.1	Effet du nombre de Reynolds R_e	66

IV.3.1.2	Effet de l'angle α	68
IV.3.1.3	Effet du nombre de Weissenberg W_i	69
IV.3.1.4	Effet de W_i sur R_{ec}	70
IV.3.1.5	Évolution du coefficient de frottement C_f	72
IV.4	Comparaison des résultats	
	Conclusion générale	78
	Bibliographie	80

Notations générales

• Classifications :

L	Opérateur linéaire facilement inversible.
R	Résidu de l'opérateur linéaire.
N	Opérateur non linéaire.
G	Terme source (fonction connue).
L^{-1}	Opérateur linéaire inverse.
A_n	Polynôme d'Adomian.
$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$	Composantes de la solution.
J_n	Polynôme de la méthode d'Adomian généralisée.
k_0, k_2, k_3, k_4	Coefficients de Runge-Kutta.
f	Fonction de la vitesse.
$f(\pm\alpha)$	Fonction de la vitesse aux parois.
f'	Dérivée de la fonction vitesse.
$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$	Termes de la solution.
\vec{V}	Vecteur vitesse.
\overrightarrow{grad}	Gradient.
$\overrightarrow{grad}P$	Gradient de pression.
F	Fonction vitesse adimensionnelle.
F'	Dérivée première de la fonction vitesse.
F''	Dérivée seconde de la fonction vitesse.
V_r	Vitesse radiale.
V_{max}	Vitesse maximale à l'axe de la conduite.

R_e	Nombre de Reynolds.
F, F_1, F_2, \dots, F_n	Termes de la solution analytique (fonction vitesse).
P	Pression.
T	Température.
$F'(1)$	Température.
ΔV	Variation de la vitesse.
V_r, V_θ, V_z	Vitesse suivant les coordonnées cylindriques.
$\vec{\nabla} V$	Laplacien de la vitesse.
W_i	Nombre de Weissenberg

• Symboles grecques :

η	Angle non-dimensionnel.
r, θ, z	Cordonnées cylindriques.
α	Demi-angle d'ouverture de la conduite.
ρ	Masse volumique du fluide.
ν	Viscosité cinématique du fluide.
μ	Viscosité dynamique du fluide.
∞	Condition à l'infini.
$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}$	Déformation suivant les coordonnées cylindriques.
τ	contrainte
τ_{xy}	contrainte de cisaillement
τ_0	Limite d'élasticité

• Abréviations :

EDO	Equations différentielles ordinaires.
EDP	Equations différentielles aux dérivées partielles.
RK4	Méthode de Range-Kutta d'ordre 4.
ADM	Méthode de décomposition d'Adomian standard.
GDM	Méthode de décomposition d'Adomian généralisée.
MDM	Méthode de décomposition d'Adomian modifiée.
HPM	Méthode d'homotopie perturbée.

Liste des figures

- Figure I.1 : Représentation schématique du comportement d'un fluide pseudo-plastique par cisaillement.
- Figure 1.2 : Classification des fluides
- Figure I.3 : Loi constitutive $\tau = f(\gamma)$ pour différents types de fluides non newtoniens indépendants du temps, courbe(a) : comportement pseudoplastique, courbe (b) : comportement dilatant, (c) : fluide de Bingham , (d) : fluide d'Hershel-Bulckley, (e) : fluide newtonien (Kreith, 1999).
- Figure I.4 : Loi de comportement $\tau = f(\gamma)$ pour les fluides non newtoniens, purement visqueux, dépendants du temps, courbe (a) : fluide thixotropique, courbe (b) : fluide rhéopectique (Kreith, 1999).
- Figure III.1 : Configuration géométrique.
- Figure IV.1 : Effet du nombre de Reynolds Re sur la distribution de vitesse dans un canal convergent lorsque $W_i = 0$ et $\alpha = -3^\circ$
- Figure IV.2: Effet du nombre de Reynolds Re sur la distribution de vitesse dans un canal divergent lorsque $W_i = 0$ et $\alpha = +3^\circ$
- Figure IV.3 : Effet du demi angle α sur la distribution de vitesse dans un canal convergent lorsque $W_i = 0$ et $Re = 102$
- Figure IV.4 : Effet du demi angle α sur la distribution de vitesse dans un canal divergent lorsque $W_i = 0$ et $Re = 102$
- Figure IV.5 : Évolution du coefficient de frottement dans un canal divergent en fonction du nombre de Re et α pour un écoulement traditionnel lorsque $W_i = 0$.
- Figure IV.6 : Effet du nombre de Reynolds Re sur la distribution de vitesse dans un canal convergent lorsque $W_i = 0,6$ et $\alpha = -3^\circ$

Figure IV.7 : Effet du nombre de Reynolds R_e sur la distribution de vitesse dans un canal divergent lorsque $W_i = 0,6$ et $\alpha = +3^\circ$

Figure IV.8 : Effet du demi-angle α sur le profil de vitesse dans le canal convergent lorsque $W_i = 0,2$ et $R_e = 140$

Figure IV.9 : Effet du demi-angle α sur le profil de vitesse dans le canal divergent lorsque $W_i = 0,2$ et $R_e = 140$

Figure IV.10 : Effet du nombre de Weissenberg W_i sur la distribution des vitesses dans un canal convergent lorsque $R_e = 180$ et $\alpha = -3^\circ$

Figure IV.11 : Effet du nombre de Weissenberg W_i sur la distribution des vitesses dans un canal divergent lorsque $R_e = 180$ et $\alpha = +3^\circ$

Figure IV.12 : Évolution du nombre de Reynolds critique R_{ec} en fonction du nombre de Weissenberg W_i le dans un canal divergent ($\alpha = 10^\circ$)

Figure IV.13 : Effet de α et W_i sur l'évolution de R_{ec} dans un canal divergent

Figure IV.14 : Évolution du coefficient C_f en fonction du demi angle α sous l'effet du nombre de Reynolds R_e lorsque $W_i = 0,2$

Figure IV.15 : Évolution du coefficient C_f en fonction du nombre de Weissenberg W_i sous l'effet du nombre de Reynolds R_e lorsque $\alpha = +5^\circ$

Figure IV.16 : Évolution du coefficient de frottement C_f en fonction du nombre de Reynolds R_e sous l'effet du nombre de Weissenberg W_i lorsque $\alpha = +3^\circ$

Figure IV.17 : Erreur de la méthode DRMA en comparaison avec la solution numérique

Figure IV.18 : Comparaison des solutions analytiques DRMA et ADM pour la distribution des vitesses dans un canal convergent/divergent

Liste des tableaux

- Tableau IV.1 : Comparaison entre les résultats analytiques et numériques (cas d'un écoulement divergent).
- Tableau IV.2 : Comparaison entre les résultats analytiques et numériques (cas d'un écoulement convergent)
- Tableau IV.3 : Comparaison entre DRMA, solution numérique et les données de la littérature disponible (canal convergent)
- Tableau IV.4 : Comparaison entre DRMA, solution numérique et les données de la littérature disponible (canal divergent)

Introduction générale

La modélisation mathématique est l'art de décrire les problèmes du monde réel à travers des concepts mathématiques. Tout a son propre système. Un modèle conceptuel représente les idées essentielles sur le fonctionnement du système. Finalement, les modèles seraient analysés pour explorer la vérité derrière ces systèmes et l'appliquer pour prédire leur comportement dans le futur.

Modèles mathématiques sous forme d'équations algébriques, équations différentielles et/ou aux dérivées partielles non linéaires et les équations intégrales surviennent généralement dans les domaines des sciences physiques, de l'ingénierie, des sciences sociales, A cet égard, les phénomènes non linéaires jouent un rôle crucial dans la conception des modèles mathématiques plus réalistes pour décrire la faisabilité de la nature.

Pour les modèles très compliqués avec de forte non linéarité ou singularités, les méthodes numériques sont potentiellement utiles. Une technique numérique classique capable de fournir une solution fiable pour les équations différentielles ordinaires (EDO) est la méthode de Runge-Kutta. Pour les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), les techniques les plus utilisées sont basées sur le concept de discrétisation telles que la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis. Néanmoins, ces méthodes nécessitent un grand temps de calcul et un effort de programmation considérable.

Ces dernières années, les chercheurs ont mis l'accent sur les combinaisons entre les méthodes analytiques et les méthodes numériques. On s'attend donc aux réponses que fournissent ces combinaisons en face des difficultés posées par les différents problèmes physiques et surtout ceux liés à la mécanique des fluides, en particulier les équations de Navier-Stokes.

L'écoulement entre deux plaques non parallèles est rencontré dans plusieurs situations pratiques. En effet, il peut être envisagé comme l'un des problèmes les plus importants de la mécanique des fluides en raison de sa large gamme d'applications.

Les équations différentielles régissant l'écoulement de Jeffrey-Hamel sont par nature non linéaires et abstraites. Dans la plupart des cas, nous n'avons pas de solutions exactes pour ce genre d'équations. Différentes approches d'approximation modernes ont attiré l'attention de la communauté scientifique et ont fait par conséquent l'objet de plusieurs études dont le but est d'enlever l'ambiguïté du problème.

Les nouvelles approches issues des combinaisons sont appelées méthodes semi-analytiques. Techniques modernes telles que la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode d'itération variationnelle (VIM), la méthode d'analyse par homotopie (HAM) et la méthode de transformation différentielle (DTM) ont été développés pour trouver des solutions semi-analytiques efficaces et rapidement convergentes.

Parmi ces méthodes, la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) est exceptionnelle en raison de ces polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian pour répondre au problème des termes non linéaires. Le principal avantage de la technique ADM est que la solution semi-analytique est fournie sans linéarisation, discrétisation ou encore une éventuelle perturbation. De plus, cette méthode présente des avantages tels que la convergence rapide.

Au cours de ces dernières années, les chercheurs ont concentré leurs efforts sur l'étude de la convergence de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) afin d'améliorer l'accélération de la convergence. Diverses améliorations ont été apportées sur cette méthode. La méthode Duan-Ruch est l'une de ces améliorations dont elle fait l'objet de notre application.

Les objectifs visés dans cette thèse sont :

- Formulation mathématique du champ dynamique qui gouverne l'écoulement étudié.

- Traitement numérique et analytique des équations différentielles non linéaires issues de la formulation mathématique.
- Comparaison entre résultats numériques et analytiques.

D'une manière générale, le travail de cette thèse est organisé comme suit :

Le premier chapitre est dédié aux aspects théoriques concernant les équations de base gouvernant l'écoulement d'un fluide, la couche limite et les fluides non newtoniens.

Le deuxième chapitre considère la description des outils mathématiques nécessaires pour la résolution des équations différentielles non linéaires caractérisant le champ dynamique de l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux parois formant un angle entre elles. En effet, la technique semi-analytique de Duan-Ruch et la technique numérique de Runge-Kutta couplée à la méthode de Tir sont utilisées.

Dans le troisième chapitre, la formulation mathématique des équations caractéristiques de la distribution des vitesses de l'écoulement de Jeffrey-Hamel est abordée. L'implémentation des techniques semi-analytique et numérique dans la résolution du problème étudié a été également abordée par ce chapitre.

Les résultats du traitement analytique et numérique ont fait l'objet du troisième chapitre. En effet, l'influence des paramètres caractéristiques tels que : nombre de Reynolds, R_e , le demi-angle du canal, α , et le nombre de Weissenberg, W_i , sur la distribution des vitesses et l'évolution du coefficient de frottement ont été explorés et largement discutés.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives.

Revue bibliographique

L'écoulement de fluide bidimensionnel entre des plaques non parallèles est bien prouvé qu'il représente l'une des quelques solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Il faut noter, tout d'abord, que la formulation mathématique de ce problème (écoulement) a été fournie pour la première fois par Jeffrey [1] et Hamel [2]. Ce défi mathématique a été suivi par un grand nombre d'études, menées pour résoudre les formulations mathématiques non linéaires de l'écoulement de Jeffrey-Hamel.

En fait, l'introduction des termes des fonctions elliptiques Jacobiennes par Rosenhead [3] ont offert une solution à l'écoulement de Jeffrey-Hamel. Cette démarche a été suivie par d'autres études dont on cite celles liées aux développements numériques. Millsaps et Pohlhausen [4] ont étudié numériquement le problème de transfert de chaleur dans l'écoulement de Jeffrey-Hamel en utilisant la méthode des différences finies et ont exploré la solution exacte des distributions thermiques.

Le développement continu des théories mathématiques a conduit à diverses applications et considère d'autres phénomènes physiques tels que les écoulements laminaires dans des canaux symétriques avec des parois légèrement incurvées. Ce dernier problème a été examiné par Fraenkel [5].

Les effets sur l'écoulement de Jeffrey-Hamel en présence d'un champ magnétique et NPs ont été examinés par Hatami et al. [6] en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Les résultats obtenus par cette étude ont montré leurs pertinences en comparaison avec la méthode numérique de Runge-Kutta (RKM). Hatami et al. [7], ont

utilisé diverses approches analytiques pour résoudre les modèles mathématiques gouvernant les écoulements magnétohydrodynamiques (MHD) de Jeffrey-Hamel pour des nanofluides (J-HN). A travers ces derniers résultats, la méthode des moindres carrées (LSM) a montré sa fiabilité vis-à-vis les problèmes résolus.

D'autre part, la question de la stabilité des écoulements de Jeffrey-Hamel entre deux plaques non parallèles a attiré l'attention des chercheurs et a été analysé par plusieurs auteurs [8-12]. De nombreux contributeurs scientifiques, y compris les références [13-31], ont récemment examiné les problèmes des écoulements des fluides non newtoniens. L'écoulement de ces fluides via des canaux convergents/divergents est d'une importance extrême et suscite l'intérêt de la communauté scientifique [32-37].

Récemment, pour résoudre analytiquement les problèmes aux limites non linéaires, diverses méthodes ont été développées, telles que la méthode d'Homotopie (HAM) [38, 39], la méthode d'itération vibrationnelle (VIM) [40, 41], et la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) [42]. Cette dernière (ADM) a été pour la première fois décrites par Georges Adomian en 1980, c'est l'une des méthodes les plus puissantes. La solution via cette méthode converge rapidement et offre des approximations analytiques plus simples.

Plusieurs modifications ont été apportées sur la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) dont le but est de faciliter les calculs et d'accélérer la convergence de la solution. L'approche Duan-Ruch (DRA) [43] a été considérée comme l'une des méthodes de décomposition améliorée. En fait, la méthode DRA est principalement utilisée pour résoudre une grande classe des problèmes aux limites non linéaires [44, 45].

Eid et al. [46] ont considéré un écoulement magnétique, avec effet de la radiation et de la génération de la chaleur, a travers un cylindre circulaire de MWCNT dans le sang comme fluide de base en utilisant la méthode des éléments finis (FEM).

Lahmar et al. [47] ont étudié les caractéristiques thermiques et l'écoulement entre deux plaques parallèles d'un nano-liquide dépendant du temps (magnétite-eau) en utilisant la méthode des transformations différentielles (DTM).

Les systèmes fractionnaires d'ailettes convectives longitudinales en conductivité thermique utilisant l'approche des sous-espaces invariants ont été étudiés par Aliyu et Al-Qurashi [48].

Selon la littérature, la plupart des chercheurs sont intéressés à la résolution numérique et analytique des problèmes dynamiques de l'écoulement de Jeffrey-Hamel pour les fluides viscoélastiques entre des surfaces non parallèles. Par ailleurs, l'influence de divers paramètres caractérisant un tel écoulement sur le champ des vitesses a fait l'objet de contributions limitées. L'objectif principal de cette thèse est de porter notre contribution à l'étude numérique et analytique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel (écoulement viscoélastique entre des surfaces non parallèles). En effet, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'étude dynamique du problème dynamique de l'écoulement objet d'étude.

Chapitre I

Généralités sur les fluides non newtoniens

Sommaire

I.1 Introduction	13
I.2 Equations gouvernantes	13
I.2.1 Equation de continuité	14
I.2.2 Equations de Navier-Stokes	14
I.2.3 Equation énergétique	16
I.2.4 Equation de concentration	16
I.3 Couche limite	17
I.4 Fluide non-Newtonien	18
I.4.1 Classification des fluides non newtonien	19
I.5 Conclusion	26

I.1 Introduction

Au quotidien, les fluides envahissent notre environnement, ils sont partout et sous divers classification et selon leur comportement et leur complexité, nous citons les fluides non newtoniens.

L'étude des fluides non-newtoniens est l'une des branches traitée par la discipline appelée la mécanique des milieux continus, ce domaine de la mécanique qui s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Plus précisément l'étude des fluides non-newtoniens fait partie de la rhéologie qui est une branche de la physique qui étudie l'écoulement ou la déformation des corps sous l'effet des contraintes qui leur sont appliquées, compte tenu de la vitesse d'application de ces contraintes ou plus généralement de leur variation au cours du temps. La rhéologie peut être aussi définie comme étant l'étude des changements de forme et de l'écoulement de la matière, comprenant l'élasticité, la viscosité et la plasticité.

Le but de ce chapitre est d'exposer quelques concepts de base et définitions des problèmes de recherche pertinents qui sont incorporés dans cette thèse. Les équations de base et constitutives régissant l'écoulement des fluides newtoniens / non newtoniens dans une conduite telle que le convergent divergent. De plus, une étude théorique détaillée sur les fluides non newtoniens et leurs différents types.

1.2 Équations gouvernantes

Dans les situations d'écoulement réel, il est apprécié de considérer les lois physiques de la conservation. Ceux-ci se réfèrent à la loi de conservation de la masse, des moments et de l'énergie. L'application de ces lois aux problèmes d'écoulement d'un fluide donne respectivement les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie. De plus, si

la conservation du contaminant est supposée, une équation supplémentaire arrive, à savoir; équation de concentration.

1.2.1 Équation de continuité

L'équation de continuité pour un écoulement de fluide est mathématiquement représentée par une équation différentielle qui exprime le principe de conservation de la masse dans un volume considéré. Cette loi décrit que le taux de changement de masse de fluide dans le système est égal à la différence de masse arrivant dans le système et à la sortie de masse du système. Sous forme vectorielle, il peut être exprimé comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (\text{I.1})$$

où ρ est la densité du fluide et V désigne le champ de vitesse et t est le temps. En cas de débit régulier, il se réduit à la forme suivante :

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (\text{I.2})$$

Pour un écoulement incompressible, à densité de fluide constante, l'équation de continuité est grandement simplifiée :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (\text{I.3})$$

1.2.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes (N-S) sont l'application de la deuxième loi du mouvement de Newton pour l'écoulement des fluides. Physiquement, il indique que le taux de variation temporelle de la quantité de mouvement dans une direction donnée est égale à la somme des forces agissant dans cette direction. Les forces concernées dans ce modèle sont les forces corporelles et les forces de surface. Les forces corporelles comprennent la force de

gravité ou le poids du fluide tandis que les forces de surface impliquées sont la force de pression et les forces visqueuses.

Sous forme vectorielle, les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire :

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 + f \quad (\text{I.4})$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, f est la force corporelle et p est la pression. Introduisant dans l'équation (I.4) la dérivée particulaire telle que :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{I.5})$$

cette dernière exprime, physiquement, le taux de variation totale de la quantité de mouvement par unité de volume et désignons par ∇^2 telle que :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I.6})$$

L'opérateur laplacien en *trois* dimensions. Les termes sur le côté gauche de l'équation (I.4) sont connus sous le nom de termes inertiels qui représentent le taux de variation de la quantité de mouvement tandis que les trois termes du côté droit correspondent respectivement à la pression, aux forces visqueuses et aux forces corporelles.

Il est à noter que les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité fournissent une description mathématique complète de l'écoulement du fluide visqueux incompressible.

I.2.3 Équation énergétique

La conservation de l'énergie résulte de l'application de la première loi de la thermodynamique sur un volume considéré. Ceci décrit que les changements d'énergie, de chaleur transférée et le travail effectué par un système sont en équilibre.

En considérant une conductivité thermique constante, l'équation d'énergie fondamentale sous forme vectorielle, en l'absence de dissipation visqueuse, est donnée par :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = K \nabla^2 T \quad (\text{I.7})$$

où k est la conductivité thermique du fluide, C_p est la chaleur spécifique, T est la température du fluide.

I.2.4 Équation de concentration

De nombreux processus d'ingénierie impliquent le transport d'un contaminant par le flux de fluide. Le contaminant fait référence à tout, d'un produit chimique polluant aux particules. Pour dériver l'équation directrice, il faut reconnaître que la masse de contaminant est conservée ou que le contaminant n'est pas créé dans le champ d'écoulement. La matière contaminant peut être transportée par deux mécanismes physiques distincts, à savoir la convection et la diffusion moléculaire [61].

Supposons qu'aucun contaminant ne soit produit dans le volume de contrôle et que le contaminant soit suffisamment dilué pour laisser l'écoulement du fluide inchangé. Soit C la concentration massique de fluide (c'est-à-dire la masse par unité de volume), alors l'équation de concentration sous forme vectorielle est donnée par :

$$\frac{dC}{dt} = D_M \nabla^2 C \quad (\text{I.8})$$

où C est la concentration massique et D_M fait référence à la diffusivité massique.

I.3 Couche limite

La couche limite est la zone d'interface entre un corps et le fluide environnant lors d'un mouvement relatif entre les deux. Elle est la conséquence de la viscosité du fluide et est un élément important en mécanique des fluides

Lorsqu'une surface se déplace ou s'étire avec une certaine vitesse linéaire / non linéaire, le fluide adjacent à la surface acquiert la même vitesse que la vitesse de la surface. Ce phénomène physique se produit en raison de l'absence de glissement et de la viscosité du fluide. Habituellement, la vitesse de la surface est différente de la vitesse ambiante, c'est-à-dire la vitesse du fluide à grande distance de la surface, et en raison de cette différence, une couche limite se développe.

La couche limite est une région dans laquelle se produit un changement rapide du profil de vitesse, c'est-à-dire de zéro (par rapport à la surface) à la valeur de la vitesse ambiante. Même si les couches limites s'avèrent extrêmement minces, leur importance dans l'étude de l'écoulement des fluides ne peut être ignorée car elles n'existent que dans la région de l'écoulement où les effets visqueux sont importants.

La viscosité du fluide joue un rôle important dans la détermination de l'épaisseur de la couche limite. Avec l'augmentation de la viscosité, l'épaisseur de la couche limite diminue cependant, même pour de petites viscosités, la contrainte de cisaillement de paroi τ est importante en raison du grand gradient de vitesse. De même que la couche limite en raison de la viscosité, une existence de région est également remarquée autour d'une surface froide ou chauffée dans la considération des problèmes de transfert de chaleur qui est connu comme couche limite thermique. Le comportement de l'écoulement du fluide change radicalement dans cette région en raison de la différence de température entre le fluide et la surface [61].

La couche limite thermique dépend fortement de la conductivité thermique du fluide. C'est-à-dire, une conductivité thermique plus élevée du fluide, plus épaisse serait la couche limite thermique.

I.4 Fluide non newtonien

Les fluides qui n'obéissent pas à la loi de viscosité de Newton sont appelés fluides non newtoniens. Ces fluides présentent une relation non linéaire entre les contraintes et le taux de cisaillement. De nombreux matériaux tels que les pâtes, les boues, les gels, le revêtement d'argile, la boue de forage, les métaux polymères, etc. sont des exemples de fluides non newtoniens. Il est maintenant généralement admis que les fluides non newtoniens ont plus d'applications industrielles que les fluides newtoniens.

Pour mieux définir un fluide non newtonien, il faut d'abord souligner qu'un fluide newtonien est juste un cas particulier de fluide indépendant du temps où la fonction est linéaire à une pression et une température données. Tous les fluides dont la fonction n'est pas linéaire par l'origine sont des fluides non newtoniens indépendants du temps. Ces matériaux sont parfois appelés «fluides visqueux non newtoniens» ou en variante «fluides purement visqueux». Ces fluides peuvent être subdivisés en trois types en fonction de la forme de la contrainte de cisaillement instantanée τ et et le taux de cisaillement γ .

Pour un écoulement de fluide newtonien unidimensionnel, la contrainte de cisaillement en un point est proportionnelle au taux de déformation (appelé dans la littérature le taux de cisaillement) qui est le gradient de vitesse en ce point. La constante de proportionnalité est la viscosité dynamique, c'est-à-dire :

$$\tau_{y,x} = \mu \frac{du}{dy} \quad (I.9)$$

Où x fait référence à la direction de la contrainte de cisaillement et à la direction du gradient de vitesse, et est le taux de cisaillement.

La caractéristique importante d'un fluide newtonien est que la viscosité dynamique est indépendante du taux de cisaillement.

L'équation (1.9) est appelée une équation constitutive, et si $\tau_{y,x}$ est tracée, le résultat est une relation linéaire dont la pente est la viscosité dynamique. Un tel graphique est appelé courbe d'écoulement et constitue un moyen pratique d'illustrer les propriétés visqueuses de divers types de fluides.

Les fluides qui n'obéissent pas à l'équation (1.9) sont appelés non newtoniens. Leurs classifications sont illustrées sur la Figure 1.2 où ils sont séparés en diverses catégories de fluides.

I.4.1 Classification des fluides non newtoniens

Les fluides non-newtoniens peuvent être classés en deux grandes familles : les fluides purement visqueux, et les fluides viscoélastiques.

I.4.1.1 les fluides purement visqueux

Pour les fluides non newtoniens purement visqueux (appelés parfois liquides anormaux) le coefficient de viscosité est une fonction de la vitesse de cisaillement indépendante du temps. Mais certains liquides peuvent présenter une viscosité telle que leur coefficient de viscosité apparente soit non seulement fonction de y mais aussi du temps t , c'est-à-dire de la durée d'application des contraintes, sans que pour cela ces liquides soient viscoélastiques ou viscoélasto-plastiques [54].

Néanmoins on ne peut plus dire que ces liquides soient purement visqueux puisqu'il n'y a pas pour eux, à température constante, une relation biunivoque entre les contraintes et les vitesses de déformation. Pour de tels liquides, le temps t figure explicitement dans les équations de comportement. Ils entrent dans la catégorie des corps vieillissants, même s'ils n'évoluent pas au repos.

A leurs tours les fluides purement visqueux se divisent en deux catégories : les fluides indépendants du temps et les fluides dépendants du temps, les lois constitutives de ces deux catégories s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\tau = f(\tau_0, \gamma) \quad (\text{I.10a})$$

$$\tau = f(\gamma, t) \quad (\text{I.10b})$$

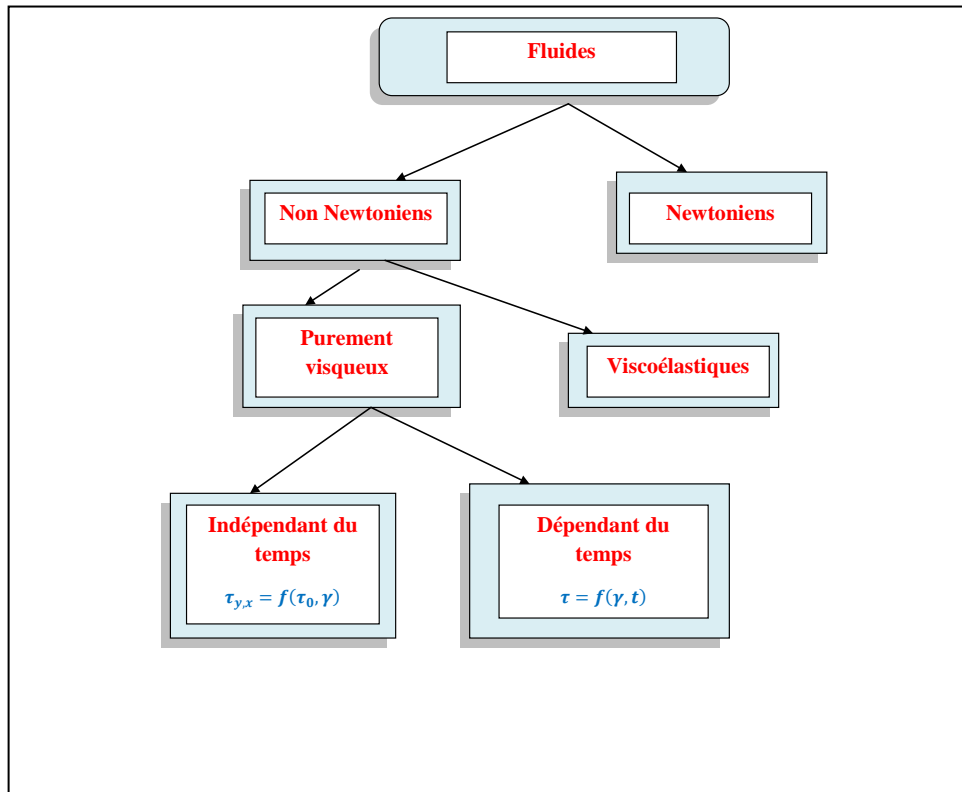


Figure 1.1 : Classification des fluides [54]

I.4.1.1.1 Les fluides indépendants du temps

Cette catégorie de fluides non newtoniens se caractérise par le fait que, à condition que la température du fluide reste constante, la vitesse de cisaillement ne dépend que de la contrainte de cisaillement et en est une seule fonction valorisée [56].

a) Les fluides sans contrainte critique

Il existe plusieurs modèles rhéologiques qui ne comportent pas de contrainte critique.

b) Les fluides d'Oswald-Dewaele

La loi de comportement des fluides d'Oswald – Dewaele peut être décrite par la relation suivante [54] :

$$\tau = K\gamma^n \quad (\text{I.11})$$

avec :

- K est l'indice de consistance du fluide (de dimension $Pa \cdot s^n$)
- n est l'indice de structure (Sans dimension).

La viscosité apparente s'écrit sous la forme :

$$\eta = K\gamma^{n-1} \quad (\text{I.12})$$

- Pour $n = 1$, le fluide est dit newtonien, et l'indice de consistance K devient la viscosité newtonienne (viscosité dynamique).
- Si $0 < n < 1$, le fluide est dit pseudo-plastique [55].

Le type le plus courant de comportement de fluide non newtonien indépendant du temps observé est la pseudo-plasticité, caractérisé par une viscosité apparente qui diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement. Tant à des taux de cisaillement très faibles qu'à des taux de cisaillement très élevés, la plupart des solutions et le polymère fondu fluidifiant par cisaillement présentent un comportement newtonien, c'est-à-dire que les courbes de contrainte de cisaillement - taux de cisaillement deviennent des lignes droites, comme le montre schématiquement la figure I.2, et sur une échelle linéaire passeront par l'origine. Les valeurs résultantes de la viscosité apparente respectivement à des taux de cisaillement très faibles et

élevés sont connues sous le nom de viscosité à cisaillement nul ($\mu = 0$), et de viscosité à cisaillement infini, (μ). Ainsi, la viscosité apparente d'un fluide fluidifiant par cisaillement diminue de 0 à μ avec l'augmentation du taux de cisaillement.

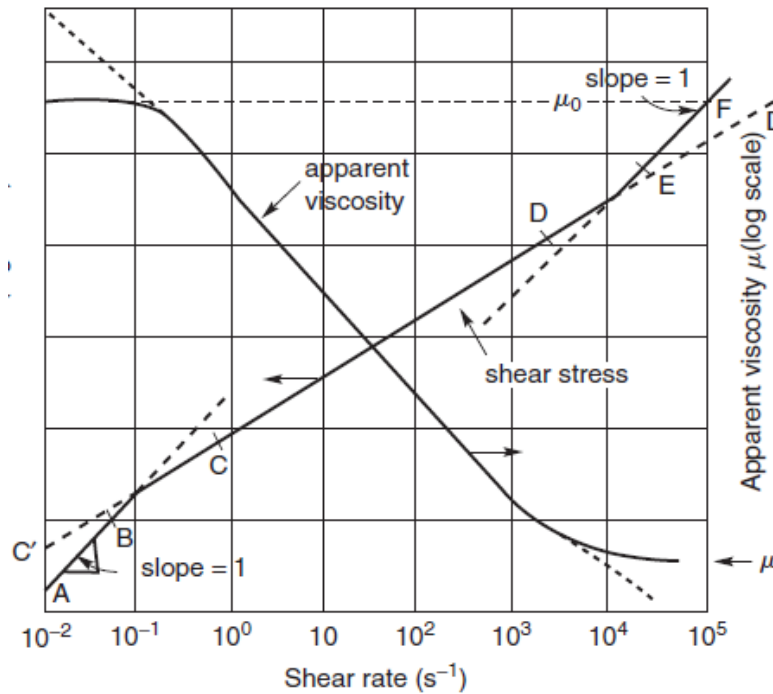


Figure I.2 : Représentation schématique du comportement d'un fluide pseudo-plastique par cisaillement. [55]

- Si $n > 1$, le fluide est dit dilatant [55].

Le modèle d'Oswald est un modèle empirique applicable dans une plage de taux de cisaillement qui varie de 10 jusqu'à 10⁴, l'inconvénient de ce modèle c'est qu'il est mal adapté à haut et à bas taux de cisaillement.

I.4.1.1.2 Les fluides dépendant du temps

Pour cette famille de fluides La viscosité du fluide dépend de la température, du taux de cisaillement et du temps. En fonction de l'évolution de la viscosité avec le temps, le comportement d'écoulement se caractérise par :

- Thixotrope (fluidification avec le temps, c'est-à-dire que la viscosité diminue avec le temps).
- Rhéopectique ou thixotropique négative. (épaississement temporel, c'est-à-dire que la viscosité augmente avec le temps).

I.4.1.2 Les fluides viscoélastiques

Ce type de comportement du fluide est caractérisé par une limite d'élasticité, qui doit être dépassée avant qu'un fluide ne s'écoule. Un tel matériau se déformera élastiquement lorsque la contrainte appliquée extérieurement est inférieure à la limite d'élasticité.

Pour des contraintes supérieures à la limite d'élasticité, la structure interne s'effondre complètement et le fluide se comporte comme un matériau visqueux. La courbe d'écoulement peut être linéaire ou non linéaire, mais ne passera pas par l'origine.

Notez qu'un fluide viscoplastique présente également une viscosité apparente qui diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement. À des taux de cisaillement très faibles, la viscosité apparente est infiniment grande avant que le fluide ne commence à s'écouler. Les fluides viscoplastiques peuvent être décrits mathématiquement par les trois modèles couramment utilisés [57].

Pour les liquides ou suspensions non viscoélastiques mais de viscosité non newtonienne, le comportement rencontré le plus fréquemment est la rhéofluidification. Il correspond au cas où, après un repos prolongé du liquide, l'application d'une vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ maintenue constante pendant le temps t conduit au bout de ce temps t à une viscosité apparente d'autant plus petite que $\dot{\gamma}$ est plus grand. Dans le cas inverse, qui est beaucoup plus rare,

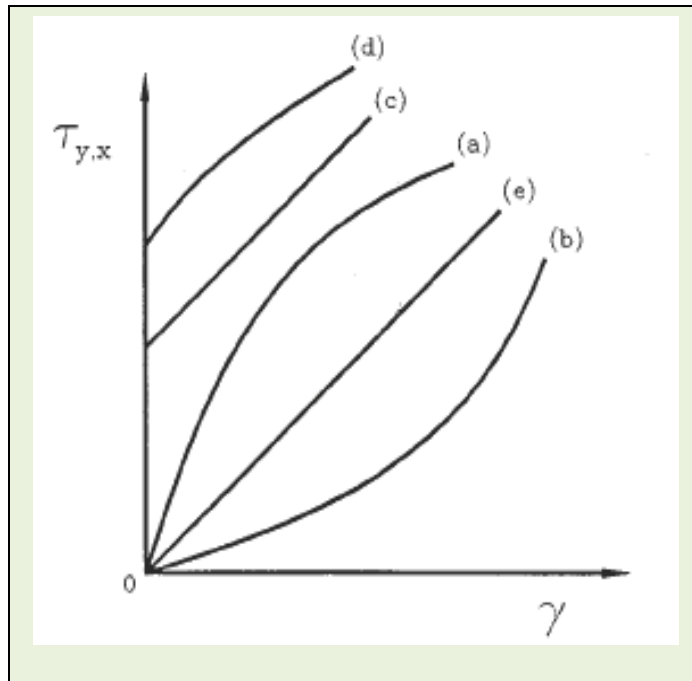


Figure I.3 :courbe des différents types de fluides non newtoniens indépendants du temps, courbe(a) : comportement pseudoplastique, courbe (b) : comportement dilatant, (c) : fluide de Bingham , (d) : fluide d'Hershel-Bulckley, (e) : fluide newtonien [54]

I.4.1.3 Fluides thixotropiques

On dit qu'un matériau présente une thixotropie si, lorsqu'il est cisailé à vitesse constante, sa viscosité apparente (ou la contrainte de cisaillement correspondante) diminue avec le temps de cisaillement, comme on peut le voir sur la figure 1.4 pour une suspension de boue rouge [58]. Si la courbe d'écoulement est mesurée dans une seule expérience dans laquelle le taux de cisaillement est régulièrement augmenté à un taux constant de zéro à une certaine valeur maximale, puis diminué au même taux jusqu'à zéro à nouveau, une boucle d'hystérésis de la forme illustrée à la figure 1.4 est obtenue ; la hauteur, la forme et la zone fermée de la boucle d'hystérésis dépendent de la durée du cisaillement, du taux d'augmentation /diminution du taux de cisaillement et de l'historique cinématique de l'échantillon. Aucune

boucle d'hystérésis n'est observée pour les fluides indépendants du temps, c'est-à-dire que la zone fermée de la boucle est nulle.

Le terme «faux corps» a été introduit pour décrire le comportement thixotrope des matériaux viscoplastiques. Bien que la thixotropie soit associée à l'accumulation de structure au repos et à la rupture de la structure sous cisaillement, les matériaux viscoplastiques ne perdent pas complètement leurs propriétés de type solide et peuvent encore présenter une limite d'élasticité, bien que celle-ci soit généralement inférieure à la valeur d'origine de l'échantillon vierge qui n'est récupéré (le cas échéant) qu'après une longue période de récupération. Les matériaux viscoplastiques ne perdent pas complètement leurs propriétés de type solide et peuvent encore présenter une limite d'élasticité, bien que celle-ci soit généralement inférieure à la valeur d'origine de l'échantillon vierge qui n'est récupérée (voire pas du tout) seulement après une longue période de récupération.

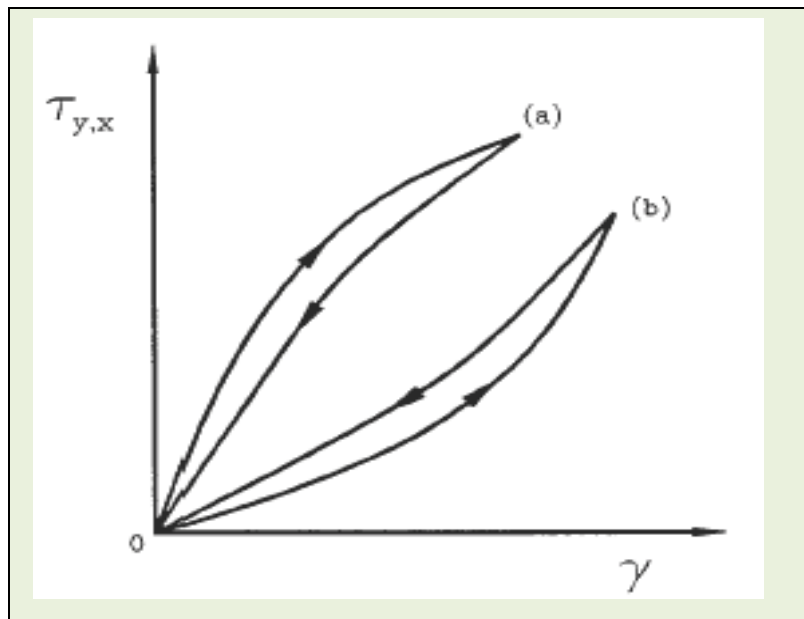


Figure I.4 : Loi de comportement $\tau = f(\gamma)$ pour les fluides non newtoniens, purement visqueux, dépendants du temps, courbe (a) : fluide thixotrope, courbe (b) : fluide rhéopectique [54]

I.4.1.4 Fluides rhéopectiques ou thixotropiques négatives

On dit que les fluides relativement peu nombreux pour lesquels la viscosité apparente (ou la contrainte de cisaillement correspondante) augmente avec le temps de cisaillement présentent une rhéopexie ou une thixotropie négative. Là encore, des effets d'hystérésis sont observés dans la courbe d'écoulement, mais dans ce cas, il est inversé, par rapport à un matériau thixotrope, comme on peut le voir sur la figure 1.4.

Dans un fluide rhéopectique, la structure s'accumule par cisaillement et se décompose lorsque le matériau est au repos. Par exemple, [59], en utilisant une pâte de gypse aqueuse à 42%, ont constaté qu'après agitation, ce matériau se résorbait en 40 *min* s'il était au repos, mais en seulement 20 *secondes* si le récipient était doucement roulé dans la paume des mains. Cela indique qu'un mouvement de cisaillement doux (roulement) facilite la formation de la structure, mais un mouvement plus intense la détruit. Ainsi, il existe une quantité critique de cisaillement au-delà de laquelle la reformation de la structure n'est pas induite mais une rupture se produit. Il n'est pas rare que la même dispersion présente à la fois une thixotropie et une rhéopexie en fonction du taux de cisaillement.

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un aperçu sur les aspects théoriques concernant les équations de base gouvernant l'écoulement d'un fluide telles que l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et de la concentration a été donné. Les notions de couche limite des fluides non newtoniens ont été également décrites.

Chapitre II

Outils mathématiques

Sommaire

II.1	Introduction	28
II.2	Méthodes de traitement numériques	28
II.2.1	Méthode de Runge-Kutta	29
II.2.2	Méthode de Tir	32
II.3	Méthodes de traitement analytique	34
II.3.1	La méthode de décomposition d’Adomian (ADM)	34
II.3.2	La méthode de décomposition d’Adomian généralisée (GDM)	38
II.3.3	Méthode modifiée : Approche de Duan-Rach	41
II.4	Conclusion	43

II.1 Introduction

Une infinité de phénomènes physiques et leurs comportements se traduisent mathématiquement sous la forme d'équations différentielles, équations différentielles ordinaires (ODE) ou équations différentielles aux dérivées partielles (PDE). Soit linéaire ou non linéaires avec des conditions initiales et aux limites. La résolution de telles équations par des méthodes classiques, comme les méthodes des éléments finis, des différences finies, des volumes finis et la méthode spectrale, donnent des approximations de la solution en des points discrets. Ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps.

Ces dernières années, les chercheurs ont mis l'accent sur les combinaisons entre les méthodes analytiques et les méthodes numériques. On s'attend à ce que ces combinaisons répondent aux difficultés posées par les différents problèmes physiques et surtout ceux liés à la mécanique des fluides, en particulier les équations de Navier-Stokes. Les nouvelles approches issues de ces combinaisons sont appelées méthodes semi-analytiques.

Dans ce chapitre, nous citerons d'une manière très explicite les principales méthodes analytique, semi-analytiques et numérique que l'on utilise pour résoudre les équations différentielles non linéaires.

II.3 Méthodes de traitement Numérique

Les méthodes numériques sont utilisées pour approximer les solutions d'équations lorsque les solutions exactes ne peuvent pas être déterminées par des méthodes algébriques. Ils construisent des approximations successives qui convergent vers la solution exacte d'une équation ou d'un système d'équations.

Bien que les méthodes de résolution d'équations différentielles soient nombreuses, nous proposons dans cette section celles les plus utilisées dans la résolution des équations

différentielles ordinaires (EDO). Il s'agit : de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et de la méthode de Tir.

II.3.1 La méthode de Runge Kutta

La méthode Runge Kutta tire les avantages des méthodes de Taylor tout en gardant une simplicité d'exécution de la méthode d'Euler. En pratique, Runge Kutta remplace l'évaluation analytique des ordres $y^{(m)}$, $m > 1$ par des dérivées numériques obtenues en évaluant la fonction $f(t, y(t))$ à différents endroits afin d'obtenir presque les mêmes résultats que ceux obtenu avec la méthode de Taylor.

Pour illustrer ces concepts, considérons l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1 suivante.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Afin de calculer une approximation de la solution sur l'intervalle $[x_0 \quad x_n]$, on suit les démarches suivantes.

Subdivisons l'intervalle $[x_0 \quad x_n]$ en intervalles élémentaires d'extrémités $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, puis on dénote $h_n = x_{n+1} - x_n$ et on calcule l'approximation $y_n \approx y(x_n)$.

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(h_n, x_n, y_n) \quad (\text{II.2})$$

Comme on introduit h_n, x_n, y_n dans le calcul de y_{n+1} , la relation (II.2) est dite méthode à un pas

II.3.1.1 Méthode d'Euler (1768)

Rappelons la méthode d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (\text{II.3})$$

Comparée à la méthode de Runge Kutta qui est plus symétrique, la méthode d'Euler n'est pas symétrique par rapport à l'intervalle puisqu'il ne fait pas intervenir l'information sur la dérivée en fin d'intervalle.

Si nous considérons uniquement le premier pas $n = 0$ et nous notons $h_0 = h$. La méthode la plus simple est obtenue en remplaçant la solution $y(x)$ par sa tangente au point (x_0, y_0) , d'où le résultat :

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) \quad (\text{II.4})$$

Intégrons l'équation $y' = f(x, y)$ de x_0 à $x_0 + h$:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x)) dx \quad (\text{II.5})$$

Si l'on remplace l'intégrale $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x)) dx$ par $h f(x_0, y_0)$, on obtient la méthode d'Euler. L'idée évidente est d'approcher l'intégrale $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x)) dx$ par une formule de quadrature ayant un ordre plus élevé.

Exprimons la méthode de Runge (1895), en considérant la formule du point milieu. Ce qui conduit à :

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf \left(x_0 + \frac{h}{2}, y \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (\text{II.6})$$

et on remplace la valeur inconnue $y \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)$ par la méthode d'Euler. Ceci nous donne :

$$y_1 \approx y_0 + hf \left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) \right) \quad (\text{II.7})$$

En généralisant cette idée à une formule de quadrature d'un ordre plus élevé, on est conduit à la définition suivante (Kutta, 1901).

II.3.1.2 La méthode de Runge Kutta d'ordre 4

La dérivation de Runge-Kutta à l'ordre 4 est fastidieuse. Heureusement ses formules sont faciles à programmer et nous nous contentons d'utiliser les résultats.

La formule Runge-Kutta à l'ordre 4 est de loin la plus utilisée. Elle a une forme assez symétrique et présente une précision remarquable (convergence).

Son principe repose sur le développement de Taylor de la fonction f , jusqu'à l'ordre 5. Son algorithme de calcul se résume dans les résultats inscrits ci-dessous.

Soit h le pas de calcul et (x_0, y_0) les conditions initiales.

Pour n le nombre d'itérations tel que $0 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (\text{II.8})$$

et,

$$x_{n+1} = x_n + h$$

II.3.1.3 Cas d'un système d'équations différentielles :

La forme générale d'un système de m équations différentielles avec conditions initiales s'écrit :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)), & (y_1(x_0) &= y_{1,0}) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)), & (y_2(x_0) &= y_{2,0}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ y'_m(x) = f_m(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)), & & (y_m(x_0) = y_{m,0}) \end{array}$$

$y_{i,n}$ est l'approximation numérique de la valeur exacte $y_i(x_n)$ de la $i^{\text{ème}}$ variable dépendante en $x = x_n$.

II.3.1.4 Algorithme de Runge Kutta d'ordre 4 pour un système d'équations

Soit le pas h , et les conditions initiales $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})$ et un nombre maximal d'itérations N .

Pour $0 \leq n \leq N$:

Pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$K_{i,1} = hf_i(x_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n})$$

Pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$K_{i,2} = hf_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{K_{1,1}}{2}, y_{2,n} + \frac{K_{2,1}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{K_{m,1}}{2}\right)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$K_{i,3} = hf_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{1,n} + \frac{K_{1,2}}{2}, y_{2,n} + \frac{K_{2,2}}{2}, \dots, y_{m,n} + \frac{K_{m,2}}{2}\right)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$K_{i,4} = hf_i(x_n + h, y_{1,n} + K_{1,3}, y_{2,n} + K_{2,3}, \dots, y_{m,n} + K_{m,3})$$

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{1}{6}(K_{i,1} + 2K_{i,2} + 2K_{i,3} + K_{i,4}) \quad (\text{II.9})$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Ecrire x_{n+1} et $y_{i,n+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, m$

Arrêt

II. 3.2 Méthode de Tir

Dans ce paragraphe, on considère l'équation différentielle ordinaire de second ordre avec les conditions initiales (aux limites) :

$$\begin{cases} y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \\ y(a) = y_a \text{ et } y(b) = y_b \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$a_i(x)$ supposées des fonctions suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité des équations différentielles avec conditions initiales et celles avec conditions aux limites.

Là solution de l'équation différentielle avec les conditions aux limites (II.10) est donnée par :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)} \right) y_2(x) \quad (\text{II.11})$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielles avec conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y_1''(x) = a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) + a_0(x) \\ y_1(a) = y_a \text{ et } y_1'(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

et ,

$$\begin{cases} y_1''(x) = a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) + a_0(x) \\ (a)y_2(a) = 0 \text{ et } y_2'(a) = 1 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

On peut résoudre les équations différentielles avec conditions initiales (I.12) et (I.13) à l'aide de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. On doit d'abord transformer chacune d'elle en un système de deux équations différentielles d'ordre un. En posant :

$$\begin{cases} u_1(x) = y_1(x) \text{ et } v_1(x) = y_2(x) \\ u_2(x) = y_1'(x) \text{ et } v_2(x) = y_2'(x) \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

On obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) & (u_1(a) = y_a) \\ u_2'(x) = a_2(x)u_2(x) + a_1(x)u_1(x) + a_0(x) & (u_2(a) = 0) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

et,

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) & (u_1(a) = y_a) \\ v_2'(x) = a_2(x)v_2(x) + a_1(x)v_1(x) + a_0(x) & (u_2(x) = 1) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

La solution finale peut alors s'écrire :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right) y_2(x) = u_1(x) + \left(\frac{y_b - u_1(b)}{v_2(b)}\right) v_2(x) \quad (\text{II.17})$$

II.2 Méthodes de traitement analytique

Des problèmes non-linéaires sont résolus facilement sans linéarisation et discrétisation en employant les méthodes de décomposition. Ces méthodes permettent de résoudre les équations fonctionnelles de différents types. La solution est obtenue sous forme de séries rapidement convergentes.

II.2.1 La méthode de décomposition d'Adomian (ADM)

Introduite par George Adomian, La décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique de résolution des équations différentielles. Ces méthodes consiste à décomposer l'opérateur non-linéaire en série. Dans lequel les termes sont calculés de façon récursive. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré.

II.2.1.1 Principe de la méthode d'Adomian (ADM)

La méthode présente un algorithme formel. La représentation des termes non-linéaires est nécessaire pour manipuler l'équation non-linéaire d'une manière efficace. Un algorithme alternatif pour calculer les polynômes d'Adomian sera décrit en détails.

Pour mieux illustrer le principe de la méthode de décomposition, considérons l'équation suivante :

$$F u(t) = g(t) \quad (\text{II.18})$$

où F représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non-linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaires. Le terme linéaire est généralement décomposé en deux termes ($L + R$), où L est facilement inversible et R représente le résidu de l'opérateur linéaire. Dans ces conditions, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lu + Nu + Ru = g \quad (\text{II.19})$$

Avec Nu indique le terme non-linéaire.

La résolution de l'équation (II.19) pour Lu sachant que L est inversible, conduit à :

$$L^{-1}Lu + L^{-1}Ru + L^{-1}Nu = L^{-1}g \quad (\text{II.20})$$

L^{-1} constitue une intégrale d'ordre n (double, triple, ...).

Etant donné que $L^{-1}Lu = u - \Phi$, alors l'équation (II.20) se transforme en :

$$u = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (\text{II.21})$$

La Méthode d'Adomian consiste à chercher la solution u sous la forme d'une série en λ dont les coefficients notés $(u_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire :

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n \lambda^n \quad (\text{II.22})$$

En utilisant le développement de Taylor :

$$u = \sum_{n \geq 0} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} (\lambda - 0)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n = \sum_{n \geq 0} u_n \lambda^n$$

Avec :

$$u_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} \quad (\text{II.23})$$

et,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n = \sum_{i=0}^n u_i) = u$$

Et à décomposer l'opérateur non linéaire N en série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{II.24})$$

ou les A_n sont des polynômes qui dépendent de u_0, u_1, \dots, u_n , appelés les polynômes d'Adomian.

En substituant les équations (II.30)-(II.33) dans (II.29), on trouve :

$$\sum_{n \geq 0} u_n = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (\text{II.25a})$$

Or,

$$\sum_{n \geq 1} u_n + u_0 = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n \geq 0} u_n - L^{-1} \sum_{n \geq 0} A_n \quad (\text{II.25b})$$

D'où, on déduit :

$$\begin{cases} u_0 = \Phi + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

II.2.1.2 Les polynômes d'Adomian

On a, d'une part :

$$Nu = \sum_{n \geq 0} A_n.$$

D'autre part, en utilisant le développement de Taylor :

$$Nu = f(u(\lambda)) = \sum_{n \geq 0} \frac{f(u(\lambda))^{(n)}}{n!} (\lambda - 0)^n \Big|_{\lambda=0}$$

Et si on pose :

$$f(u(\lambda)) = \sum_{n \geq 0} A_n \lambda^n, \quad (\text{II.25})$$

Alors, on a :

$$A_n = \left. \frac{f(u(\lambda))^{(n)}}{n!} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{f(u_n \lambda^n)^{(n)}}{n!} \right|_{\lambda=0}, \quad (\text{II.26})$$

Ou les polynômes d'Adomian A_n sont donnés par :

$$A_n = \left. \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0}, \quad (\text{II.27})$$

Et :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \quad \text{puisque } f = f(u) \text{ et } u = u(\lambda)$$

Par ailleurs, la fonction u étant analytique donc développable en série entière convergente :

$$u = u_0 + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + \dots$$

Donc :

$$\left. \frac{\partial^n u(\lambda)}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0} = n! u_n, \quad (\text{II.28})$$

Et,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

II.2.1.3 Une autre version du polynôme d'Adomian

On peut écrire les polynômes d'Adomian sous une autre forme :

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(u_0)}{n!} (u - u_0)^n ; u = \sum_{n \geq 0} u_n , \\
 f(u) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(u_0)}{n!} (u_1 + u_2 + \dots)^n , \\
 f(u) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(u_0)}{n!} (\sum_{i \geq 0} u_i)^n .
 \end{aligned} \tag{II.30}$$

Donc :

$$f(u) = f^{(0)}(u_0) + \frac{f^{(1)}(u_0)}{1!} (u_1 + u_2 + \dots)^1 + \frac{f^{(2)}(u_0)}{2!} (u_1 + u_2 + \dots)^2 + \dots \tag{II.31}$$

II.2.1.4 Tableau de référence des polynômes d'Adomian :

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on donne le tableau de référence suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_0 = f(u_0) \\
 A_1 = u_1 f^{(1)}(u_0) \\
 A_2 = u_2 f^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f^{(2)}(u_0) \\
 A_3 = u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f^{(3)}(u_0) \\
 A_4 = u_4 f^{(1)}(u_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_2 \right) f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 f^{(3)}(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 f^{(4)}(u_0) \\
 \vdots
 \end{array} \right. \tag{II.32}$$

II.2.2 La méthode de décomposition d'Adomian généralisée (GDM)

Le terme non-linéaire Nu est la partie la plus importante de l'équation (II.18). Beaucoup de travaux sont intéressés au développement de nouveaux algorithmes qui augmente l'efficacité de la méthode d'Adomian (ADM). Parmi ces travaux, on peut trouver l'algorithme

développé par Yong-Chang et Price (1972) [45]. Cet algorithme représente une méthode d'Adomian généralisée (GDM).

II.2.2.1 Principe de la méthode d'Adomian généralisée (GDM)

Dans la méthode GDM, les polynômes de décomposition seront exprimés par la formule (II.18) suivante.

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \quad (\text{II.33})$$

Le point crucial de l'équation $y - N(y) = f$ est la fonction non linéaire $N(x)$. Ici, nous développons un nouveau type de stratégie de décomposition de la fonction non linéaire $N(x)$ telle que :

$$\begin{cases} J_0 = N(y_0) \\ J_n = N(y_0 + y_1 + \dots + y_n) - N(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

La nouvelle décomposition de la fonction non linéaire $N(x)$ peut utiliser toutes les informations concernant les conditions obtenues x_0, x_1, \dots, x_n , et la fonction $N(x)$ elle-même. Remplaçant $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ et (II.35) dans $y - N(y) = f$, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n - \sum_{n=0}^{\infty} J_n = f \quad (\text{II.35})$$

La solution y_n peut être déterminée par la relation récurrente :

$$\begin{cases} y_0 = f \\ y_n = J_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Ci-dessous, nous prenons $N(x) = x^2$ comme exemple pour illustrer la différence entre les polynômes d'Adomian et les nouvelles fonctions de décomposition. Les polynômes d'Adomian pour cette fonction sont donnés par :

$$\begin{aligned}
A_0 &= x_0^2 \\
A_1 &= 2x_0x_1 \\
A_2 &= x_1^2 + 2x_0x_2 \\
A_3 &= 2x_1x_2 + 2x_0x_3 \\
A_4 &= x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_0x_4 \\
A_5 &= 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_0x_5 \\
&\vdots \\
A_n &= x_0x_n + x_1x_{n-1} + \cdots + x_nx_0 + x_{n-1}x_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les nouvelles fonctions de décomposition peuvent être exprimées en :

$$\begin{aligned}
J_0 &= x_0^2 \\
J_1 &= x_1^2 + 2x_0x_1 \\
J_2 &= x_2^2 + 2x_0x_2 + 2x_1x_2 \\
J_3 &= 2x_0x_3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 \\
J_4 &= 2x_0x_4 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2 \\
J_5 &= 2x_0x_5 + 2x_1x_5 + 2x_2x_5 + 2x_3x_5 + 2x_4x_5 + x_5^2 \\
&\vdots \\
J_n &= 2x_0x_n + 2x_1x_n + \cdots + 2x_{n-2}x_n + 2x_{n-1}x_n + x_n^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Il est évident que :

$$\sum_{i=0}^n J_i = (\sum_{i=0}^n y_i)^2,$$

est une approximation de

$$N(\sum_{n=0}^{\infty} y_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} y_n)^2,$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
A_0 &= x_0^2 \\
A_0 + A_1 &= x_0^2 + 2x_0x_1 \\
A_0 + A_1 + A_2 &= (x_0 + x_1)^2 + 2x_0x_2 \\
A_0 + A_1 + A_2 + A_3 &= (x_0 + x_1)^2 + 2x_0x_2 + 2x_1x_2 + 2x_0x_3 \\
\sum_{i=0}^4 A_i &= (x_0 + x_1 + x_2)^2 + 2x_0x_3 + 2x_1x_3 + 2x_0x_4 \\
\sum_{i=0}^5 A_i &= (x_0 + x_1 + x_2)^2 + 2x_0x_3 + 2x_1x_3 + 2x_0x_4 + 2x_1x_4 + 2x_0x_5
\end{aligned}$$

Cela indique que :

$$\sum_{i=0}^N J_i,$$

est une meilleure approximation à $N(x)$ que :

$$\sum_{i=0}^N A_n.$$

II.3.3 Méthode modifiée : Approche de Duan-Rach

C'est la méthode utilisée pour traiter le problème dynamique de l'écoulement objet d'étude. Considérons l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre suivante :

$$Ly = Ny + Ry + g \quad (\text{II.37})$$

Avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$y(x_1) = \alpha_0, \quad y'(x_1) = \alpha_1, \quad y(x_2) = \alpha_2, \quad x_1 \neq x_2 \quad (\text{II.38})$$

Où L est un opérateur inversible, N est un opérateur non linéaire, R est un opérateur linéaire représentant le reste et g l'entrée du système.

Introduisons L^{-1} dans l'équation (II.37), il vient :

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g + L^{-1}[N + R]y \quad (\text{II.39})$$

En tenant en compte l'expression

$$L^{-1} = \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_1}^{\eta} \int_{\beta}^{\eta} d\eta d\eta d\eta \quad (\text{II.40})$$

et l'équation (II.39) avec les conditions aux limites (II.38), On obtient :

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) - y'(x_1)(x - x_0) + \frac{1}{2} [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{x_2 - x_1} + \\ L^{-1}g &- \frac{1}{2} \frac{[(x-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2]}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x g dx dx - \frac{1}{2} \frac{[(x-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2]}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x Ny dx dx + L^{-1}Ny - \\ &\frac{1}{2} \frac{[(x-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2]}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x Ry dx dx + L^{-1}Ry \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

A partir de l'équation (II.41), les coefficients $y(x_0)$, $y'(x_1)$ et $y'(x_2)$ sont inconnues et la solution est cherchée sous forme de séries (II.42) et les termes non linéaires (II.43) :

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), \quad (\text{II.42})$$

$$Nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x), \quad (\text{II.43})$$

Où : $A_m(u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x))$ sont les polynômes d'Adomian.

Selon l'approche de Duan-Ruch, les composantes de la solution sont déterminées par le schéma récurrent suivant :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y(x_0) - y'(x_1)(x - x_0) + \frac{1}{2} [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{x_2 - x_1} + \\ &L^{-1}g - \frac{1}{2} \frac{[(x-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2]}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x g dx dx \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

$$\begin{aligned} y_{m+1}(x) &= L^{-1}A_m + L^{-1}Ry - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x A_m dx dx \\ &- \frac{1}{2} \frac{[(x-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2]}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x Ry dx dx \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

II.4 Conclusion

Les outils mathématiques décrits dans ce chapitre sont couramment utilisés pour résoudre des problèmes mathématiques modélisés par des équations différentielles ordinaires (EDO) et aux dérivées partielles (EDP) par le biais qu'ils présentent des avantages tels que :

- Facilité de programmation ;
- Stabilité de la solution ;
- Modification simple du pas d'intégration ;
- Permettent de traiter des problèmes non linéaires sans passer par la discrétisation et la linéarisation. Ceci est justifié dans l'application de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et l'approche de Duan-Ruch

L'application de ces outils mathématiques permet de résoudre numériquement et analytiquement les modèles mathématiques qui régissent les problèmes dynamiques de l'écoulement de Jeffrey-Hamel.

Chapitre III

**Formulation et résolution du problème non-linéaire de
l'écoulement d'un fluide viscoélastique entre deux
Parois non parallèles**

Sommaire

III.1	Introduction	45
III.2	Etude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel (traditionnel)	46
III.2.1	Formulation mathématique	46
III.2.2	Traitement numérique et analytique	49
III.2.3	Implémentation de la méthode ADM	51
III.3	Etude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel viscoélastique	52
III.3.1	Formulation mathématique	52
III.3.2	Traitement numérique et analytique de l'écoulement	55
III.3.3	Implémentation de la méthode DRMA	58
III.5	Conclusion	59

III.1 Introduction

L'écoulement de Jeffrey-Hamel auquel nous nous sommes particulièrement intéressés, constitue une famille de solutions exactes des équations de Navier-Stokes régissant les mouvements radiaux bidimensionnels permanents d'un fluide viscoélastique entre deux parois planes rigides non parallèles formant un angle 2α entre elles. La configuration géométrique de l'écoulement du fluide viscoélastique étudié est illustrée par la figure ci-dessous (Figure III.1).

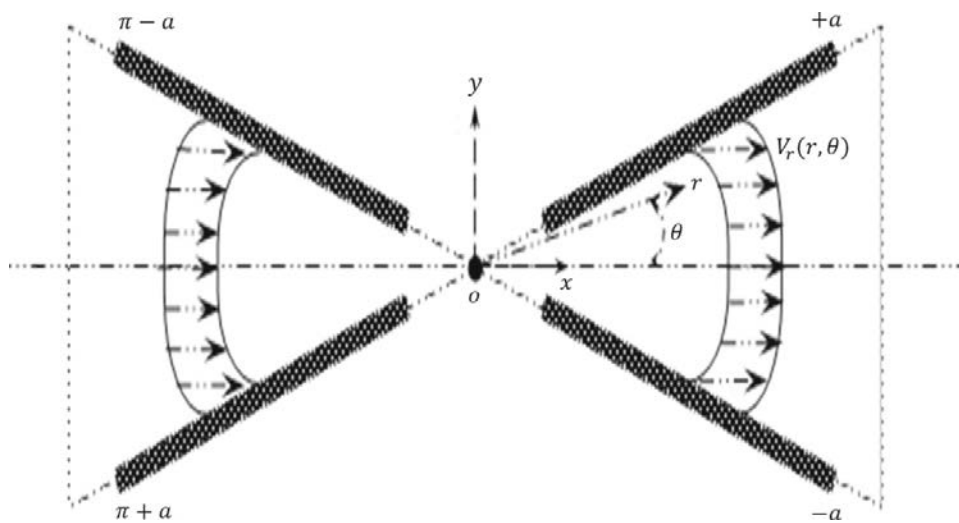


Figure III.1 : Configuration géométrique

Notre problème considère donc l'étude dynamique de l'écoulement d'un fluide viscoélastique entre deux parois planes non parallèles dans un convergent-divergent.

Pour bien distinguer entre écoulement convergent et écoulement divergent, on peut agir sur plusieurs paramètres:

- **Cas 1 :** Pour distinguer entre les écoulements, on agit sur le signe de l'angle α :

$$\begin{cases} \text{Canal convergent} & : \alpha < 0 \\ \text{Canal divergent} & : \alpha > 0 \end{cases}$$

- **Cas 2 :** Dans ce cas, la distinction se fait en considérant les conditions aux limites. Plus précisément, il faut inverser les conditions aux limites, ce qui donne:

$$\begin{cases} \text{Canal convergent} & : f(0) = 1 \text{ et } f(1) = 0 \\ \text{Canal divergent} & : f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$$

La fonction f représente la distribution des vitesses.

Dans cette étude, on va considérer le premier cas pour différencier entre écoulement convergent et écoulement divergent.

III.2 Étude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel traditionnel

III.2.1 Formulation mathématique

Dans ce paragraphe, on va se concentrer sur l'étude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel traditionnel (équation de la distribution de la vitesse). Cette étude est basée sur les travaux de Kezzar et Sari [60].

Le mouvement d'un fluide incompressible et visqueux, se caractérise généralement par le modèle mathématique suivant:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} \quad (\text{III.1})$$

(III.1) représente l'équation de Navier-Stokes pour l'écoulement des fluides réels.

L'écriture de l'équation (III.1) en coordonnées cylindriques pour un écoulement purement radial ($V_r = V(r, \theta)$, $V_\theta = V_z = 0$) est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} (rV_r) = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$(\vec{V} \nabla) V_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P}{\rho} \right) + 2\nu \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \quad (\text{III.4})$$

L'équation (III.2) conduit à :

$$rV_r = f(\theta) \Rightarrow V_r = \frac{f(\theta)}{r} \quad (\text{III.5})$$

Des équations (III.3), (III.4) et (III.5), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{f^2}{r^3} + \frac{\nu f''}{r^3} \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{2\nu}{r^2} f' \quad (\text{III.7})$$

La dérivation des équations (III.6) et (III.7) par rapport à θ et r respectivement, conduit à :

$$-\frac{2ff''}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right] + \nu \frac{f'''}{r^3} \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right] = -4\nu \frac{f'}{r^3} \quad (\text{III.9})$$

En additionnant (III.8) et (III.9) et en éliminant le terme de pression, on aboutit à une équation différentielle non linéaire du troisième ordre :

$$f''' + 4f' + \frac{2}{\nu} ff' = 0 \quad (\text{III.10})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\color{red}{\oplus} \quad \text{Sur les parois fixes solides } (\theta = \pm \alpha) : f(\pm \alpha) = 0, \quad (\text{III.11})$$

$$\color{red}{\oplus} \quad \text{Sur l'axe du canal } (\theta = 0) : f'(0) = 0 \quad (\text{III.12})$$

Avec $f_{max} = rV_{max}$ représente la vitesse maximale sur l'axe du canal.

La normalisation des équations de l'écoulement étudié est très importante. A cet effet, considérons la variable sans dimension $F(\theta)$ définie par :

$$F(\theta) = \frac{V_r}{V_{max}} = \frac{f(\theta)}{f(0)}, \quad (\text{III.13})$$

dont elle peut s'écrire aussi sous la forme :

$$F(\eta) = \frac{f(\eta)}{f(0)}, \text{ avec } \eta = \frac{\theta}{\alpha} \quad (-1 \leq \eta \leq +1) \quad (\text{III.14})$$

Introduisons le débit sans dimension qu'on note Q . Par la suite, tenant compte de la viscosité cinématique ν du fluide, il vient :

$$\frac{Q}{\nu} = Re \int_{-1}^{+1} F(\eta) d\eta, \quad (\text{III.15})$$

et le nombre de Reynolds Re s'exprime ainsi par :

$$Re = \frac{r.V_{max}.\alpha}{\nu} = \frac{f(0).\alpha}{\nu} \quad (\text{III.16})$$

D'autre part, l'dimensionnement des dérivées de la fonction $F(\theta)$ donne :

$$\begin{cases} F'(\theta) = \frac{1}{\alpha} F'(\eta) \\ F''(\theta) = \frac{1}{\alpha^2} F''(\eta) \\ F'''(\theta) = \frac{1}{\alpha^3} F'''(\eta) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

L'équation (III.16) et le système (III.17) donnent :

$$F'''(\eta) + 4\alpha^2 F'(\eta) + 2Re\alpha F(\eta)F'(\eta) = 0 \quad (\text{III.18})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\text{✚ Sur les parois } (\eta = \pm 1) : F(\pm 1) = 0 \quad (\text{III.19a})$$

$$\text{✚ Sur l'axe de la conduite } (\eta = 0) : F(0) = 1, F'(0) = 0 \quad (\text{III.19b})$$

La contrainte de cisaillement au niveau des parois (due au frottement fluide-paroi) est donnée par :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\alpha} \quad (\text{III.20})$$

En outre, le coefficient de frottement est défini comme suit :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho \cdot f_{\max}^2} \quad (\text{III.21})$$

En utilisant les paramètres sans dimensions, l'équation (III.21) peut se formuler comme suite :

$$C_f = \frac{1}{Re} \cdot F'(1) \quad (\text{III.22})$$

III.2.2 Traitement numérique et analytique

Cette partie considère la résolution des équations (III. 18) et (III. 22) qui caractérisent, respectivement, la distribution des vitesses et le coefficient de frottement fluide-paroi dans l'écoulement de Jeffery-Hamel.

Pour le traitement numérique, on utilise la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordres 4 et 5 pour résoudre l'équation (III.18) après sa réduction en un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. Par ailleurs, on utilise la méthode de Tir pour établir les résultats numériques liés au coefficient de frottement.

Pour sa part, le traitement analytique considère l'application de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) pour déterminer la distribution des vitesses et le coefficient de frottement de l'écoulement de Jeffrey-Hamel traditionnel.

L'application de la méthode ADM à l'équation (III.18), caractérisant la distribution des vitesses, est résumée dans ce qui suit.

Soit,

$$LF = -2R_e \alpha FF' - 4\alpha^2 F' \quad (\text{III.23})$$

ou L est l'opérateur différentiel, défini par :

$$L = \frac{d^3}{d\eta^3} \quad (\text{III.24})$$

L'opérateur inverse L^{-1} de l'opérateur différentiel L s'écrit par :

$$L^{-1} = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\blacksquare) d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.25})$$

Les équations (III.23) et (III.25) donnent :

$$F(\eta) = F(0) + F'(0)\eta + F''(0)\frac{\eta^2}{2} + L^{-1}(Nu) \quad (\text{III.26})$$

Avec la partie non linéaire Nu :

$$Nu = -2R_e \alpha FF' - 4\alpha^2 F' \quad (\text{III.27})$$

Les constantes $F(0)$, $F'(0)$ et $F''(0)$ dépendent des conditions aux limites (III.19)

En respectant la distinction entre le type de l'écoulement (Convergent/Divergent), les constantes $F(0)$, $F'(0)$ et $F''(0)$ s'expriment :

✚ Pour les canaux convergents/divergents:

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 0 \\ F''(0) = a \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

L'application des conditions (III.28) à l'équation (III.27) conduit à :

$$F(\eta) = 1 + 0\eta + a\frac{\eta^2}{2} + L^{-1}(Nu) \quad (\text{III.29})$$

et l'équation (III.26) devient :

$$F(\eta) = F_0 + L^{-1}(Nu) \quad (\text{III.30})$$

Avec :

$$F_0 = 1 + a\frac{\eta^2}{2} \quad (\text{III.31})$$

La constante a se détermine à partir des conditions aux limites.

III.2.3 Implémentation de la méthode ADM

L'application de la méthode ADM conduit aux résultats suivants :

Les polynômes d'Adomian sont :

$$A_0 = -2a\text{Re}\alpha\eta - 4a\alpha^2\eta - a^2\text{Re}\alpha\eta^3 \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{aligned} A_1 = & -4a\alpha^2\eta + \frac{2}{3}c\text{Re}^2\alpha^2\eta^3 + \frac{8}{3}a\text{Re}\alpha^3\eta^3 + \frac{8}{3}a\alpha^4\eta^3 + \frac{3}{5}a^2\text{Re}^2\alpha^2\eta^5 + \\ & \frac{6}{5}a^2\text{Re}\alpha^3\eta^5 + \frac{1}{15}a^3 \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & \frac{1}{15} a \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^5 + \frac{2}{5} a \text{Re}^2 \alpha^4 \eta^5 + \frac{4}{5} a \text{Re} \alpha^5 \eta^5 + \frac{8}{15} a \alpha^6 \eta^5 + \frac{11}{630} a^2 \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^7 + \\
 & \frac{22}{315} a^2 \text{Re}^2 \alpha^4 \eta^7 + \frac{22}{315} a^2 \text{Re} \alpha^5 \eta^7 + \frac{11}{1890} a^3 \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^9 + \frac{11}{945} a^3 \text{Re}^2 \alpha^4 \eta^9 + \\
 & \frac{1}{3600} a^4 \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^{11}
 \end{aligned} \tag{III.34}$$

Les termes de la solution (F_1, F_2, \dots, F_n) sont exprimés par :

$$F_1 = -\frac{1}{12} a \text{Re} \alpha \eta^4 - \frac{1}{6} a \alpha^2 \eta^4 - \frac{1}{120} a^2 \text{Re} \alpha \eta^6 \tag{III.35}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & -\frac{1}{180} a \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^6 - \frac{1}{45} a \text{Re} \alpha^3 \eta^6 - \frac{1}{45} a \alpha^4 \eta^6 - \frac{1}{560} a^2 \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^8 \\
 & - \frac{1}{280} a^2 \text{Re} \alpha^3 \eta^8 - \frac{1}{10800} a^3 \text{Re}^2 \alpha^2 \eta^{10}
 \end{aligned} \tag{III.36}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & -\frac{1}{5040} a \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^8 - \frac{1}{840} a \text{Re}^2 \alpha^4 \eta^8 - \frac{1}{420} a \text{Re} \alpha^5 \eta^8 - \frac{1}{630} a \alpha^6 \eta^8 \\
 & - \frac{11}{453600} a^2 \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^{10} - \frac{11}{113400} a^2 \text{Re}^2 \alpha^4 \eta^{10} - \frac{11}{113400} a^2 \text{Re} \alpha^5 \eta^{10} - \frac{a^3 \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^{12}}{226800} - \\
 & \frac{1}{113400} a^3 \text{Re}^2 \alpha^4 \eta^{12} - \frac{1}{7862400} a^4 \text{Re}^3 \alpha^3 \eta^{14}
 \end{aligned} \tag{III.37}$$

Par ajout des termes ($F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$), on obtient la solution du problème dynamique de l'écoulement de Jeffery-Hamel traditionnel, qui se traduit par :

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \tag{III.38}$$

La constante a se détermine par application des conditions aux limites. Par ailleurs, la précision de la solution augmente avec l'augmentation du nombre d'itérations 'n'.

III.3 Étude dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel pour un fluide viscoélastique

III.3.1 Formulation mathématique

L'écoulement du fluide est supposé constant le long de la direction z et nous présumons un simple mouvement radial. Donc, nous pouvons écrire :

$$V_r = V(r, \theta), V_\theta = V_z = 0 \tag{III.39}$$

Le modèle mathématique décrivant un tel écoulement est donné par :

$$\nabla V = 0, \quad (\text{III.40})$$

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V \right] = -\nabla P + \nabla \tau \quad (\text{III.41})$$

Où V est la vitesse du fluide, ρ est la densité du fluide, P est la pression du fluide et τ est le tenseur des contraintes.

Les formes réduites des équations de continuité et de Navier-stokes pour un écoulement laminaire, stationnaire et purement radial sont données en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par ce qui suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) = 0 \quad (\text{III.42})$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right) \quad (\text{III.43})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right) \quad (\text{III.44})$$

En fonction de l'équation (III.5), nous déclarons que l'expression (rV_r) est seulement fonction de l'angle θ et nous pouvons écrire :

$$rV_r = f(\theta) \quad (\text{III.45})$$

Le fluide viscoélastique considéré obéit à la forme du second ordre. Dans ce cas, le tenseur de contrainte, τ , peut être associé au champs de déformation [49]

$$\tau = \alpha_1 D + \alpha_2 D^\nabla + \alpha_3 D \cdot D \quad (\text{III.46})$$

Où D est la partie déviatorique du tenseur gradient de vitesse, qui est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{1}{2} [\nabla V + (\nabla V)^T] \quad (\text{III.47})$$

L'indice ∇ est la dérivée supérieure qui est fonction du temps et s'exprime comme suite [49] :

$$D^\nabla = (V \cdot \nabla)D - (\nabla V)^T \cdot D - D \cdot \nabla V \quad (\text{III.48})$$

α_1 , α_2 et α_3 sont les propriétés du fluide définies par :

$$\alpha_1 = \mu_0 ; \alpha_2 = -\psi_{1,0} ; \alpha_3 = 4\psi_{2,0} \quad (\text{III.49})$$

Où μ_0 est la viscosité du fluide, $\psi_{1,0}$ et $\psi_{2,0}$ sont, respectivement, les coefficients d'élasticité du premier et deuxième ordre du fluide de la contrainte normale [50]. L'indice "zéro" dans l'équation (III.49) indique que les propriétés sont calculées avec un taux de cisaillement nul.

En utilisant l'hypothèse d'un écoulement purement radial, le tenseur de contrainte peut être exprimé comme [51] :

$$\begin{aligned} \tau = & \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \end{bmatrix} \\ & + \alpha_2 \left(\begin{bmatrix} 2V_r \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} & -\frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} \\ -\frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} & -2 \frac{V_r^2}{r^2} + 2 \frac{V_r}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. - \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 3 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 3 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 \end{bmatrix} \right) \\ & - \alpha_3 \left(\begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 & \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 2 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 2 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Maintenant, définissons les paramètres suivants :

$$F(\eta) = \frac{f(\theta)}{f_0} ; \eta = \frac{\theta}{\alpha} \quad (\text{III.51})$$

où f_0 est le taux de mouvement dans la direction radiale caractérisant la vitesse maximale ($f_0 = rV_{\max}$). En éliminant le terme de pression des équations (III.43) et (III.44), nous obtenons :

$$F'''' + 2R_e FF' + 4\alpha^2 F' + W_i(8\alpha FF'' + 32\alpha^3 FF') = 0 \quad (\text{III.52})$$

Les nombres de Reynolds (R_e) et de Weissenberg (W_i) d'un écoulement de fluide viscoélastique entre deux parois inclinées sont présentés par :

$$R_e = \frac{\rho f_0 \alpha}{\mu_0} = \begin{cases} f_0 > 0, & \alpha > 0 \text{ Canal divergent} \\ f_0 < 0, & \alpha < 0 \text{ Canal Convergent} \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

$$W_i = \frac{\psi_{1,0} f_0}{r^2 \mu_0 \alpha} \quad (\text{III.54})$$

En conséquence, en termes de $F(\eta)$, les conditions aux limites sont exprimées comme :

$$\text{✚} \quad \text{Sur l'axe de la conduite} : F(0) = 1, F'(0) = 0, \quad (\text{III.55})$$

$$\text{✚} \quad \text{Sur les parois de la conduite} : F(\mp 1) = 0 \quad (\text{III.56})$$

III.3.2 Traitement numérique et analytique de l'écoulement

Dans cette section, nous proposons de résoudre une équation différentielle non linéaire de troisième ordre d'un écoulement hydrodynamique d'un fluide viscoélastique dans des canaux convergents/divergents. L'équation différentielle non linéaire modélisant l'écoulement étudié est donnée par l'équation (III.52) avec les conditions aux limites (III.55) et (III.56).

Définissons l'opérateur linéaire L , l'opérateur restant R et l'opérateur non linéaire N comme suite :

$$LF(\eta) = \frac{d^3F(\eta)}{d\eta^3} \quad (\text{III.57})$$

$$RF(\eta) = 4\alpha^2 F' \quad (\text{III.58})$$

$$NF(\eta) = 2R_e \alpha FF' + W_i (8\alpha FF''' + 32\alpha^3 FF') \quad (\text{III.59})$$

D'autre part, l'opérateur inverse L^{-1} de l'opérateur différentiel L représente $n - fois$ l'intégration et s'écrit :

$$L^{-1}(\ast) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\ast) d\eta d\eta d\eta, \quad (\text{III.60})$$

En utilisant l'algorithme d'Adomian, l'équation originale de l'écoulement viscoélastique considérée, entre deux parois planes non parallèles, peut être réécrite comme suite :

$$LF(\eta) + R(\eta) + N(\eta) = 0 \quad (\text{III.61})$$

Ensuite, nous résolvons le terme LF comme suit :

$$LF(\eta) = -R(\eta) - N(\eta) \quad (\text{III.62})$$

L'application de l'opérateur inverse L^{-1} aux deux termes de l'équation (III.62) entraîne :

$$L^{-1}LF(\eta) = -L^{-1}R(\eta) - L^{-1}N(\eta), \quad (\text{III.63})$$

Où :

$$L^{-1}LF(\eta) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{d^3F(\eta)}{d\eta^3} d\eta d\eta d\eta = F(\eta) - F(0) - \eta F'(0) - \frac{\eta^2}{2} F''(0) \quad (\text{III.64})$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$F(\eta) - F(0) - \eta F'(0) - \frac{\eta^2}{2} F''(0) = -L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta) \quad (\text{III.65})$$

En considérant les conditions aux limites sur l'axe de la conduite (III.19), l'équation (III.65) devient :

$$F(\eta) = 1 + \frac{\eta^2}{2} F''(0) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta), \quad (\text{III.66})$$

Ensuite, la solution est évaluée pour $\eta = 1$. Nous obtenons :

$$1 + \frac{1}{2} F''(0) - L_1^{-1}RF(\eta) - L_1^{-1}NF(\eta) = 0. \quad (\text{III.67})$$

L'opérateur intégral L_1^{-1} est défini par :

$$L^{-1}G(\eta) = [L_1^{-1}G(\eta)]_{\eta=1} = \int_0^1 \int_0^\eta \int_0^\eta G(\eta) d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.68})$$

Maintenant, résolvons la dérivée du second ordre évalué aa zéro, nous obtenons :

$$F''(0) = -2 + 2L_1^{-1}RF(\eta) + 2L_1^{-1}NF(\eta). \quad (\text{III.69})$$

La substitution de l'équation (III.69) dans (III.66) donne :

$$F(\eta) = 1 - \eta^2 + \eta^2 L_1^{-1}RF(\eta) + \eta^2 L_1^{-1}NF(\eta) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta), \quad (\text{III.70})$$

Selon la méthode d'Adomian, la solution en séries et la non linéarité sont données par :

$$F(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\eta), \quad (\text{III.71})$$

$$NF(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\eta), \quad (\text{III.72})$$

Où $A_m(F_0(\eta), F_1(\eta), \dots, F_m(\eta))$ sont les polynômes d'Adomian.

Finalement, le schéma récurrent de la méthode de décomposition d'Adomian modifiée dit de Duan-Rach est donnée par :

$$F_0(\eta) = 1 - \eta^2, \quad (\text{III.73})$$

$$F_{n+1}(\eta) = \eta^2 L_1^{-1} R F(\eta) + \eta^2 L_1^{-1} N F(\eta) - L^{-1} R F(\eta) - L^{-1} N F(\eta). \quad (\text{III.74})$$

III.3.3 Implémentation de la méthode DRMA

L'application de la méthode décrite dans la section III.3.2 ci-dessus sur l'équation de la dynamique de l'écoulement du fluide viscoélastique étudié permet de déterminer les termes de la solution. En effet, Les premières composantes de la solution sont données par:

$$F_0 = 1 - \eta^2, \quad (\text{III.75})$$

$$F_1 = \frac{1}{3} \alpha^2 \eta^2 - \left(\frac{2R_e \alpha}{12} + \frac{32W_i \alpha^3}{15} \right) \eta^2 + \frac{1}{6} R_e \alpha \eta^4 + \frac{\alpha^2 \eta^4}{3} + \frac{8}{3} W_i \alpha^3 \eta^4 - \frac{1}{30} R_e \alpha \eta^6 - \frac{8}{15} W_i \alpha^3 \eta^6 \quad (\text{III.76})$$

$$F_2 = - \left(\frac{31R_e \alpha^3}{1260} + \frac{\alpha^4}{15} + \frac{124W_i \alpha^5}{315} \right) \eta^2 - \left(\frac{163R_e^2 \alpha^2}{18900} - \frac{94}{105} R_e W_i \alpha^2 + \frac{29R_e \alpha^3}{1260} - \frac{32W_i \alpha^3}{15} + 652R_e W_i \alpha^4 44725 - 1504W_i^2 \alpha^4 105 + 116W_i^2 \alpha^5 315 + 10432W_i^2 \alpha^6 4725 \eta^2 + 145R_e \alpha^2 \eta^4 - 43R_e W_i \alpha^2 \eta^4 + 245R_e \alpha^3 \eta^4 + 118R_e \alpha^3 \eta^4 - 83W_i \alpha^3 \eta^4 + 19\alpha^4 \eta^4 + 1645R_e W_i \alpha^4 \eta^4 - 643W_i^2 \alpha^4 \eta^4 + 85W_i \alpha^5 \eta^4 + 25645R_e W_i^2 \alpha^6 \eta^4 - 150R_e^2 \alpha^2 \eta^6 + 815R_e W_i \alpha^2 \eta^6 - 145R_e \alpha^3 \eta^6 - 245R_e \alpha^3 \eta^6 + 815W_i \alpha^3 \eta^6 - 2\alpha^4 \eta^6 645 - 825R_e W_i \alpha^4 \eta^6 + 12815W_i^2 \alpha^4 \eta^6 - 1615W_i \alpha^5 \eta^6 - 12825W_i^2 \alpha^6 \eta^6 + 1140R_e^2 \alpha^2 \eta^8 - 221R_e W_i \alpha^2 \eta^8 + 1420R_e \alpha^3 \eta^8 + 184R_e \alpha^3 \eta^8 + 435R_e W_i \alpha^4 \eta^8 - 3221W_i^2 \alpha^4 \eta^8 + 835W_i \alpha^5 \eta^8 + 6435W_i^2 \alpha^6 \eta^8 - 11350R_e^2 \alpha^2 \eta^{10} - 8675R_e W_i \alpha^4 \eta^{10} - 128675W_i^2 \alpha^6 \eta^{10} \quad (\text{III.77})$$

Finalement, l'ajout des termes de la solution ($F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$) du problème dynamique de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un fluide non-Newtonien de type viscoélastique donne la solution :

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \quad (\text{III.78})$$

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations de la dynamique d'un écoulement d'un fluide viscoélastique qui gouvernent l'écoulement de Jeffrey-Hamel ont été développées en considérant le cas traditionnel et celui d'un fluide non Newtonien. Des traitements numériques et analytiques sont adoptés pour établir la distribution des vitesses. En effet, les méthodes analytiques ADM et DRMA sont utilisées avec succès.

Chapitre IV

Résultats et discussions

Sommaire

IV.1	Introduction	61
IV.2	Écoulement traditionnel (nombre de Weissenberg nul, $W_i = 0$).....	61
IV.2.1	Effet du nombre de Reynolds R_e	62
IV.2.2	Effet de l'angle α	64
IV.2.3	Évolution du coefficient de frottement	65
IV.3	Écoulement d'un fluide viscoélastique ($W_i \neq 0$).....	66
IV.3.1	Effets de divers paramètres physiques	66
IV.3.1.1	Effet du nombre de Reynolds R_e	66
IV.3.1.2	Effet de l'angle α	68
IV.3.1.3	Effet du nombre de Weissenberg W_i	69
IV.3.1.4	Effet de W_i sur R_{ec}	70
IV.3.1.5	Évolution du coefficient de frottement C_f	72
IV.4	Comparaison des résultats	74

IV.1 Introduction

Dans cette partie, on va exposer les principaux résultats du traitement numérique et analytique du modèle étudié tel que le comportement dynamique de l'écoulement de Jeffrey-Hamel d'un fluide viscoélastique entre deux parois non parallèles. Le modèle mathématique caractérisant un tel écoulement est une équation différentielle ordinaire du troisième ordre. Cette dernière est résolue analytiquement, en utilisant la technique standard de décomposition d'Adomian (ADM) et une technique robuste modifiée, appelée Duan-Rach Modified Adomian (DRMA). La solution numérique utilisée comme guide a été obtenue via l'algorithme de Runge–Kutta–Fehlberg (RK45). Les effets de divers paramètres physiques caractérisant l'écoulement tels que le nombre de Reynolds R_e , le nombre de Weissenberg W_i et le demi-angle α du canal sur les distributions des vitesses et le coefficient de frottement C_f pour les canaux convergents et divergents ont été étudiés. En outre, une étude comparative a été effectuée afin de tester l'exactitude, l'applicabilité et l'efficacité de la technique DRMA adoptée.

IV.2 Étude de l'écoulement traditionnel ($W_i = 0$)

Dans cette partie, les résultats des traitements analytique et numérique par les techniques ADM et RK45 de l'écoulement d'un fluide incompressible et visqueux entre deux parois inclinées seront visualisés. En effet, ce type d'écoulement est caractérisé par l'équation (III.18):

$$F'''(\eta) + 4\alpha^2 F'(\eta) + 2Re\alpha F(\eta)F'(\eta) = 0 \quad (\text{Équation III.18})$$

Par ailleurs, une attention particulière a été dédiée aux effets du nombre de Reynolds (Re) et du demi angle (α) sur les évolutions de la distribution des vitesses et du coefficient de frottement dans les canaux convergents et divergents.

IV.2.1 Effet du nombre de Reynolds Re

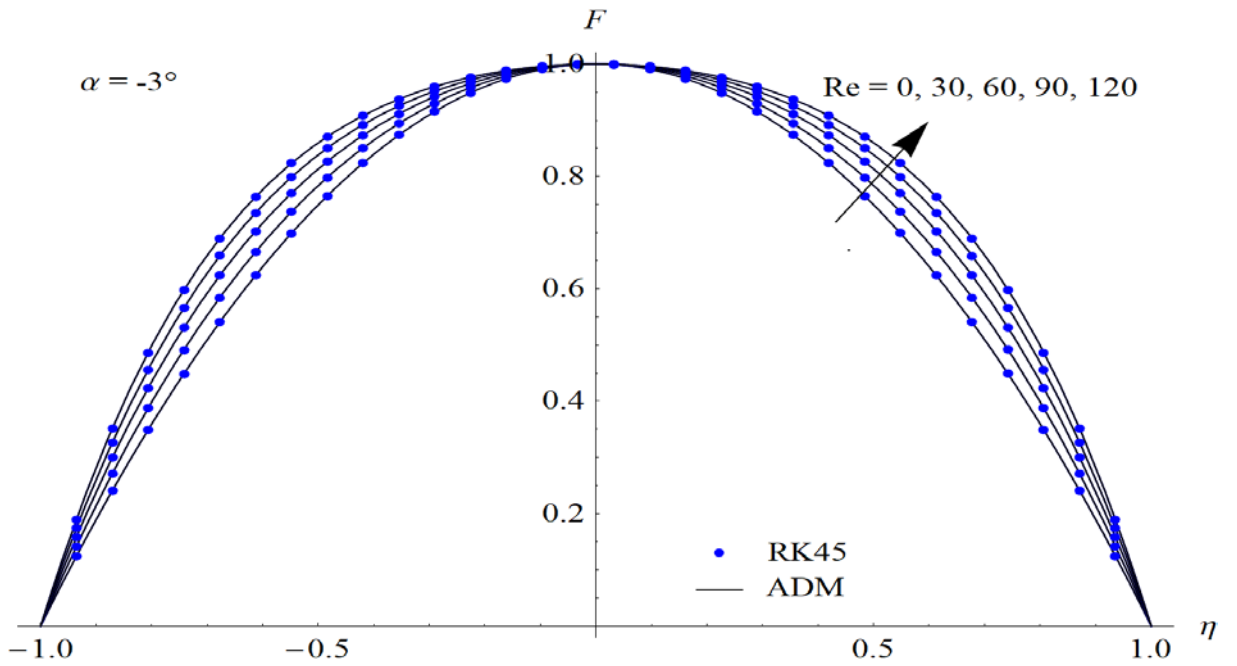


Figure IV.1 : Effet du nombre de Reynolds Re sur la distribution de vitesse dans un canal convergent lorsque $W_i = 0$ et $\alpha = -3^\circ$

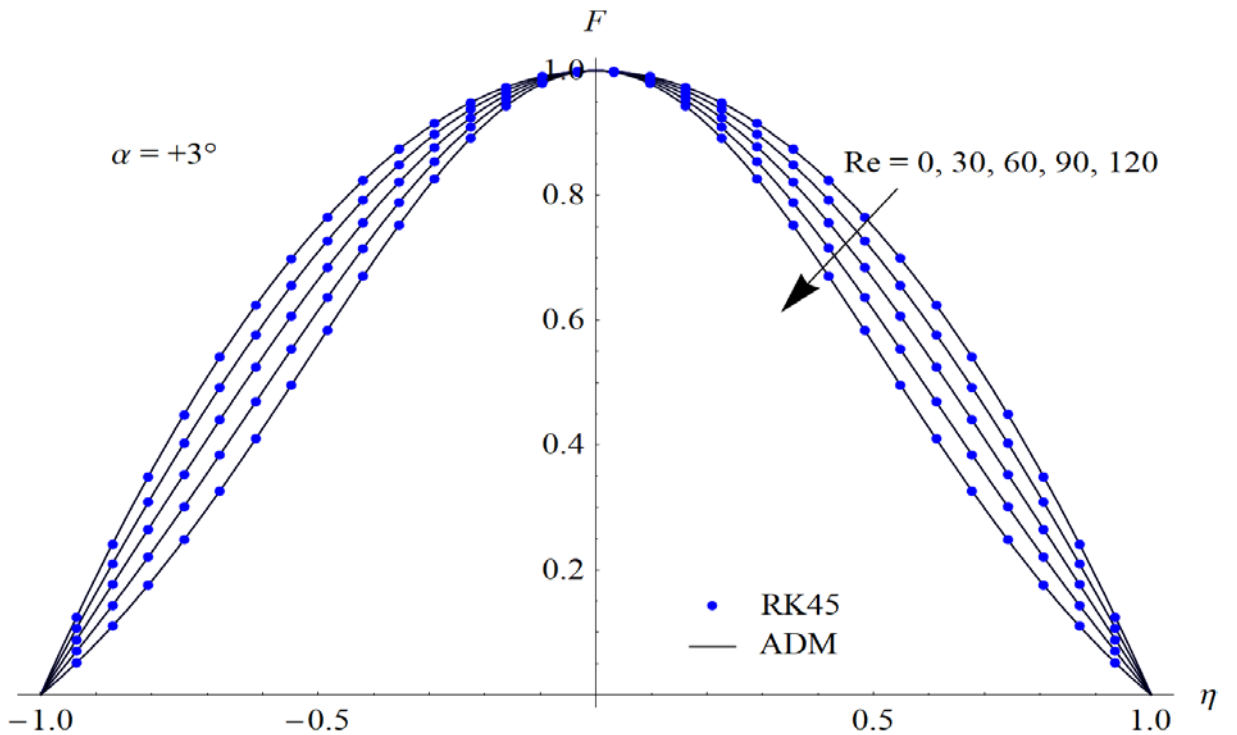


Figure IV.2: Effet du nombre de Reynolds Re sur la distribution de vitesse dans un canal divergent lorsque $W_i = 0$ et $\alpha = +3^\circ$

Les figures (IV.1 et IV.2) visualisent l'effet de la variation du nombre de Reynolds sur la distribution des vitesses dans l'écoulement de Jeffery-Hamel traditionnel dans des canaux convergents et divergents. D'après les résultats obtenus, on voit clairement que les profils de vitesse sont symétriques, et la vitesse présente une valeur maximale sur l'axe des canaux convergents/divergents.

Pour l'écoulement convergent (débit négatif, $Q < 0$), la vitesse est dirigée vers le sommet de l'angle et par conséquent la fonction $f(\theta)$ est négative. En effet, cette dernière évolue d'une manière monotone de la valeur 0 au niveau des parois ($\theta = \pm\alpha$) jusqu'à la valeur $-f(0)$ ($f(0) < 0$) sur l'axe du canal ($\theta = 0$).

Pour l'écoulement divergent (débit positif, $Q > 0$), la vitesse est dirigée dans le sens opposé au sommet de l'angle et par conséquent la fonction $f(\theta)$ se verra positive et variant d'une manière monotone de la valeur 0 au niveau des parois fixes solides ($\theta = \pm\alpha$) jusqu'à la valeur $+f(0)$ ($f(0) > 0$) sur l'axe du canal ($\theta = 0$).

Pour le cas de l'écoulement convergent (Fig. IV.2), il est bien clair que l'augmentation du nombre de Reynolds conduit à un profil de vitesse plat au centre du canal avec un gradient de vitesse élevé proche des parois. En conséquence, l'épaisseur de la couche limite décroît avec l'accroissement du nombre de Reynolds. Dans un canal divergent (Fig. IV.2), les résultats obtenus montrent clairement que l'accroissement du nombre de Reynolds peut faire apparaître le phénomène de séparation (retour de l'écoulement). Il est également bien démontré que le débit du fluide se concentre au centre du canal au fur et à mesure que le nombre de Reynolds croît. Dans cette situation, l'épaisseur de la couche limite se verra augmentée.

IV.2.2 Effet du demi-angle α du canal

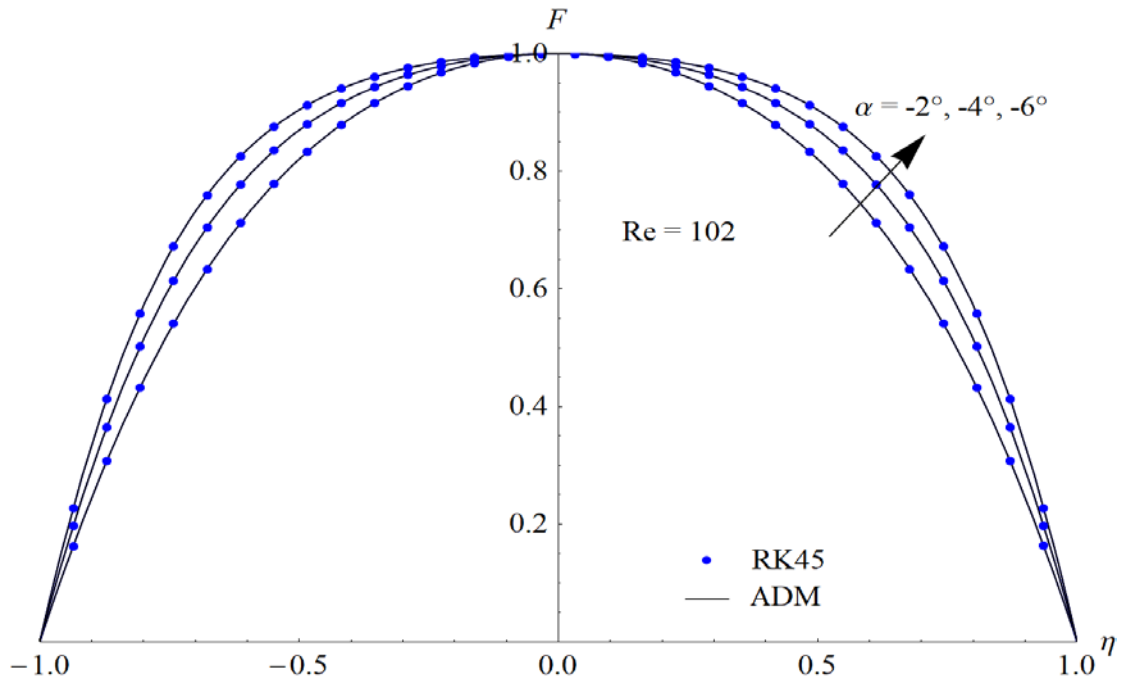


Figure IV.3 : Effet du demi angle α sur la distribution de vitesse dans un canal convergent lorsque $W_i = 0$ et $Re = 102$

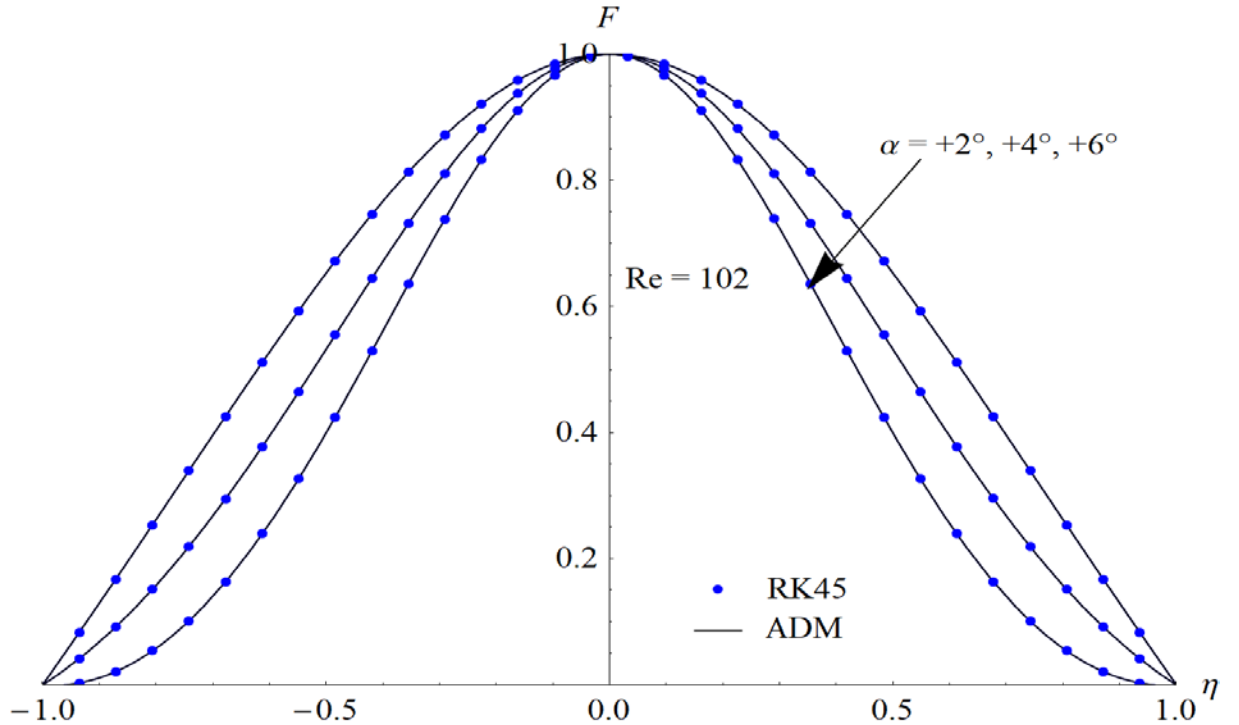


Figure IV.4 : Effet du demi angle α sur la distribution de vitesse dans un canal divergent lorsque $W_i = 0$ et $Re = 102$

Pour l'écoulement d'un fluide traditionnel dans un convergent (Figure IV.3), il apparaît notablement qu'il existe une certaine proportionnalité entre le champ dynamique et le demi angle α du canal. En effet, l'augmentation du paramètre α fait croître le gradient de pression favorable et par conséquent la vitesse de l'écoulement croît, ce qui conduit à la diminution de l'épaisseur de la couche limite. Par contre, pour un écoulement partout divergent tel que visualisé dans la Figure IV.4, un comportement tout à fait inverse à celui constaté pour l'écoulement convergent est observé. Il est alors bien clair que la vitesse de l'écoulement décroît avec l'augmentation de l'intensité de l'angle α et par conséquent l'épaisseur de la couche limite augmente se verra augmentée.

D'autre part, le retour d'écoulement (point de séparation) est fortement dépendant du demi-angle α . En effet, la séparation de l'écoulement est favorisée pour un écoulement divergent dont le gradient de pression adverse est élevé. Ce phénomène disparaît complètement pour un écoulement convergent.

IV.2.3 Évolution du coefficient de frottement

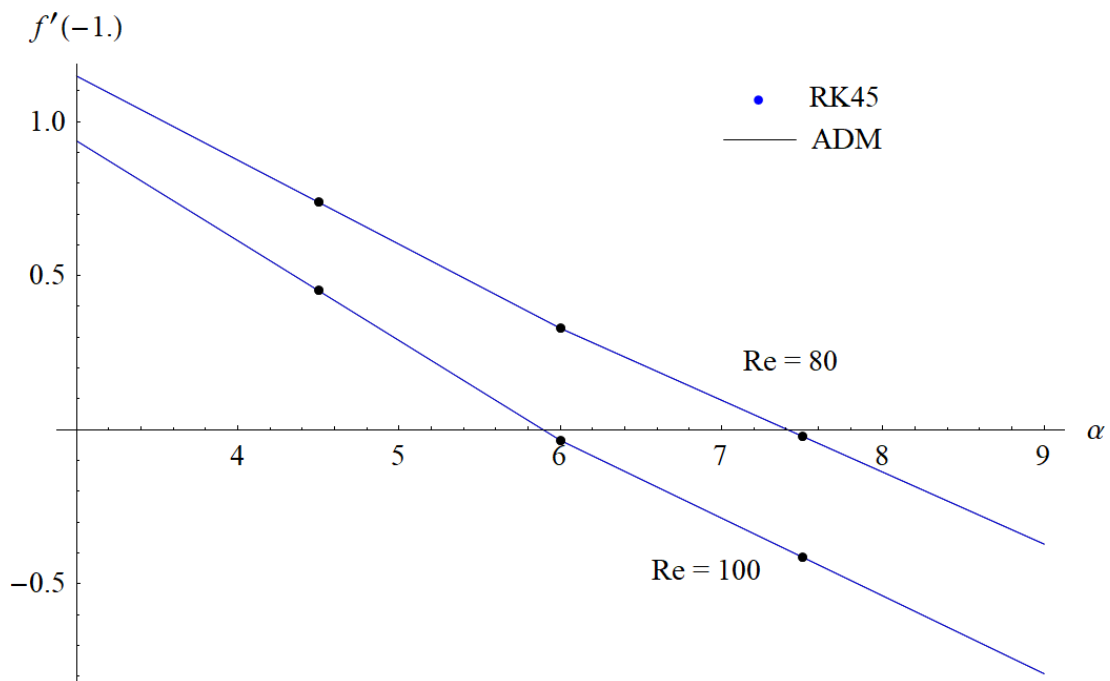


Figure IV.5 : Évolution du coefficient de frottement dans un canal divergent en fonction du nombre de Re et α pour un écoulement traditionnel lorsque $W_i = 0$.

Les effets du nombre de Reynolds Re et du demi-angle α sur l'évolution du coefficient de frottement C_f sont illustrés dans la Figure IV.5 pour l'écoulement traditionnel d'un fluide incompressible et visqueux dans un convergent/divergent. D'après les résultats obtenus, nous constatons que le point de retour dépend du signe du coefficient de frottement C_f . En effet, pour la Figure IV.5, le phénomène de retour d'écoulement apparaît avec le changement de signe du coefficient de frottement (valeurs négatives, $C_f < 0$). Il est donc clairement remarqué que l'accroissement du nombre de Reynolds Re et de l'angle α favorise et accélère l'apparition du phénomène de retour d'écoulement.

IV.3 Écoulement d'un fluide viscoélastique ($W_i \neq 0$)

IV.3.1 Effets de divers paramètres physiques

IV.3.1.1 Effet du nombre de Reynolds R_e

La figure IV.6 illustre l'influence du nombre de Reynolds sur le profil de vitesse pour un fluide viscoélastique du second ordre dans le cas d'un canal convergent ($\alpha = -3^\circ$) lorsque le nombre de Weissenberg $W_i = 0,6$. Les résultats obtenus révèlent que la vitesse du fluide viscoélastique apparaît comme une fonction croissante du nombre de Reynolds et donc l'épaisseur de la couche limite diminue, conduisant à des gradients plus élevés aux voisinages des plaques. Cependant, dans le cas d'un canal divergent ($\alpha = +3^\circ$), l'augmentation du nombre de Reynolds R_e conduit principalement à un retour d'écoulement comme indiqué sur la figure IV.7. En effet, pour un écoulement divergent, le débit du fluide est concentré au centre du canal avec de faibles gradients de vitesses proche des parois. En conséquence, l'épaisseur de la couche limite augmente considérablement avec l'accroissement du nombre de Reynolds R_e .

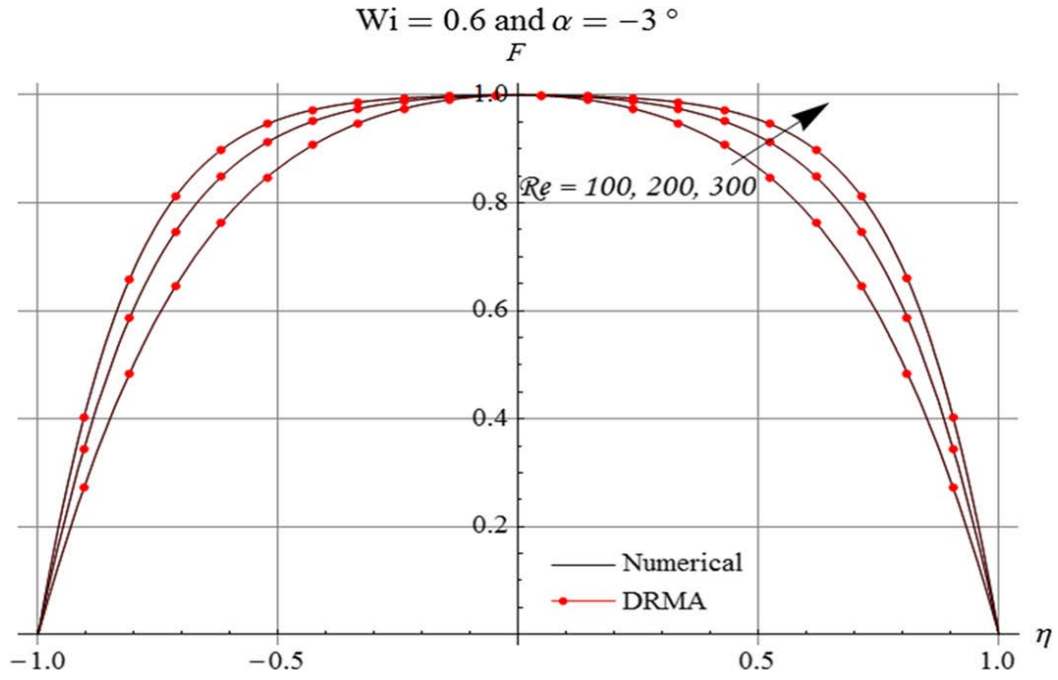


Figure IV.6 : Effet du nombre de Reynolds R_e sur la distribution de vitesse dans un canal convergent lorsque $W_i = 0,6$ et $\alpha = -3^\circ$

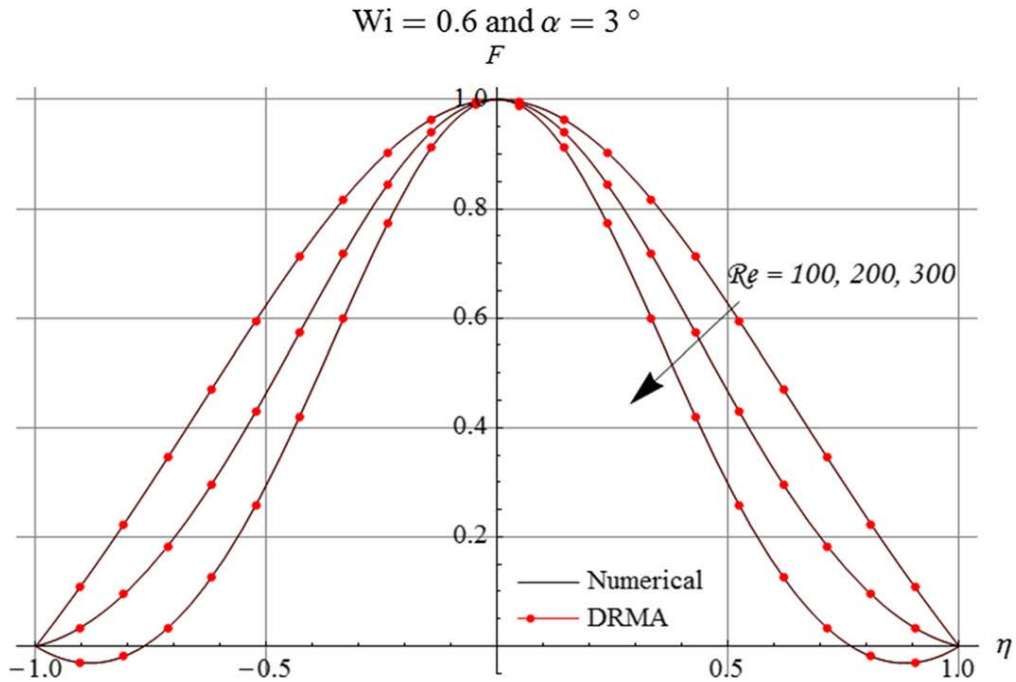


Figure IV.7 : Effet du nombre de Reynolds R_e sur la distribution de vitesse dans un canal divergent lorsque $W_i = 0,6$ et $\alpha = +3^\circ$

IV.3.1.2 Effet de l'angle α

Comme le montrent les Figures IV.8 et IV.9, l'effet du demi-angle α du canal sur la vitesse du fluide viscoélastique à l'intérieur des canaux convergents/divergents, présente un comportement similaire à celui observé pour les effets du nombre de Reynolds.

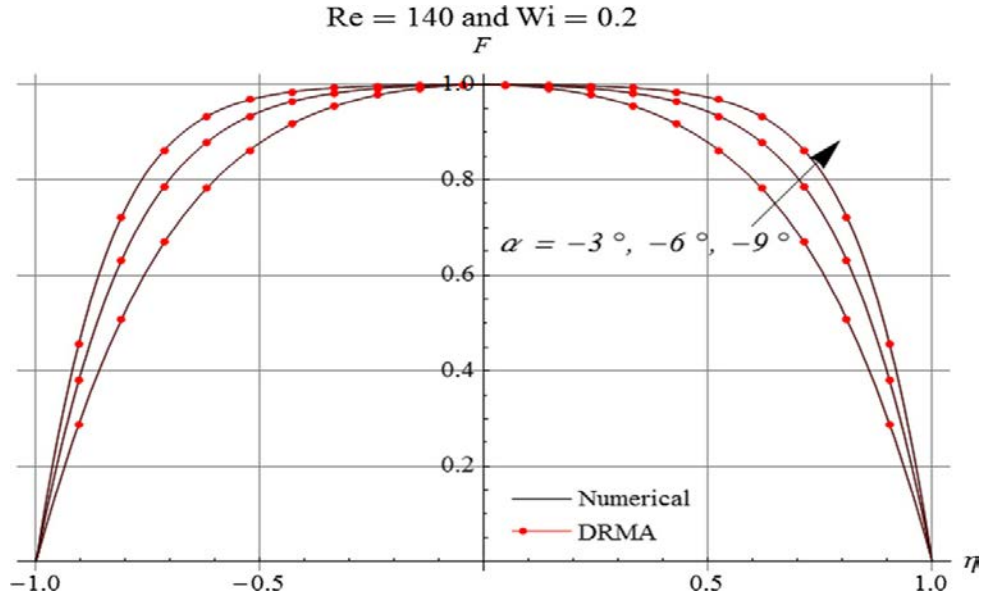


Figure IV.8 : Effet du demi-angle α sur le profil de vitesse dans le canal convergent lorsque $W_i = 0,2$ et $R_e = 140$

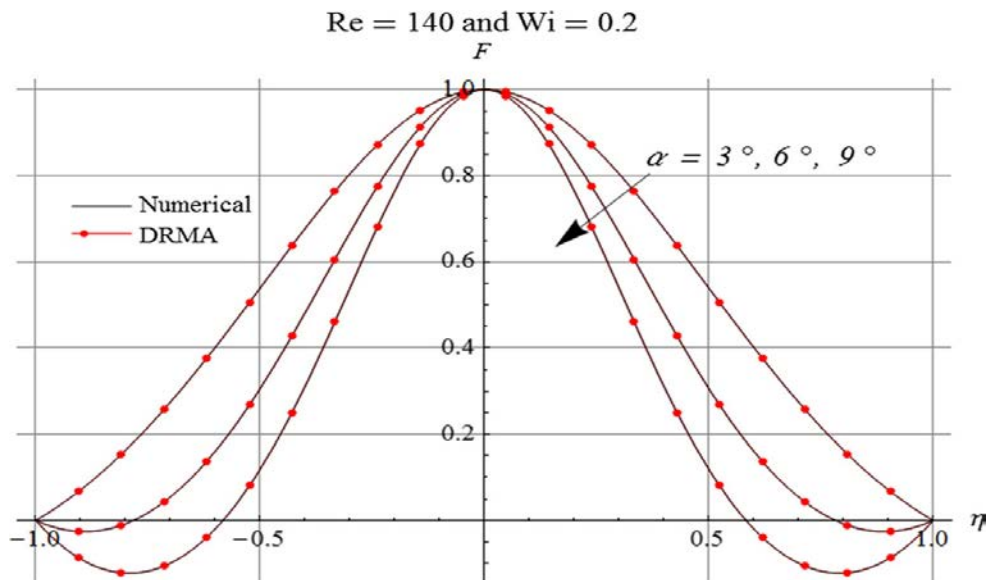


Figure IV.9 : Effet du demi-angle α sur le profil de vitesse dans le canal divergent lorsque $W_i = 0,2$ et $R_e = 140$

Il est clairement remarqué que le phénomène du retour d'écoulement apparaît clairement dans un écoulement divergent, mais il est totalement exclu dans le cas d'un écoulement dans un canal divergent convergent. Par ailleurs, dans le cas d'un écoulement convergent, les Figures IV.6 et IV.8 indiquent que de faibles valeurs du nombre de Weissenberg peuvent avoir un effet stabilisant significatif sur la vitesse du fluide. Cependant, dans l'écoulement divergeant, l'influence du nombre de Weissenberg est tout à fait différente. Les figures IV.7 et IV.9 indiquent que pour des valeurs supérieures de R_e et α (par exemple $R_e = 300$ et $\alpha = 9^\circ$), le phénomène de séparation dans l'écoulement peut se produire pour de petits nombres de Weissenberg. Il convient également de mentionner que le retour d'écoulement apparaît principalement dans le canal divergent pour un nombre de Reynolds R_e élevé, et de grandes valeurs du demi-angle α du canal.

IV.3.1.3 Effet du nombre de Weissenberg W_i

L'influence du nombre de Weissenberg W_i sur la vitesse du fluide viscoélastique pour un canal convergent/divergent (lorsque $R_e = 180$ et $\alpha = \mp 3^\circ$) est illustré par les Figure IV.10 et IV.11. Les résultats obtenus montrent clairement que la vitesse du fluide est une fonction croissante du nombre de Weissenberg W_i . Dans le cas d'un écoulement divergent comme indiqué sur la Figure IV.11 (lorsque $R_e = 180$ et $\alpha = +3^\circ$), l'augmentation de W_i de 0 jusqu'à 2 fait croître la vitesse du fluide et par conséquent l'écoulement devient progressivement stable.

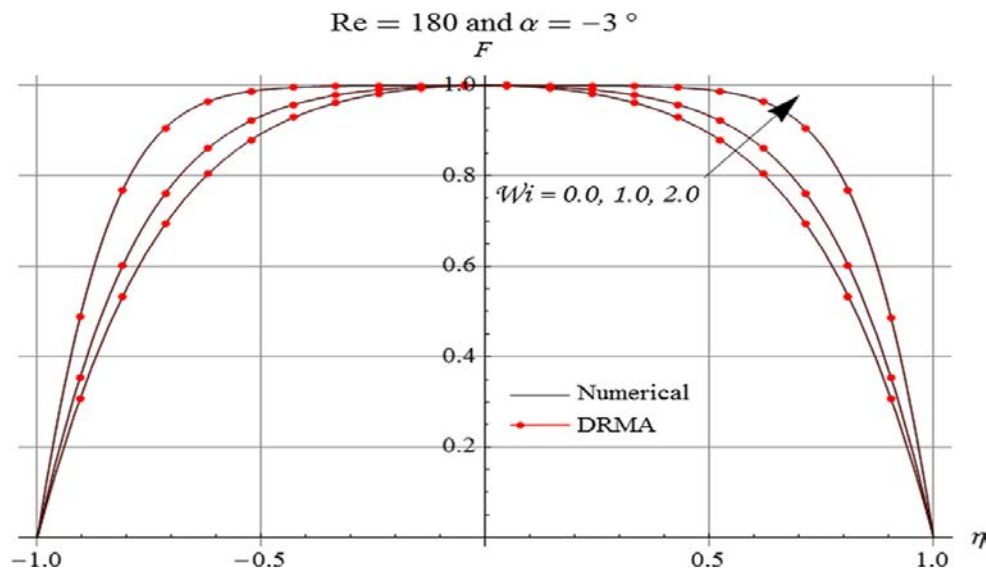


Figure IV.10 : Effet du nombre de Weissenberg W_i sur la distribution des vitesses dans un canal convergent lorsque $R_e = 180$ et $\alpha = -3^\circ$

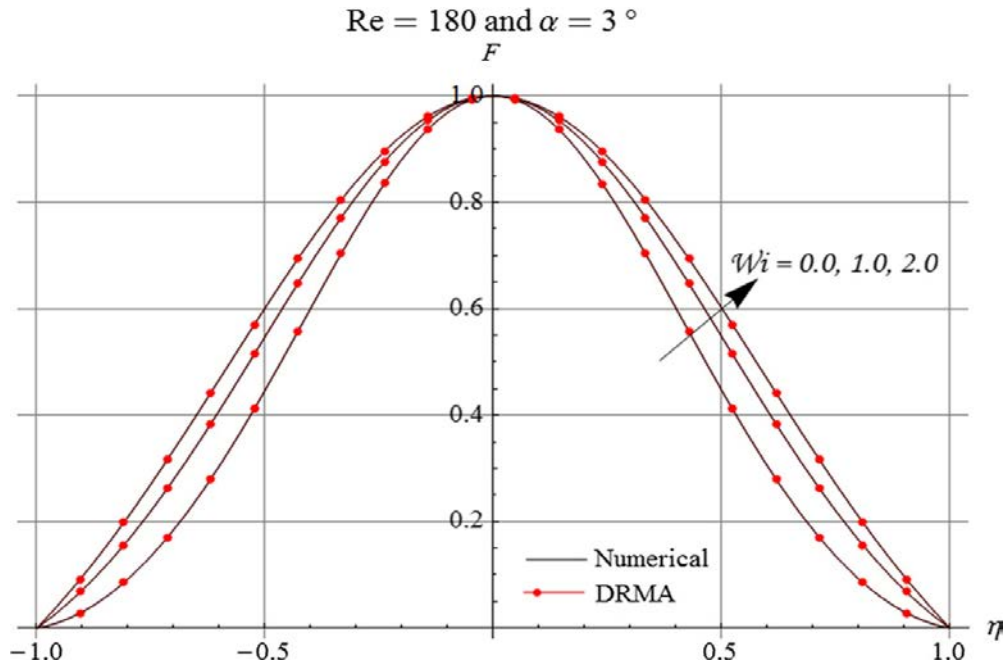


Figure IV.11 : Effet du nombre de Weissenberg W_i sur la distribution des vitesses dans un canal divergent lorsque $Re = 180$ et $\alpha = +3^\circ$

IV.3.1.4 Effet du nombre de Weissenberg W_i sur le nombre de Reynolds critique R_{ec}

La Figure IV.12 montre l'effet du nombre de Weissenberg W_i sur le nombre de Reynolds critique R_{ec} . En effet, les résultats montrent que R_{ec} augmente avec l'accroissement du nombre de Weissenberg W_i . Par ailleurs, comme le montre la Figure IV.13, visualisant l'impact du nombre de Weissenberg W_i sur l'évolution de R_{ec} , on constate que l'accroissement de W_i de 0 jusqu'à 2 conduit à l'augmentation du nombre de Reynolds critique R_{ec} . Cette augmentation a un effet direct sur le phénomène de séparation de l'écoulement. De la figure IV.13, il est également constaté, pour $\alpha = 3^\circ$, qu'une augmentation du nombre de Weissenberg W_i entraîne une augmentation du nombre de Reynolds critique R_{ec} (une augmentation estimée d'environ 28%) ; cependant, pour $\alpha = 5^\circ$, R_{ec} augmente d'environ 60% avec l'augmentation de l'intensité de W_i . Par conséquent, comme il est montré graphiquement, le phénomène de retour d'écoulement est entièrement disparu avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. Il est donc préférable d'utiliser un liquide possédant un degré d'élasticité peu élevé pour éviter la séparation de l'écoulement dans certaines configurations telles que les diffuseurs. En effet,

l'utilisation des additifs polymères peut accomplir cette tâche. Il est donc bien clair, qu'avec l'augmentation de la concentration d'additifs polymériques, la vitesse du fluide se trouve augmentée au voisinage de la paroi en raison des contraintes élastiques importantes créé dans la direction de l'écoulement.

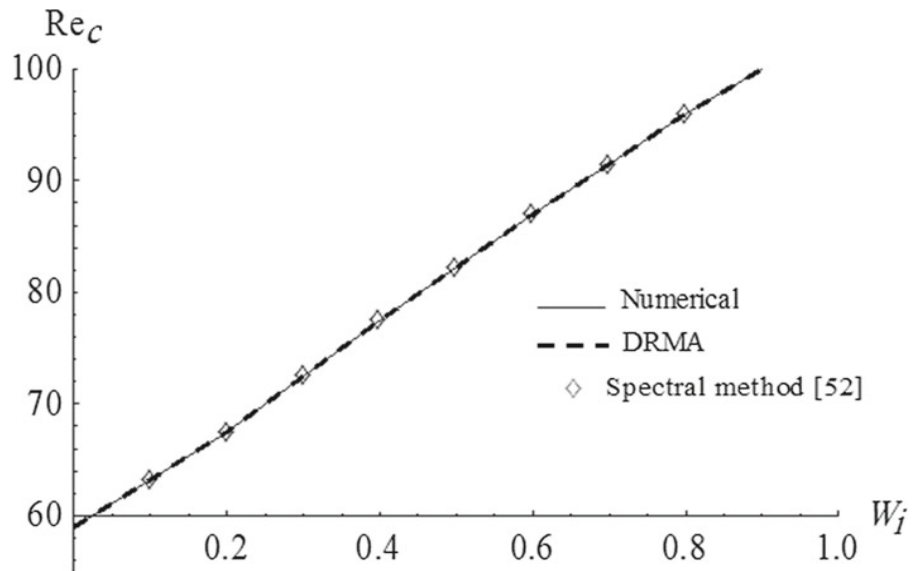


Figure IV.12 : Évolution du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction du nombre de Weissenberg W_i le dans un canal divergent ($\alpha = 10^\circ$)

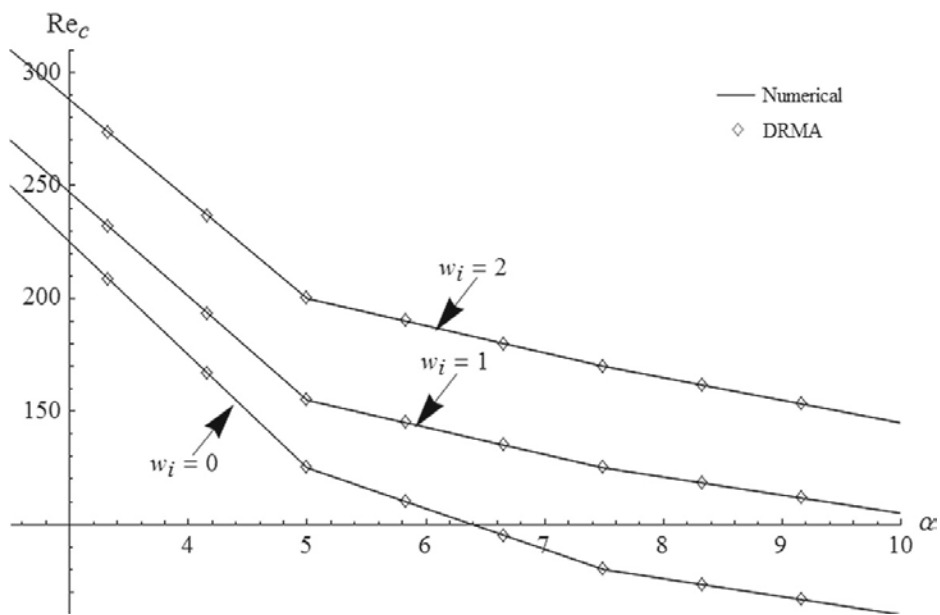


Figure IV.13 : Effet de α et W_i sur l'évolution de Re_c dans un canal divergent

IV.3.1.5 Évolution du coefficient de frottement C_f

Les effets de divers paramètres physiques tels que le nombre de Reynolds R_e , le demi-angle α et le nombre de Weissenberg W_i sur l'évolution du coefficient de frottement sont illustrés par les Figures IV.14, IV.15 et IV.16. Les résultats obtenus montrent clairement que le coefficient de frottement diminue avec l'accroissement des paramètres R_e et α . Autrement dit, le retour d'écoulement commence avec la génération des valeurs négatives du coefficient de frottement comme montré sur les Figures IV.14, IV.15 et IV.16. Cependant, les Figures IV.15 et IV.16 montrent que l'augmentation du nombre de Weissenberg W_i retarde la séparation de l'écoulement et par conséquent le phénomène de retour d'écoulement se trouve entièrement exclu.

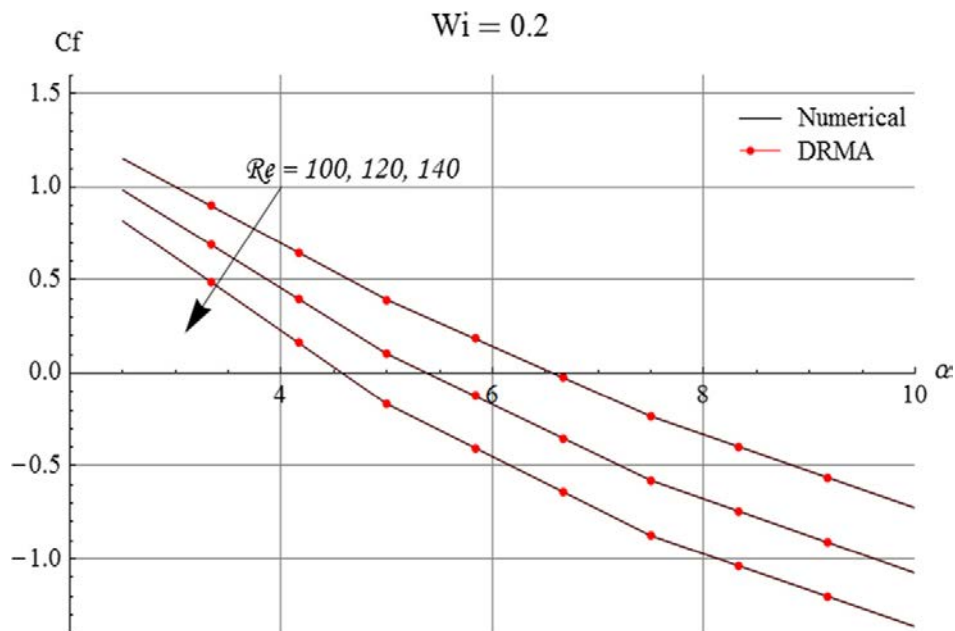


Figure IV.14 : Évolution du coefficient C_f en fonction du demi angle α sous l'effet du nombre de Reynolds R_e lorsque $W_i = 0,2$

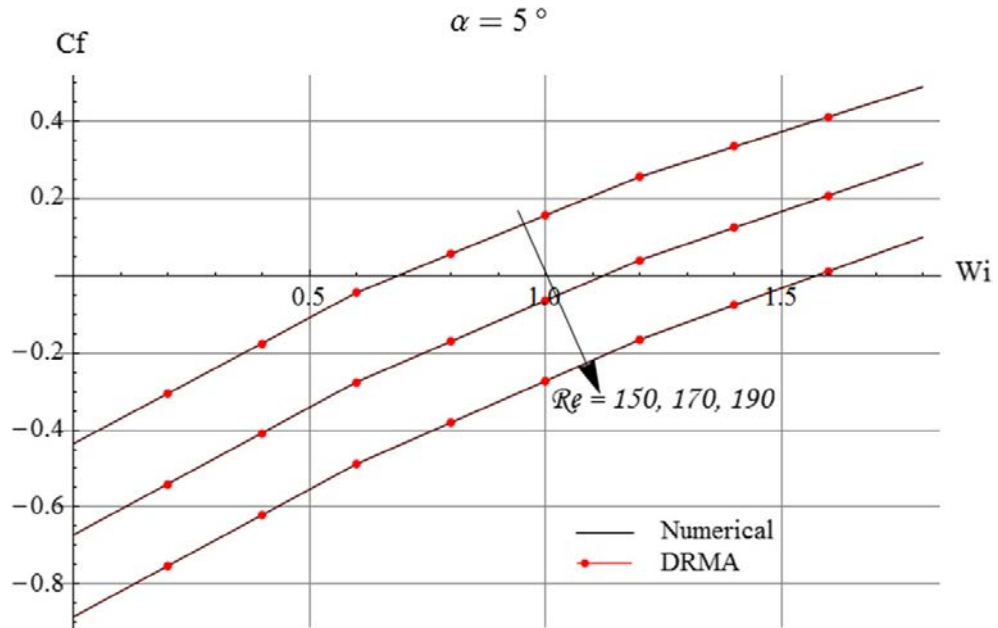


Figure IV.15 : Évolution du coefficient C_f en fonction du nombre de Weissenberg W_i sous l'effet du nombre de Reynolds Re lorsque $\alpha = +5^\circ$

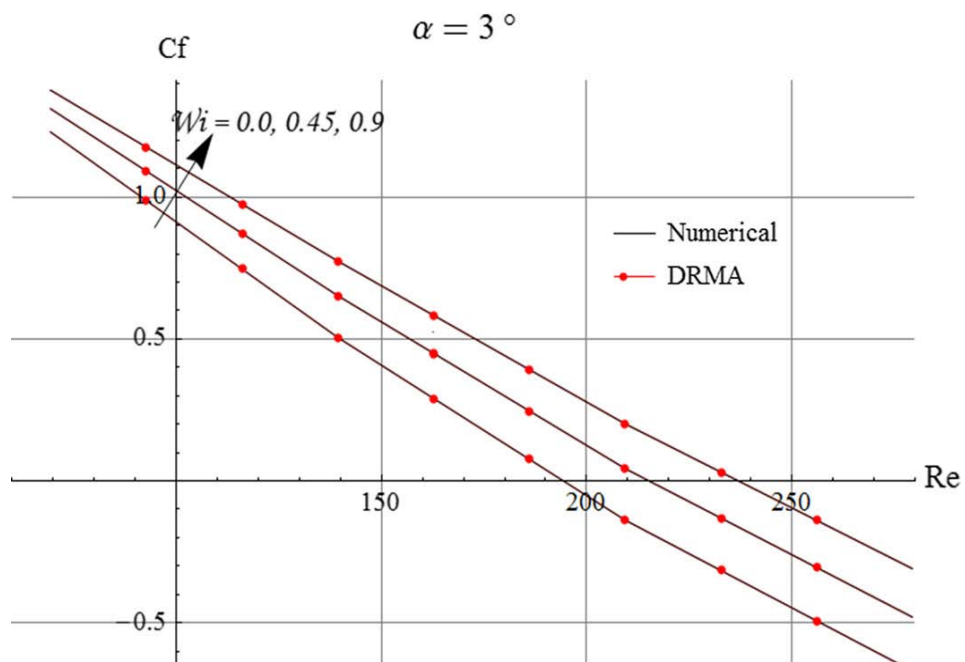


Figure IV.16 : Évolution du coefficient de frottement C_f en fonction du nombre de Reynolds Re sous l'effet du nombre de Weissenberg W_i lorsque $\alpha = +3^\circ$

IV.4 Comparaison des résultats

Afin de tester la fiabilité de l'algorithme de Duan-Rach adopté, une comparaison des résultats obtenus par la technique DRMA avec ceux de la méthode ADM et du traitement numérique RK45 a été faite.

Comme visualisé dans les Tableaux IV.1 et IV.2, pour les canaux convergents et divergents, les résultats sont similaires et justifiant ainsi la validité, l'applicabilité et la grande précision de la technique DRMA.

Par ailleurs, selon les résultats acquis et illustrés par les Tableaux IV.3 et IV.4, une excellente concordance est clairement observée entre les résultats analytiques DRMA et ceux reportés dans la littérature scientifique obtenus par la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) et de décomposition d'Adomian (ADM).

De plus, la figure IV.17 montre l'évolution de l'erreur entre la technique DRMA et la solution numérique utilisée comme guide. Il est à préciser que la méthode DRMA converge rapidement et la 9^{ème} approximation donne une meilleure précision. Finalement, les résultats de la Figure IV.18, pour le cas d'un écoulement classique dans un convergent/divergent, montrent une excellente concordance entre les techniques DRMA et ADM adoptées dans cette étude.

η	$W_i = 0.1, R_e = 4$ and $\alpha = 5^\circ$		
	$F^{Numérique}$	F^{DRMA}	$ F^{numérique} - F^{DRMA} $
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	0.9895300324205666	0.9895300364641372	4.0435×10^{-9}
0.2	0.9581909427231841	0.9581909505551663	7.8319×10^{-9}
0.3	0.9061906684579893	0.9061906788564463	1.0398×10^{-8}
0.4	0.8338609514058313	0.8338609652212889	1.3815×10^{-8}
0.5	0.7416354749597093	0.7416354976383418	2.2678×10^{-8}
0.6	0.6300199401053593	0.6300199707352995	3.0629×10^{-8}
0.7	0.4995545811475104	0.4995546199039617	3.8756×10^{-8}
0.8	0.3507697123508108	0.3507697538611038	4.1510×10^{-8}
0.9	0.1841346221095064	0.1841346657025901	4.3593×10^{-8}
1.0	0.0	0.0	0.0

Tableau IV.1 : Comparaison entre les résultats analytiques et numériques
(cas d'un écoulement divergent)

η	$W_i = 0.1, R_e = 4$ and $\alpha = 5^\circ$		
	$F^{Numérique}$	F^{DRMA}	$ F^{numérique} - F^{DRMA} $
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	0.9904530002185159	0.9904530044903361	4.2718×10^{-9}
0.2	0.9617439672275536	0.9617439679865903	7.5903×10^{-10}
0.3	0.9136726858692538	0.913672683452572	2.4166×10^{-9}
0.4	0.8459187403063412	0.8459187332136736	7.0926×10^{-9}
0.5	0.7580617963641878	0.7580617740976469	2.2266×10^{-8}
0.6	0.6496106959019802	0.6496106589682232	3.6933×10^{-8}
0.7	0.5200420180828118	0.5200419614722137	5.6610×10^{-8}
0.8	0.3688484719128555	0.3688484068159975	6.5096×10^{-8}
0.9	0.1955975482945193	0.1955974750177266	7.3276×10^{-8}
1.0	0.0	0.0	0.0

Tableau IV.2 : Comparaison entre les résultats analytiques et numériques (cas d'un écoulement convergent)

η	Solution numérique	Référence [52]	HPM [53]	ADM	Présente étude (DRMA)
$R_e = 1, \alpha = -\frac{\pi}{8}$ et $W_i = 0.2$					
0.2	0.962287	0.963548	0.9619	0.962282	0.962282
0.4	0.847183	0.846997	0.8459	0.847167	0.847167
0.6	0.650211	0.648604	0.6485	0.650193	0.650199
0.8	0.367687	0.368994	0.3663	0.367674	0.340682

Tableau IV.3 : Comparaison entre la solution DRMA, la solution numérique et les données de la littérature disponible (canal convergent)

η	Solution numérique	Référence [52]	HPM [53]	ADM	Présente étude (DRMA)
$Re = 1, \alpha = -\frac{\pi}{8}$ et $Wi = 0.2$					
0.2	0.956554	0.949341	0.956201	0.956547	0.956552
0.4	0.828098	0.830153	0.826919	0.828076	0.828088
0.6	0.620051	0.623 252	0.618181	0.620023	0.620034
0.8	0.340697	0.347518	0.339019	0.340678	0.340682

Tableau IV.4 : Comparaison entre la solution DRMA, la solution numérique et les données de la littérature disponible (canal divergent)

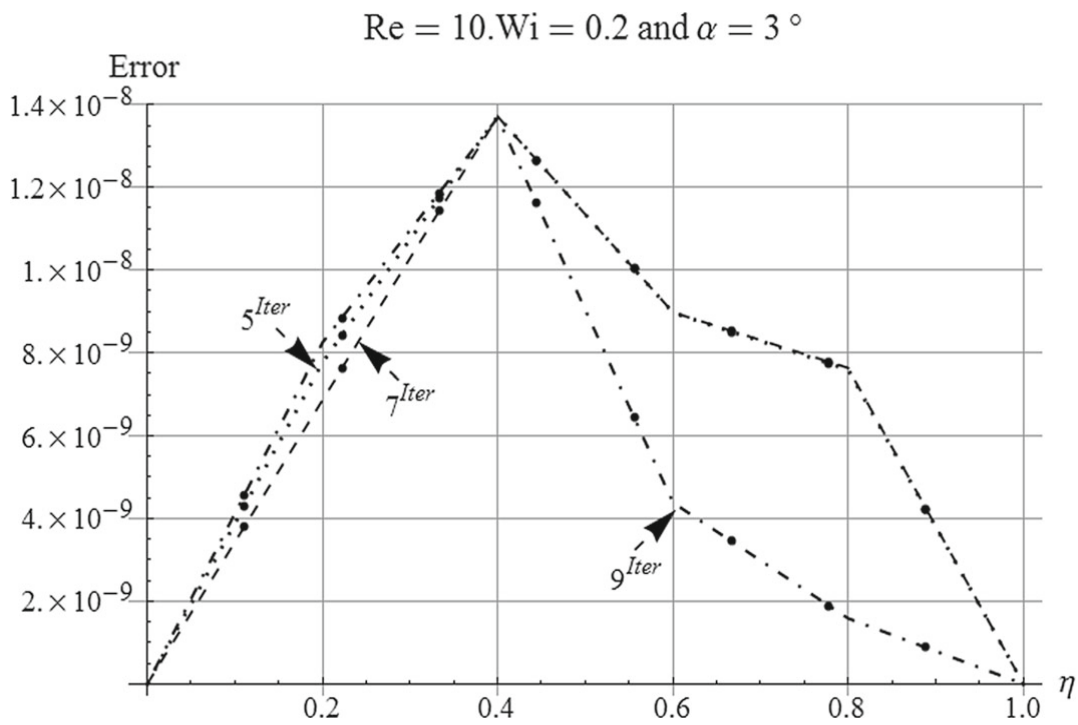


Figure IV.17 : Erreur de la méthode DRMA en comparaison avec la solution numérique

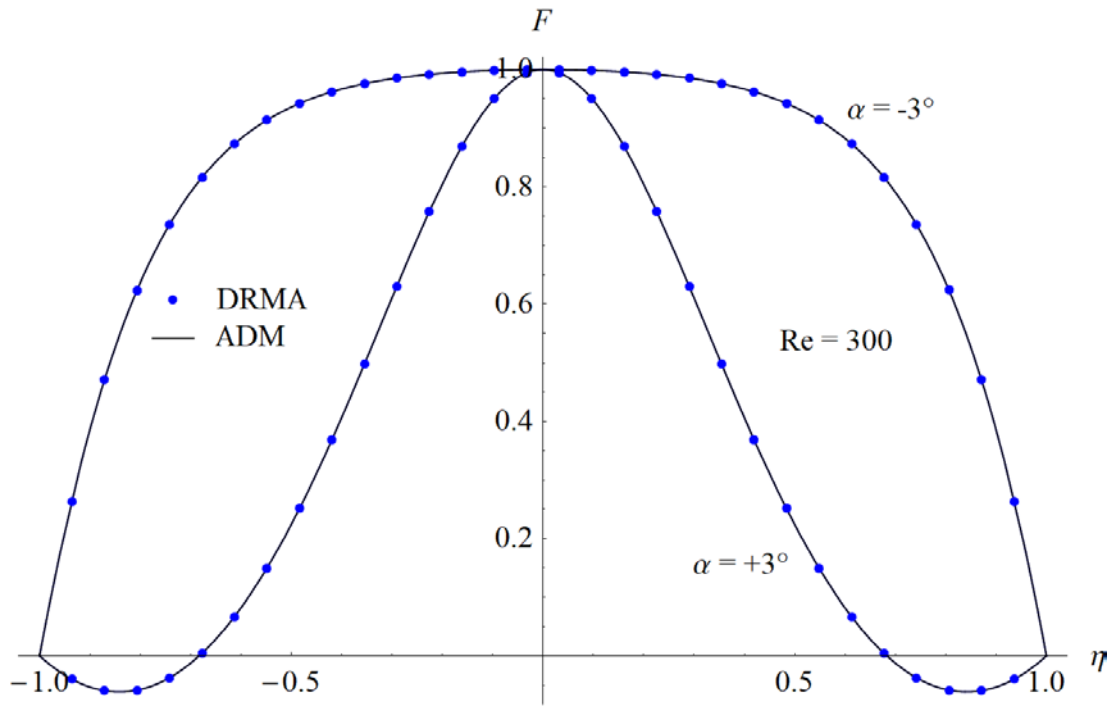


Figure IV.18 : Comparaison des solutions analytiques DRMA et ADM pour la distribution des vitesses dans un canal convergent/divergent

Bibliographie

- [1] G. B. Jeffery, *The two-dimensional steady motion of a viscous fluid*, Philos. Mag. 29, 455–465 (1915).
- [2] G. Hamel, *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten*, Jahresbericht der deutschen mathematikervereinigung, 25, 34–60 (1917).
- [3] L. Rosenhead, *The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls*, Proc. R. Soc. Lond., A 175, 436–467 (1940).
- [4] K. Millsaps, K. Pohlhausen, *Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between non-parallel planes*, Walls. J. Aeronaut. Sci., 20, 187–196 (1953).
- [5] L. E. Fraenkel, *Laminar flow in symmetrical channels with slightly curved walls. I. On the Jeffery–Hamel solutions for flow between plane walls*, Proc. R. Soc. Lond., A 267, 119–138 (1963).
- [6] M. Sheikholeslami, D. D. Ganji, H. R. Ashorynejad, H. B. Rokni, *Analytical investigation of Jeffery–Hamel flow with high magnetic field and nanoparticle by Adomian decomposition method*, Appl. Math. Mech., Engl. Ed., 33(1), 1553–1564 (2012).
- [7] M. Hatami, M. Sheikholeslami, M. Hosseini, D. D. Ganji, *Analytical investigation of MHD nanofluid flow in non-parallel walls*, J. Mol. Liq., 194, 251–259 (2014).
- [8] J. F. Uribe, E. D. Herrera, A. Bravo, R. P. Fabi, *On the stability of Jeffery Hamel flow*, Phys. Fluids, 9(9) 2798–2800 (1997).
- [9] L. J. Sobey, P. G. Drazin, *Bifurcation of two-dimensional channel flows*, J. Fluid Mech., 171, 263–287 (1986).
- [10] W. Banks, P. Drazin, M. Zaturka, *On perturbations of Jeffery–Hamel flow*, J. Fluid Mech., 186, 559–581(1988).

- [11] M. Hamadiche, J. Scott, D. Jeandel, *Temporal stability of Jeffery-Hamel flow*, J. Fluid Mech., 268, 71–88(1994).
- [12] O. D. Makinde, P. Y. Mhone, *Temporal stability of small disturbances in MHD Jeffery–Hamel flows*, Comput. Math. Appl., 53(1), 128–136 (2007).
- [13] F. M. Hady, F. S. Ibrahim, S. M. Abdel-Gaied, M. R. Eid, *Influence of yield stress on free convective boundary-layer flow of a non-Newtonian nanofluid past a vertical plate in a porous medium*, Mech. Sci. Technol., 25(8), 2043–2050 (2011).
- [14] F. M. Hady, F. S. Ibrahim, S. M. Abdel-Gaied, M. R. Eid, *Boundary-layer non-Newtonian flow over a vertical plate in a porous medium saturated with a nanofluid*, Appl. Math. Mech., 32(12), 1577–1586 (2011).
- [15] F. M. Hady, F. S. Ibrahim, S. M. Abdel-Gaied, M. R. Eid, *Radiation effect on viscous flow of a nanofluid and heat transfer over a non-linearly stretching sheet*, Nanoscale Res. Lett., 7, 229–242 (2012).
- [16] T. Hayat, M. Waqas, S. Shehzad, A. Alsaedi, *Mixed convection flow of a Burgers nanofluid in the presence of stratifications and heat generation/absorption*, Eur. Phys. J. Plus, 131(8), 253 (2016).
- [17] M. R. Eid, *Chemical reaction effect on MHD boundary-layer flow of two-phase nanofluid model over an exponentially stretching sheet with a heat generation*, J. Mol. Liq., 220, 718–725 (2016).
- [18] T. Hayat, M. Waqas, S. Shehzad, A. Alsaedi, *On 2D stratified flow of an Oldroyd-B fluid with chemical reaction: an application of non-Fourier heat flux theory*, J. Mol. Liq., 223, 566–571 (2016).
- [19] T. Hayat, M. Zubair, M. Waqas, A. Alsaedi, M. Ayub, *On doubly stratified chemically reactive flow of Powell–Eyring liquid subject to non-Fourier heat flux theory*, Results Phys., 7, 99–106 (2017).
- [20] M. R. Eid, *Time-dependent flow of water-NPs over a stretching sheet in a saturated porous medium in the stagnation-point region in the presence of chemical reaction*, J. Nanofluids, 6(3), 550–557 (2017).
- [21] M. R. Eid, S. R. Mishra, *Exothermically reacting of non-Newtonian fluid flow over a permeable non-linear stretching vertical surface with heat and mass fluxes*, Comput. Therm. Sci., 9(4), 283–296 (2017).

- [22] M. R. Eid, K. L. Mahny, *Unsteady MHD heat and mass transfer of a non-Newtonian nanofluid flow of a two-phase model over a permeable stretching wall with heat generation/absorption*, Adv. Powder Technol., 28(11), 3063–3073 (2017).
- [23] M. R. Eid, A. Alsaedi, T. Muhammad, T. Hayat, *Comprehensive analysis of heat transfer of gold-blood nanofluid (Sisko-model) with thermal radiation*, Results Phys., 7, 4388–4393 (2017).
- [24] M. R. Eid, K. L. Mahny, *Flow and heat transfer in a porous medium saturated with a Sisko nanofluid over a non-linearly stretching sheet with heat generation/absorption*, Heat Transf. Asian Res., 47, 54–71 (2018).
- [25] M. R. Eid, K. L. Mahny, T. Muhammad, M. Sheikholeslami, *Numerical treatment for Carreau nanofluid flow over a porous nonlinear stretching surface*, Results Phys., 8, 1185–1193 (2018)
- [26] M. R. Eid, O. D. Makinde, *Solar radiation effect on a magneto nanofluid flow in a porous medium with chemically reactive species*, Int. J. Chem. React. Eng., 16(9), 20170212 (2018).
- [27] T. Muhammad, D. Lu, B. Mahanthesh, M. R. Eid, M. Ramzan, A. Dar, *Significance of Darcy–Forchheimer porous medium in nanofluid through carbon nanotubes*, Commun. Theor. Phys., 70, 361–366 (2018).
- [28] A. F. Al-Hossainy, M. R. Eid, MSh Zoromba, *SQLM for external yield stress effect on 3D MHD nanofluid flow in a porous medium*, Phys. Scr., 94, 105208 (2019).
- [29] M. Waqas, *Simulation of revised nanofluid model in the stagnation region of cross fluid by expanding contracting cylinder*, Int. J. Numer. Method Heat Fluid Flow (2019). <https://doi.org/10.1108/HFF-12-2018-0797>
- [30] M. R. Eid, K. Mahny, A. Dar, T. Muhammad, *Numerical study for Carreau nanofluid flow over a convectively heated nonlinear stretching surface with chemically reactive species*, Phys. A Stat. Mech. Appl., 540, 123063 (2020).
- [31] M. Waqas, *A mathematical and computational framework for heat transfer analysis of ferromagnetic non-Newtonian liquid subjected to heterogeneous and homogeneous reactions*, J. Magn. Mater., 493, 165646 (2020).
- [32] R. T. Balmer, J. J. Kauzlarich, *Similarity solutions, for converging or diverging steady flow of non-Newtonian elastic power law fluids with wall suction or injection*, AIChE J., 17, 1181–1188 (1971).

- [33] T. H. Forsyth, *Converging flow of polymers*, Polym. Plast. Technol. Eng., 6, 101–131 (1976).
- [34] K. Rajagopal, A. Gupta, J. Vossoughi, *Slow flow of an incompressible third grade fluid in a converging/diverging channel*, J. Technol. 28, 27 (1984).
- [35] A. K. Chakraborty, A. B. Metzner, *Sink flows of viscoelastic fluids*, J. Rheol. 30, 30 (1986).
- [36] R. K. Bhatnagar, K. R. Rajagopal, G. Gupta, *Flow of an Oldroyd-B fluid between intersecting planes*, J. Non-Newton Fluid. Mech., 46, 49–67 (1993).
- [37] S. Baris, *Flow of a second-grade visco-elastic fluid in a porous converging channel*, Turk. J. Eng. Environ. Sci., 27, 73–81 (2003).
- [38] S. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method* (Chapman and Hall/CRC, 2003). ISBN 0203491165.
- [39] S. J. Liao, K. F. Cheung, *Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water*, J. Eng. Math., 45(2), 105–116 (2003).
- [40] J. H. He, X. H. Wu, *Variational iteration method: new development and applications*, Comput. Math. Appl. 54, 881–894 (2007).
- [41] J. H. He, *Variational iteration method-Some recent results and new interpretations*, Comput. Appl. Math. 207, 3–17 (2007).
- [42] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, (Springer, Berlin, 2013).
- [43] J. S. Duan, R. Rach, *A new modification of the Adomian decomposition method for solving boundaryvalue problems for higher order nonlinear differential equations*, Appl. Math. Comput. 218, 4090–4118 (2011).
- [44] A. Dib, A. Haiahem, B. Bou-said, *An analytical solution of theMHDJeffery–Hamel flow by the modified Adomian decomposition method*, Comput. Fluids 102(10), 111–115 (2014).
- [45] A. S. Dogonchi, D. D. Ganji, *Impact of Cattaneo–Christov heat flux on MHD nanofluid flow and heat transfer between parallel plates considering thermal radiation effect*, J. Taiwan Inst. Chem. Eng. 80, 52–63 (2017).
- [46] M. R. Eid, A. Al-Hossainy, M. S. Zoromba, *FEM for blood-based SWCNTs flow through a circular cylinder in a porous medium with electromagnetic radiatio Commun, Theor. Phys. 71(12), 1425 (2019).*

- [47] S. Lahmar, M. Kezzar, M. R. Eid, M. R. Sari, *Heat transfer of squeezing unsteady nanofluid flow under the effects of an inclined magnetic field and variable thermal conductivity*, Phys. A Stat. Mech. Appl. 540,123138 (2020).
- [48] A. I. Aliyu, M. Al-Qurashi, *Invariant subspace and approximate analytic solutions of a fractional model of convective longitudinal fins in thermal conductivity*, Eur. Phys. J. Plus 134(9), 417 (2019).
- [49] R. G. Larson, *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions* (Butterworth Publishing Co., Boston, 1988).
- [50] R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. I (Wiley, New York, 1987).
- [51] N. Khabazi, *On the Use of Polymeric Additives to Delay Flow Separation in Diverging Channels* (University of Tehran, Tehran, 2004).
- [52] K. Sadeghy, N. Khabazi, S.-M. Taghavi, *Magnetohydrodynamic (MHD) flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels*, Int. J. Eng. Sci. 45(11), 923–938 (2007).
- [53] M. Shadloo, A. Kimiaefar, *Application of homotopy perturbation method to find an analytical solution formagnetohydrodynamic flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels*, Proc. Inst.Mech.Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci. 225(2), 347–353 (2011).
- [54] F. Kreitk, *Mechanical Engineering Handbook*, CRC Press LLC, 1999.
- [55] M. J. Crochet, A. R. Davies, K. Walters, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*, Elsevier Amsterdam — Oxford, New York — Tokyo, 1984.
- [56] A. A. Collyer, *Time independent fluids*, Department of Applied Physics, Sheffield Polytechn., 1973.
- [57] A. H. P. Skelland, *Écoulement non newtonien et transfert de chaleur*, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [58] Q. D. Nguyen, D. V. Boger, *Thixotropic behaviou of constricted bauxite residue suspensions*, Rheologica Acta, 24 : 427- 437, 1985.
- [59] H. Freundlich, F. Juliusburger, *Thixotropic influenced by the orientation of anisometric particles in sols and suspensions*, Journal of transaction of the faraday society, Vol. 31, 1935.

- [60] M. Kezzar, *Contribution à l'étude de l'écoulement de Jeffrey-Hamel par l'utilisation des techniques de décomposition les méthodes de traitement numérique Runge-Kutta et Tir*, Thèse de Doctorat, Université 20 aout 1955 – Skikda, 2018.
- [61] M. jalili, *Analysis of Newtonian/Non-Newtonian Fluids by Lie Group Theoretic Methods*, These de PhD, COMSATS Institute of Information Technology, Islamabad (2012).

ANNEXE

Production scientifique

Publication internationale

Auteurs: Mounir Gahgah, Mohamed R. Sari, Mohamed Kezzar & Mohamed R. Eid

Titre : *Duan–Rach modified Adomian decomposition method (DRMA) for viscoelastic fluid flow between nonparallel plane walls*

European Physical Journal Plus, Vol. 135 / 2 - February 2020, DOI: [10.1140/epjp/s13360-020-00250-w](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00250-w)

Article number: 250 (2020)

Editor: Springer



Duan–Rach modified Adomian decomposition method (DRMA) for viscoelastic fluid flow between nonparallel plane walls

Mounir Gahgah¹, Mohamed R. Sari², Mohamed Kezzar¹, Mohamed R. Eid^{3,4,a} 

¹ Mechanical Engineering Department, University of Skikda, El Hadaiek Road, B. O. 26, 21000 Skikda, Algeria

² Mechanical Engineering Department, University of Badji Mokhtar of Annaba, B. O. 12, 23000 Annaba, Algeria

³ Department of Mathematics, Faculty of Science, New Valley University, El-Kharga, Al-Wadi Al-Gadid 72511, Egypt

⁴ Department of Mathematics, Faculty of Science, Northern Border University, Arar 1321, Saudi Arabia

Received: 10 December 2019 / Accepted: 29 January 2020

© Società Italiana di Fisica and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2020

Abstract The main goal of this work is to examine the viscoelastic fluid flow velocity and skin friction coefficient through the Duan–Rach modified Adomian decomposition technique. The effects of various physical parameters of interest such as Reynolds number (Re), channel half-angle (α) and Weissenberg number (W_i) are investigated. Results revealed that the reversal flow is entirely excluded with the increase in Weissenberg number W_i for both convergent and divergent flows. Afterward, the earned analytical data are compared with numerical data and those available in the literature. From this comparison, results indicate a great agreement and therefore support the Duan–Rach approach's applicability, validity and higher accuracy.

Abbreviations

DRMA	Duan–Rach modified Adomian decomposition method
ADM	Adomian decomposition method
RKM	Runge–Kutta method
MHD	Magnetohydrodynamic
J–HN	Jeffery–Hamel nanofluid
LSM	Least square method
HAM	Homotopy analysis method
VIM	Variational iteration method
DRA	Duan–Rach approach
DTM	Differential transformation method
FEM	Finite element method
DE's	Differential equations
HPM	Homotopy perturbation method

^a e-mail: m_r_eid@yahoo.com

1 Introduction

The steady, two-dimensional fluid flow between nonparallel plates is well proven to be one of the few exact solutions for the Navier–Stokes equations. It is also well recognized. Firstly, Jeffery [1] and Hamel [2] provided the mathematical formulation of this flow. Thereafter, a wide number of studies were undertaken that resolve the nonlinear formulations arising from Jeffery–Hamel flow. In fact, in terms of the Jacobian elliptical functions, Rosenhead [3] offers a solution to Jeffery–Hamel flow. Millsaps and Pohlhausen [4] studied numerically the heat transfer Jeffery–Hamel problem using finite difference method and explored the exact solution of thermal distributions. Fraenkel [5] examined the laminar flow in symmetrical channels with marginally curved walls. The effects on Jeffery–Hamel flow of magnetic field and NPs by Adomian decomposition method (ADM) have been examined by [6]. Their results are very much in line with the numerical Runge–Kutta (RKM) method. Hatami et al. [7] utilized various analytical approaches to solve the formula that governs the flow of magnetohydrodynamic (MHD) nanofluid Jeffery–Hamel (J–HN). The least square method (LSM) was found to be more reliable when the studied problem was resolved. On the other hand, the Jeffery–Hamel flows stability between nonparallel plates has grabbed the interest of the researcher’s society and was well analyzed by many authors [8–12]. Many investigators, including Refs. [13–31], have recently examined the fluid flow problems. On the other hand, non-Newtonian flow via convergence/divergence channels is of extreme importance and has attracted the interest of researcher’s group [32–37].

Recently, to analytically solve the nonlinear boundary problems, various methods have been developed, such as homotopy method (HAM) [38, 39], variational iteration method (VIM) [40, 41] and ADM [42]. In 1980s, AMD was discovered by Georges Adomian, which is one of the powerful methods. The method solution is a quick-converging array of elegantly computable terms, offers much simpler analytical approximations and requires no lines, choice or disturbance. Thereafter, various modifications were made on the standard ADM. The Duan–Rach approach (DRA) [43] was considered as one of the reliable modified decomposition methods. In fact, DRA method is mainly used to solve a large class of multi-order and multipoint nonlinear boundary value problems [44, 45]. Eid et al. [46] probed the magnetoflow of radiation and heat generation via a circular cylinder of SWCNTs into blood as a base fluid by FEM. Lahmar et al. [47] studied the thermal features and flow between two parallel plates of a straightening time-dependent nanoliquid (magnetite–water) by utilizing DTM. Fractional system of longitudinal convective fins in thermal conductivity using the invariant subspace approach has been elaborated in [48].

This work aims to model and simulate the dynamic behavior of Jeffery–Hamel viscoelastic liquid flows between nonparallel surfaces. Firstly, the mathematical formulation allowed us to describe an ordinary differential nonlinear equation of third order. Thereafter, the obtained equation arising from mathematical modeling was solved numerically via RKM featuring shooting technique and analytically via a new modified technique of computation called Duan–Rach modified Adomian method (DRMA). The computer codes were developed primarily to investigate the viscoelastic fluid dynamics in nonparallel plane surfaces. The effects of various physical parameters of interest such as Reynolds number Re , Weissenberg number W_i and channel half-angle α on velocity distribution and skin friction coefficient for both converging and diverging flows have been investigated. Also, a comparative study was performed in order to test the accuracy, applicability and efficiency of the adopted DRMA.

2 Mathematical description

The geometrical configuration of the studied viscoelastic fluid flow between nonparallel plane walls is drawn in Fig. 1. The flow is assumed to be constant along the z -direction, and we presume a simple radial motion; i.e., we can write $V_r = V(r, \theta)$; $V_\theta = V_Z = 0$.

$$\nabla \cdot V = 0, \tag{1}$$

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V \right] = -\nabla P + \nabla \cdot \tau, \tag{2}$$

where V is the fluid velocity, ρ is the fluid density, P is the fluid pressure and τ is the extra stress tensor.

The reduced forms of continuity and the equations of Navier–Stokes for steady laminar and pure radial circulation are given in cylindrical coordinates (r, θ, z) as follows:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) = 0, \tag{3}$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right), \tag{4}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right), \tag{5}$$

Depending on Eq. (3), we declare that the amount (rV_r) is based on θ and we can write:

$$rV_r = f(\theta). \tag{6}$$

The flowing visco-elastic fluid obeys the second-order form. In this case, the additional stress tensor, τ , can be associated with the deformation field as [49]:

$$\tau = \alpha_1 D + \alpha_2 D^\nabla + \alpha_3 D \cdot D, \tag{7}$$

where D is the velocity gradient tensor deviatoric part which is given in the following formula:

$$D = \frac{1}{2} [\nabla V + (\nabla V)^T]. \tag{8}$$

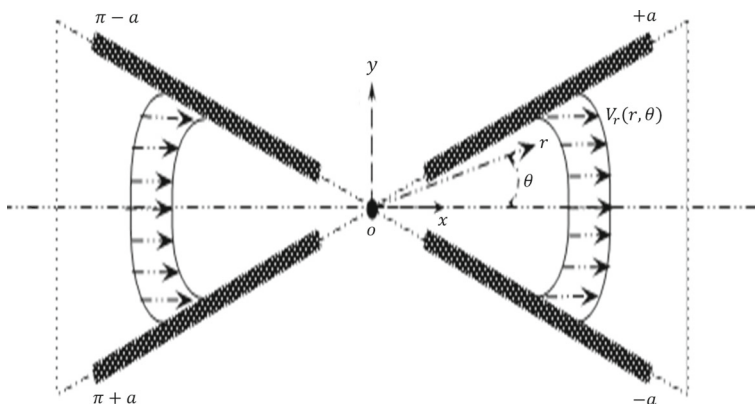


Fig. 1 Geometrical configuration

The subscript ∇ is the special upper convected time derivative given as follows [49]:

$$D^\nabla = (V \cdot \nabla)D - (\nabla V)^T \cdot D - D \cdot \nabla V, \tag{9}$$

α_1, α_2 and α_3 are liquid properties defined as

$$\alpha_1 = \mu_0; \alpha_2 = -\psi_{1,0}; \alpha_3 = 4\psi_{2,0}, \tag{10}$$

where μ_0 is the fluid viscosity and $\psi_{1,0}$ and $\psi_{2,0}$ are the first and second fluids' elasticity coefficients of normal stress, respectively [50]. The subscript "0" in Eq. (10) denotes that the properties are calculated in zero shear rate.

By using the flow assumption of the pure radial, the stress tensor can be expressed as [51]:

$$\begin{aligned} \tau = & \alpha_1 \cdot \left[\begin{array}{c} 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \quad 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \end{array} \right] \\ & + \alpha_2 \cdot \left(\left[\begin{array}{cc} 2V_r \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} & -\frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} \\ -\frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial \theta} & -2 \frac{V_r^2}{r^2} + 2 \frac{V_r}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \end{array} \right] \right. \\ & \left. - \left[\begin{array}{cc} 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 3 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 3 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & 4 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 \end{array} \right] \right) \\ & + \alpha_3 \cdot \left(\left[\begin{array}{cc} 4 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 & \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 2 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \frac{2}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + 2 \frac{V_r}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)^2 + 4 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 \end{array} \right] \right) \end{aligned} \tag{11}$$

Now, define the following parameters:

$$F(\eta) = \frac{f(\theta)}{f_0}, \eta = \theta/\alpha, \tag{12}$$

where f_0 is the movement rate in the radial orientation ($f_0 = r \cdot V_{\max}$), and removing the pressure term from Eqs. (4) and (5), we get

$$F''' + 2\text{Re}FF' + 4\alpha^2 F' + W_i \cdot (8\alpha FF''' + 32\alpha^3 FF') = 0. \tag{13}$$

The Reynolds (Re) and Weissenberg (W_i) numbers of the viscoelastic fluid flow between inclined walls are introduced as:

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot f_0 \cdot \alpha}{\mu_0} \begin{cases} f_0 > 0, & \alpha > 0 \text{ Divergent channel} \\ f_0 < 0, & \alpha < 0 \text{ Divergent channel} \end{cases}, \tag{14}$$

$$W_i = \frac{\psi_{1,0} \cdot f_0}{r^2 \mu_0 \alpha}. \tag{15}$$

Accordingly, in terms of $F(\eta)$, the boundary conditions are expressed as

$$\text{at the channel centerline: } F(0) = 1, F'(0) = 0, \tag{16}$$

$$\text{at the channel body: } F(\pm 1) = 0. \tag{17}$$

3 Basic concept of DRMA

Consider the following third-order nonlinear differential equation:

$$Ly = Ny + Ry + g, \tag{18}$$

subject to the Dirichlet boundary conditions

$$y(x_1) = \alpha_0, y'(x_1) = \alpha_1, y(x_2) = \alpha_2, x_1 \neq x_2, \tag{19}$$

where L is a readily invertible linear operator, N is a nonlinear operator, R is a linear remainder operator and g is the system input.

Now, L^{-1} is deemed as an inverse operator that constitutes an n -fold integration.

In fact, implementing L^{-1} to both sides of Eq. (18) yields:

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g + L^{-1}[N + R]y. \tag{20}$$

By taking the inverse linear differential operator L^{-1} as

$$L^{-1} = \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_1}^{\eta} \int_{\beta}^{\eta} d\eta d\eta d\eta, \tag{21}$$

where β is a prescribed value in the specified interval. Then, we have:

$$L^{-1}Ly = y(x) - y(x_0) - y'(x_1) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} \cdot y''(\beta) \cdot [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \tag{22}$$

Operating with the inverse operator L^{-1} on both sides of Eq. (20) yields:

$$L^{-1}[Ny + Ry + g] = y(x) - y(x_0) - y'(x_1) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} \cdot y''(\beta) \cdot [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \tag{23}$$

We differentiate Eq. (23), then let $x = x_2$ and solve $y''(\beta)$; hence,

$$y''(\beta) = \frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x [Ny + Ry + g] dx dx \tag{24}$$

Substituting Eq. (24) into Eq. (23) gives

$$\begin{aligned} y(x) = & y(x_0) - y'(x_1) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{x_2 - x_1} + L^{-1}g \\ & - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x g dx dx \\ & - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x Ny dx dx + L^{-1}Ny \\ & - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x Ry dx dx + L^{-1}Ry \end{aligned} \tag{25}$$

From Eq. (25), we notice that the three boundary values $y(x_0)$, $y'(x_1)$ and $y'(x_2)$ are included and consequently the undetermined coefficient was replaced. Thereafter, the series solution and the nonlinearity are given as follows:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), \tag{26}$$

$$Nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x), \tag{27}$$

where $A_m(u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x))$ are the Adomian polynomials.

According to the Duan–Rach approach, the solution components are determined by the following recursion scheme:

$$y_0 = y(x_0) - y'(x_1) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} [(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2] \frac{y'(x_2) - y'(x_1)}{x_2 - x_1} + L^{-1}g - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x g dx dx \tag{28}$$

$$y_{m+1} = L^{-1}A_m + L^{-1}Ry - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x A_m dx dx - \frac{1}{2} \frac{[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2]}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta}^x Ry dx dx \tag{29}$$

4 Implementation of DRMA

In this investigation, we propose to solve via DRMA the third-order nonlinear DE of hydrodynamic flow of viscoelastic fluid in convergence/divergence channels. The third-order nonlinear DE of the studied flow is given by Eq. (13) with the boundary conditions as follows:

- $F(\pm 1) = 0$ at the channel body,
- $F(0) = 1, F'(0) = 0$ at the channel centerline.

We define the linear operator L , remainder operator R and nonlinear operator N as follows:

$$LF(\eta) = \frac{d^3 F(\eta)}{d\eta^3}, RF(\eta) = 4\alpha^2 F', NF(\eta) = 2Re\alpha FF' + Wi_i \cdot (8\alpha FF''' + 32\alpha^3 FF') \tag{30}$$

On the other hand, the inverse operator L^{-1} that represents n -fold integration is defined as

$$L^{-1}(\blacksquare) = \int_0^{\eta} \int_0^{\eta} \int_0^{\eta} (\blacksquare) d\eta d\eta d\eta, \tag{31}$$

and by using the Adomian’s operator-theoretic notation (31), the original equation of the considered viscoelastic flow between nonparallel plane walls can be rewritten as

$$LF(\eta) + RF(\eta) + NF(\eta) = 0 \tag{32}$$

Then, we solve the term LF on the left-hand side as

$$LF(\eta) = -RF(\eta) - NF(\eta) \tag{33}$$

The application of the inverse operator L^{-1} to the two sides of Eq. (33) produces

$$L^{-1}LF(\eta) = -L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta), \tag{34}$$

where

$$L^{-1}LF(\eta) = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta \frac{d^3 F(\eta)}{d\eta^3} d\eta d\eta d\eta = F(\eta) - F(0) - \eta F'(0) - \frac{\eta^2}{2} F''(0) \tag{35}$$

Consequently, we get

$$F(\eta) - F(0) - \eta F'(0) - \frac{\eta^2}{2} F''(0) = -L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta). \tag{36}$$

By considering the specified boundary conditions at the channel centerline ($F(0) = 1, F'(0) = 0$), Eq. (36) becomes

$$F(\eta) = 1 + \frac{\eta^2}{2} F''(0) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta), \tag{37}$$

Then, the solution is evaluated at $\eta = 1$. We obtain

$$1 + \frac{1}{2} F''(0) - L_1^{-1}RF(\eta) - L_1^{-1}NF(\eta) = 0. \tag{38}$$

The definite integral operator L_1^{-1} is expressed as:

$$L_1^{-1}G(\eta) = \left[L_1^{-1}G(\eta) \right]_{\eta=1} = \int_0^1 \int_0^\eta \int_0^\eta G(\eta) d\eta d\eta d\eta. \tag{39}$$

Now, solving the second-order derivative evaluated at zero, we get

$$F''(0) = -2 + 2L_1^{-1}RF(\eta) + 2L_1^{-1}NF(\eta). \tag{40}$$

Substituting Eq. (40) into Eq. (37), we arrive at

$$F(\eta) = 1 - \eta^2 + \eta^2 L_1^{-1}RF(\eta) + \eta^2 L_1^{-1}NF(\eta) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta), \tag{41}$$

According to the Adomian method, the series solution and the nonlinearity are given as follows:

$$F(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\eta), \tag{42}$$

$$NF(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\eta), \tag{43}$$

where $A_m(F_0(\eta), F_1(\eta), \dots, F_m(\eta))$ are the Adomian polynomials.

Finally, the recursion Duan–Rach modified Adomian decomposition method scheme is given as

$$F_0(\eta) = 1 - \eta^2, \tag{44}$$

$$F_{n+1}(\eta) = \eta^2 L_1^{-1}RF(\eta) + \eta^2 L_1^{-1}NF(\eta) - L^{-1}RF(\eta) - L^{-1}NF(\eta). \tag{45}$$

Consequently, the first few components of the solution are given as follows:

$$F_0 = 1 - \eta^2, \quad (46)$$

$$F_1 = -\frac{1}{3}\alpha^2\eta^2 - \left(\frac{2\text{Re}\alpha}{12} + \frac{32W_i\alpha^3}{15}\right)\eta^2 + \frac{1}{6}\text{Re}\alpha\eta^4 + \frac{\alpha^2\eta^4}{3} + \frac{8}{3}W_i\alpha^3\eta^4 - \frac{1}{30}\text{Re}\alpha\eta^6 - \frac{8}{15}W_i\alpha^3\eta^6 \quad (47)$$

$$F_2 = -\left(\frac{31\text{Re}\alpha^3}{1260} + \frac{\alpha^4}{15} + \frac{124W_i\alpha^5}{315}\right)\eta^2 - \left(\frac{163\text{Re}^2\alpha^2}{18900} - \frac{94}{105}\text{Re}W_i\alpha^2 + \frac{29\text{Re}\alpha^3}{1260} - \frac{32W_i\alpha^3}{15} + \frac{652\text{Re}W_i\alpha^4}{4725} + \frac{652\text{Re}W_i\alpha^4}{4725} - \frac{1504W_i^2\alpha^4}{105} + \frac{116W_i\alpha^5}{315} + \frac{10432W_i^2\alpha^6}{4725}\right)\eta^2 + \frac{1}{45}\text{Re}^2\alpha^2\eta^4 - \frac{4}{3}\text{Re}W_i\alpha^2\eta^4 + \frac{2}{45}\text{Re}\alpha^3\eta^4 + \frac{1}{18}\text{Re}\alpha^3\eta^4 - \frac{8}{3}W_i\alpha^3\eta^4 + \frac{\alpha^4\eta^4}{9} + \frac{16}{45}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^4 + \frac{16}{45}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^4 - \frac{64}{3}W_i^2\alpha^4\eta^4 + \frac{8}{5}W_i\alpha^5\eta^4 + \frac{256}{45}W_i^2\alpha^6\eta^4 - \frac{1}{50}\text{Re}^2\alpha^2\eta^6 + \frac{8}{15}\text{Re}W_i\alpha^2\eta^6 - \frac{1}{45}\text{Re}\alpha^3\eta^6 - \frac{2}{45}\text{Re}\alpha^3\eta^6 + \frac{8}{15}W_i\alpha^3\eta^6 - \frac{2\alpha^4\eta^6}{45} - \frac{8}{25}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^6 - \frac{8}{25}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^6 + \frac{128}{15}W_i^2\alpha^4\eta^6 - \frac{16}{15}W_i\alpha^5\eta^6 - \frac{128}{25}W_i^2\alpha^6\eta^6 + \frac{1}{140}\text{Re}^2\alpha^2\eta^8 - \frac{2}{21}\text{Re}W_i\alpha^2\eta^8 + \frac{1}{420}\text{Re}\alpha^3\eta^8 + \frac{1}{84}\text{Re}\alpha^3\eta^8 + \frac{4}{35}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^8 + \frac{4}{35}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^8 - \frac{32}{21}W_i^2\alpha^4\eta^8 + \frac{8}{35}W_i\alpha^5\eta^8 + \frac{64}{35}W_i^2\alpha^6\eta^8 - \frac{\text{Re}^2\alpha^2\eta^{10}}{1350} - \frac{8}{675}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^{10} - \frac{8}{675}\text{Re}W_i\alpha^4\eta^{10} - \frac{128}{675}W_i^2\alpha^6\eta^{10} \quad (48)$$

5 Results and discussion

This study examines analytically the nonlinear issue of viscoelastic fluid flow in hydrodynamic Jeffery–Hamel flow in order to probe the influences of various physical parameters on the velocity distributions and skin friction coefficient for both convergent and divergent channels. The analytical solution was thus gained via a robust modified technique of decomposition method, namely DRA. Numerical solution used as a guide was obtained using the Fehlberg–Runge–Kutta algorithm.

Figure 2 depicts the influence of Reynolds number on the velocity profile for a second-order viscoelastic fluid in the case of convergence channel ($\alpha = -3^\circ$) when the Weissenberg number $W_i = 0.6$. Obtained results reveal that the viscoelastic fluid velocity appears as an increasing function of Reynolds number and therefore the momentum boundary-layer thickness diminishes, leading to higher gradients near the plates. However, in the case of a diverging channel ($\alpha = +3^\circ$), increasing Reynolds number mainly leads to a flow reversal as displayed in Fig. 3. In fact, for divergent flow, the volume flux is concentrated at the channel centerline with lower gradients through the plates. Accordingly, the momentum boundary-layer thickness increases considerably.

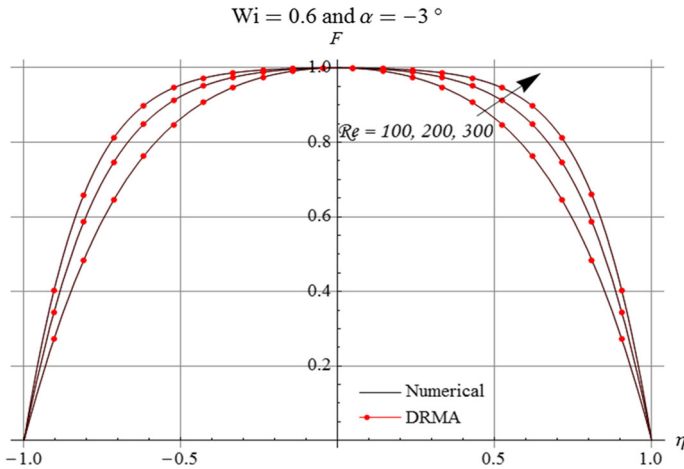


Fig. 2 Re via velocity distribution in convergent channel when $W_i = 0.6$ and $\alpha = -3^\circ$

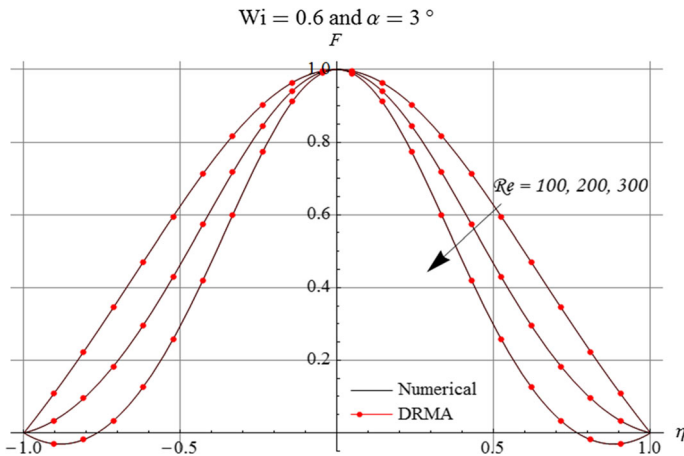


Fig. 3 Re via velocity distribution in divergent channel when $W_i = 0.6$ and $\alpha = +3^\circ$

As displayed in Figs. 4 and 5, the channel half-angle α impact on the viscoelastic fluid velocity inside convergent/divergent channels is expected to be like that observed for the Reynolds number effects. In fact, we clearly notice that the apparent opposite flow may occur in a divergent flow, but it is entirely precluded in the case of a convergent flow. On the other hand, in the case of convergent flow, Figs. 2 and 4 indicate that a small Weissenberg number can have a significant stabilizing effect on the fluid velocity. However, in divergent flow, the influence of Weissenberg number is quite different. Figures 3 and 5 indicate that for higher values of Re and α (for example $Re = 300$ and $\alpha = 9^\circ$), the flow separation may occur at small Weissenberg number. It is also worth to mention that the backflow mainly appears in diverging channel at high Reynolds number Re , and large values of the channel half-angle, α for the second-order fluid flows may lead to the apparition of hydrodynamic instability.

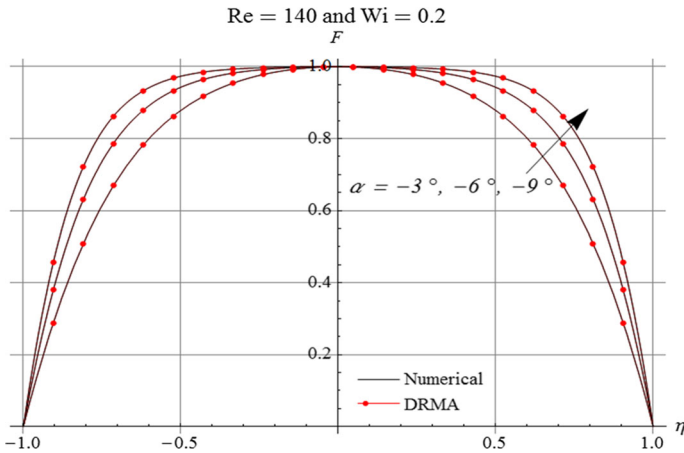


Fig. 4 α via velocity profile in convergent channel when $W_i = 0.2$ and $Re = 140$

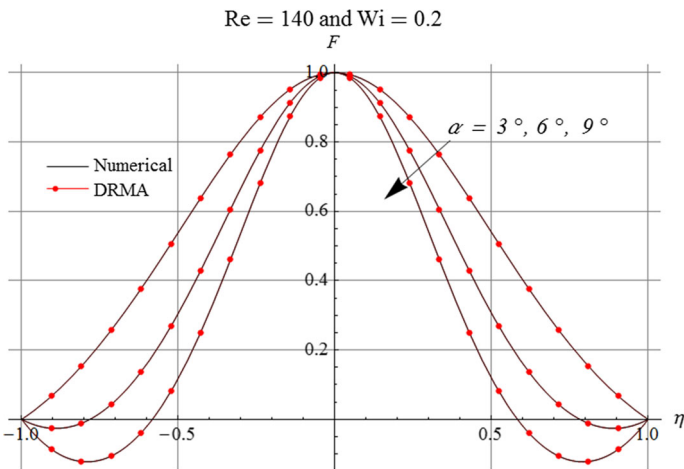


Fig. 5 α via velocity profile in divergent channel when $W_i = 0.2$ and $Re = 140$

The influence of Weissenberg number W_i on the viscoelastic fluid velocity for a converging channel (when $Re = 180$ and $\alpha = \pm 3^\circ$) is drawn in Figs. 6 and 7. Results obtained show the fluid velocity is an increasing function of Weissenberg number for all convergence and divergence channels. In the case of divergent flow as displayed in Fig. 7 (when $Re = 180$ and $\alpha = +3^\circ$), increasing W_i from 0 to 2 raises the fluid velocity and consequently the flow becomes progressively stable. Figure 8 shows the effect of W_i on the critical Reynolds number Re_c , and results reveal that Re_c increases as the magnitude of W_i increases. Furthermore, as depicted in Fig. 9, we clearly notice the impact of W_i on the magnitude of Re_c . In fact, increasing W_i from 0 to 2 leads to an increase in Re_c . This increase has a direct implication on delaying flow separation phenomenon. From Fig. 9, it is also noticed at $\alpha = 3^\circ$ that an increasing W_i increases Re_c by roughly 28%; however, at $\alpha = 5^\circ$, Re_c rises by roughly 60% with the increment in the magnitude of W_i . Accordingly, as can be seen, the reversal phenomenon entirely disappears with the increase in Weissenberg number. It may be better to

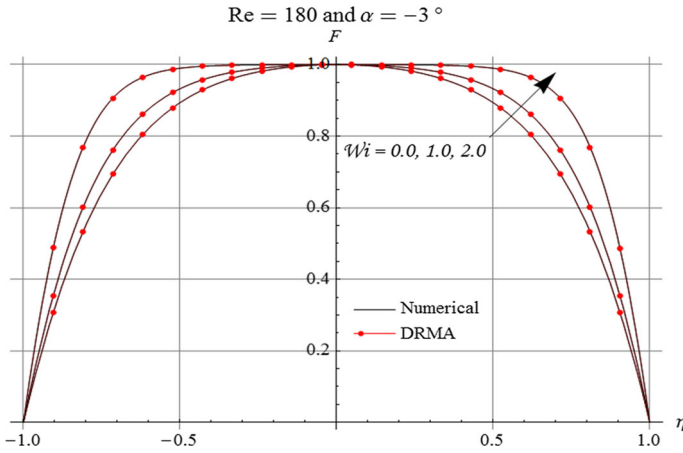


Fig. 6 W_i via velocity profile in convergent channel when $Re = 140$ and $\alpha = -3^\circ$

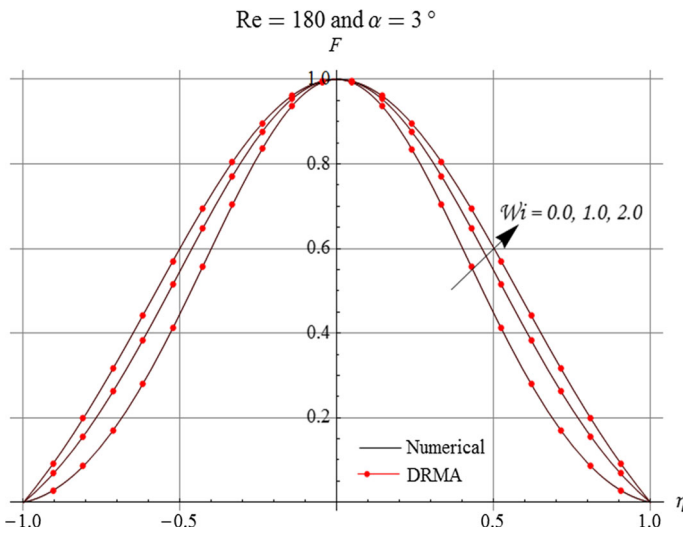
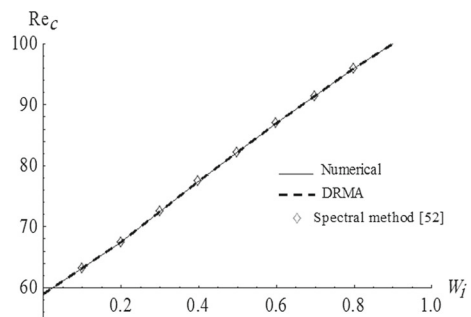


Fig. 7 W_i via velocity distribution in divergent channel when $Re = 140$ and $\alpha = +3^\circ$

Fig. 8 Effect W_i with Re_c in a diverging channel ($\alpha = 10^\circ$)



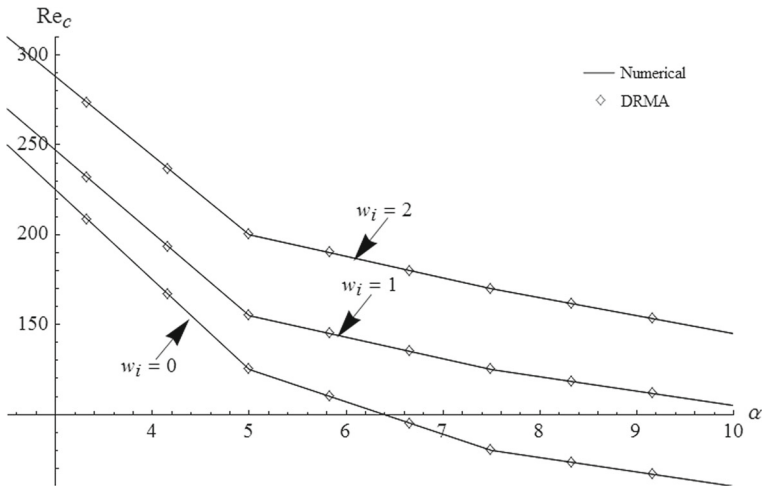


Fig. 9 Effect of α and W_i on Re_c in a diverging channel

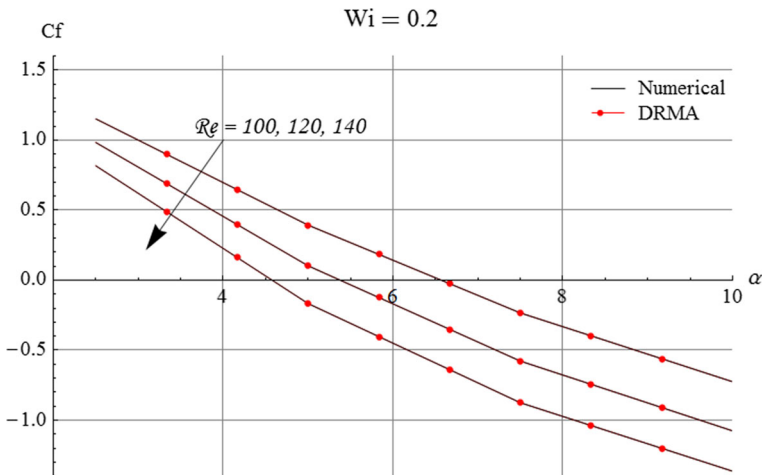


Fig. 10 C_f versus α under the effect of Re when $W_i = 0.2$

use a working liquid with a little higher degree of elasticity to prevent the flow separation in some implementations (i.e., the diffuser). The use of polymer additives will accomplish this. In fact, by the increase in the polymeric additive concentration, the fluid velocity is intensely increased near the wall due to the substantial elastic stresses created in the flow direction.

Re , α and W_i influences on the coefficient of skin friction are depicted in Figs. 10, 11 and 12. The results display that the size of skin friction reduces with the increment in both Re and α . Otherwise, the backflow starts with the generation of the negative values of the coefficient of skin friction as shown in Figs. 10, 11 and 12; however, Figs. 11 and 12 depict that the increase in W_i delays flow separation.

In order to test the reliability of the adopted Duan–Rach algorithm, a comparison of DRMA solution with numerical outcomes was made. As displayed in Tables 1 and 2 for both convergent and divergent channels, the results are similar and justify the validity, the

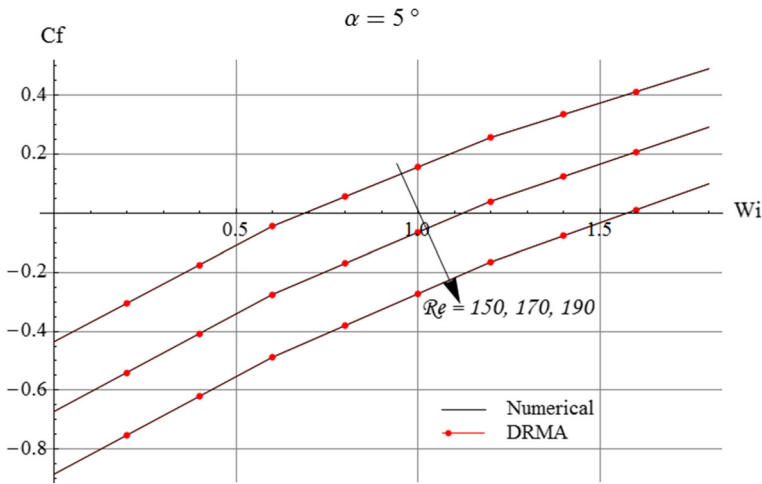


Fig. 11 C_f versus W_i under the effect of Re when $\alpha = +5^\circ$

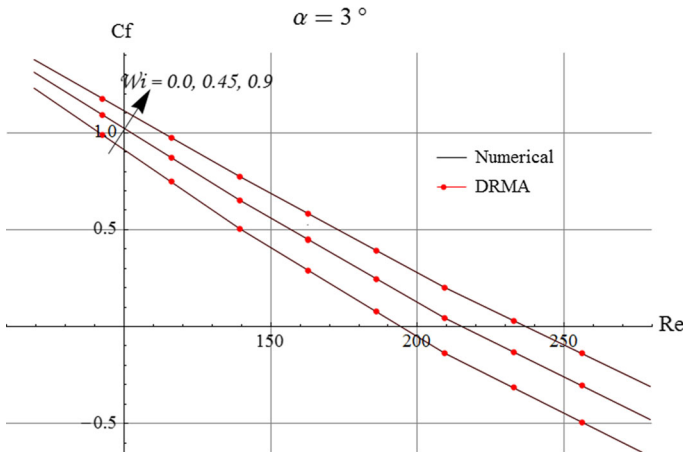


Fig. 12 C_f versus Re under the effect of W_i when $\alpha = +3^\circ$.

applicability and the greater precision of DRMA and confirm them. Eventually, depending on the earned results illustrated in Tables 3 and 4, an excellent agreement is clearly observed between DRMA numerical method and other methods reported in the literature such as homotopy perturbation method (HPM) and standard ADM. Also, Fig. 13 shows the error evolution between DRMA and numerical solution used as a guide. It is pointed out that the DRMA converges speedily, and the ninth order of approximations gives better accuracy.

6 Conclusion

In this research, we have investigated analytically and numerically the effects of several physical quantities of interest such as Reynolds number Re , Weissenberg number W_i and channel half-angle α on the viscoelastic fluid flow inside converging/diverging channels. From this investigation, the main conclusions can be demonstrated the next

Table 1 Comparison between analytical and numerical results (case of divergent flow)

η	$W_i = 0.1, Re = 4$ and $\alpha = 5^\circ$		
	$F^{Numerical}$	F^{DRMA}	$ F^{Numerical} - F^{DRMA} $
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	0.9895300324205666	0.9895300364641372	4.0435×10^{-9}
0.2	0.9581909427231841	0.9581909505551663	7.8319×10^{-9}
0.3	0.9061906684579893	0.9061906788564463	1.0398×10^{-8}
0.4	0.8338609514058313	0.8338609652212889	1.3815×10^{-8}
0.5	0.7416354749597093	0.7416354976383418	2.2678×10^{-8}
0.6	0.6300199401053593	0.6300199707352995	3.0629×10^{-8}
0.7	0.4995545811475104	0.4995546199039617	3.8756×10^{-8}
0.8	0.3507697123508108	0.3507697538611038	4.1510×10^{-8}
0.9	0.1841346221095064	0.1841346657025901	4.3593×10^{-8}
1.0	0.0	0.0	0.0

Table 2 Comparison between analytical and numerical results (case of convergent flow)

η	$W_i = 0.1, Re = 4$ and $\alpha = 5^\circ$		
	$F^{Numerical}$	F^{DRMA}	$ F^{Numerical} - F^{DRMA} $
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	0.9904530002185159	0.9904530044903361	4.2718×10^{-9}
0.2	0.9617439672275536	0.9617439679865903	7.5903×10^{-10}
0.3	0.9136726858692538	0.913672683452572	2.4166×10^{-9}
0.4	0.8459187403063412	0.8459187332136736	7.0926×10^{-9}
0.5	0.7580617963641878	0.7580617740976469	2.2266×10^{-8}
0.6	0.6496106959019802	0.6496106589682232	3.6933×10^{-8}
0.7	0.5200420180828118	0.5200419614722137	5.6610×10^{-8}
0.8	0.3688484719128555	0.3688484068159975	6.5096×10^{-8}
0.9	0.1955975482945193	0.1955974750177266	7.3276×10^{-8}
1.0	0.0	0.0	0.0

- Increasing Re of a convergent flow leads to decrease in the thickness of momentum boundary layer.
- Increasing Re in divergent flow centered the volume flux at the channel centerline, leading accordingly to an increase in the momentum boundary-layer thickness.
- For all converging and diverging flows, the effect of varying α on the viscoelastic fluid velocity is like that noticed in the status of varying Re.
- The reversal flow is completely dismissed for a converging channel; hence, this phenomenon may happen at large values of α and Re in a diverging channel.

Table 3 Comparison between DRMA, numerical solution and available literature data (converging channel)

η	Numerical solution	Reference [52]	HPM [53]	ADM	Present study (DRMA)
$Re = 1, \alpha = -\frac{\pi}{8}$ and $Wi_i = 0.2$					
0.2	0.962287	0.963548	0.9619	0.962282	0.962282
0.4	0.847183	0.846997	0.8459	0.847167	0.847167
0.6	0.650211	0.648604	0.6485	0.650193	0.650199
0.8	0.367687	0.368994	0.3663	0.367674	0.340682

Table 4 Comparison between DRMA, numerical solution and available literature data (diverging channel)

η	Numerical solution	Reference [52]	HPM [53]	ADM	Present study (DRMA)
$Re = 1, \alpha = -\frac{\pi}{8}$ and $Wi_i = 0.2$					
0.2	0.956554	0.949341	0.956201	0.956547	0.956552
0.4	0.828098	0.830153	0.826919	0.828076	0.828088
0.6	0.620051	0.623 252	0.618181	0.620023	0.620034
0.8	0.340697	0.347518	0.339019	0.340678	0.340682

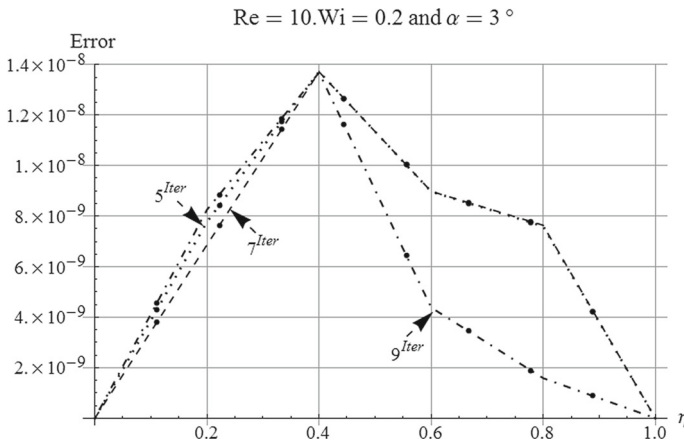


Fig. 13 DRMA error against numerical solution

- Viscoelastic fluid velocity appears as an increasing function of Wi_i for both convergent and divergent flows. In this situation, the backflow entirely disappears with the increase in Wi_i .
- In divergent flow, critical Reynolds number Re_c appears as an increasing function of Wi_i .
- The coefficient of skin friction reduces with the increase in Re and α .
- The magnitude of skin friction rises with the excess of Wi_i , and therefore the reversal flow is delayed.
- With a working fluid with a somewhat higher level of elasticity, the reversal flow is completely delayed.
- A perfect accord between DRMA and Runge–Kutta–Fehlberg-based shooting method was observed.

- Comparison between DRMA approach and different available literature results shows the robustness of the implemented DRMA.

References

1. G.B. Jeffery, The two-dimensional steady motion of a viscous fluid. *Philos. Mag.* **29**, 455–465 (1915)
2. G. Hamel, Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten. *Jahresbericht der deutschen mathematiker-vereinigung* **25**, 34–60 (1917)
3. L. Rosenhead, The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls. *Proc. R. Soc. Lond. A* **175**, 436–467 (1940)
4. K. Millsaps, K. Pohlhausen, Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between non-parallel plane walls. *J. Aeronaut. Sci.* **20**, 187–196 (1953)
5. L.E. Fraenkel, Laminar Flow in symmetrical channels with slightly curved walls. I. On the Jeffery–Hamel solutions for flow between plane walls. *Proc. R. Soc. Lond. A* **267**, 119–138 (1963)
6. M. Sheikholeslami, D.D. Ganji, H.R. Ashorynejad, H.B. Rokni, Analytical investigation of Jeffery–Hamel flow with high magnetic field and nanoparticle by Adomian decomposition method. *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.* **33**(1), 1553–1564 (2012)
7. M. Hatami, M. Sheikholeslami, M. Hosseini, D.D. Ganji, Analytical investigation of MHD nanofluid flow in non-parallel walls. *J. Mol. Liq.* **194**, 251–259 (2014)
8. J.F. Uribe, E.D. Herrera, A. Bravo, R.P. Fabi, On the stability of Jeffery Hamel flow. *Phys. Fluids* **9**(9), 2798–2800 (1997)
9. L.J. Sobey, P.G. Drazin, Bifurcation of two-dimensional channel flows. *J. Fluid Mech.* **171**, 263–287 (1986)
10. W. Banks, P. Drazin, M. Zaturka, On perturbations of Jeffery–Hamel flow. *J. Fluid Mech.* **186**, 559–581 (1988)
11. M. Hamadiche, J. Scott, D. Jeandel, Temporal stability of Jeffery–Hamel flow. *J. Fluid Mech.* **268**, 71–88 (1994)
12. O.D. Makinde, P.Y. Mhone, Temporal stability of small disturbances in MHD Jeffery–Hamel flows. *Comput. Math. Appl.* **53**(1), 128–136 (2007)
13. F.M. Hady, F.S. Ibrahim, S.M. Abdel-Gaied, M.R. Eid, Influence of yield stress on free convective boundary-layer flow of a non-Newtonian nanofluid past a vertical plate in a porous medium. *Mech. Sci. Technol.* **25**(8), 2043–2050 (2011)
14. F.M. Hady, F.S. Ibrahim, S.M. Abdel-Gaied, M.R. Eid, Boundary-layer non-Newtonian flow over a vertical plate in a porous medium saturated with a nanofluid. *Appl. Math. Mech.* **32**(12), 1577–1586 (2011)
15. F.M. Hady, F.S. Ibrahim, S.M. Abdel-Gaied, M.R. Eid, Radiation effect on viscous flow of a nanofluid and heat transfer over a non-linearly stretching sheet. *Nanoscale Res. Lett.* **7**, 229–242 (2012)
16. T. Hayat, M. Waqas, S. Shehzad, A. Alsaedi, Mixed convection flow of a Burgers nanofluid in the presence of stratifications and heat generation/absorption. *Eur. Phys. J. Plus* **131**(8), 253 (2016)
17. M.R. Eid, Chemical reaction effect on MHD boundary-layer flow of two-phase nanofluid model over an exponentially stretching sheet with a heat generation. *J. Mol. Liq.* **220**, 718–725 (2016)
18. T. Hayat, M. Waqas, S. Shehzad, A. Alsaedi, On 2D stratified flow of an Oldroyd-B fluid with chemical reaction: an application of non-Fourier heat flux theory. *J. Mol. Liq.* **223**, 566–571 (2016)
19. T. Hayat, M. Zubair, M. Waqas, A. Alsaedi, M. Ayub, On doubly stratified chemically reactive flow of Powell–Eyring liquid subject to non-Fourier heat flux theory. *Results Phys.* **7**, 99–106 (2017)
20. M.R. Eid, Time-dependent flow of water-NPs over a stretching sheet in a saturated porous medium in the stagnation-point region in the presence of chemical reaction. *J. Nanofluids* **6**(3), 550–557 (2017)
21. M.R. Eid, S.R. Mishra, Exothermically reacting of non-Newtonian fluid flow over a permeable non-linear stretching vertical surface with heat and mass fluxes. *Comput. Therm. Sci.* **9**(4), 283–296 (2017)
22. M.R. Eid, K.L. Mahny, Unsteady MHD heat and mass transfer of a non-Newtonian nanofluid flow of a two-phase model over a permeable stretching wall with heat generation/absorption. *Adv. Powder Technol.* **28**(11), 3063–3073 (2017)
23. M.R. Eid, A. Alsaedi, T. Muhammad, T. Hayat, Comprehensive analysis of heat transfer of gold-blood nanofluid (Sisko-model) with thermal radiation. *Results Phys.* **7**, 4388–4393 (2017)
24. M.R. Eid, K.L. Mahny, Flow and heat transfer in a porous medium saturated with a Sisko nanofluid over a non-linearly stretching sheet with heat generation/absorption. *Heat Transf. Asian Res.* **47**, 54–71 (2018)
25. M.R. Eid, K.L. Mahny, T. Muhammad, M. Sheikholeslami, Numerical treatment for Carreau nanofluid flow over a porous nonlinear stretching surface. *Results Phys.* **8**, 1185–1193 (2018)

26. M.R. Eid, O.D. Makinde, Solar radiation effect on a magneto nanofluid flow in a porous medium with chemically reactive species. *Int. J. Chem. React. Eng.* **16**(9), 20170212 (2018)
27. T. Muhammad, D. Lu, B. Mahanthesh, M.R. Eid, M. Ramzan, A. Dar, Significance of Darcy–Forchheimer porous medium in nanofluid through carbon nanotubes. *Commun. Theor. Phys.* **70**, 361–366 (2018)
28. A.F. Al-Hossainy, M.R. Eid, MSH Zoromba, SQLM for external yield stress effect on 3D MHD nanofluid flow in a porous medium. *Phys. Scr.* **94**, 105208 (2019)
29. M. Waqas, Simulation of revised nanofluid model in the stagnation region of cross fluid by expanding–contracting cylinder. *Int. J. Numer. Method Heat Fluid Flow* (2019). <https://doi.org/10.1108/HFF-12-2018-0797>
30. M.R. Eid, K. Mahny, A. Dar, T. Muhammad, Numerical study for Carreau nanofluid flow over a convectively heated nonlinear stretching surface with chemically reactive species. *Phys. A Stat. Mech. Appl.* **540**, 123063 (2020)
31. M. Waqas, A mathematical and computational framework for heat transfer analysis of ferromagnetic non-Newtonian liquid subjected to heterogeneous and homogeneous reactions. *J. Magn. Magn. Mater.* **493**, 165646 (2020)
32. R.T. Balmer, J.J. Kauzlarich, Similarity solutions, for converging or diverging steady flow of non-Newtonian elastic power law fluids with wall suction or injection. *AIChE J.* **17**, 1181–1188 (1971)
33. T.H. Forsyth, Converging flow of polymers. *Polym. Plast. Technol. Eng.* **6**, 101–131 (1976)
34. K. Rajagopal, A. Gupta, J. Vossoughi, Slow flow of an incompressible third grade fluid in a converging/diverging channel. *J. Technol.* **28**, 27 (1984)
35. A.K. Chakraborty, A.B. Metzner, Sink flows of viscoelastic fluids. *J. Rheol.* **30**, 30 (1986)
36. R.K. Bhatnagar, K.R. Rajagopal, G. Gupta, Flow of an Oldroyd-B fluid between intersecting planes. *J. Non-Newton. Fluid. Mech.* **46**, 49–67 (1993)
37. S. Baris, Flow of a second-grade visco-elastic fluid in a porous converging channel. *Turk. J. Eng. Environ. Sci.* **27**, 73–81 (2003)
38. S. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method* (Chapman and Hall/CRC, 2003). ISBN 0203491165
39. S.J. Liao, K.F. Cheung, Homotopy analysis of nonlinear progressive waves in deep water. *J. Eng. Math.* **45**(2), 105–116 (2003)
40. J.H. He, X.H. Wu, Variational iteration method: new development and applications. *Comput. Math. Appl.* **54**, 881–894 (2007)
41. J.H. He, Variational iteration method–Some recent results and new interpretations. *Comput. Appl. Math.* **207**, 3–17 (2007)
42. G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method* (Springer, Berlin, 2013)
43. J.S. Duan, R. Rach, A new modification of the Adomian decomposition method for solving boundary value problems for higher order nonlinear differential equations. *Appl. Math. Comput.* **218**, 4090–4118 (2011)
44. A. Dib, A. Hsiahem, B. Bou-said, An analytical solution of the MHD Jeffery–Hamel flow by the modified Adomian decomposition method. *Comput. Fluids* **102**(10), 111–115 (2014)
45. A.S. Dogonchi, D.D. Ganji, Impact of Cattaneo–Christov heat flux on MHD nanofluid flow and heat transfer between parallel plates considering thermal radiation effect. *J. Taiwan Inst. Chem. Eng.* **80**, 52–63 (2017)
46. M.R. Eid, A. Al-Hossainy, M.S. Zoromba, FEM for blood-based SWCNTs flow through a circular cylinder in a porous medium with electromagnetic radiation. *Commun. Theor. Phys.* **71**(12), 1425 (2019)
47. S. Lahmar, M. Kezzar, M.R. Eid, M.R. Sari, Heat transfer of squeezing unsteady nanofluid flow under the effects of an inclined magnetic field and variable thermal conductivity. *Phys. A Stat. Mech. Appl.* **540**, 123138 (2020)
48. A.I. Aliyu, M. Al-Qurashi, Invariant subspace and approximate analytic solutions of a fractional model of convective longitudinal fins in thermal conductivity. *Eur. Phys. J. Plus* **134**(9), 417 (2019)
49. R.G. Larson, *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions* (Butterworth Publishing Co., Boston, 1988)
50. R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, vol. I (Wiley, New York, 1987)
51. N. Khabazi, *On the Use of Polymeric Additives to Delay Flow Separation in Diverging Channels* (University of Tehran, Tehran, 2004)
52. K. Sadeghy, N. Khabazi, S.-M. Taghavi, Magnetohydrodynamic (MHD) flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels. *Int. J. Eng. Sci.* **45**(11), 923–938 (2007)
53. M. Shadloo, A. Kimiaefar, Application of homotopy perturbation method to find an analytical solution for magnetohydrodynamic flows of viscoelastic fluids in converging/diverging channels. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* **225**(2), 347–353 (2011)