

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

## Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Spécialité : Anedp

### Thème

*Etude numérique de quelques problèmes d'évolution*

Présenté par :  
**Reziouk Wafa**

Soutenu publiquement le : 1/07/2025

Devant le jury composé de :

Badrani Yassine	M.C.B,	Université de Skikda	Président
Hannache Amel	M.C.B,	Université de Skikda	Encadrant
Boucherchme Nour El Houda	M.C.B,	Université de Skikda	Examinatrice

Année universitaire : 2024/2025

اللَّهُمَّ صَلِّ وَسَلِّمْ وَبَارِكْ عَلَى سَيِّدِنَا مُحَمَّدٍ

Louange à Allah, et que la paix et les bénédictions soient  
sur le Messager d'Allah.

À ces moments où j'ai ressenti le poids du monde, et à chaque soupir  
d'espoir...

Je dédie ce travail tout d'abord à moi-même – à cette âme qui a résisté,  
persévéré, et cru que le travail acharné n'est jamais vain.

À ma mère et à mon père, qui ont été mon refuge quand le monde  
m'a semblé étroit, et mon soutien lorsque mes pas ont vacillé.

Un immense merci à ma mère, cette femme forte qui  
m'a accompagnée en tout, et m'a soutenue à chaque étape.

À mes oncles et tantes maternels et paternels, merci pour vos cœurs  
généreux, pour vos prières silencieuses qui m'ont portée à chaque pas,  
et pour votre sincère bienveillance qui m'a donné la force d'avancer.

À mes chères amies :Marwa, Bouchra, Sirine, Hakima et Sonia – qui  
m'ont soutenue dans mes moments les plus difficiles, par leur présence  
apaisante, leurs prières et la bonté de leurs cœurs.

À mes enseignants, qui ont semé en nous l'amour du savoir, et nous  
ont appris que les mathématiques ne se résument pas aux chiffres,  
mais sont aussi affaire de logique, de patience et de beauté.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et mes remerciements les plus  
sincères à mon encadrante, **Hanache Amal**, pour son soutien  
bienveillant et sa précieuse guidance.

Je suis profondément  
reconnaissante d'avoir été encadrée  
par vous. Vous incarnez  
véritablement des valeurs nobles et  
une intégrité exemplaire.

Et enfin...

À chaque cœur fatigué, à chaque  
rêve reporté, à chaque personne  
qui n'a jamais perdu espoir malgré  
tout...

WAFI REZIOK

## Résumé

Ce travail est consacré à l'étude mathématique et numérique de quelques problèmes d'évolution, tels que l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, l'équation du télégraphe, ainsi que certains problèmes d'évolution non linéaire, tels que l'équation modélisant le phénomène de migraine avec aura, et le problème modélisant la propagation de cellules tumorales dans un tissu. Enfin, nous avons tenté d'aborder un problème d'évolution fractionnaire

**Mots-clés :**Équation de la chaleur ; Équation des ondes , Équation du télégraphe , Problèmes d'évolution , Problèmes non linéaires , Migraine avec aura , Cellules tumorales ,Problèmes fractionnaires ,MDF,MEF,EDO,EDP

## ملخص

يُعدى هذا العمل بالتحليل الرياضي والمعالجة العددية لعدد من مسائل التطور، من بينها معادلة الحرارة، ومعادلة الموجات، ومعادلة التلغراف. كما يتناول بعض المسائل غير الخطية، على غرار المعادلة التي تُحاكي ظاهرة الشقيقة المصحوبة بالأورة، والمسألة التي تصف انتشار الخلايا السرطانية داخل نسيج. وفي الختام، تم التطرق إلى نموذج تطوري من الدرجة الكسرية

**الكلمات المفتاحية :** معادلة الحرارة ؛ معادلة الموجات ؛ معادلة التلغراف ؛ مسائل تطويرية ؛ مسائل غير خطية ؛ الشقيقة مع الأورة ؛ الخلايا السرطانية؛ مسائل كسرية ؛ طريقة الفروق المنتهية،طريقة العناصر المنتهية،معادلة تفاضلية عادية، معادلة تفاضلية جزئية

## Abstract

This work is devoted to the mathematical and numerical study of several evolution problems, such as the heat equation, the wave equation, and the telegraph equation, as well as some nonlinear evolution problems, such as the equation modeling the phenomenon of migraine with aura, and the problem modeling the propagation of tumor cells in tissue. Finally, we attempted to approach a fractional evolution problem.

**Keywords:** Heat equation; Wave equation; Telegraph equation; Evolution problems; Nonlinear problems; Migraine with aura; Tumor cells; Fractional problems; FDM,FEM,PDE,ODE

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1	Équation Différentielle Ordinaire(EDO) . . . . .	5
1.2	Équation Différentielle Partielles (EDP) . . . . .	5
1.3	Classification des EDP . . . . .	6
1.4	Types d'équations différentielles . . . . .	7
1.5	Différentes types de conditions au bord . . . . .	7
1.5.1	Condition de Dirichlet (ou condition essentielle) . . . . .	8
1.5.2	Condition de Neumann (ou condition naturelle) . . . . .	8
1.5.3	Condition de Robin (ou condition mixte) . . . . .	8
1.5.4	Problème à conditions initiales . . . . .	8
1.5.5	Problème de Cauchy . . . . .	9
1.6	Notion de problèmes bien posé . . . . .	9
1.7	Méthodes de Discrétisation pour la Résolution des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) . . . . .	10
1.8	Matrice symétrique définie positive . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Étude de quelques problèmes d'évolution d'ordre 1 en temps</b>	<b>12</b>
2.1	Équation de La chaleur en 1d . . . . .	12
2.1.1	Position du problème . . . . .	12
2.1.2	Étude mathématique . . . . .	13
2.1.3	Étude du problème sur un intervalle borné . . . . .	17

2.1.4	Étude numérique . . . . .	19
2.1.5	Application de la méthode des éléments finis . . . . .	26
2.2	Étude de quelques problème d'évolution non linéaire . . . . .	28
2.2.1	Modèles de la migraine avec aura . . . . .	28
2.2.2	Modélisation de la propagation de cellules tumorales dans un tissu . . . . .	32
2.3	Étude de l'équation de la chaleur dans un milieu non homogène à conductivité variable . . . . .	36
2.3.1	Étude mathématique . . . . .	36
2.3.2	Étude numérique . . . . .	39
2.4	Equation de La Chaleur en 2D . . . . .	41
2.4.1	Position du problème . . . . .	41
2.4.2	Étude mathématique . . . . .	42
2.4.3	Étude du problème sur un intervalle borné . . . . .	43
2.4.4	Étude numérique . . . . .	45
2.4.5	Application de la méthode des éléments finis . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Étude de quelque problèmes d'évolution d'ordre 2 en temps</b>	<b>55</b>
3.1	Équation d'onde en 1D . . . . .	55
3.1.1	Position du problème . . . . .	55
3.1.2	Étude mathématique . . . . .	56
3.1.3	Étude du problème sur un intervalle borné . . . . .	57
3.1.4	Étude numérique . . . . .	59
3.1.5	Application de la méthode des éléments finis . . . . .	63
3.2	Équation d'onde en 2D . . . . .	65
3.2.1	Position du problème . . . . .	65
3.2.2	Étude mathématique . . . . .	66
3.2.3	Étude du problème sur un intervalle borné . . . . .	67
3.2.4	Étude numérique . . . . .	69
3.3	Étude de l'équation du télégraphe . . . . .	74
3.3.1	Position du problème du télégraphe . . . . .	74
3.3.2	Étude mathématique . . . . .	74

---

3.3.3	Étude numérique . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Calcul Fractionnaire</b>	<b>83</b>
4.1	Fonction d'Euler . . . . .	83
4.1.1	Fonction Gamma . . . . .	83
4.1.2	Fonction Beta . . . . .	84
4.2	Fonction de Mittag-Leffler . . . . .	85
4.3	Intégration Fractionnaire . . . . .	86
4.3.1	Formule de Dirichlet . . . . .	87
4.3.2	L'intégrale fractionnaire . . . . .	87
4.3.3	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	88
4.4	Dérivation fractionnaire . . . . .	88
4.4.1	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	88
4.4.2	Dérivées fractionnaires de Caputo . . . . .	89
4.5	La méthode itérative variationnelle (VIM) . . . . .	90
4.5.1	Description de la méthode . . . . .	91
4.5.2	Application de la méthode VIM . . . . .	91
4.5.3	Résolution numérique avec MATLAB . . . . .	93

# Notations

$\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$

$\Gamma$  : frontière de  $\Omega$

$Q = \Omega \times ]0, T[$

$\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$

On note  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un point quelconque de  $\mathbb{R}^N$ .

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_N$  : mesure de Lebesgue sur  $\Omega$ .

$C^\infty(\Omega)$  : espace des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\Omega$ .

$\langle x, y \rangle$  : le produit scalaire des vecteurs  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$  et  $y = (y_i)_{1 \leq i \leq N}$  de  $\mathbb{R}^N$ , il est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

$\|x\| = \langle x, x \rangle^2$  : La norme associée à ce produit scalaire.

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$  un multi-indice.

$\nabla u$  : le gradient de  $u$ .

$\text{div}$  : l'opérateur divergence.

$$\text{div}(v_1(x), \dots, v_n(x)) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

$\Delta u$  : le laplacien de  $u$ .

$$\Delta u(x) = \text{div} \nabla u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

$L^p(\Omega)$  : espace des fonctions de puissance  $p$ -ème intégrables sur  $\Omega$  pour la mesure  $dx$ .

$L^2(\Omega)$  : l'espace des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$ .

$V$  : l'espace de Hilbert.

$$H^1(\Omega) = \{u : u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2, \quad \forall i = 1, \dots, N\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

EDP : équation différentielle à dérivées partielles.

EDO : équation différentielle ordinaire.

MEF : méthode des éléments finis.

MDF : méthode des différences finies.

espace vectoriel normé.

MDD : méthode de décomposition de domaine.

CL : conditions aux limites

# Introduction

Les problèmes mathématiques sont des problèmes pratiques qu'il ont essayé de résoudre. Avec l'apparition des premiers ordinateurs qui ont été une révolution pour les mathématiques, il ont en effet ouvert un champ nouveau, celui de la modélisation et de la simulation ; l'ordinateur a fait des mathématiques une science expérimentale (on fait des expériences numériques comme d'autre font des expériences physiques).

Le mathématicien Américain Joseph Keller affirmait que les mathématiques appliquées sont la science dont les mathématiques pures sont juste une branche caractérisée par trois choses les mensonges (les modèles ne sont pas toujours fidèles à la réalité) ; l'analyse mathématique moteur inépuisable des passions humaines et source de tant de plaisirs et la simulation numérique correspondent aux modèles. [1]

De ce point de vue la conception ainsi que l'analyse des méthodes de calcul sur ordinateur sont devenues une nouvelle branche de mathématiques. Ces progrès ont aussi permis aux mathématiciens de s'attaquer à des problèmes plus complexes et concrets issus des motivations immédiates industrielles où scientifiques aux quelles on peut apporter des réponses qualitative et quantitatives c'est la modélisation mathématique qui est l'art (la Science) de représenter ou de transformer une réalité physique des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au Calcul. La simulation numérique est le processus qui permet de calculer sur ordinateur les solutions de ces modèles et donc de simuler la réalité physiques.

Ce travail regroupe quelques exemples d'application de méthodes classiques de l'analyse numérique mise en oeuvre pour la résolution de quelques problèmes concrets de la physique, mécanique, ....ect.

Nous avons suivi une approche progressive, le sens physique de chaque problème, étude mathématique en essayant de donner les bases théoriques nécessaires à la résolution. Pour les problèmes discrets obtenus nous avons étudié la Consistance et stabilité nous avons limité l'étude mathématique au strict niveau nécessaire à la compréhension du raisonnement et les résultats qui semblent instructives. Nous avons pris soin d'énoncer des méthodes pratiques et des mises en garde permettant d'éviter les Confusions les plus fréquentes ; ensuite nous avons établi l'étude numérique et algorithmiques classiques utilisant les différences finis et éléments finis pour obtenir les problèmes discrets correspondants.

Dans un souci de simplicité, nous avons utilisé le logiciel matlab pour de multiples motivations, la richesse des bibliothèques pré-programmées, et enfin de visualisation graphique des résultats. Ce logiciel est très largement employé aussi bien dans le monde de l'éducation que dans les laboratoires de recherches et de développement.

Ce mémoire comporte quatre chapitres dans le premier on introduit quelques définitions et notions de base nécessaires pour la suite de mémoire, dans le 2<sup>me</sup> chapitre nous nous sommes intéressés aux problèmes d'évolutions d'ordre 1 en temps nous commençons par l'équation de la chaleur en dimension une ensuite en dimension deux, nous avons établi une étude mathématique et Numérique illustrée par des résultats à l'aide du logiciel matlab, Nous avons abordé quelques problèmes non linéaires d'ordre 1 en temps tel que le problème modélisant le phénomène de la migraine avec aura, et le phénomène de la propagation de cellules tumorales dans un tissu. On a consacré le troisième chapitre aux problèmes d'évolution d'ordre deux en temps tels que le problème de la chaleur en dimension 2, nous avons établi l'étude mathématique ensuite l'étude numérique illustrée par des résultats numériques ; ensuite le problème des ondes en dimensions deux.

Dans le quatrième chapitre nous avons voulu initier avec les problèmes d'évolution de type fractionnaire .

# Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons d'abord quelques notions de base nécessaires à ce travail.

## 1.1 Équation Différentielle Ordinaire(EDO)

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation mathématique qui relie une fonction inconnue d'une seule variable indépendante à ses dérivées successives, et s'écrit généralement sous la forme

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

La fonction  $F$  est une fonction de  $n + 2$  variables.

La fonction inconnue  $t \mapsto y(t)$  de la variable réelle  $t$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^k$ , ( $k = 2, 3, \dots, n$ )

On prendra  $t$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ).

## 1.2 Équation Différentielle Partielles (EDP)

[3] une équation aux dérivées partielles (EDP) est qu'elle comporte plus d'une variable indépendante. Il existe une variable dépendante qui est une fonction inconnue de ces variables, notée  $u(x, y)$ .

Nous noterons souvent ces dérivées par des indices, et ainsi de suite. Une EDP est une relation qui lie les variables indépendantes, la variable dépendante, et les dérivées partielles de . Elle peut

s'écrire comme

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0.$$

où encore

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Ceci est la forme la plus générale d'une EDP du premier ordre à deux variables indépendantes. L'ordre d'une équation est déterminé par le degré le plus élevé de dérivée qui y apparaît. La forme la plus générale d'une EDP du second ordre à deux variables indépendantes est

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

### 1.3 Classification des EDP

Le modèle mathématique [2] est formulé par des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites qui garantissent l'unicité de la solution, donc le fonctionnement du système physique.

Nous nous intéressons particulièrement aux différents types d'équations du second ordre, à deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ , de la physique mathématique écrites sous la forme générale

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y)$$

où  $u = u(x, y)$  est la fonction recherchée dépendante de  $x$  et  $y$ ,  $C$  est la fonction qui donne le comportement du modèle.

$A, B$  et  $C$  sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles, ils sont fonction de  $x$  et  $y$  et peuvent être des constantes.

Ces équations peuvent être réécrites sous la forme

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

Selon le signe du déterminant  $B^2 - 4AC$  on adopte le classement suivant

si  $B^2 - 4AC < 0$  l'équation est dite **elliptique**

si  $B^2 - 4AC > 0$  l'équation est dite **hyperbolique**

si  $B^2 - 4AC = 0$  l'équation est dite **parabolique**

## 1.4 Types d'équations différentielles

**Définition 1.1** Une équation différentielle [2] d'ordre  $n$  est dite linéaire si elle peut s'écrire sous la forme

$$a_n(x) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_{n-1}(x) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + a_0(x)u = f(x)$$

où  $a_i(x)$  et  $f(x)$  sont des fonctions données, et la fonction inconnue  $u(x)$ .

**Définition 1.2** Une équation différentielle [2] est dite non linéaire si elle ne peut pas être mise sous la forme linéaire ci-dessus, c'est-à-dire que la fonction inconnue ou ses dérivées apparaissent dans des termes non linéaires tels que

- Produits de  $u$  et/ou de ses dérivées  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- Puissances supérieures à 1  $u^2$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$
- Fonctions non linéaires appliquées à  $u$   $\sin(u)$ ,  $e^u$ , .....

**Définition 1.3** Une équation différentielle d'ordre  $n$  est dite quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre  $n$ , mais dont les coefficients peuvent dépendre de la variable indépendante  $x$ , de la fonction inconnue  $u$  et de ses dérivées d'ordre inférieur.

elle s'écrit sous la forme

$$a_n(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \dots + a_1(x, u, u', \dots) \frac{\partial u}{\partial x} + a_0(x, u, u', \dots) u = f(x, u, u', \dots)$$

Où la dépendance des coefficients à  $u$  ou ses dérivées inférieures rend l'équation non linéaire, mais la linéarité par rapport à la dérivée d'ordre  $n$  fait qu'elle est dite quasi-linéaire.

**Définition 1.4** On appelle problème aux limites [1] une équation aux dérivées partielles munis de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posé.

## 1.5 Différentes types de conditions au bord

En analyse numérique et en équations différentielle partielles (EDP), on distingue principalement trois types de conditions aux limites pour un problème posé sur un domaine unidimensionnel  $\Omega=[a, b]$ , avec son bord réduit aux points  $x = a$  et  $x = b$ .

### 1.5.1 Condition de Dirichlet (ou condition essentielle)

On impose la valeur de la solution elle-même aux extrémités du domaine

$$u(x) = g(x), \quad \text{pour } x = a \text{ ou } x = b$$

### 1.5.2 Condition de Neumann (ou condition naturelle)

On impose la valeur de la dérivée spatiale de la solution (flux) aux extrémités

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = h(x), \quad \text{pour } x = a \text{ ou } x = b$$

### 1.5.3 Condition de Robin (ou condition mixte)

C'est une combinaison linéaire de la solution et de sa dérivée

$$\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) = r(x), \quad \text{pour } x = a \text{ ou } x = b$$

### 1.5.4 Problème à conditions initiales

Un problème à conditions initiales consiste à déterminer une solution d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) qui satisfait des conditions données à l'instant initial, généralement noté  $t = 0$  ou  $t = t_0$ .

Dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (EDO), cela revient à résoudre

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Dans le cas d'une équation aux dérivées partielles (EDP), par exemple

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}(u), \quad u(x, 0) = \phi(x)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel agissant sur la variable spatiale.

Ce type de problème est essentiel dans la modélisation des phénomènes physiques évoluant dans le temps, comme la conduction thermique, la propagation des ondes ou l'écoulement des fluides.

### 1.5.5 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est un cas particulier de problème à conditions initiales, où l'on cherche une solution d'une équation différentielle vérifiant à la fois.

- Une équation différentielle donnée.
- Une ou plusieurs conditions initiales à un instant initial, dans un domaine de l'espace (souvent non borné).

Dans le cas d'une EDO

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Dans le cas d'une EDP, par exemple pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

## 1.6 Notion de problèmes bien posé

Un problème bien-posé [15] au sens de Hadamard a les propriétés suivantes

1. Existence d'une solution
2. Unicité de la solution
3. Stabilité de la solution

Si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite (respectée), le problème est qualifié de **mal posé**, ce qui le rend inadapté à une résolution directe, en particulier dans un contexte numérique. Dans ce cas, il est souvent nécessaire de reformuler le problème ou d'utiliser des méthodes de régularisation pour en assurer la stabilité.

## 1.7 Méthodes de Discrétisation pour la Résolution des Équations aux Dérivées Partielles (EDP)

Les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques des problèmes numériques, et il existe une infinité des méthodes de discrétisation d'une équation, les plus couramment utilisés pour la résolution des (EDP) sont

- La méthode des différences finis
- La méthode des éléments finis
- La méthode des volumes finis
- La méthode des caractéristiques

## 1.8 Matrice symétrique définie positive

Une matrice symétrique  $M$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est dite symétrique positive si pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  on a

$$X^T M X \geq 0.$$

Elle est dite symétrique définie positive [16] si pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  non nul, on a

$$X^T M X > 0$$

**Théorème 1.1** [16] (critère de Sylvester)

Pour qu'une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  réelle symétrique soit définie positive, il faut et suffit que les  $n$  matrices  $A_p = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  pour  $p = 1, \dots, n$  aient leur déterminants strictement positifs, autrement dit que les  $n$  mineurs principaux de  $A$  soient strictement positifs.

**Définition 1.5** [16] Une M-Matrice  $A$  une matrice carrée vérifiant  $a_{ii} \geq 0$ ;  $a_{ij} \leq 0$  si  $i \neq j$ .

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

1.  $A^{-1}$  existe et a ses coefficients  $\geq 0$
2.  $A$  est inversible

**Définition 1.6** [16] Une P-Matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une P-matrice si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs, c'est-à-dire

$$\det(A_{i,i}) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad i \geq 1$$

**Définition 1.7** [16] Matrice Monotone Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on dit que  $A$  est monotone si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax, x \rangle \geq 0$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.8** [16] Une matrice bande est une matrice creuse dont les éléments non nuls sont regroupés autour de la diagonale principale. Plus précisément, une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite bande s'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } j < i - p \quad \text{ou } j > i + q.$$

- $p$  est la demi-largeur de bande inférieure (sous la diagonale).
- $q$  est la demi-largeur de bande supérieure (au-dessus de la diagonale).

**Définition 1.9** La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point

Soit une fonction de classe (c'est-à-dire fois dérivable) dans un voisinage d'un point. Le développement de Taylor de à l'ordre autour de est

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

où  $R_n(x)$  est le reste du développement, qui mesure l'erreur entre la fonction réelle et son approximation polynomiale.

**Définition 1.10 (Théorème de Fubini)** Le théorème de Fubini permet de calculer une intégrale double d'une fonction intégrable sur un domaine approprié, en la transformant en deux intégrales simples successives (appelées intégrales itérées).

Autrement dit, on peut changer l'ordre d'intégration

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

à condition que  $f(x, y)$  soit intégrable sur le domaine  $D$ .

# Étude de quelques problèmes d'évolution d'ordre 1 en temps

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude mathématique et numérique de quelques problèmes d'évolution d'ordre un en temps ; ces problèmes apparaissent fréquemment dans la modélisation de phénomènes physiques [13] et seront abordés à travers des formulations mathématiques et des méthodes numériques appropriées. Le problème de la chaleur n'est pas seulement un modèle de propagation de la chaleur, il a fait un caractère universel et on le retrouve comme modèle de nombreux phénomènes par exemple il modélise la diffusion ou migration d'une concentration ou densité à travers un domaine  $\Omega$  ou un polluant diffusant dans l'atmosphère, ou bien une espèce chimique migrant dans une substance.

## 2.1 Équation de La chaleur en 1d

### 2.1.1 Position du problème

Nous allons étudier l'équation de la chaleur en une dimension un qui modélise la propagation de la température dans une tige mince, homogène et parfaitement conductrice, soumise à une source de chaleur interne. On suppose que la température à chaque point  $x$  de la tige, à un instant  $t$ , est représentée par une fonction  $u(x, t)$ . Cette équation traduit la loi de Fourier sur la diffusion thermique, où la variation de température dans le temps est proportionnelle à la dérivée seconde

spatiale ; soit le problème

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$u(x, t)$  est la fonction inconnue représentant, par exemple, la température  $u$  au point  $x$  à l'instant  $t$ .

$\alpha^2$  est le coefficient de diffusion thermique constant et positif.

$f(x, t)$  est le terme source connu qui dépend de l'espace et du temps.

$g(x)$  est la condition initiale représentant la distribution initiale de la température.

### 2.1.2 Étude mathématique

On applique la transformée de Fourier pour chercher la solution de ce problème, la méthode consiste à séparer le problème en deux problèmes suivants

$$(P'_1) \begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u_1(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$(P''_1) \begin{cases} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x) & x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ u_2(0, x) = 0. \end{cases}$$

D'après le principe de superposition, la solution du problème  $(P_1)$  s'écrit sur la forme

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à  $x$  sur le problème  $(P'_1)$

$$\begin{cases} \mathcal{F} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) \right) - \mathcal{F} \left( \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) \right) = 0 \\ \mathcal{F}(u_1(0, x)) = \mathcal{F}(g(x)). \end{cases}$$

c-à-d

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(t, \xi) - (i\xi\alpha)^2 \hat{u}_1(t, \xi) = 0 \\ \hat{u}_1(0, \xi) = \hat{g}(\xi). \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(t, \zeta) = -(\zeta\alpha)^2 \hat{u}_1(t, \zeta) \\ \hat{u}_1(0, \zeta) = \hat{g}(\zeta). \end{cases}$$

et comme

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} = -(\zeta\alpha)^2 \hat{u}_1.$$

On pose  $v_1(t, \zeta) = \hat{u}_1(t, \zeta)$  et on obtient

$$v_1'(t) + (\alpha\zeta)^2 v_1(t) = 0,$$

qui est une EDO linéaire du premier ordre par rapport à la variable indépendante  $t$ . La solution générale sera donnée par

$$v_1(t, \zeta) = C e^{-(\alpha\zeta)^2 t}.$$

Où  $C$  est une constante d'intégration. Et comme  $\hat{u}_1(0, \zeta) = \hat{g}(\zeta)$ , alors  $C = \hat{g}(\zeta)$  et on a

$$\hat{u}_1(t, \zeta) = \hat{g}(\zeta) e^{-(\alpha\zeta)^2 t}.$$

Par la transformée de Fourier inverse, on arrive à

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(t, \zeta) e^{i\zeta x} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\zeta) e^{-(\alpha\zeta)^2 t} e^{i\zeta x} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iy\zeta} dy \right) e^{-(\alpha\zeta)^2 t} e^{i\zeta x} d\zeta. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{i\zeta(x-y) - (\alpha\zeta)^2 t} d\zeta dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x-y) g(y) dy, \end{aligned}$$

où

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta x - (\alpha\zeta)^2 t} d\zeta.$$

Le changement de variable  $\zeta = \frac{\eta}{\sqrt{2t}}$  tel que  $d\zeta = \frac{d\eta}{\sqrt{2t}}$  donne alors

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left( ix \frac{\eta}{\sqrt{2t}} - \frac{(\alpha\eta)^2}{2} \right) d\eta.$$

On utilise le fait que la transformée de Fourier de  $h(x) = e^{-\varepsilon|x|^2}$  est  $\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}$ , donc  $\alpha e^{(\alpha\eta)^2/2}$ .

De Fourier de  $e^{|x|^2/2\alpha^2}$  ce qui implique que

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \exp\left(-\frac{\alpha^2|\eta|^2}{2}\right) \exp\left(-i\frac{x}{\sqrt{2t}\eta}\right) d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}. \end{aligned}$$

Donc

$$G(t, x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}.$$

où encore

$$u_1(t, x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}\right) g(y) dy.$$

. La transformée de Fourier par rapport à  $x$  sur  $(P_1'')$ , donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial t} + \xi^2 \alpha^2 \widehat{u}_2 = \widehat{f}(t, \xi) \\ \widehat{u}_2(0, \xi) = 0 \end{cases}$$

On pose  $v_2(t, \xi) = \widehat{u}_2(t, \xi)$  et on obtient

$$v_2(t, \xi) + (\xi\alpha)^2 v_2(t, \xi) = \widehat{f}(t, \xi),$$

qui est une EDO linéaire du premier ordre non homogène par rapport à la variable indépendante  $t$

On multiplie les deux membres de cette EDO par  $\exp((\alpha\xi)^2 t)$  pour avoir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_2(t, \xi) e^{(\alpha\xi)^2 t} \right) = \widehat{f}(t, \xi) e^{(\alpha\xi)^2 t}.$$

L'intégration de 0 à  $t$  donne

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left( v_2(s, \xi) e^{(\alpha\xi)^2 s} \right) ds = \int_0^t \widehat{f}(s, \xi) e^{(\alpha\xi)^2 s} ds,$$

d'où

$$v_2(t, \xi) e^{(\alpha\xi)^2 t} - v_2(0, \xi) = \int_0^t \widehat{f}(s, \xi) e^{(\alpha\xi)^2 s} ds.$$

$$v_2(t, \xi) e^{(\alpha \xi)^2 t} = v_2(0, \xi) + \int_0^t \widehat{f}(s, \xi) e^{(\alpha \xi)^2 s} ds.$$

$$v_2(t, \xi) = v_2(0, \xi) e^{-(\alpha \xi)^2 t} + \int_0^t \widehat{f}(s, \xi) e^{-(\alpha \xi)^2 (t-s)} ds.$$

de

$$v_2(0, \xi) = 0,$$

on a

$$\widehat{u}_2(t, \xi) = v_2(t, \xi) = \int_0^t \widehat{f}(s, \xi) e^{-(\alpha \xi)^2 (t-s)} ds.$$

On applique la transformée inverse de Fourier

$$u_2(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_2(t, \xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t \widehat{f}(s, \xi) e^{-(\alpha \xi)^2 (t-s)} ds \right) e^{i\xi x} d\xi.$$

On permute les intégrales (sous hypothèse de régularité suffisante)

$$u_2(t, x) = \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s, \xi) e^{-(\alpha \xi)^2 (t-s)} e^{i\xi x} d\xi \right) ds.$$

On exprime  $\widehat{f}(s, \xi)$  comme la transformé de Fourier de  $f(s, y)$

$$\widehat{f}(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, y) e^{-i\xi y} dy.$$

On insère cette expression

$$u_2(t, x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, y) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha \xi)^2 (t-s)} e^{i\xi(x-y)} d\xi \right) dy ds.$$

L'intégrale interne est connue c'est le noyau fondamental de la chaleur

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha \xi)^2 (t-s)} e^{i\xi(x-y)} d\xi = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2(t-s)}}.$$

on obtient la solution

$$u_2(t, x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, y) \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2(t-s)}} dy ds.$$

Enfin  $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$

$$u(t, x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2 t}\right) g(y) dy + \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha^2(t-s)}} f(s, y) dy \right\} ds$$

### 2.1.3 Étude du problème sur un intervalle borné

Pour des raisons de simplicité et en particulier pour l'illustration numérique on opte pour la résolution du problème sur un intervalle borné soit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < 1 & t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

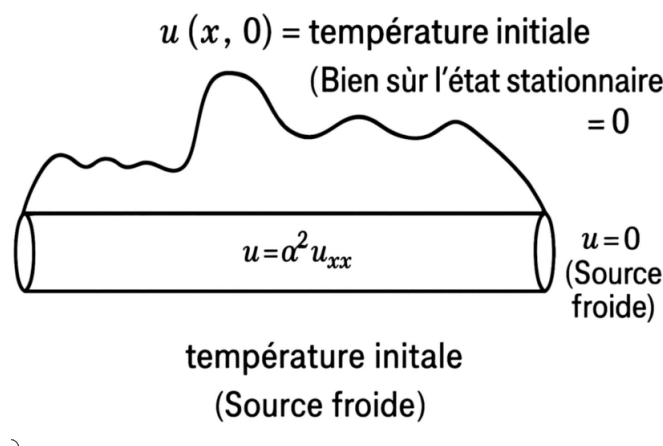


FIGURE 2.1 – Diagramme du problème de diffusion

Nous avons ici une tige finie dont la température aux extrémités est fixée à zéro (supposons qu'il s'agit d'un problème de température où zéro signifie tant de degrés). On nous donne également des données pour le problème sous la forme d'une condition initiale, notre objectif est de trouver la température  $u(t, x)$  à des moments ultérieurs.

Nous appliquons la méthode de séparation des variables, nous effectuons les étapes suivantes

**Première étape**(transformer l' EDP en deux EDOs)[13]

La substitution de  $u(t, x) = X(x)T(t)$  dans l'EDP donne

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad (2.1)$$

En divisant par  $\alpha^2 X(x)T(t)$ , on obtient

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.2)$$

Nous obtenons ce qu'on appelle des variables discrètes, c'est-à-dire que le côté gauche de l'équation ne dépend que de  $t$  et le côté droit uniquement de  $x$ . Puisque  $x$  et  $t$  sont indépendants l'un de l'autre, chaque côté doit être constant ; on peut donc écrire

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K \quad (2.3)$$

nous avons

$$T' - K\alpha^2 T = 0$$

$$X'' - KX = 0$$

ainsi, nous pouvons maintenant résoudre ces deux équations différentielles ordinaires et les multiplier ensemble pour obtenir la solution des deux EDP ( $K < 0$ )

posons  $K = -\lambda^2$  nous pouvons maintenant écrire les deux EDO comme suit

$$T' + \lambda^2 \alpha^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Nous allons maintenant résoudre ces équations, les deux équations sont des équations différentielles ordinaires de type standard et ont les solutions

$$T(t) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t}$$

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

et enfin

$$u(t, x) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \quad (2.4)$$

**deuxième étape** (Recherche de solutions à l'EDP et aux conditions aux limites)[13]

Nous avons maintenant atteint le point où nous avons de nombreuses solutions à EDP, mais toutes ne satisfont pas aux conditions aux limites ou aux conditions initiales. L'étape suivante consiste à choisir un sous-ensemble spécifique de notre ensemble actuel de solutions.

$$e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \quad (2.5)$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$u(t,0) = 0 \quad \text{et} \quad u(t,1) = 0$$

Nous substituons dans l'équation

$$u(t,0) = Be^{-\lambda^2 \alpha^2 t} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad B = 0$$

$$u(t,1) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin \lambda = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \sin \lambda = 0$$

il faut choisir  $\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$  et  $\lambda_n = \pm n\pi$   $n = 1, 2, 3, \dots$

et enfin

$$u_n(x,t) = Ae^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.6)$$

**Troisième étape** (Trouver la solution de l'EDP, les conditions aux limites et les conditions initiales)[13]

La dernière étape consiste à ajouter les solutions de base

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} Ae^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.7)$$

la condition initiale  $u(0,x) = \phi(x)$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \quad (2.8)$$

Nous multiplions par  $\sin(m\pi x)$  (m un entier arbitraire) et intégrons sur  $[0, 1]$

$$\int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = \frac{1}{2} A_m \quad (2.9)$$

Où

$$A_m = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx \quad (2.10)$$

la solution est

$$u(t,x) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad (2.11)$$

### 2.1.4 Étude numérique

On veut résoudre le problème suivant sur un intervalle  $[a, b] = [0, 1]$  avec  $t > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1 & t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

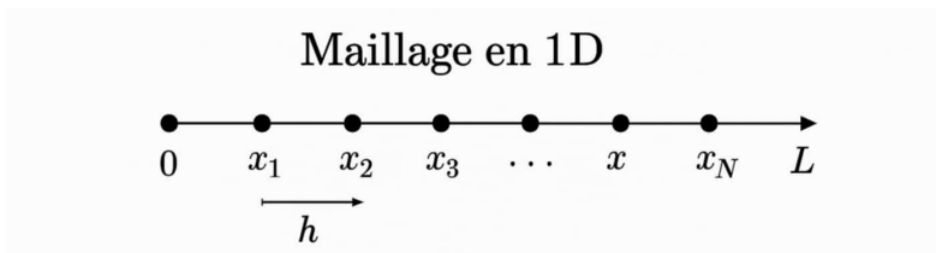
la donnée initiale est discrétisée par

$$u_j^0 = \phi(x_j) \quad \text{pour } j \in 0, \dots, N+1$$

et les conditions aux limites discrets

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

**Maillage** L'intervalle  $[0, 1]$  est discrétisé en  $N+1$  nœuds de coordonnées  $x_i$  régulièrement espacés



( $i$  variant de 0 à  $N$ ).

Notons  $\Delta x$  le pas d'espace, le temps est discrétisé en intervalles de pas constant  $\Delta t$ , et notons

$$u_i^n = u(t_n, x_i) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n$$

Par le développement de Taylor on a

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n + O(\Delta x)^4$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{(\Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^n + O(\Delta x)^4$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à

$$u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n = (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta x)^4$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma centré d'ordre deux pour approximer la dérivée seconde de  $u$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2.$$

Par le développement de Taylor on a

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n + O(\Delta t)^3 \\ u_i^{n-1} &= u_i^n - \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n - O(\Delta t)^3 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

qui représente la dérivée temporelle (différence centrée) la température à l'itération  $n + 1$   $\lambda = \alpha^2 \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}$  est donnée par

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + \lambda(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n) \quad \forall i = 1 \dots N - 1 \quad (2.12)$$

### Consistance du schéma

On définit l'erreur locale  $R_\Delta$  par la différence entre l'opérateur différentiel exact appliqué à  $u$  et l'opérateur numérique

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

avec

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et

$$L_\Delta(u) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \alpha^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

En développant  $u_i^{n+1}$  et  $u_i^{n-1}$  en série de Taylor autour de  $x$ , on a

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n + O(\Delta t)^2$$

et

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O(\Delta x)^2$$

Donc, en remplaçant dans

$$L_\Delta(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n - \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n + O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2).$$

Ainsi

$$R_\Delta = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

Le schéma numérique est **consistant d'ordre 2** en temps et en espace, car l'erreur locale tend vers zéro quand  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta x \rightarrow 0$  avec un taux d'ordre 2 [1]

**Définition 2.1** [25] Un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme  $\|\cdot\|$ , s'il existe une constante  $K > 0$  indépendante de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  (lorsque ces valeurs tendent vers zéro) telles que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0 \quad (2.13)$$

quelque soit la donnée initiale  $u^0$  si cette condition n'a lieu que pour des pas  $\Delta t$  et  $\Delta x$  astreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est conditionnellement stable.

**Remarque 2.1** la norme  $\|\cdot\|$  est donnée par

$$\|u^n\|_p = \left( \sum_{j=1}^N \Delta x |u_j^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq +\infty$$

**Remarque 2.2** d'un point de vue pratique nous traduisons sous forme de la méthode de l'analyse de Fourier pour prouver la stabilité  $L^2$  d'un schéma, on injecte dans le schéma un mode de Fourier

$$u_j^n = \xi(k)^n \exp(2i\pi k x_j) \quad \text{avec } x_j = j\Delta x$$

et on en déduit la valeur du facteur d'amplification  $\xi(k)$

**Définition 2.2** On appelle condition de stabilité de Von-Neumann l'inégalité

$$|\xi(k)| \leq 1 \quad \text{pour tout mode } k \in \mathbb{Z}$$

**Remarque 2.3** Si la condition de stabilité de Von-Neumann est satisfaite alors le schéma est stable pour la norme  $L^2$ , sinon il est instable.

Nous étudions la stabilité de ce schéma en utilisant une solution de la forme

$$U_{i+\ell}^{n+k} = \zeta_m^k \cdot e^{i\omega_n \ell \Delta x}$$

En évaluant chaque terme du schéma selon la forme donnée

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = \zeta_m \\ U_j^{n-1} = \zeta_m^{-1} \\ U_{j+1}^n = e^{i\omega_n \Delta x} \\ U_{j-1}^n = e^{-i\omega_n \Delta x} \\ U_j^n = 1 \end{cases}$$

Insérons dans le schéma numérique

$$\tilde{\zeta}_m = \tilde{\zeta}_m^{-1} + \lambda \left( e^{i\omega_n \Delta x} + e^{-i\omega_n \Delta x} - 2 \right)$$

En multipliant les deux membres par  $\tilde{\zeta}_m$  on obtient

$$\tilde{\zeta}_m^2 = 1 + \lambda \tilde{\zeta}_m \left( e^{i\omega_n \Delta x} + e^{-i\omega_n \Delta x} - 2 \right)$$

Sachant que

$$e^{i\omega_n \Delta x} + e^{-i\omega_n \Delta x} = 2 \cos(\omega_n \Delta x)$$

l'équation devient

$$\tilde{\zeta}_m^2 = 1 + 2\lambda \tilde{\zeta}_m (\cos(\omega_n \Delta x) - 1)$$

On réarrange pour écrire une équation quadratique en  $\tilde{\zeta}_m$

$$\tilde{\zeta}_m^2 - 2\lambda(1 - \cos(\omega_n \Delta x))\tilde{\zeta}_m - 1 = 0$$

Posons

$$A = -2\lambda(1 - \cos(\omega_n \Delta x))$$

ce qui donne

$$\tilde{\zeta}_m^2 + A\tilde{\zeta}_m - 1 = 0$$

Les solutions sont données par la formule quadratique

$$\tilde{\zeta}_m = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2}$$

Pour que le schéma soit stable, le module du facteur d'amplification doit être inférieur ou égal à 1 pour tout  $\omega_n$

$$|\tilde{\zeta}_m| \leq 1 \quad \forall \omega_n$$

**Théorème 2.1 (Lax)** [25] Soit  $u(x,t)$  la solution suffisamment régulière de l'équation de la chaleur (avec des conditions aux limites appropriées), soit  $u_j^n$  la solution numérique discrète obtenue par un schéma de différence finis avec la donnée initiale  $u_j^0 = u_0(x_j)$ , on suppose que le schéma est linéaire à deux niveaux, consistant et stable pour une norme. Alors le schéma est convergent au sens où

$$\forall T > 0 \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} (\sup_{t_n \leq T} \|e^n\|) = 0$$

avec  $e^n$  le vecteur erreur défini par ces composantes  $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$  de plus, si le schéma est précis à l'ordre  $p$  en espace et à l'ordre  $q$  en temps, alors pour tout temps  $T > 0$  il existe une constante  $C_T > 0$  telle que

$$\sup_{t_n < T} \|e^n\| \leq C_T((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$$

**Preuve 2.1** voir [1]

### Convergence

Le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et 1 en espace d'après le théorème de Lax le schéma numérique étudié est convergent.

### Forme matricielle

Le problème discret s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda & 0 & \dots & & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^{n-1} \\ u_2^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2}^{n-1} \\ u_{N-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

### Résultats numérique

Pour l'application numérique nous avons choisi

$$u(x,0) = \phi(x) = \sin(\pi x) \quad \text{pour } t = 0 \quad \text{et } 0 < x < 1$$

et les conditions de Dirichlet

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{et } 0 < t < 0.025$$

$tf = 0.025$  Temps final de la simulation,  $n = 10$  Nombre de points dans l'espace,  $m = 15$  Nombre de pas de temps,  $\alpha = 0.1$

Nous avons obtenue les résultats suivants

x/t	0.000	0.111	0.222	0.333	0.444	0.555	0.666	0.777	0.888	1.000
0	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0
0.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.010	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0
0.015	0	-0.0031	-0.0043	-0.0052	-0.0055	-0.0052	-0.0045	-0.0033	-0.0018	0
0.020	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0

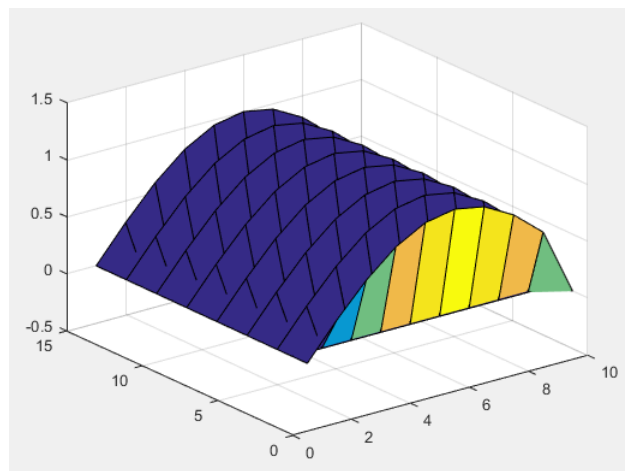


FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de la chaleur en 1D

Voici les valeurs de la solution en quelques points de  $\Omega$ , pour différentes valeurs de  $\Delta x$

Pas	$\Delta x = \frac{1}{20}$	$\Delta x = \frac{1}{40}$	$\Delta x = \frac{1}{80}$
1	0.309016994374947	0.309134426947649	0.318486409036182
2	0.309026759656825	0.309721786672100	0.354001498378194
3	0.309046290204802	0.310779860972399	0.418345666402320
4	0.587785252292473	0.587968327428485	0.603852763392104
5	0.587798759428547	0.588883974420621	0.664003025747978
6	0.587825773967394	0.587968327428485	0.772563341674709
7	0.809016994374947	0.809247791404397	0.830109801977610
8	0.809032921192628	0.810402095743769	0.909007310519490
9	0.809064775109793	0.812481184522459	1.051157126187891

### 2.1.5 Application de la méthode des éléments finis

Soit le problème suivant posé sur un intervalle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & \text{pour } x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(0, t) = g_0(t), \quad u(L, t) = g_L(t), & \text{conditions de Dirichlet} \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{condition initiale} \end{cases}$$

#### Formulation variationnelle

On multiplie l'équation différentielle par une fonction test  $v \in H^1(\Omega)$  et on intègre sur le domaine  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx = \int_{\Omega} f(x, t) v \, dx$$

une intégration par parties donne

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} v \right]_{\partial \Omega}$$

Si  $v \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $v(0) = v(L) = 0$ , donc le terme de bord disparaît. On obtient ainsi la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = \int_{\Omega} f(x, t) v \, dx$$

**Levée de la condition de Dirichlet** On introduit une fonction  $u_g(x, t)$  telle que

$$u_g(0, t) = g_0(t), \quad u_g(L, t) = g_L(t)$$

et on définit  $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - u_g(x, t)$ , qui vérifie  $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(L, t) = 0$ .

En remplaçant dans la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} v \, dx + \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial t} v \, dx - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx + \int_{\Omega} f(x, t) v \, dx$$

avec

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(0) = v(L) = 0\}$$

**Maillage** On divise l'intervalle  $\Omega = (0, L)$  en sous-intervalles de taille  $h = \frac{L}{N}$ . Les nœuds du maillage sont

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, \dots, N$$

On associe à chaque nœud  $x_i$  une fonction de forme  $\phi_i(x)$ , telle que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

La solution approchée s'écrit

$$\tilde{u}_h(x, t) = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{u}_i(t) \phi_i(x)$$

**Système linéaire discrétisé**

On remplace dans la formulation variationnelle et on prend  $v = \phi_k$ . On obtient

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{d\tilde{u}_i}{dt} \int_{\Omega} \phi_i \phi_k \, dx + \alpha^2 \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{u}_i \int_{\Omega} \phi_i' \phi_k' \, dx = F_k(t)$$

où

$$F_k(t) = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial t} \phi_k \, dx - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial x} \phi_k' \, dx + \int_{\Omega} f(x, t) \phi_k \, dx.$$

Ce système s'écrit en notation matricielle

$$M \frac{d\tilde{U}}{dt} + \alpha^2 K \tilde{U} = F(t)$$

avec

- $M_{k,i} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_k \, dx$  (matrice de masse)

- $K_{k,i} = \int_{\Omega} \phi'_i \phi'_k dx$  (matrice de rigidité)

On applique une discrétisation en temps par le schéma d'Euler explicite

$$\left( \frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta t} + \alpha^2 K \tilde{U}^{n+1} = F^{n+1} \right.$$

ce qui donne le système linéaire à chaque pas de temps

$$\left( M + \Delta t \alpha^2 K \right) \tilde{U}^{n+1} = M \tilde{U}^n + \Delta t F^{n+1}$$

Ce système s'écrit sous la forme classique

$$A \tilde{U}^{n+1} = b^{n+1}$$

où

$A = M + \Delta t \alpha^2 K$  est une matrice symétrique définie positive ([7],[25])

$b^{n+1} = M \tilde{U}^n + \Delta t F^{n+1}$  est le second membre au pas de temps ([7],[25])

## 2.2 Étude de quelques problème d'évolution non linéaire

### 2.2.1 Modèles de la migraine avec aura

La migraine avec aura est plus rare que la migraine connue, des symptômes apparaissent avant le déclenchement de la migraine elle-même, troubles de la vision, hallucinations ou même troubles de langage. Les médecins s'accordent à penser que les migraines avec aura correspondent à des ondes de dépolarisation se propageant dans la matière grise, même si ces ondes semblent s'arrêter à différents endroits d'un patient à l'autre, il est expérimentalement établi qu'elles s'arrêtent en général au creux d'une circonvolution.

Ce phénomène de propagation peut être modélisé par le problème de réaction diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & x \in \Omega \cup \Omega^c, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = v(x) & x \in \Omega \cup \Omega^c \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial(\Omega \cup \Omega^c) \setminus \Gamma, \quad t > 0 \\ u(x, t) = 1 & x \in \Gamma, \quad t > 0 \\ f(x, t) = b u(x, t)(u(x, t) - \theta)(1 - u(x, t)) \chi_{\Omega}(x) - \alpha u(x, t) \chi_{\Omega^c}(x) \end{cases}$$

$\Omega$  est la matière grise,  $\Omega^c$  est la matière blanche

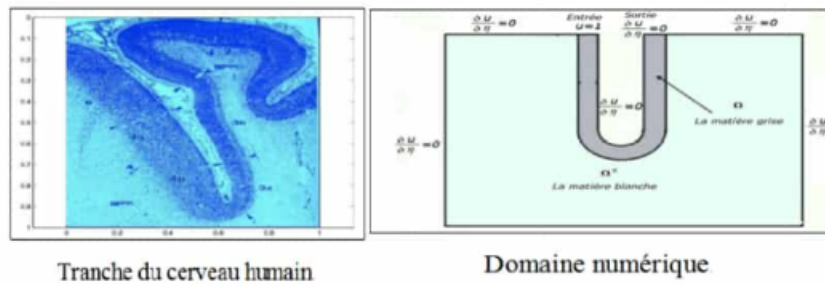
$\chi_\Omega$  et  $\chi_{\Omega^c}$  sont les fonctions caractéristiques de  $\Omega$  et  $\Omega^c$

$v$  est le coefficient de diffusivité supposé constant

$b$  est le coefficient de l'amplification de la matière grise

$\theta$  est le seuil de la réaction de la matière grise

$\alpha$  est le coefficient de l'absorption dans la matière grise.



### discrétisation du problème par différences finies

On considère un domaine unidimensionnel  $[0, L]$ , contenant deux sous-domaines

- $\Omega \subset [0, L]$  la région excitable et  $\Omega^c \subset [0, L] \setminus \Omega$  la région inhibitrice

On divise l'intervalle  $[0, L]$  en sous-intervalles de longueur

Les nœuds sont définis par

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Le temps est également discrétisé avec un pas  $\Delta t$ , et on note

$$t^n = n\Delta t, \quad u_i^n \approx u(t_n, x_i).$$

Dérivée temporelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

Dérivée seconde spatiale (schéma centré)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Terme de réaction

$$f_i^n = \begin{cases} b u_i^n (u_i^n - \theta) (1 - u_i^n), & \text{si } x_i \in \Omega \\ -\alpha u_i^n, & \text{si } x_i \in \Omega^c \end{cases}$$

Schéma numérique final

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \Delta t f_i^n$$

on pose  $\lambda = \frac{d\Delta t}{\Delta x^2}$

### Consistance

On définit l'erreur locale  $R_\Delta$  comme la différence entre l'opérateur différentiel exact et son approximation numérique

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

avec

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(t, x, u)$$

$$L_\Delta(u) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - d \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - f_i^n$$

Développons les termes du schéma numérique par des séries de Taylor

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + O(\Delta t)$$

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\Delta x)^2$$

$$f_i^n = f(x_i, t_n, u_i^n)$$

En remplaçant dans l'expression de

$$L_\Delta(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n - d \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n - f(x_i, t_n, u_i^n) + O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

Donc, l'erreur locale est

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)| = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

Le schéma numérique est consistant avec l'équation différentielle d'ordre 1 en temps et 2 en espace, car  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta x \rightarrow 0$

**forme matricielle**

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n + \Delta t \cdot f_1^{n+1} + \lambda u_0^{n+1} \\ u_2^n + \Delta t \cdot f_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^n + \Delta t \cdot f_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^n + \Delta t \cdot f_{N-1}^{n+1} + \lambda u_N^{n+1} \end{pmatrix}$$

**Résultats numérique**

Nous avons utiliser le logiciel Matlab pour calculer la solution du problème  $x \in ]0,1[$  avec la condition initiale  $v(x) = \sin(\pi x)$  et les conditions  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial \eta} = 0$   $u(t,x) = 1$ ;  $L = 1$ ;  $T = 1$ ;  $Nx = 5$ ;  $Nt = 10$ ;  $d = 0.1$ ;  $\alpha = 0.01$ ;  $b = 1$ ;  $\theta = 0.5$ ;

$x \backslash t$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.00	0.0000	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.0000
0.25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.50	0.0000	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.0000
0.75	0.0000	-0.0031	-0.0043	-0.0052	-0.0055	-0.0052	-0.0045	-0.0033	-0.0018	0.0000
1.00	0.0000	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.0000

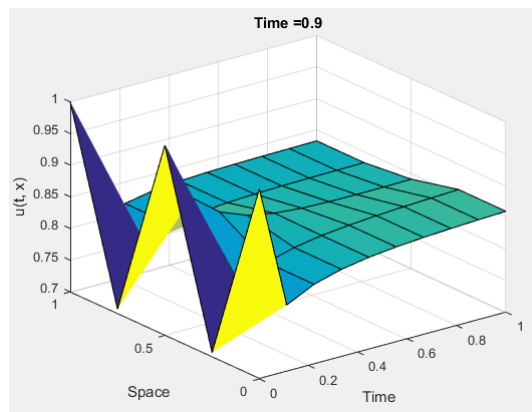


FIGURE 2.3 – Résultats du problème dela migraine avec aura

### 2.2.2 Modélisation de la propagation de cellules tumorales dans un tissu

On considère un tissu biologique de forme allongée, représenté par un intervalle spatial  $x \in (0, \pi)$  dans lequel se trouvent des cellules tumorales dont la densité est notée en fonction du temps et de la position.

L'évolution spatio-temporelle de ces cellules est décrite par le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = u^3(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = h(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Chaque terme de cette équation possède une interprétation biologique

- $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$  décrit la variation temporelle de la densité cellulaire
- $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$  représente le phénomène de diffusion, c'est-à-dire le déplacement spontané des cellules du fait des différences de concentration
- $u^3(x, t)$  modélise un terme de réaction non linéaire lié à la prolifération cellulaire. Ici, la croissance est fortement accélérée lorsque la densité est élevée, ce qui correspond à un comportement de type tumoral agressif
- Les conditions aux bords  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$  traduisent un environnement fermé où aucune cellule ne peut entrer ni sortir du tissu
- La condition initiale  $u(0, x) = h(x)$  décrit la distribution initiale des cellules dans le tissu

Ce modèle appartient à la classe des équations de réaction-diffusion et permet de décrire la dynamique de prolifération et de migration de cellules cancéreuses dans un milieu restreint. Le schéma ci-joint illustre l'évolution de la densité cellulaire dans le domaine, l'axe horizontal représente la position spatiale dans le tissu, l'axe vertical indique la densité de cellules à un instant donné.

Une concentration maximale apparaît au centre du domaine traduisant un effet de prolifération accélérée.

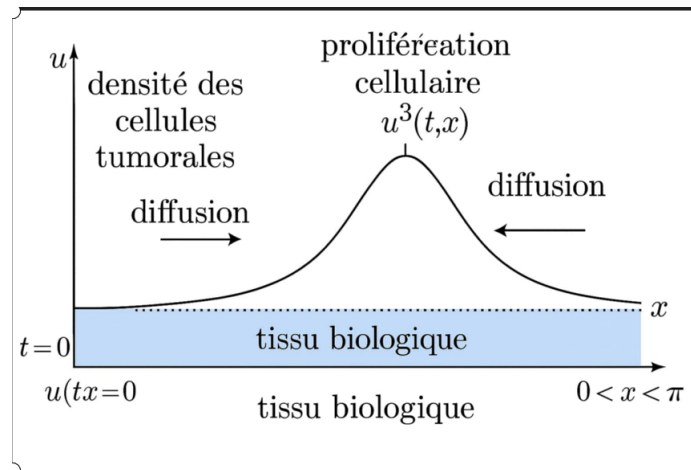


FIGURE 2.4 – Modélisation de la propagation de cellules tumorales dans un tissu

**Application**

On considère encore l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = u^3(t,x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = h(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Soit  $L=\pi$ , on divise l'intervalle  $[0,L]$  en  $M$  sous-intervalles de taille  $\Delta x = \frac{L}{M}$

Le temps est divisé en pas de taille  $\Delta t, t^n = n\Delta t$ , pour  $n=0,1,\dots,N$

Soit l'approximation de  $u$ , avec  $x, i=0,1,\dots,M$

**Schéma explicite**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

L'équation de différence devient

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = (u_i^n)^3$$

Nous l'organisons

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + (u_i^n)^3 \right), \quad i = 1, \dots, M-1$$

Avec conditions aux bords

$$u_0^n = u_M^n = 0, \quad \text{pour tout } n$$

Et condition initiale

$$u_i^0 = h(x_i), \quad i = 0, \dots, M$$

### Consistance

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

avec

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3, \quad L_\Delta(u) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - (u_i^n)^3$$

On développe les approximations

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) + O(\Delta t) \\ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + O(\Delta x^2) \\ (u_i^n)^3 &= (u(x_i, t_n))^3 \end{aligned}$$

On remplace dans l'expression de

$$L_\Delta(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right) - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \right) - u^3$$

Donc

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)| = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

Le schéma numérique est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. L'erreur locale tend vers zéro lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  et  $\Delta x \rightarrow 0$ , ce qui garantit la cohérence du schéma.

Nous avons utiliser le logiciel Matlab pour calcules la solution du problème  $x \in ]0, \pi[$  avec la condition initiale  $u(x,0) = \sin(x)$ ;  $L = \pi$ ;  $T = 0.1$ ;  $M = 30$ ;  $N = 100$ ;

$x_i = \frac{i\pi}{30}/t(s)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{30}$	0.1045	0.1044	0.1043	0.1042	0.1041	0.1040	0.1039	0.1038	0.1037	0.1036
$\frac{\pi}{15}$	0.2079	0.2077	0.2075	0.2073	0.2071	0.2069	0.2067	0.2065	0.2064	0.2062
$\frac{\pi}{10}$	0.3090	0.3087	0.3085	0.3082	0.3079	0.3076	0.3074	0.3071	0.3068	0.3066
$\frac{2\pi}{15}$	0.4067	0.4064	0.4061	0.4057	0.4054	0.4051	0.4047	0.4044	0.4041	0.4038
$\frac{\pi}{6}$	0.5000	0.4996	0.4993	0.4989	0.4985	0.4981	0.4978	0.4974	0.4971	0.4967
$\frac{\pi}{5}$	0.5878	0.5874	0.5870	0.5866	0.5863	0.5859	0.5855	0.5851	0.5848	0.5844
$\frac{7\pi}{30}$	0.6691	0.6688	0.6684	0.6680	0.6677	0.6673	0.6669	0.6666	0.6662	0.6659
$\frac{4\pi}{15}$	0.7431	0.7428	0.7425	0.7422	0.7418	0.7415	0.7412	0.7408	0.7405	0.7402
$\frac{3\pi}{10}$	0.8090	0.8087	0.8085	0.8082	0.8079	0.8076	0.8073	0.8071	0.8068	0.8065

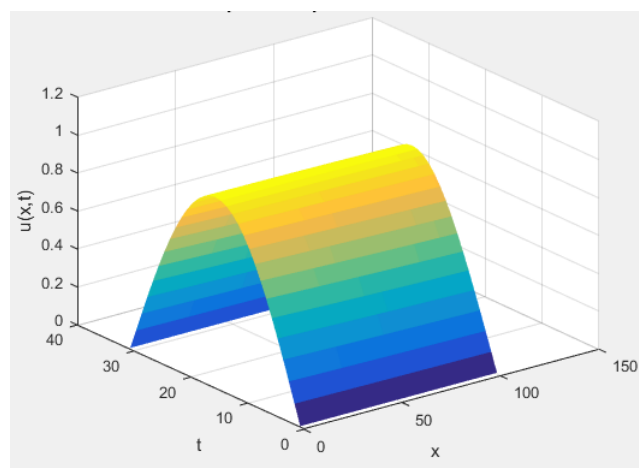


FIGURE 2.5 – Solution numérique de l'équation de la chaleur non linéaire

## 2.3 Étude de l'équation de la chaleur dans un milieu non homogène à conductivité variable

On considère le problème

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, & \forall t > 0, \forall x \in ]1, e[ \\ u(x, 0) = \ln x \\ u(1, t) = 0, \quad u(e, t) = 0 \end{cases}$$

Cette équation peut s'écrire sous forme divergente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^3 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Il s'agit d'une forme généralisée de l'équation de la chaleur dans un milieu non homogène, où le flux thermique est affecté à la fois par la conductivité variable  $x^3$  et par le facteur de pondération  $\frac{1}{x}$ , ce qui reflète une géométrie ou une structure interne particulière du milieu.

Cette équation modélise la propagation de la chaleur (ou la diffusion d'une substance) dans une barre métallique conique ou un tube à section variable, dont les propriétés internes varient avec la position

La fonction  $u(x, t)$  représente la température (ou la concentration) à un point  $x$  et à un instant  $t$

Le terme  $\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^3 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  traduit un flux diffusif dépendant de la position, plus intense vers les grandes valeurs de  $x$ .

La condition initiale  $u(x, 0) = \ln x$  décrit une distribution de température initiale non uniforme

Les conditions aux bords  $u(1, t) = u(e, t) = 0$  traduisent un refroidissement parfait aux extrémités, c'est-à-dire que la température y est maintenue nulle.

### 2.3.1 Étude mathématique

On cherche la solution de l'équation différentielle partielle par la méthode de séparation des variables

#### Etape 1

Nous supposons que la solution peut être écrite sous forme d'un produit de deux fonctions

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Nous calculons les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

Nous remplaçons dans l'équation initiale

$$x^2 X''(x)T(t) + 3xX'(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

Nous divisons par  $X(x) T(t)$

$$\frac{x^2 X''(x) + 3xX'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

Où  $\lambda$  est une constante séparant les variables.

### Etape 2

L'équation est

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

Sa solution est

$$T(t) = Ce^{-\lambda t}$$

### Etape 3

Nous résolvons l'équation

$$x^2 X''(x) + 3xX'(x) + \lambda X(x) = 0$$

C'est une équation d'Euler. Nous utilisons la solution de forme

$$X(x) = x^r$$

Nous calculons les dérivées

$$X'(x) = rx^{r-1}, \quad X''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

Nous remplaçons dans l'équation

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + 3x \cdot rx^{r-1} + \lambda x^r = 0$$

Nous simplifions

$$x^r [r(r-1) + 3r + \lambda] = 0$$

Nous obtenons l'équation caractéristique

$$r^2 + 2r + \lambda = 0$$

Si  $\lambda > 1$ , alors les racines sont

$$r = -1 \pm i\mu, \quad \text{où } \mu = \sqrt{\lambda - 1}$$

Leur solution générale est

$$X(x) = x^{-1} [A \cos(\mu \ln x) + B \sin(\mu \ln x)]$$

#### Etape 4

En imposant les conditions aux bords  $u(1,t)=0$  et  $u(e,t)=0$  nous trouvons que

$$\mu = n\pi \Rightarrow \lambda_n = 1 + n^2\pi^2$$

La solution devient donc

$$X_n(x) = x^{-1} \sin(n\pi \ln x), \quad T_n(t) = e^{-(1+n^2\pi^2)t}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-1} \sin(n\pi \ln x) e^{-(1+n^2\pi^2)t}$$

#### Etape 5

En appliquant la condition initiale  $u(x, 0) = \ln(x)$ , nous avons

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-1} \sin(n\pi \ln x)$$

Nous calculons les coefficients  $A_n$  par la méthode de l'orthogonalité. Cela consiste à multiplier les deux membres de l'équation par  $x^{-1} \cdot \sin(n\pi \ln x)$  et à intégrer sur l'intervalle  $[1, e]$

$$A_n = \frac{\int_1^e \ln x \cdot x^{-1} \cdot \sin(n\pi \ln x) dx}{\int_1^e x^{-2} \cdot \sin^2(n\pi \ln x) dx}$$

### 2.3.2 Étude numérique

Nous commençons par appliquer la méthode des différences finies

Nous utilisons la différence centrale pour approximer la dérivée seconde par rapport à l'espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Et la différence avant pour approximer la dérivée par rapport au temps

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

En appliquant les différences finies à l'équation originale, nous obtenons la forme suivante

$$x_i^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + 3x_i \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left[ \frac{x_i^2}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{3x_i}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right]$$

La condition initiale est donnée par

$$u(x_i, 0) = \ln(x_i)$$

Les conditions aux limites sont

$$u(1, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(e, t) = 0$$

Cela signifie que

$$u_1^n = 0 \quad \text{et} \quad u_N^n = 0 \quad \text{pour tout } n$$

**Consistance**

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

où

$$L(u) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$L_\Delta(u) = x_i^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + 3x_i \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\Delta x^2) \\ \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + O(\Delta x^2) \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + O(\Delta t)\end{aligned}$$

En remplaçant dans  $L_\Delta(u)$

$$L_\Delta(u) = x_i^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \right) + 3x_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right)$$

Donc

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)| = O(\Delta x^2 + \Delta t)$$

Le schéma est consistant d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. L'erreur locale de consistance tend vers zéro quand  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta t \rightarrow 0$

### Stabilité

Nous analysons la stabilité de ce schéma

$$u_{j+\ell}^{n+k} = \zeta_m^k \cdot e^{i\omega_n \ell \Delta x}$$

$$u_i^n = 1$$

$$u_{i+1}^n = e^{i\omega_n \Delta x}$$

$$u_{i-1}^n = e^{-i\omega_n \Delta x}$$

En substituant dans le schéma, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_m &= 1 + \Delta t \left[ x^2 \cdot \frac{e^{i\omega_n \Delta x} - 2 + e^{-i\omega_n \Delta x}}{\Delta x^2} + 3x \cdot \frac{e^{i\omega_n \Delta x} - e^{-i\omega_n \Delta x}}{2\Delta x} \right] \\ &= 1 + \Delta t \left[ \frac{2x^2}{\Delta x^2} (\cos(\omega_n \Delta x) - 1) + \frac{3ix \sin(\omega_n \Delta x)}{\Delta x} \right]\end{aligned}$$

Le facteur  $\tilde{\zeta}_m$  étant complexe, la condition de stabilité s'écrit

$$|\tilde{\zeta}_m| \leq 1 \quad \text{pour tout } \omega_n$$

On calcule le module

$$|\xi_m|^2 = \left(1 + \Delta t \cdot \frac{2x^2}{\Delta x^2} (\cos(\omega_n \Delta x) - 1)\right)^2 + \left(\Delta t \cdot \frac{3x \sin(\omega_n \Delta x)}{\Delta x}\right)^2$$

Ainsi, la condition de stabilité devient

$$\left(1 + \Delta t \cdot \frac{2x^2}{\Delta x^2} (\cos(\omega_n \Delta x) - 1)\right)^2 + \left(\Delta t \cdot \frac{3x \sin(\omega_n \Delta x)}{\Delta x}\right)^2 \leq 1$$

Cette inégalité impose une restriction sur le pas de temps  $\Delta t$ , qui dépend de la position  $x$ , du pas spatial  $\Delta x$ , et de la fréquence  $\omega_n$

## 2.4 Equation de La Chaleur en 2D

L'équation de la chaleur en deux dimensions permet de modéliser l'évolution de la température dans une plaque mince et homogène au cours du temps. On considère que la température en un point  $(x, y)$  à l'instant  $t$  est représentée par une fonction  $u(x, y, t)$ . Cette équation traduit la façon dont la chaleur se propage dans la surface, selon les propriétés thermiques du matériau étudié.

### 2.4.1 Position du problème

Considérons l'équation de la chaleur à deux dimensions dans tout l'espace, avec des données initiales et sources données :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(t, x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(0, x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

$u(t, x, y)$  fonction inconnue représentant la température au point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  au temps  $t > 0$

$\alpha^2$  coefficient de diffusion thermique, constant strictement positif, qui dépend des propriétés physiques du matériau (par exemple, la conductivité thermique)

$f(t, x, y)$  terme source représentant la génération ou l'absorption de chaleur dans le domaine. Il peut dépendre du temps et de l'espace

$g(x, y)$  condition initiale qui donne la répartition de la température dans tout l'espace  $\mathbb{R}^2$  à l'instant initial  $t = 0$

Le domaine spatial est  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire que la diffusion est considérée dans un plan infini

### 2.4.2 Étude mathématique

On applique la transformation de Fourier pour la résolution de ce problème  
La méthode consiste à séparer le problème en deux problèmes

$$u(t, x, y) = u_1(t, x, y) + u_2(t, x, y)$$

#### Problème homogène

$u_1$  résout le problème homogène avec donnée initiale  $g(x, y)$

$u_2$  résout le problème non homogène avec donnée initiale nulle

$$(P'_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = 0 \\ u_1(0, x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

On applique la transformée de Fourier (par rapport à  $x$  et  $y$ )

$$\hat{u}_1(t, \xi, \eta) = \mathcal{F}_{x,y}[u_1(t, x, y)]$$

Ce qui transforme l'équation en

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(t, \xi, \eta) + 4\pi^2 \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2) \hat{u}_1(t, \xi, \eta) = 0 \\ \hat{u}_1(t, \xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta) \cdot \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$\hat{u}_1(t, \xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta) \cdot e^{-4\pi^2 \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2) t}$$

On effectue ensuite la transformée de Fourier inverse, et on obtient

$$u_1(t, x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi \alpha^2 t} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\alpha^2 t}\right) g(x', y') dx' dy'$$

#### Problème non homogène

$$(P''_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = f(t, x, y) \\ u_2(0, x, y) = 0 \end{cases}$$

On applique de nouveau la transformée de Fourier

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial t}(t, \xi, \eta) + 4\pi^2 \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2) \widehat{u}_2(t, \xi, \eta) = \widehat{f}(t, \xi, \eta) \\ \widehat{u}_2(0, \xi, \eta) = 0 \end{cases}$$

On résout cette équation différentielle avec facteur intégrant

$$\widehat{u}_2(t, \xi, \eta) = \int_0^t \widehat{f}(s, \xi, \eta) e^{-4\pi^2 \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2)(t-s)} ds$$

Ce qui donne, après transformation inverse

$$u_2(t, x, y) = \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi\alpha^2(t-s)} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\alpha^2(t-s)}\right) f(s, x', y') dx' dy' ds$$

Finalement, la solution complète de l'équation est donnée par la somme

$$u(t, x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi\alpha^2 t} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\alpha^2 t}\right) g(x', y') dx' dy' + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi\alpha^2(t-s)} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\alpha^2(t-s)}\right) f(s, x', y') dx' dy' ds$$

### 2.4.3 Étude du problème sur un intervalle borné

On considère le problème

$$\begin{cases} \Omega = [0, 1] \times [0, 0.5] \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 200y(0.5 - y)(1 - e^{-3t}) \\ u(x, 0, t) = u(x, 0.5, t) = 100x(1 - x)(1 - e^{-3t}) \\ u(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$

On applique la méthode de séparation des variables

#### Étape 1 Supposition de séparation des variables.

On suppose que la solution s'écrit sous la forme

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

En substituant cette forme dans l'équation de la chaleur, on obtient

$$X(x)Y(y)T'(t) = \alpha^2 (X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t))$$

On divise ensuite par  $\alpha^2 X(x)Y(y)T(t)$  des deux côtés

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Comme le membre de gauche dépend seulement de  $t$  et le membre de droite de  $x$  et  $y$ , ils doivent être égaux à une constante  $-\lambda$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

On introduit deux constantes  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  telles que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda_x, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda_y, \quad \text{avec } \lambda = \lambda_x + \lambda_y$$

### Étape 2 Résolution des équations séparées.

Les équations différentielles ordinaires deviennent

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda_x X(x) = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ Y''(y) + \lambda_y Y(y) = 0, & Y(0) = Y(L) = 0 \\ T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

Les solutions non triviales sont données par

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_x = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$Y_p(y) = \sin\left(\frac{p\pi y}{L}\right), \quad \lambda_y = \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$T_{n,p}(t) = e^{-\alpha^2(\lambda_x + \lambda_y)t} = e^{-\alpha^2\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right)t}$$

### Étape 3 Combinaison linéaire des solutions.

La solution générale est une combinaison linéaire des solutions séparées

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{n,p} e^{-\alpha^2\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right)t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi y}{L}\right)$$

### Étape 4 Calcul des coefficients.

Les coefficients  $A_{n,p}$  sont obtenus à partir du développement en série double de Fourier de la condition initiale

$$A_{n,p} = \frac{4}{L^2} \int_0^L \int_0^L \phi(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi y}{L}\right) dx dy$$

### 2.4.4 Étude numérique

Considérons un problème de conduction thermique bidimensionnelle statique Dans un domaine rectangulaire  $[0, 1] \times [0, 0.5]$

$$\begin{cases} \Omega = [0, 1] \times [0, 0.5] \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 200y(0.5 - y)(1 - e^{-3t}) \\ u(x, 0, t) = u(x, 0.5, t) = 100x(1 - x)(1 - e^{-3t}) \\ u(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$

On discrétise l'espace et le temps

- On divise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N_x$  sous-intervalles d'amplitude constante  $\Delta x = \frac{1}{N_x}$
- On divise l'intervalle  $[0, 0.5]$  en  $N_y$  sous-intervalles d'amplitude constante  $\Delta y = \frac{0.5}{N_y}$
- Le temps est divisé en pas de temps de taille  $\Delta t$  On définit les nœuds

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x$$

$$y_j = j \cdot \Delta y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y$$

$$t^n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dérivée temporelle (ordre 1 avant)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Dérivées spatiales (ordre 2 centré)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées dans l'équation, on obtient le schéma explicite suivant

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \alpha^2 \Delta t \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)$$

**Consistance**

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

avec

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$L_\Delta(u) = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \alpha^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)$$

Développement en séries de Taylor

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta t)$$

$$\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta y^2)$$

$$L_\Delta(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t) \right) - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\Delta y^2) \right)$$

Donc

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)| = O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (x et y). Lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$ , l'erreur locale tend vers zéro, ce qui garantit la consistance du schéma numérique.

**Stabilité**

On introduit la solution test de la forme

$$U_{i+\ell, j+L}^{n+k} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x \ell \Delta x + \omega_y L \Delta y)}$$

$$\begin{cases} U_{i,j}^{n+1} = \xi_m \\ U_{i,j}^n = 1 \\ U_{i+1,j}^n = e^{i\omega_x \Delta x} \\ U_{i-1,j}^n = e^{-i\omega_x \Delta x} \\ U_{i,j+1}^n = e^{i\omega_y \Delta y} \\ U_{i,j-1}^n = e^{-i\omega_y \Delta y} \end{cases}$$

remplaçons dans le schéma

$$\xi_m = 1 + \alpha^2 \Delta t \left( \frac{e^{i\omega_x \Delta x} + e^{-i\omega_x \Delta x} - 2}{\Delta x^2} + \frac{e^{i\omega_y \Delta y} + e^{-i\omega_y \Delta y} - 2}{\Delta y^2} \right)$$

$$xi_m = 1 + \alpha^2 \Delta t \left( \frac{2 \cos(\omega_x \Delta x) - 2}{\Delta x^2} + \frac{2 \cos(\omega_y \Delta y) - 2}{\Delta y^2} \right)$$

$$\xi_m = 1 - 4\alpha^2 \Delta t \left( \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_x \Delta x}{2}\right)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_y \Delta y}{2}\right)}{\Delta y^2} \right)$$

pour que le schéma soit stable il faut que

$$|\xi_m| \leq 1$$

Le terme avec les sinus est toujours positif ou nul, donc la valeur minimale de est obtenue lorsque

$$\sin^2\left(\frac{\omega_x \Delta x}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sin^2\left(\frac{\omega_y \Delta y}{2}\right) = 1$$

Ceci correspond au pire cas (le mode de plus haute fréquence) Ainsi

$$\xi_m = 1 - 4\alpha^2 \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)$$

Pour que  $|\xi_m| \leq 1$ , il faut que

$$-1 \leq \xi_m \leq 1$$

La borne supérieure  $\xi_m \leq 1$  est toujours vraie ici, il faut donc juste que

$$\xi_m \geq -1$$

Ce qui donne

$$1 - 4\alpha^2 \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \geq -1$$

Réarrangeons cette inégalité

$$-4\alpha^2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \geq -2$$

En multipliant par -1 (et en inversant le sens de l'inégalité)

$$4\alpha^2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq 2$$

En divisant par 4

$$\alpha^2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Donc, la condition de stabilité du schéma explicite en 2D est

$$\alpha^2\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

### convergence

Le schéma numérique, étant à la fois consistant et stable sous une condition sur le pas de temps, garantit que la solution approchée converge vers la solution exacte lorsque les mailles et le pas temporel tendent vers zéro ( $\Delta t, \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ )

qui s'écrit encore sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a & -r_x & 0 & -r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_x & a & -r_x & 0 & -r_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_x & a & 0 & 0 & -r_y & 0 & 0 & 0 \\ -r_y & 0 & 0 & a & -r_x & 0 & -r_y & 0 & 0 \\ 0 & -r_y & 0 & -r_x & a & -r_x & 0 & -r_y & 0 \\ 0 & 0 & -r_y & 0 & -r_x & a & 0 & 0 & -r_y \\ 0 & 0 & 0 & -r_y & 0 & 0 & a & -r_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_y & 0 & -r_x & a & -r_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_y & 0 & -r_x & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ u_5^{n+1} \\ u_6^{n+1} \\ u_7^{n+1} \\ u_8^{n+1} \\ u_9^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n + b_1 \\ u_2^n + b_2 \\ u_3^n + b_3 \\ u_4^n + b_4 \\ u_5^n + b_5 \\ u_6^n + b_6 \\ u_7^n + b_7 \\ u_8^n + b_8 \\ u_9^n + b_9 \end{pmatrix}$$

on pose

$$r_x = \frac{v \Delta t}{\Delta x^2} \quad r_y = \frac{v \Delta t}{\Delta y^2}$$

$$a = 1 + 2r_x + 2r_y$$

$$b_i = \sum_{j,j'=1\dots N} (r_x \cdot u_{i,j}^{n+1} + r_y \cdot u_{i,j'}^{n+1})$$

(i,j) désigne le nœud intérieur courant

(i',j') désignent les indices des nœuds voisins sur le bord, horizontalement (gauche/droite) ou verticalement (haut/bas)

$u_{i,j}^{n+1}$  ou  $u_{i',j'}^{n+1}$  sont les valeurs connues imposées aux bords (selon les conditions de Dirichlet)

Nous avons utiliser le logiciel Matlab pour calcules la solution du problème nous prenons  $x \in (0, 1), y \in (0, 0.5)$  avec la condition initiale

$$u(x, y, 0) = 0$$

et les conditions de Dirichlet

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 200y(0.5 - y)(1 - e^{-3t})$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 0.5, t) = 100x(1 - x)(1 - e^{-3t})$$

Les données du code sont  $L_x = 1$  Longueur du domaine selon  $x$ ,  $L_y = 0.5$  Longueur du domaine selon  $y$ ,  $v = 1.5$  Coefficient de diffusion thermique  $T_{\max} = 2$  Temps final de la simulation ;  $N_x = 20$  Nombre de points selon  $x$ ,  $N_y = 20$  Nombre de points selon  $y$ ,  $N_t = 100$  Nombre de pas de temps  
 $dx = \frac{1}{19} \approx 0.0526$ ,  $dy = \frac{0.5}{19} \approx 0.0263$

x/y	0.000	0.026	0.053	0.079	0.105	0.132	0.158	0.184	0.211	0.237
0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.053	0	-0.0298	0.0623	-0.0998	0.1442	-0.1967	0.2574	-0.3249	0.3964	-0.4674
0.105	0	0.0498	-0.1040	0.1666	-0.2409	0.3288	-0.4304	0.5436	-0.6636	0.7829
0.158	0	-0.0552	0.1154	-0.1851	0.2679	-0.3660	0.4795	-0.6061	0.7405	-0.8743
0.211	0	0.0481	-0.1005	0.1613	-0.2337	0.3195	-0.4190	0.5301	-0.6482	0.7659
0.263	0	-0.0331	0.0691	-0.1109	0.1607	-0.2196	0.2880	-0.3642	0.4452	-0.5259
0.316	0	0.0125	-0.0259	0.0412	-0.0590	0.0796	-0.1030	0.1286	-0.1552	0.1810
0.368	0	0.0197	-0.0419	0.0686	-0.1018	0.1429	-0.1924	0.2497	-0.3126	0.3775
0.421	0	-0.0848	0.1788	-0.2905	0.4272	-0.5936	0.7912	-1.0169	1.2620	-1.5118
0.474	0	0.2298	-0.4837	0.7839	-1.1490	1.5913	-2.1141	2.7086	-3.3514	4.0036

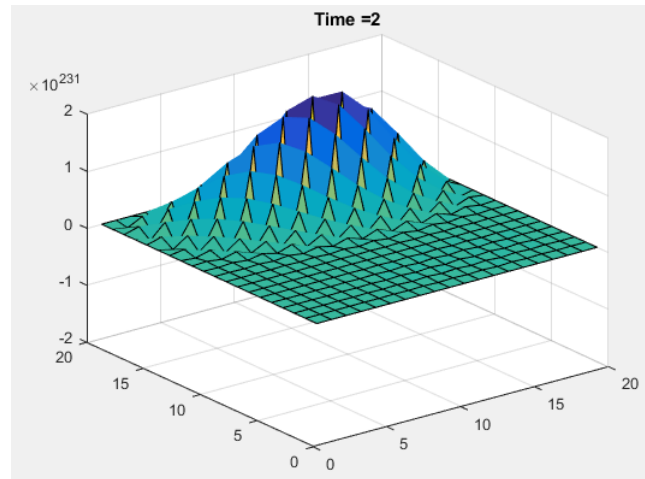


FIGURE 2.6 – Solution à l'équation de la chaleur 2D

**Exemple 2.1** Nous avons utilisé le logiciel **MATLAB** pour réaliser une simulation numérique et calculer la solution d'un problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = [0,4] \times [0,4] \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, y, t) = e^y \cos x - e^x \cos y \\ u(x, y, 0) = 0 \end{array} \right.$$

Les données du code sont  $L_x = 4$  Longueur du domaine selon  $x$ ,  $L_y = 4$  Longueur du domaine selon  $y$ ,  $\alpha = 10^{-4}$  Coefficient de diffusion thermique  $T_{max} = 2$  Temps final de la simulation ;  $N_x = 10$  Nombre de points selon  $x$ ,  $N_y = 10$  Nombre de points selon  $y$ ,  $N_t = 2$  Nombre de pas de temps, les pas spatiaux ont été fixés à  $dx = \frac{L_x}{N_x - 1}$  et  $dy = \frac{L_y}{N_y - 1}$ , et le pas temporel a été choisi comme  $dt=0.1$

$x_1 \backslash y_1$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
$x_1$	0	0.6568	1.8022	3.5584	6.1222	9.8341	15.2812	23.4455	35.9228	55.2518
$x_2$	-0.6568	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0012	0.0044	50.3134
$x_3$	-1.8022	-0.0001	0	0	0	0	0	0	0.0018	36.0018
$x_4$	-3.5584	-0.0002	0	0	0	0	0	0	0.0008	15.3232
$x_5$	-6.1222	-0.0003	0	0	0	0	0	0	-0.0004	-7.3529
$x_6$	-9.8341	-0.0005	0	0	0	0	0	0	-0.0014	-27.0723
$x_7$	-15.2812	-0.0008	0	0	0	0	0	0	-0.0020	-39.1484
$x_8$	-23.4455	-0.0012	0	0	0	0	0	0	-0.0020	-39.9011
$x_9$	-35.9228	-0.0044	-0.0018	-0.0008	0.0004	0.0014	0.0020	0.0020	0	-27.1042
$x_{10}$	-55.2518	-50.3134	-36.0018	-15.3232	7.3529	27.0723	39.1484	39.9011	27.1042	0

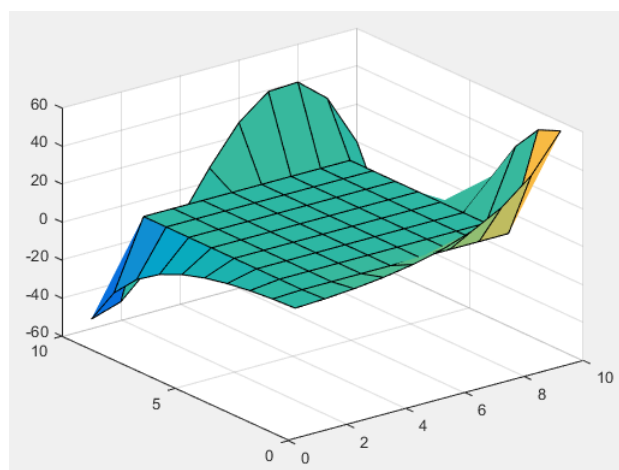


FIGURE 2.7 – Solution à l'équation de la chaleur 2D

### 2.4.5 Application de la méthode des éléments finis

Soit le problème

$$\begin{cases} \Omega = [0, 1] \times [0, 0.5] \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad \text{dans } \Omega, \quad t > 0 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = g(y, t) \quad 0 \leq y \leq 0.5 \quad t > 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, 0.5, t) = h(x, t) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$

On multiplie par une fonction test  $v \in H^1$  et on intègre sur le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx dy - \alpha^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v \, dx dy = \int_{\Omega} f(x, y, t) v \, dx dy$$

#### Intégration par parties

Pour le terme en

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v \, \hat{n}_x \, ds$$

Pour le terme en

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v \, dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \, dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v \, \hat{n}_y \, ds$$

Levée de la condition de Dirichlet On pose  $u(x, y, t)$

$$\tilde{u}(x, y, t) = u(x, y, t) - u_g(x, y, t)$$

On remplace dans l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} v \, dx dy + \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial t} v \, dx dy - \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla v \, dx dy + \int_{\Omega} f(x, y, t) v \, dx dy$$

En insérant dans la formulation variationnelle et en multipliant par une fonction test, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} v \, dx dy + \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial t} v \, dx dy - \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla v \, dx dy + \int_{\Omega} f(x, y, t) v \, dx dy$$

avec

$$V = \left\{ v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \mid v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 0.5) = 0 \right\}$$

$$v = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

**Construction du maillage**

On divise le domaine  $\Omega = L_x \times L_y$  en une grille régulière composée de petits rectangles. On choisit

- $N_x$  subdivisions dans la direction
- $N_y$  subdivisions dans la direction

On obtient alors un total de  $N_x \times N_y$  éléments finis rectangulaires et  $(N_x + 1)(N_y + 1)$  nœuds (points du maillage)

On définit les pas suivants

$$h_x = \frac{L_x}{N_x}, \quad h_y = \frac{L_y}{N_y}$$

Les coordonnées des nœuds du maillage sont données par

$$x_i = i \cdot h_x, \quad i = 0, \dots, N_x$$

$$y_j = j \cdot h_y, \quad j = 0, \dots, N_y$$

Soit  $\phi_{i,j}(x, y)$  la fonction de forme associée au nœud  $(x_i, y_j)$  telle que

$$\phi_{i,j}(x_k, y_l) = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$$

La solution approchée est écrite comme une combinaison linéaire

$$\tilde{u}_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \tilde{u}_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y)$$

où  $\tilde{u}_{i,j}(t)$  sont les inconnues nodales à chaque instant

En injectant cette approximation dans la formulation variationnelle, et en choisissant  $v = \phi_{k,l}$

comme fonction test, on obtient

$$\sum_{i,j} \frac{d\tilde{u}_{i,j}}{dt} \int_{\Omega} \phi_{i,j} \phi_{k,l} dx dy + \alpha^2 \sum_{i,j} \tilde{u}_{i,j} \int_{\Omega} \nabla \phi_{i,j} \cdot \nabla \phi_{k,l} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial t} \phi_{k,l} dx dy - \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla \phi_{k,l} dx dy + \int_{\Omega} f(x, y, t) \phi_{k,l} dx dy$$

$$\sum_{i,j} \frac{d\tilde{u}_{i,j}}{dt} \int_{\Omega} \phi_{i,j} \phi_{k,l} dx dy + \alpha^2 \sum_{i,j} \tilde{u}_{i,j} \int_{\Omega} \nabla \phi_{i,j} \cdot \nabla \phi_{k,l} dx dy = F_{k,l}(t)$$

$$F_{k,l}(t) = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_g}{\partial t} \phi_{k,l} dx dy - \alpha^2 \int_{\Omega} \nabla u_g \cdot \nabla \phi_{k,l} dx dy + \int_{\Omega} f(x, y, t) \phi_{k,l} dx dy$$

En notation matricielle, ce système devient

$$M \frac{d\tilde{U}(t)}{dt} + \alpha^2 K \tilde{U}(t) = F(t)$$

- $\tilde{U}(t)$  est le vecteur des inconnues nodales
  - $M$  est la matrice de masse  $M_{(k,l)(i,j)} = \int_{\Omega} \phi_{i,j} \phi_{k,l} dx dy$
  - $k$  est la matrice de rigidité  $M_{(k,l)(i,j)} = \int_{\Omega} \nabla \phi_{i,j} \cdot \nabla \phi_{k,l} dx dy$
- $F(t)$  est le vecteur second membre On utilise le schéma d'Euler implicite

$$\frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta t} \approx \frac{d\tilde{U}}{dt}(t^{n+1})$$

Alors nous obtenons

$$M \left( \frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta t} \right) + \alpha^2 K \tilde{U}^{n+1} = F^{n+1}$$

Donc

$$(M + \Delta t \alpha^2 K) \tilde{U}^{n+1} = M \tilde{U}^n + \Delta t F^{n+1}$$

Forme finale utilisable numériquement

$$A \tilde{U}^{n+1} = b^{n+1}$$

où

$$A = M + \Delta t \mu K$$

$$b^{n+1} = M \tilde{U}^n + \Delta t F^{n+1}$$

# Étude de quelques problèmes d'évolution d'ordre 2 en temps

## 3.1 Équation d'onde en 1D

L'équation des ondes en une dimension modélise la propagation d'une perturbation dans un milieu élastique, comme une corde tendue ou une onde sonore. Elle permet de décrire l'évolution temporelle d'une déformation  $u(t, x)$ , qui représente par exemple le déplacement vertical d'un point de la corde situé en  $x$  au temps  $t$ . Cette équation rend compte du comportement vibratoire d'un système soumis à une excitation ou à une force extérieure.

### 3.1.1 Position du problème

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(P_3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = h(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$u(t, x)$  fonction inconnue représentant le déplacement vertical d'un point situé en position  $x$  à l'instant  $t$ .

$\alpha^2$  paramètre strictement positif représentant le carré de la vitesse de propagation de l'onde dans

le milieu.

$f(t, x)$  terme source (ou terme de forçage) représentant une excitation extérieure agissant sur le système.

$g(x)$  condition initiale décrivant la forme initiale du déplacement au temps  $t = 0$ .

$h(x)$  condition initiale représentant la vitesse initiale du déplacement au temps  $t = 0$ .

### 3.1.2 Étude mathématique

On applique la transformée de Fourier par rapport à la variable spatiale pour chercher la solution du problème

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-i\xi x} dx$$

La transformée de Fourier a les propriétés suivantes

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(t, \xi) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, \xi)$$

comme la transformée de Fourier s'applique uniquement sur la variable  $x$ , donc les dérivées en  $t$  ne sont pas affectées ; ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, \xi) + \alpha^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi) \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{g}(\xi) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = \hat{h}(\xi) \end{cases}$$

Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène et la solution particulière

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}_h(t, \xi) + \hat{u}_p(t, \xi)$$

#### Solution homogène

$$\hat{u}_h(t, \xi) = A(\xi) \cos(\alpha \xi t) + B(\xi) \sin(\alpha \xi t)$$

#### Solution particulière (par variation des constantes)

On utilise la méthode des coefficients indéterminés (ou Duhamel)

$$\hat{u}_p(t, \xi) = \int_0^t \frac{\sin(\alpha \xi (t-s))}{\xi} \hat{f}(s, \xi) ds$$

Ainsi, la solution complète dans l'espace de Fourier est

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) \cos(\alpha \xi t) + \frac{\hat{h}(\xi)}{\alpha \xi} \sin(\alpha \xi t) + \int_0^t \frac{\sin(\alpha \xi (t-s))}{\alpha \xi} \hat{f}(s, \xi) ds$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse, on obtient la solution dans l'espace physique

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{g}(\xi) \cos(\alpha \xi t) + \frac{\hat{h}(\xi)}{\alpha \xi} \sin(\alpha \xi t) + \int_0^t \frac{\sin(\alpha \xi (t-s))}{\alpha \xi} \hat{f}(s, \xi) ds \right] e^{i\xi x} d\xi$$

### 3.1.3 Étude du problème sur un intervalle borné

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & x \in [0, L], t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(0, x) = g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = h(x) \end{cases}$$

On applique [13] la méthode de séparation des variables ; La substitution de

$$u(x, y, t) = X(x)T(t)$$

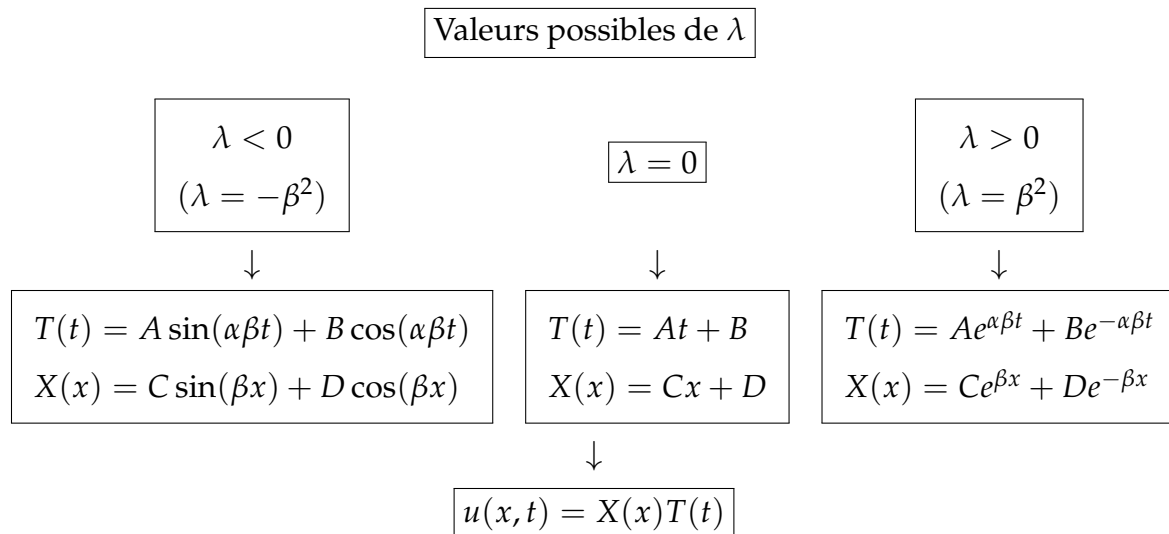
En remplaçant cette expression dans l'équation d'onde et en séparant les variables, on obtient les deux EDO

$$T'' - \alpha^2 \lambda T = 0$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

où  $\lambda$  est une constante  $-\infty < \lambda < \infty$

Nous allons maintenant étudier les solutions des deux équations différentielles ordinaires obtenues, en fonction des différentes valeurs possibles du paramètre spectral  $\lambda$



Entrez les conditions aux limites de la constante de séparation négative

$$u(x, t) = [C \sin(\beta x) + D \cos(\beta x)][A \sin(\alpha\beta t) + B \cos(\alpha\beta t)]$$

En insérant l'équation dans  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , on obtient

$$u(0, t) = X(0)T(t) = D[A \sin(\alpha\beta t) + B \cos(\alpha\beta t)] = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad D = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t)$$

$$= C \sin(\beta L)[A \sin(\alpha\beta t) + B \cos(\alpha\beta t)] = 0$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Donc la solution générale

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[ A_n \sin\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Application des conditions initiales pour déterminer les constantes

$$u(x, 0) = g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(x)$$

nous pouvons trouver les coefficients  $A_n$  et  $B_n$

$$A_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Nous avons donc terminé, la solution est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[ A_n \sin\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{\alpha n\pi t}{L}\right) \right]$$

### 3.1.4 Étude numérique

Soit le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L & t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

En discrétisant ce problème en posant les données aux limites  $u(x, t) = 0$ , les données initiales  $u_0^n = u_{N+1}^n$ , la valeur inconnue est  $u_i^n$ .

Le problème est d'ordre 2 en temps, nous avons

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + o(\Delta t)^2 \quad i = 1 \dots N - 1$$

On approche les dérivées secondes par un schéma centré à 3 points, ce qui donne

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad i = 1 \dots N - 1$$

on pose

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

À l'aide des différences finies, on obtient la forme discrète suivante de l'équation

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + r^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

**Consistance**

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

avec

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad L_\Delta(u) = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$L_\Delta(u) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \right) - \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \right)$$

Donc

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)| = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

Le schéma numérique est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

**Stabilité**

Nous étudions la stabilité de ce schéma au sens de Von-Neumann.

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \tilde{\zeta}_m \\ u_i^n = 1 \\ u_i^{n-1} = \frac{1}{\tilde{\zeta}_m} \\ u_{i+1}^n = e^{i\omega_n \Delta x} \\ u_{i-1}^n = e^{-i\omega_n \Delta x} \end{cases}$$

$$\tilde{\zeta}_m = 2 - \frac{1}{\tilde{\zeta}_m} + r^2 (e^{i\omega_n \Delta x} + e^{-i\omega_n \Delta x} - 2)$$

Utilisant l'identité trigonométrique

$$e^{i\omega_n \Delta x} + e^{-i\omega_n \Delta x} = 2 \cos(\omega_n \Delta x)$$

on obtient

$$\tilde{\zeta}_m = 2 - \frac{1}{\tilde{\zeta}_m} + 2r^2 (\cos(\omega_n \Delta x) - 1)$$

$$\tilde{\zeta}_m^2 = 2\tilde{\zeta}_m - 1 + 2r^2 \tilde{\zeta}_m (\cos(\omega_n \Delta x) - 1)$$

Ce qui donne

$$\tilde{\zeta}_m^2 - \left[ 2 + 2r^2(\cos(\omega_n \Delta x) - 1) \right] \tilde{\zeta}_m + 1 = 0$$

On pose

$$A = - \left[ 2 + 2r^2(\cos(\omega_n \Delta x) - 1) \right]$$

D'où l'équation quadratique devient

$$\tilde{\zeta}_m^2 + A\tilde{\zeta}_m + 1 = 0$$

Les racines de cette équation sont données par

$$\tilde{\zeta}_m = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

La stabilité est assurée si le module du facteur d'amplification est inférieur ou égal à 1

$$|\tilde{\zeta}_m| \leq 1 \quad \forall \omega_n$$

Le cas le plus défavorable est lorsque  $(\cos(\omega_n \Delta x) = 1)$ , donc

$$A = - \left[ 2 + 2r^2(-2) \right] = 4r^2 - 2$$

Cela nous amène à la condition de stabilité suivante

$$r \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\alpha}$$

Le schéma explicite considéré est stable sous la condition CFL suivante

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\alpha}$$

### convergence

Le schéma numérique, étant à la fois consistant d'ordre 2 en temps et en espace, et stable sous la condition CFL  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\alpha}$ , converge vers la solution exacte lorsque  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ .

Nous avons utilisé le logiciel Matlab pour calculer la solution du problème nous prenons  $x \in (0, 1)$  avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, y) = 0$$

Les données du code sont  $L = 1$  Longueur du domaine spatial,  $T = 1$  Temps total de la simulation,  $c = 1$  Vitesse de propagation de l'onde,  $N_x = 25$  Nombre de divisions dans l'espace,  $N_t = 50$  Nombre de pas de temps

x t	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9
0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0.1253	0.1253	0.1248	0.1239	0.1224	0.1204	0.1180	0.1151	0.1117	0.1079
x	0.2487	0.2487	0.2477	0.2458	0.2428	0.2389	0.2341	0.2284	0.2217	0.2142
x	0.3681	0.3681	0.3667	0.3638	0.3594	0.3537	0.3466	0.3380	0.3282	0.3171
x	0.4818	0.4818	0.4799	0.4761	0.4704	0.4629	0.4535	0.4424	0.4295	0.4149
x	0.5878	0.5878	0.5855	0.5808	0.5739	0.5647	0.5533	0.5398	0.5240	0.5063
x	0.6845	0.6845	0.6818	0.6765	0.6684	0.6577	0.6444	0.6286	0.6103	0.5896
x	0.7705	0.7705	0.7675	0.7614	0.7523	0.7403	0.7254	0.7076	0.6870	0.6636
x	0.8443	0.8443	0.8410	0.8344	0.8244	0.8112	0.7949	0.7753	0.7528	0.7272
x	0.9048	0.9048	0.9013	0.8941	0.8835	0.8694	0.8518	0.8309	0.8067	0.7793

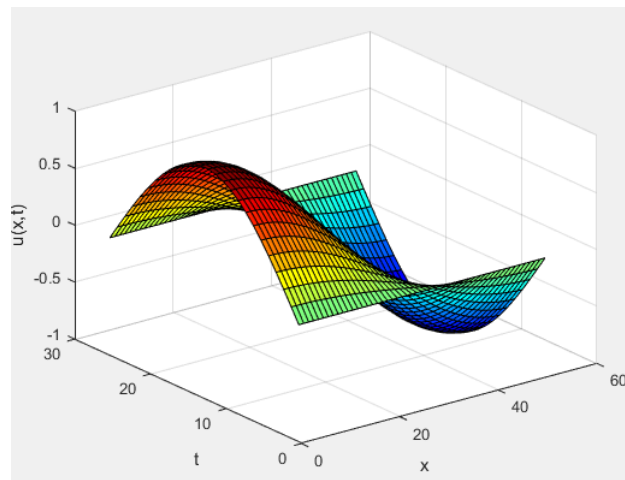


FIGURE 3.1 – Problème d'équation d'onde en 1D

Voici les valeurs de la solution en quelques points de  $\Omega$ , pour différentes valeurs de  $\Delta x$

Pas	$\Delta x = \frac{1}{10}$	$\Delta x = \frac{1}{20}$	$\Delta x = \frac{1}{40}$
1	0.309016994374947	0.307799550539729	0.301725092185741
2	0.587785252292473	0.585469536507057	0.573915230106009
3	0.809016994374947	0.805829685034951	0.789926546600964
4	0.307807044916651	0.301736294473254	0.275478183789802
5	0.585483791659071	0.573936538123084	0.52399064358089
6	0.805849305568457	0.789955874570427	0.275478183789802
7	0.305391883531384	0.29092268245659	0.231925155290533
8	0.580889881712348	0.553367825776811	0.441147860463653
9	0.799526330973514	0.761645470769645	0.607187939396712

### 3.1.5 Application de la méthode des éléments finis

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, L) \end{cases}$$

#### Formulation variationnelle

On cherche une solution  $u \in H_0^1(0, L)$  telle que pour toute fonction test  $V = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(0) = v(L) = 0\}$ , on ait

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v(x) dx + \alpha^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^L f(x, t) v(x) dx$$

On divise l'intervalle  $[0, L]$  en  $N$  sous-intervalles égaux de taille  $h = \frac{L}{N}$ ; Soient  $\phi_j(x)_{i=1}^{N-1}$  les fonctions de forme associées aux nœuds internes

On approxime la solution comme une combinaison linéaire

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j(t) \phi_j(x)$$

On insère cette expression dans la formulation variationnelle, et on choisit  $v = \phi_i$ , pour obtenir

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left( \int_0^L \phi_j \phi_i dx \right) u_j''(t) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{N-1} \left( \int_0^L \phi_j' \phi_i' dx \right) u_j(t) = \int_0^L f(x, t) \phi_i(x) dx$$

Cela donne, en notation matricielle

$$Mu''(t) + \alpha^2 Ku(t) = F(t)$$

où  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{(N-1)}(t))^T$

- $M$  est la matrice de masse  $M_{i,j} = \int_0^L \phi_j \phi_i dx$
- $K$  est la matrice de raideur  $K_{i,j} = \int_0^L \phi_j' \phi_i' dx$
- $F_i(t) = \int_0^L f(x,t) \phi_i(x) dx$

On approche la dérivée seconde par la formule

$$u''(t) \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}$$

En injectant cette approximation dans le système variationnel

$$M \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + \alpha^2 Ku^n = F^n$$

On réécrit ce système

$$Mu^{n+1} = \Delta t^2 (F^n - \alpha^2 Ku^n) + 2Mu^n - Mu^{n-1}$$

À chaque pas de temps, on résout

$$Au^{n+1} = b^n$$

où

$$A = M$$

(dans ce schéma explicite)

$$b^n = \Delta t^2 (F^n - \alpha^2 Ku^n) + 2Mu^n - Mu^{n-1}$$

## 3.2 Équation d'onde en 2D

L'équation des ondes en deux dimensions permet de modéliser la propagation des vibrations dans une plaque mince rectangulaire, fixée sur ses bords. Cette plaque peut représenter, par exemple, une surface métallique, une membrane élastique ou une fine feuille de matériau soumise à une perturbation mécanique.

La fonction  $u(t, x, y)$  désigne le déplacement vertical d'un point de la plaque situé à la position  $(x, y)$  au temps  $t$ . Lorsqu'une force extérieure agit sur une région de la plaque (comme un choc ou une impulsion initiale), une onde se propage dans toute la surface, causant une série de vibrations qui dépendent des propriétés du matériau et des conditions aux limites.

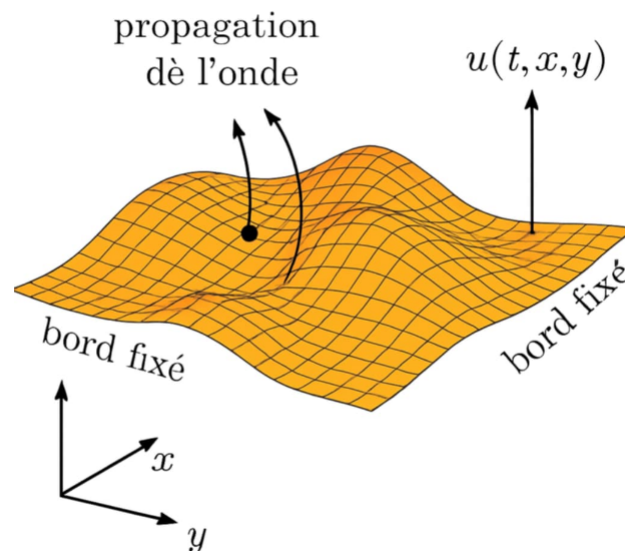


FIGURE 3.2 – Propagation d'une onde dans une plaque mince à bords fixes

### 3.2.1 Position du problème

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \Delta u = f(t, x, y), & t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = h(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

où  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  est le Laplacien en deux dimensions

$u(t, x, y)$  est la solution recherchée (par exemple, une déformation ou une onde)

$f(t, x, y)$  est un terme source (ou terme de forçage) qui représente une excitation extérieure agissant sur le système

$g(x, y)$  représente la forme initiale de l'onde au temps  $t = 0$

$h(x, y)$  donne la vitesse initiale de l'onde au temps initial

### 3.2.2 Étude mathématique

On applique la transformation de Fourier complète [13] par rapport aux variables d'espace  $x$  et  $y$

$$\hat{u}(t, \xi, \eta) = \mathcal{F}_{x,y}[u(t, x, y)](\xi, \eta)$$

$$\hat{f}(t, \xi, \eta) = \mathcal{F}_{x,y}[f(t, x, y)](\xi, \eta)$$

On utilise la propriété

$$\mathcal{F}[\Delta u] = -\alpha^2(\xi^2 + \eta^2)\hat{u}$$

L'équation devient

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, \xi, \eta) + \alpha^2(\xi^2 + \eta^2)\hat{u}(t, \xi, \eta) = \hat{f}(t, \xi, \eta)$$

avec les conditions initiales

$$\hat{u}(0, \xi, \eta) = \hat{g}(\xi, \eta), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi, \eta) = \hat{h}(\xi, \eta)$$

On résout cette équation différentielle en  $t$ , paramétrée par  $(\xi, \eta)$ . On note

$$\omega(\xi, \eta) = \sqrt{\alpha^2(\xi^2 + \eta^2)}$$

L'équation devient

$$\hat{u}_{tt}(t, \xi, \eta) + \omega^2 \hat{u}(t, \xi, \eta) = \hat{f}(t, \xi, \eta)$$

**Solution de l'équation homogène**

$$\hat{u}_h(t, \xi, \eta) = A(\xi, \eta) \cos(\omega t) + B(\xi, \eta) \sin(\omega t)$$

**Solution particulière**

$$\widehat{u}_p(t, \xi, \eta) = \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} \widehat{f}(s, \xi, \eta) ds$$

D'après les conditions initiales, on détermine

$$A(\xi, \eta) = \widehat{g}(\xi, \eta), \quad B(\xi, \eta) = \frac{\widehat{h}(\xi, \eta)}{\omega}$$

On en déduit

$$\widehat{u}(t, \xi, \eta) = \widehat{g}(\xi, \eta) \cos(\omega t) + \frac{\widehat{h}(\xi, \eta)}{\omega} \sin(\omega t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} \widehat{f}(s, \xi, \eta) ds$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse, on obtient la solution

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[ \widehat{g}(\xi, \eta) \cos(\omega t) + \frac{\widehat{h}(\xi, \eta)}{\omega} \sin(\omega t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} \widehat{f}(s, \xi, \eta) ds \right] e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$$

où  $\omega = \sqrt{\alpha^2(\xi^2 + \eta^2)}$ .

**3.2.3 Étude du problème sur un intervalle borné**

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y) = h(x, y) \end{cases}$$

On suppose une solution sous forme

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$$

En dérivant et en remplaçant, on obtient

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Chaque côté dépend d'une variable différente, donc ils sont égaux à une constante

$$\frac{T''}{\alpha^2 T} = -\lambda \Rightarrow T'' + \lambda \alpha^2 T = 0$$

et

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

On pose

$$\frac{X''}{X} = -\lambda_x, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda_y \quad \Rightarrow \lambda = \lambda_x + \lambda_y$$

et pour le temps

$$T'' + \alpha^2(\lambda_x + \lambda_y)T = 0$$

pour l'espace

$$X'' + \lambda_x X = 0, \quad Y'' + \lambda_y Y = 0$$

Il a une solution générale

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda_x} x) + B \sin(\sqrt{\lambda_x} x)$$

Application des conditions aux limites

$$X(0) = X(L_x) = 0 \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right), \quad \lambda_x = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2$$

Nous appliquons la même chose à y

$$Y(0) = Y(L_y) = 0 \quad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right), \quad \lambda_y = \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2$$

Résoudre la deuxième équation

$$T'' + \alpha^2(\lambda_x + \lambda_y)T = 0$$

En posant

$$\omega_{n,m} = \alpha \sqrt{\lambda_x + \lambda_y} = \alpha \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2}$$

la solution devient

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) + B_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t)$$

La solution complète s'écrit alors comme une série double

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t) + B_{n,m} \sin(\omega_{n,m}t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$$

À partir des conditions initiales

$$A_{n,m} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy dx$$

$$B_{n,m} = \frac{4}{\omega_{n,m} L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} h(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dy dx$$

### 3.2.4 Étude numérique

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y) = h(x, y) \end{cases}$$

Les fonctions  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  représentent les données initiales du problème. En discrétisant cette équation dans un domaine rectangulaire avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, on impose que  $u(x, t) = 0$  sur le bord du domaine pour tout instant  $t$ . Les conditions initiales sont données par

$$u(x, 0) = g(x) \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x),$$

où  $u(x, 0)$  est la forme initiale de l'onde et  $v(x)$  est la vitesse initiale de l'onde.

L'inconnue principale est  $u(x, t)$ , qui représente l'amplitude de l'onde au point  $x$  à l'instant  $t$ . Mais comme il s'agit d'une équation du second ordre par rapport au temps, on doit exprimer les premiers instants ( $t = 0$ ) à l'aide d'un schéma explicite, tel que le schéma des différences finies centrées

Approximation de la dérivée seconde en temps

On utilise une différence centrée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}$$

Approximation de la dérivée seconde en espace

Pour la direction

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

Pour la direction

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^n) \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

En insérant les approximations dans l'équation, on obtient le schéma suivant

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \lambda_x^2(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \lambda_y^2(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)$$

avec

$$\lambda_x = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad \lambda_y = \frac{c\Delta t}{\Delta y}$$

**Consistance**

$$R_\Delta = |L(u) - L_\Delta(u)|$$

avec

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$L_\Delta(u) = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right)$$

On développe chaque approximation

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta y^2)$$

En remplaçant dans l'expression de

$$L_{\Delta}(u) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \right) - c^2 \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\Delta y^2) \right) \right).$$

Donc

$$R_{\Delta} = |L(u) - L_{\Delta}(u)| = O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Le schéma numérique est consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace (selon et ). L'erreur locale tend vers zéro lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$ , ce qui garantit la cohérence du schéma.

### Stabilité

Pour analyser la stabilité, on analyse au sens de Von-Neumann; supposons la solution de la forme

$$U_{i+\ell, j+L}^{n+k} = \tilde{\zeta}_m^k \cdot e^{i(\omega_x \ell \Delta x + \omega_y L \Delta y)}$$

En remplaçant chaque terme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,j}^{n+1} = \tilde{\zeta}_m \cdot e^{i(\omega_x i \Delta x + \omega_y j \Delta y)} \\ u_{i,j}^n = e^{i(\omega_x i \Delta x + \omega_y j \Delta y)} \\ u_{i,j}^{n-1} = \tilde{\zeta}_m^{-1} \cdot e^{i(\omega_x i \Delta x + \omega_y j \Delta y)} \\ u_{i+1,j}^n = e^{i\omega_x \Delta x} \\ u_{i-1,j}^n = e^{-i\omega_x \Delta x} \\ u_{i,j+1}^n = e^{i\omega_y \Delta y} \\ u_{i,j-1}^n = e^{-i\omega_y \Delta y} \end{array} \right.$$

On factorise tous les termes par le facteur commun

$$\tilde{\zeta}_m = 2 - \tilde{\zeta}_m^{-1} + \lambda_x^2 (e^{i\omega_x \Delta x} + e^{-i\omega_x \Delta x} - 2) + \lambda_y^2 (e^{i\omega_y \Delta y} + e^{-i\omega_y \Delta y} - 2)$$

on obtient

$$\tilde{\zeta}_m = 2 - \tilde{\zeta}_m^{-1} + 2\lambda_x^2 (\cos(\omega_x \Delta x) - 1) + 2\lambda_y^2 (\cos(\omega_y \Delta y) - 1)$$

En réarrangeant

$$\tilde{\zeta}_m + \tilde{\zeta}_m^{-1} = 2 + 2\lambda_x^2 (\cos(\omega_x \Delta x) - 1) + 2\lambda_y^2 (\cos(\omega_y \Delta y) - 1)$$

Soit

$$A = 2 + 2\lambda_x^2(\cos(\omega_x\Delta x) - 1) + 2\lambda_y^2(\cos(\omega_y\Delta y) - 1)$$

L'équation devient alors

$$\zeta_m^2 - A\zeta_m + 1 = 0$$

Pour que le schéma soit stable, il faut que

$$|\zeta_m| \leq 1 \quad \text{pour tout } \omega_x, \omega_y$$

Cela est vérifié si

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 \leq 1$$

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta y}\right)^2 \leq 1$$

### Convergence

Le schéma numérique, étant à la fois consistant d'ordre 2 en temps et en espace, et stable sous la condition CFL, converge vers la solution exacte lorsque  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ .

Dans cette partie, nous avons utilisé le logiciel **MATLAB** pour calculer la solution numérique du problème des ondes en deux dimensions. La méthode adoptée est celle des **différences finies explicites**, appliquée sur un domaine carré  $\Omega = [0, 4] \times [0, 4]$ , avec des conditions initiales et aux limites appropriées. L'objectif est de simuler l'évolution de l'onde jusqu'à un temps final  $T_{max} = 2$ , et d'observer le comportement de la solution dans le domaine.

Les paramètres numériques utilisés sont

- Longueurs du domaine  $L_x = L_y = 4$
- Nombre de points spatiaux  $N_x = N_y = 30$
- Nombre de pas de temps  $N_t = 10$
- Vitesse de propagation  $c = 1$
- Condition initiale  $u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$
- Conditions aux bords Dirichlet homogènes  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$

TABLE 3.1 – Valeurs de la solution  $u(x_i, y_j, T = 2)$  extraites du centre du domaine, sur une sous-matrice  $10 \times 10$

$y_j/x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
$y_1$	-1.2890	-1.3855	-1.2259	-0.8397	-0.2983	0.2983	0.8397	1.2259	1.3855	1.2889
$y_2$	-1.3855	-1.4892	-1.3177	-0.9025	-0.3206	0.3206	0.9025	1.3177	1.4892	1.3855
$y_3$	-1.2259	-1.3177	-1.1659	-0.7986	-0.2837	0.2837	0.7986	1.1659	1.3177	1.2258
$y_4$	-0.8397	-0.9025	-0.7986	-0.5470	-0.1943	0.1943	0.5470	0.7986	0.9025	0.8397
$y_5$	-0.2983	-0.3206	-0.2837	-0.1943	-0.0690	0.0690	0.1943	0.2837	0.3206	0.2983
$y_6$	0.2983	0.3206	0.2837	0.1943	0.0690	-0.0690	-0.1943	-0.2837	-0.3206	-0.2983
$y_7$	0.8397	0.9025	0.7986	0.5470	0.1943	-0.1943	-0.5470	-0.7986	-0.9025	-0.8397
$y_8$	1.2259	1.3177	1.1659	0.7986	0.2837	-0.2837	-0.7986	-1.1658	-1.3177	-1.2258
$y_9$	1.3855	1.4892	1.3177	0.9025	0.3206	-0.3206	-0.9025	-1.3177	-1.4892	-1.3855
$y_{10}$	1.2889	1.3855	1.2258	0.8397	0.2983	-0.2983	-0.8397	-1.2259	-1.3855	-1.2889

$10^{15}$

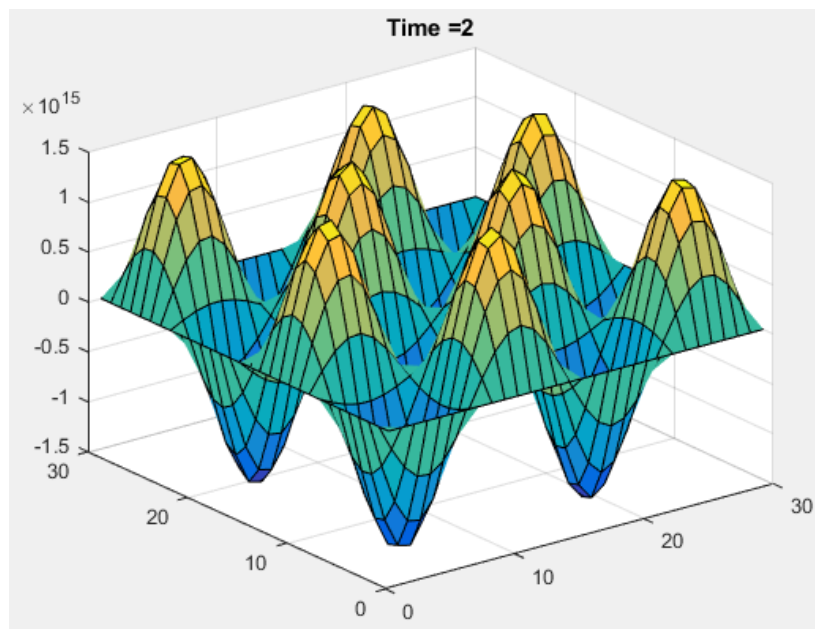


FIGURE 3.3 – Évolution de la solution de l'équation des ondes en 2D

### 3.3 Étude de l'équation du télégraphe

#### 3.3.1 Position du problème du télégraphe

L'équation du télégraphe est une équation aux dérivées partielles qui modélise la propagation d'un signal ou d'une onde dans un milieu où l'on tient compte à la fois de la propagation, de l'amortissement et de la dissipation. La fonction inconnue  $\varphi(x, t)$  représente une variable d'intérêt, par exemple la tension, la déformation, ou toute autre fonction liée à la propagation d'une onde ou d'un signal.

L'équation à résoudre est

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - CL \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - RG \varphi = 0.$$

Les paramètres physiques qui apparaissent dans l'équation sont les suivants

- $C$  la capacité du système,
- $L$  l'inductance,
- $R$  la résistance,
- $G$  la conductance ou les pertes supplémentaires dues à la dissipation d'énergie.

#### 3.3.2 Étude mathématique

On introduit[17] les constantes suivantes

$$c = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad \alpha = \frac{RC + LG}{2CL}, \quad \beta = \frac{RG}{CL}$$

Avec ces notations, l'équation (E) devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta \varphi$$

Posons

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$$

Ce changement permet de simplifier l'équation

On calcule les dérivées de Première dérivée par rapport au temps

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} \psi \right) \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$$

Deuxième dérivée

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{4} \psi \right) \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$$

En remplaçant ces expressions dans (E) et en simplifiant, on obtient une équation pour

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \left( \beta - \frac{\alpha^2}{4} \right) \psi$$

On a effectué un changement de variables

$$X = x + ct \quad \text{et} \quad Y = x - ct$$

Puis, on a calculé les dérivées partielles

a observé que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X} (1) + \frac{\partial}{\partial Y} (1) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= c \frac{\partial}{\partial X} - c \frac{\partial}{\partial Y} \end{aligned}$$

Pour la dérivée seconde par rapport à x

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}$$

Pour la dérivée seconde par rapport à t

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)$$

La substitution signifie qu'il remplace les dérivées par les expressions nouvellement calculées

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{c^2} c^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\beta - \alpha^2}{4c^2} \right) \psi = 0$$

Simplification Les termes avec  $c^2$  s'annulent

Il reste

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) + \left( \frac{\beta - \alpha^2}{4c^2} \right) \psi = 0$$

Nous simplifions maintenant

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \left( \frac{\beta - \alpha^2}{4c^2} \right) \psi = 0$$

En mettant  $\mu^2 = \left( \frac{\beta - \alpha^2}{16c^2} \right)$  cela donne

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \mu^2 \psi = 0 \quad \mu^2 = \left( \frac{\beta - \alpha^2}{16c^2} \right) = \frac{(RC - LG)^2}{16(LC)^3} \geq 0$$

Au temps  $t$ , on a  $X = x + ct$ , et  $Y = x - ct$  Les conditions données sont

$$\psi(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

On doit exprimer  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  en fonction de  $X$  et  $Y$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)$$

À  $t=0$  (c'est-à-dire  $X=Y=x$ ), cela donne

$$\frac{\partial \psi}{\partial X}(x, x) - \frac{\partial \psi}{\partial Y}(x, x) = \frac{1}{c} g(x)$$

en résumé, nos nouvelles conditions sont

$$\psi(X, X) = f\left(\frac{X+X}{2}\right) = f(X)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X}(X, X) - \frac{\partial \psi}{\partial Y}(X, X) = \frac{1}{c} g(X)$$

Recherche d'une fonction de Riemann On cherche une fonction de Riemann dans le domaine pour résoudre cette équation, La fonction  $v(X, X)$  doit vérifier

(i) L'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} + \mu^2 v = 0$$

(ii) Condition sur la diagonale

Sur la diagonale  $X = Y$ , la fonction de Riemann est généralement normalisée de sorte que

$$v(X, X) = 1$$

Ce choix est justifié par la méthode de Riemann, afin de garantir que la solution obtenue respecte les conditions initiales données pour le problème de Cauchy.

(iii) Condition de dérivée sur la diagonale

$$\frac{\partial v}{\partial Y}(X, X) = 0$$

On suppose que dépend aussi de  $(x_0, Y_0)$  On note

$$v = v(X_0, Y_0, X, Y)$$

et on cherche une solution sous la forme

$$v(X_0, Y_0, X, Y) = \Phi(z) \quad \text{où} \quad z = 2\mu\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)}$$

où  $\Phi(z)$  est une fonction à déterminer, et où est positif ou nul dans T

Nous calculons la dérivée

$$\frac{\partial z}{\partial X} = 2\mu \times \frac{1}{2\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)}} \times ((Y_0 - Y))$$

Nous résumons

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \mu \times \frac{-(Y_0 - Y)}{\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)}}$$

Nous avons

$$\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)} = \frac{z}{2\mu} \quad z = 2\mu\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)}$$

En compensation

$$\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)} = \frac{z}{2\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{(X_0 - X)(Y_0 - Y)}} = \frac{2\mu}{z}$$

si

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \mu(Y_0 - Y) \times \frac{2\mu}{z} = \frac{2\mu^2(Y_0 - Y)}{z}$$

Également  $\frac{\partial z}{\partial Y}$  même méthode de calcul

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = \mu(X_0 - X) \times \frac{2\mu}{z} = \frac{2\mu^2(X_0 - X)}{z}$$

On calcule les dérivées partielles nécessaires

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \Phi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial Y} = \Phi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial Y}$$

On veut calculer

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y}$$

Utilisant la règle de dérivation en chaîne

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Phi'(z) \frac{\partial z}{\partial X} \right)$$

Développant

$$= \Phi''(z) \frac{\partial z}{\partial Y} \frac{\partial z}{\partial X} + \Phi'(z) \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y}$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} = -\frac{\mu^2}{z} (z\Phi''(z) + \Phi'(z))$$

donc, en remplaçant

$$-\frac{\mu^2}{z} (z\Phi''(z) + z\Phi'(z)) + \frac{\mu^2}{z} \Phi(z) = 0$$

(on a remplacé  $v$  par  $\Phi(z)$  car  $v(X, Y) = \Phi(z)$ )

On peut diviser toute l'équation par  $\frac{\mu^2}{z}$  (qui est une constante non nulle) pour simplifier

### 3.3.3 Étude numérique

On considère l'équation différentielle partielle suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \mu^2 \psi = 0 & \text{sur } (x, y) \in [0, L] \times [0, T] \\ \psi(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = g(x) \\ \psi(0, y) = 0, \quad \psi(L, y) = 0 & \text{pour tout } y \in [0, T] \end{cases}$$

On divise le domaine en  $N_x$  points dans la direction  $x$  avec un pas  $\Delta x = \frac{L}{N_x - 1}$ ,

et  $N_y$  points dans la direction  $y$  avec un pas  $\Delta y = \frac{T}{N_y - 1}$ .

Les points de discrétisation sont donnés par

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \quad y_j = j \cdot \Delta y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y - 1$$

#### Schéma numérique

Pour approximer la dérivée croisée au point , on utilise un schéma de différences finies centré

d'ordre deux

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j-1}) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$$

En remplaçant cette approximation dans l'équation différentielle, on obtient le schéma suivant

$$\frac{1}{4\Delta x \Delta y} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j-1}) + \mu^2 \psi_{i,j} = 0$$

ce qui donne après simplification

$$\psi_{i+1,j+1} = \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i+1,j-1} - 4\Delta x \Delta y \mu^2 \psi_{i,j}$$

### Consistance

$$R_\Delta = |L(\Psi) - L_\Delta(\Psi)|$$

avec

$$L(\Psi) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \mu^2 \Psi,$$

$$L_\Delta(\Psi) = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i-1,j-1}) + \mu^2 \Psi_{i,j}$$

On développe les termes autour du point

$$\frac{1}{4\Delta x \Delta y} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i-1,j-1}) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

En remplaçant dans  $L_\Delta(\Psi)$ , on obtient

$$L_\Delta(\Psi) = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + O(\Delta x^2 + \Delta y^2) \right) + \mu^2 \Psi$$

Donc l'erreur locale est

$$R_\Delta = |L(\Psi) - L_\Delta(\Psi)| = O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Le schéma est consistant d'ordre 2 en espace. L'erreur locale tend vers zéro quand  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$ .

### Stabilité

On suppose une solution de la forme

$$\Psi_{i+l,j+L}^{n+k} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x l \Delta x + \omega_y L \Delta y)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{i+1,j+1} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x(i+1)\Delta x + \omega_y(j+1)\Delta y)} \\ P \Psi_{i-1,j+1} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x(i-1)\Delta x + \omega_y(j+1)\Delta y)} \\ \Psi_{i-1,j-1} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x(i-1)\Delta x + \omega_y(j-1)\Delta y)} \\ \Psi_{i+1,j-1} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x(i+1)\Delta x + \omega_y(j-1)\Delta y)} \\ \Psi_{i,j} = \zeta_m^k \cdot e^{i(\omega_x i \Delta x + \omega_y j \Delta y)} \end{array} \right.$$

$$\zeta_m^k = e^{-2i\omega_x \Delta x} \cdot (e^{2i\omega_y \Delta y} + 1) - e^{2i\omega_x \Delta x} \cdot e^{-2i\omega_y \Delta y} - 4\Delta x \Delta y \mu^2$$

Pour que le schéma soit stable, il faut

$$|\zeta_m^k| \leq 1$$

On évalue donc le module de l'expression trouvée à droite et on cherche la condition sur  $\mu, \Delta x, \Delta y$  afin de satisfaire cette inégalité.

### Convergence

Puisque le schéma est à la fois :

- consistant d'ordre  $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ ,
- stable d'après l'analyse précédente,

on en déduit que l'erreur globale entre la solution numérique et la solution exacte diminue lorsque les pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent vers zéro.

Autrement dit, la solution numérique  $\Psi_{i,j}$  converge vers la solution exacte  $\Psi(x_i, y_j)$ , ce qui montre que le schéma est **convergent d'ordre**  $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ .

### Application

Nous considérons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \mu^2 \psi = 0 & \text{sur } (x, y) \in [0, L] \times [0, T] \\ \psi(x, 0) = \exp\left(-\left(x - \frac{L}{2}\right)^2\right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \psi(0, y) = \psi(L, y) = 0 & \text{pour tout } y \in [0, T] \end{cases}$$

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
$x_1$	0.0014	0.0014	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2$	0.0023	0.0023	0.0026	0.0031	0.0041	0.0057	0.0077	0.0101	0.0130	0.0160
$x_3$	0.0038	0.0038	0.0039	0.0041	0.0042	0.0041	0.0035	0.0019	-0.0009	-0.0055
$x_4$	0.0061	0.0061	0.0064	0.0069	0.0076	0.0086	0.0101	0.0125	0.0163	0.0224
$x_5$	0.0100	0.0100	0.0103	0.0111	0.0121	0.0133	0.0146	0.0160	0.0169	0.0167
$x_6$	0.0161	0.0161	0.0167	0.0178	0.0194	0.0213	0.0237	0.0266	0.0300	0.0344
$x_7$	0.0259	0.0259	0.0268	0.0285	0.0309	0.0339	0.0375	0.0415	0.0461	0.0509
$x_8$	0.0414	0.0414	0.0428	0.0454	0.0490	0.0536	0.0590	0.0652	0.0722	0.0800
$x_9$	0.0658	0.0658	0.0680	0.0719	0.0774	0.0843	0.0925	0.1017	0.1121	0.1235
$x_{10}$	0.1042	0.1042	0.1074	0.1134	0.1216	0.1320	0.1441	0.1579	0.1732	0.1900

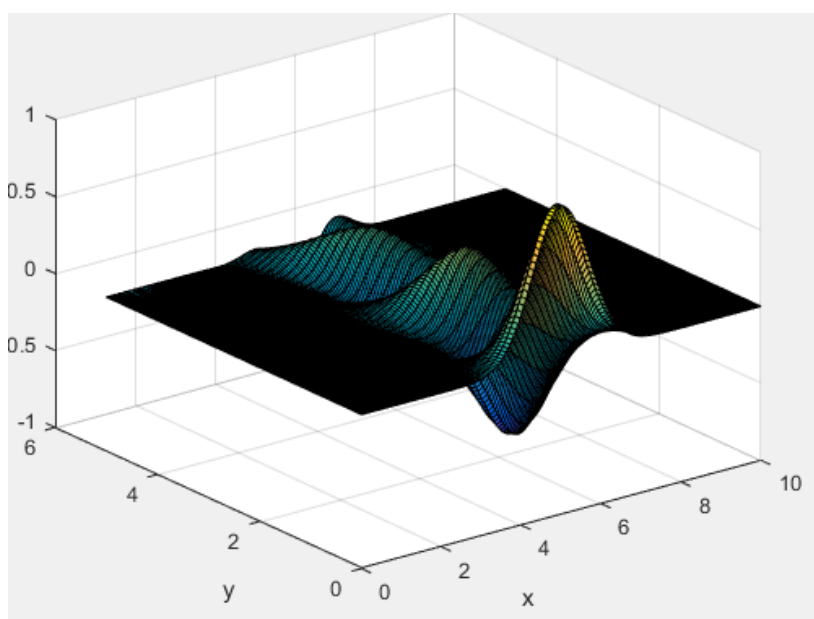


FIGURE 3.4 – Titre de la figure ici.

# Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et théorèmes utiles pour utilisé dans ce que suit

## 4.1 Fonction d'Euler

La fonction d'Euler désigne généralement une classe de fonctions spéciales introduites par Leonhard Euler, notamment les fonctions Gamma et Beta. Ces fonctions permettent d'étendre les notions classiques de l'analyse, comme la factorielle, aux réels et aux complexes, et jouent un rôle fondamental dans le calcul fractionnaire.

### 4.1.1 Fonction Gamma

**Définition 4.1** On appelle fonction Gamma la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0)$$

**Exemple 4.1**

i)  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

ii)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$  (posant le changement de variable  $t = \tau^2$ ).

**Lemme 4.1** La fonction Gamma est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  (resp. holomorphe sur le demi plan  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ ).

**Proposition 4.1**

- 1)  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$
- 2)  $\Gamma(n) = (n - 1)!$

**Preuve 4.1**

$$1) \Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. = z\Gamma(z).$$

2) on pose  $z = n - 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n - 1)\Gamma(n - 1) \\ &= (n - 1)(n - 2)\dots\Gamma(1) \\ &= (n - 1)! \end{aligned}$$

**Lemme 4.2** Pour tout  $p > 0$ , on a

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

**Remarque 4.1** La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières par la formule  $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ , et La transition d'un intervalle à un autre  $(-1, 0)$ ,  $(-2, -1)$ ... La fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatives entières

**4.1.2 Fonction Beta**

**Définition 4.2** La fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler, définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{avec } \Re(p) > 0, \Re(q) > 0.$$

**Lemme 4.3** la fonction de beta est relative par la fonction Gamma par la formule suivante pour tout  $\Re(p) > 0, \Re(q) > 0$ ,

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

**Preuve 4.2** Soit  $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$  on a

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left( \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left( \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} dy \right) \\ &= \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy.\end{aligned}$$

En utilisant le changement des coordonnées, considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} y = x + y \\ x = u \end{cases} \implies \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

De même que le domaine  $D$  correspondant à  $D$  dans les coordonnées  $u, v$  est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \int_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} |u| dudv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 u^{p-1} v^{p-1} u^{q-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\ &= \int_0^\infty u^{p+q-1} e^{-u} du \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \\ &= \Gamma(p+q)\beta(p, q).\end{aligned}$$

par conséquent

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

## 4.2 Fonction de Mittag-Leffler

**Définition 4.3** La fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (z \in \mathbf{C}, \Re(\alpha) > 0).$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (x \in \mathbf{C}, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0).$$

### Exemple 4.2

1)

$$E_{0,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

2)

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

3)

$$E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$$

4)

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

### Proposition 4.2

i) pour  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}) = \lambda^n E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}), (n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbf{C}).$$

ii) pour  $\alpha = 1/n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ), on a

$$E_{1/\alpha}(x) = e^x \left[ 1 + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k/n)} \right) dt \right], (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

## 4.3 Intégration Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel au sens de Riemann-Liouville avec quelques propriétés dans l'espace des fonctions continues.

### 4.3.1 Formule de Dirichlet

Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha, \beta > 0$ , et si  $h$  est une fonction continue, l'expression suivante est appelée formule de Dirichlet

$$\int_a^x (t-x)^{\alpha-1} dt \int_a^t (t-y)^{\beta-1} h(x,y) dy = \int_a^x dy \int_y^x (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\beta-1} h(x,y) dt.$$

En prenant

$$h(x,y) = g(x)f(y), \quad \text{et} \quad g(x) = 1,$$

on obtient

$$\int_a^x (t-x)^{\alpha-1} dt \int_a^t (t-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_a^x (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy,$$

où  $B(\alpha, \beta)$  est la fonction bêta d'Euler.

### 4.3.2 L'intégrale fractionnaire

**Définition 4.4** Soit  $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. La primitive de  $f$  est donnée par

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

**Proposition 4.3** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. La primitive d'ordre  $n$  de  $f$  est donnée par

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

**Preuve 4.3** En effet, les primitives d'ordre supérieur sont données par

$$\begin{aligned} I_a^1 f(x) &= \int_a^x f(s) ds, \\ I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left( \int_a^t f(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Dirichlet, on a

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left( \int_a^t f(s) ds \right) dt, \\ &= \int_a^x f(t) \left( \int_t^x ds \right) dt. \end{aligned}$$

Alors

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

De même on a

$$\begin{aligned} I_a^3 f(x) &= \int_a^x I_a^2 f(s)ds, \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t)dt. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt.$$

### 4.3.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 4.5** Soit  $\Omega = [a, b]$  un intervalle fini sur  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction intégrable sur  $\Omega$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville  $I_a^\alpha f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ) est définie par

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

et

$$I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma.

## 4.4 Dérivation fractionnaire

Dans la littérature, il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications : La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

### 4.4.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 4.6** La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est donnée par

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt.$$

où  $n = [\alpha] + 1$  et  $[\alpha]$  la partie entière de  $\alpha$ .

Si de plus  $\alpha \in [0, 1]$ , alors  $n = 1$ , d'où

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

**Exemple 4.3** Supposons que

$$f(t) = 1, \quad \alpha = 0.5 \implies n = 1, \quad \text{donc} \quad n - \alpha = 0.5$$

$$D_a^{0.5} f(x) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} f(t) dt \right]$$

$$D_a^{0.5} f(x) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{x^{0.5}}{0.5} \right]$$

Nous savons que  $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

donc

$$D_a^{0.5} f(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{2x^{0.5}}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} (x^{0.5}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} x^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

#### 4.4.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

**Définition 4.7** Soit  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre  $\alpha$  est définie par

$$\forall t \in [a, b], D_{a+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

**Définition 4.8** Soit  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre  $\alpha$  est définie par

$$\forall t \in [a, b], D_{b-}^{\alpha} f(x) = \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

**Théorème 4.1** la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche  ${}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$  et à droite  ${}^C \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$  avec  $n = [\Re(\alpha)] + 1$  est définie par

$$\forall x \in [a, b], {}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} (\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt,$$

$$\forall x \in [a, b], {}^C \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} (\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt.$$

**Exemple 4.4**

i) La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^C\mathcal{D}^\alpha C = 0.$$

ii) La dérivée de  $f(x) = (x - a)^{\beta-1}$  au sens de Caputo Soit  $\alpha$  non entier et

$$0 \leq n - 1 < \alpha \leq n \text{ et } \beta - 1 > 0, \text{ alors on a}$$

$$({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t)(x) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt.$$

et

$$\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta-1} = (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(x-a)^{\beta-n-1},$$

posons

$$(t-a) = s(x-a) \text{ et } s \in [0,1],$$

$$dt = (x-a)ds.$$

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}(x) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds, \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n), \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

la même résultat avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

**4.5 La méthode itérative variationnelle (VIM)**

La méthode [9] itérative variationnelle (VIM), introduite par Ji-Huan He, est une technique semi-analytique efficace pour résoudre les équations différentielles ordinaires, les équations différentielles fractionnaires et les équations aux dérivées partielles, linéaires ou non linéaires.

Cette méthode repose sur le principe variationnel, selon lequel on construit une correction fonctionnelle contenant un multiplicateur lagrangien optimisé par des considérations variationnelles. Le schéma général consiste à construire une suite d'approximations qui converge vers la solution exacte.

### 4.5.1 Description de la méthode

Nous considérons l'équation différentielle suivante

$$L(y(t)) + N(y(t)) = g(t),$$

où  $L$  est un opérateur linéaire,  $N$  est un opérateur non linéaire et  $g(t)$  est une fonction connue. Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^x \lambda(t)(L[y_n] + N[\tilde{y}_n] - g(\tau))d\tau. \quad (4.1)$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur générale du Lagrange. L'indice  $n$  représente la  $n$ -ième approximation,  $\tilde{y}_n(t)$  est considéré comme une variation restreinte c'est à dire  $\delta\tilde{y}_n(t) = 0$ . Pour résoudre l'équation par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  qui va être identifier par une intégration par partie. Alors les approximations successives un de la solution  $y(t)$  vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction  $y_0$  bien choisie (qui doit être au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$$

### 4.5.2 Application de la méthode VIM

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante avec dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha = 0,5$

$${}^C D_t^{0,5} y(t) = t, \quad y(0) = 0$$

où  ${}^C D_t^\alpha$  désigne la dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ .

La méthode VIM propose une solution approchée sous la forme

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^x \lambda(t)(L[y_n] + N[\tilde{y}_n] - g(\tau))d\tau.$$

Nous écrivons

$$L[y_n] = {}^C D_t^{0,5} y(t), \quad N[\tilde{y}_n] = 0, \quad g(\tau) = \tau$$

Et aussi

$$\lambda(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

donc

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left( {}^C D_t^{0,5} y_n(\tau) - \tau \right) d\tau$$

approximation initiale  $y(0) = y_0(t) = 0$

**Première itération**  $y_1(t)$

$$y_1(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t - \tau)^{-0,5} (0 - \tau) d\tau = -\frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t - \tau)^{-0,5} \cdot \tau d\tau$$

On utilise la formule connue

$$\int_0^t \tau (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = t^{\alpha+1} \cdot B(2, \alpha)$$

où  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  est la fonction Bêta d'Euler. Donc

$$\int_0^t \tau (t - \tau)^{-0.5} d\tau = t^{1.5} \cdot B(2, 0.5)$$

Or

1.  $\Gamma(2) = 1!$
2.  $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$
3.  $\Gamma(2.5) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$

Alors

$$B(2, 0.5) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(0.5)}{\Gamma(2.5)} = \frac{1 \cdot \sqrt{\pi}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau (t - \tau)^{-0.5} d\tau &= \frac{4}{3} t^{1.5} \\ y_1(t) &= -\frac{1}{\Gamma(0.5)} \cdot \int_0^t (t - \tau)^{-0.5} \cdot \tau d\tau = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{3} t^{1.5} \\ y_1(t) &= -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot t^{1.5} \end{aligned}$$

**Deuxième itération  $y_2(t)$** 

On remplace dans la formule

$$y_2(t) = y_1(t) + \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t - \tau)^{-0.5} \left( {}^C D_\tau^{0.5} y_1(\tau) - \tau \right) d\tau$$

Rappel de la dérivée de Caputo pour  $y(\tau) = c \cdot \tau^\beta$  avec  $\beta > \alpha$

$${}^C D_\tau^\alpha \left[ \tau^\beta \right] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \cdot \tau^{\beta - \alpha}$$

Ici

$$y_1(\tau) = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \tau^{1.5}, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 1.5$$

donc

$${}^C D_\tau^{0.5} y_1(\tau) = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(2.5)}{\Gamma(2)} \cdot \tau^1 = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot \tau = -\tau$$

On remplace dans la formule

$$y_2(t) = y_1(t) + \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t - \tau)^{-0.5} (-\tau - \tau) d\tau = y_1(t) - \frac{2}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t - \tau)^{-0.5} \cdot \tau d\tau$$

On a déjà vu précédemment

$$\int_0^t (t - \tau)^{-0.5} \cdot \tau d\tau = \frac{4}{3} \cdot t^{1.5}$$

Donc

$$y_2(t) = y_1(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{3} \cdot t^{1.5} = y_1(t) - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \cdot t^{1.5}$$

on obtient

$$y_2(t) = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot t^{1.5} - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \cdot t^{1.5} = -\frac{12}{3\sqrt{\pi}} \cdot t^{1.5}$$

$$y_2(t) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot t^{1.5}$$

**4.5.3 Résolution numérique avec MATLAB**

En utilisant MATLAB, nous avons implémenté la méthode d'itération variationnelle (VIM) pour approximer la solution de l'équation différentielle fractionnaire suivante

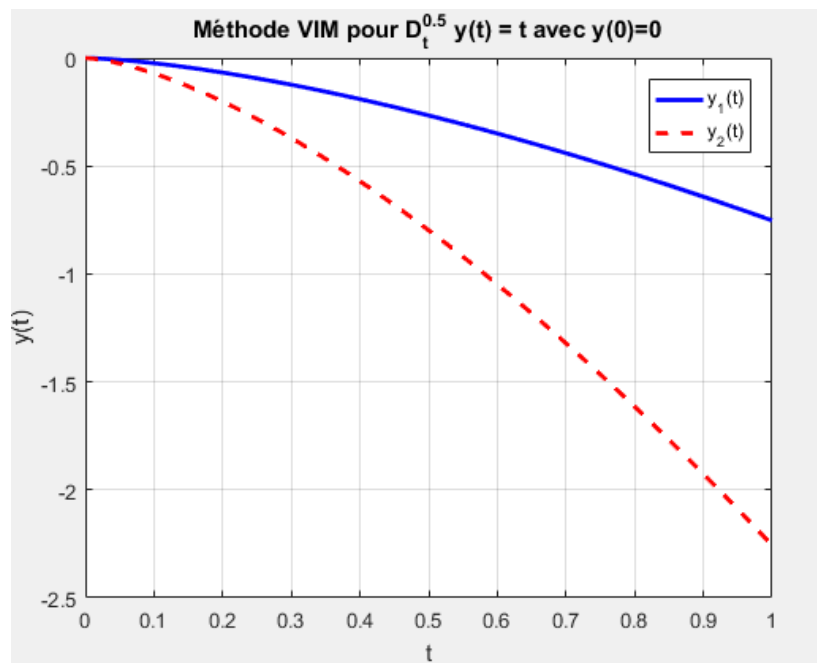
$${}^C D_t^{0.5} y(t) = t, \quad y(0) = 0$$

La dérivée fractionnaire est ici définie au sens de **Caputo** avec un ordre  $\alpha = 0,5$ . Les expressions des solutions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont obtenues à l'aide de la méthode d'itération variationnelle (**VIM**), appliquée de manière symbolique. Ces solutions prennent la forme

$$y_1(t) = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}, \quad y_2(t) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} t^{3/2}$$

où  $y_1(t)$  représente la première itération, et  $y_2(t)$  une approximation améliorée. Le programme trace ces deux fonctions sur l'intervalle  $[0, 1]$ , discrétisé en 100 points, ce qui permet de comparer visuellement la précision croissante des approximations obtenues par la méthode VIM. Cette comparaison illustre comment la méthode affine progressivement la solution à chaque itération.

$t$	$y_1(t)$	$y_2(t)$
0.00	0.000000	0.000000
0.01	-0.000764	-0.002291
0.02	-0.002160	-0.006480
0.03	-0.003968	-0.011905
0.04	-0.006109	-0.018328
0.05	-0.008538	-0.025615
0.06	-0.011224	-0.033671
0.07	-0.014144	-0.042431
0.08	-0.017280	-0.051840
0.09	-0.020619	-0.061858

TABLE 4.1 – Les 10 premières valeurs de  $t$ ,  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  obtenues par la méthode VIMFIGURE 4.1 – Application de la méthode VIM à l'équation fractionnaire  $D_t^{0.5} y(t) = t$

# Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressé dans ce mémoire à l'étude mathématique et numérique d'une classe de problèmes d'évolution, d'ordre un et d'ordre deux en temps, nous avons traité quelques exemples numériquement, nous avons exploité les méthodes numériques classique, principales tels que la méthode des différences finis, la méthode des éléments finis.

Nous avons étudié la stabilité et la consistance des analogues discret de chaque problème ainsi que la Convergence. Nous avons obtenu des résultats numériques pour chaque problèmes en utilisant le logiciel matlab nous avons initié au problèmes fractionnaires, nous souhaitons approfondir notre étude par des problèmes d'évolution fractionnaire non linéaire et appliquer différents méthodes numériques notamment la méthode des volumes finis sur différents problèmes d'évolution en dimension deux.

# Bibliographie

- [1] **Allaire, G.** *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'école polytechnique -91128 Palaiseau Cedex, (2006).
- [2] **ABBES Miloud TAHAR** , *Méthode des différences finies-Méthodes intégrales et variationnelles*, Office des Publications Universitaires.
- [3] **A Walter. Strauss** , *Partial Differential Equations – An Introduction*, 1992, Wiley.
- [4] **Brezis Haim** , *Analyse Fonctionnelle théorie et application*. Masson, Paris, 1983.
- [5] **Burden, R. and Faires, J. D.** *Numerical analysis Books/* Cole Thomson Learning.
- [6] **B.Lucquin** *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations*. Ellipses éditions marketing S.A, 2004.
- [7] **Chaskalovic, J.** *Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur*. Editions Lavoisier, (2004).
- [8] **Ciarlet, P. C.** *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*,1991 Edition Masson.
- [9] **Constantin Milici, Gheorghe Drăgănescu, J. Tenreiro Machado** *Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer (Springer Nature Switzerland AG) , 2019.
- [10] **D.Manceau** *Résolution pratique des équations aux dérivées partielles*.
- [11] **Evans, G., Blackledge, J. and Yardley, P.** *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Springer, (1999).
- [12] **E Robert. White** *Computational Mathematics Models.Methods.and Analysis Whith Matlab and MPI*. Chapman Hall/CRC,2004.

- [13] **Farlow, Stanley J** , *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, États-Unis.
- [14] **F. Jędrzejewsk** *Introduction aux méthode numériques*. Springer, 2005.
- [15] **Hadamard Jacques** , *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, 1923.
- [16] **Herbin, R.** *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Université Aix Marseille 1, (2012).
- [17] **H. Reinhard** , *Équations aux dérivées partielles*.1991 DUNOD.
- [18] **Jchun. Li, Yi-Tung** *Differential Equation Using MATLAB*. Taylor Francis Group, 2008.
- [19] **Jichang Zhou, Yong Zhou, Yi Zhang** *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. World Scientific, 2013.
- [20] **Jonas Koko** *Calcul scientifique avec matlab*. Ellipses Editions, 2009.
- [21] **Lonut Daneilla** *Résolution pratique des équations aux dérivées partielles*.
- [22] **Mathews, J. H., Kurtis D. F.** *Numerical methods Using Matlab*, third edition, Prentice Hall, (1999).
- [23] **Marle, C. M. et Pilibossian, P.** *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations*. Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [24] **Munnier, A.** *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*. Université de Nancy, 2007–2008.
- [25] **Pierre-Arnaud Raviart, Jean-Marie Thomas** , *Introduction à l'analyse numerique des équations aux dérivées partielles*, DUNOD.
- [26] **Yang. Won Y, Wenwu Cao, John Morris** *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. John Wiley Sons, Inc., 2005.
- [27] **Zhilin Li, Zhonghua Qiao and Tao Tang** *Numeric of Differential Equations : Introduction to Finite Element Methods*. Cambridge University Press, 2018.