

Université 20 Août 1955- Skikda-

Faculté de Technologie

Département de génie électrique

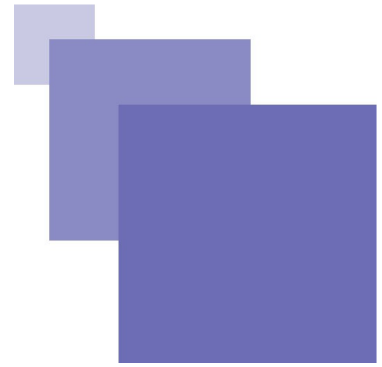
Note de cours: Commande des systèmes Linéaires

DR. MECHHOUD ELARKAM

Table des matières

Objectifs	4
Avant propos	5
I - Chapitre 01 : Rappels : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marge de stabilité	6
A. Réponse fréquentiel à partir de fonction de transfert.....	6
1. Cas d'un procédé de premier ordre.....	7
2. Cas d'un système quelconque.....	7
3. Cas d'un système linéaire en série.....	9
B. Représentation de la réponse fréquentielle.....	10
1. Diagramme de Bode.....	10
2. Diagramme de Nyquist (Polaire).....	12
C. Théorème de stabilité des systèmes en boucle fermée de Nyquist.....	15
1. Énoncé du critère de Nyquist.....	15
2. Critère du Rivers.....	16
II - Chapitre 02 : Calcul des correcteurs dans le domaine fréquentiel	20
A. Réponse fréquentielle des contrôleurs.....	20
1. Correcteur proportionnel.....	20
2. Correcteur intégral et proportionnel intégral.....	20
3. Correcteur à action dérivée et proportionnel dérivée.....	23
4. Régulateur proportionnel-intégral-dérivé.....	26
5. Action proportionnelle intégrale (Correcteur à retard de phase).....	28
6. Action proportionnelle Dérivé (Correcteur à avance de phase).....	28
B. Spécification dans le domaine fréquentiel.....	29
1. Marge de gain et de phase.....	29
2. Bande passante.....	30
3. Facteur de résonance.....	31
C. Calcul des contrôleurs en utilisant le diagramme de bode.....	32
D. Abaque de Black-Nichols.....	37
III - Partie 02 : Chapitre 01 : Représentation des systèmes d'état	40
A. Concepts.....	40
1. État.....	40
2. Variable d'état.....	40
3. Vecteur d'état.....	40
4. Espace d'état.....	40

Objectifs



Ce module est une consolidation des connaissances acquises en deuxième année dans le module système asservi et permet la maîtrise de la représentation des systèmes dynamiques et de leurs propriétés dans le domaine fréquentiel puis dans l'espace d'état ainsi que l'acquisition des principales méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes de commande.

Avant propos



Ce document est un support de cours destiné aux étudiants de la troisième année licence Automatique.

La structure et le contenu des chapitres de ce document sont synchronisés avec le nouveau contenu du programme établi dans le canevas de l'offre de formation.

Le cours est subdivisé en 2 parties :

Partie 1 : Cette partie est divisé en deux chapitres.

Chapitre 1 : Rappels : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

Chapitre 2 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

Partie 2 : Cette partie est divisée en quatre chapitres.

Chapitre 1 : Représentation d'état des systèmes

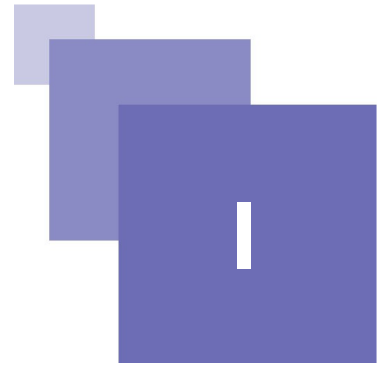
Chapitre 2 : Analyse des systèmes dans l'espace d'état

Chapitre 3 : Commande par retour d'état

Chapitre 4 : Synthèse des observateurs d'état

Ce cours s'articule sur deux parties essentielles, la première concerne l'analyse des systèmes et le calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel, et la deuxième partie concentre sur l'analyse et la commande des systèmes dans l'espace d'état.

Chapitre 01 : Rappels : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marge de stabilité



A. Réponse fréquentiel à partir de fonction de transfert

La réponse fréquentiel a été développée dans les années 1930s et 1940s par Bode, Nyquist, Nichols et d'autres chercheurs dans ce domaine. Le terme réponse fréquentiel indique la réponse d'état stationnaire d'un système pour une entrée sinusoïdale. Considérons le schéma fonctionnel d'un système (Fig.1), traduit dans la représentation Laplacienne :

$$Y(s) = G(s) \times E(s)$$

En posant : $s = j\omega$ On obtient :

$$Y(j\omega) = G(j\omega) \times E(j\omega)$$

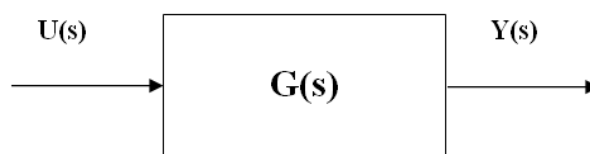


Fig.1. Schéma fonctionnel d'un système

1. Cas d'un procédé de premier ordre

Pour mieux comprendre le phénomène, il est plus facile de raisonner sur un cas concret simple. Soit le système décrit par la fonction de transfert suivante (1^{er} ordre)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts+1}$$

Pour l'entrée $u(t) = U \sin(\omega t)$

En substitue s par $j\omega$, on obtient :

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{K}{jT\omega+1}$$

Alors : l'amplitude du rapport est comme suit :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

Et l'argument (la phase) φ est :

$$\varphi(\omega) = \arg(K) - \arg(1+jT\omega) = -\tan^{-1}(T\omega)$$

Alors la sortie du système dans l'état stationnaire est donnée comme suit :

$$y(t) = \frac{UK}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \cdot \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega)$$

Au final, la fonction $G(j\omega)$, que l'on appelle fonction de transfert en fréquence (ou gain complexe du système), nous fournit le gain réel $|G(j\omega)|$ et le déphasage $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$ induit par le système vis-à-vis des composantes sinusoïdales. Elle traduit donc le comportement fréquentiel du système. La réponse a bien même période que l'entrée ; le rapport d'amplitude et le déphasage dépendent de la pulsation ω .

2. Cas d'un système quelconque

De manière générale, la sortie du procédé en boucle ouverte est liée à la commande par la fonction de transfert du procédé. Si l'on est en boucle fermée, la sortie est liée à la consigne ou à la perturbation par une fonction de transfert globale. Dans les deux cas, cette fonction de transfert peut être décrite comme le rapport de deux polynômes tels que le degré du numérateur est toujours inférieur ou égal à celui du dénominateur. Les deux cas se traitent identiquement, on décrira le premier cas seulement:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

On soumet le procédé à une entrée sinusoïdale

$$u(t) = U \sin(\omega t)$$

D'où :

$$Y(s) = G(s) \frac{U\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Le rapport des deux polynômes de $G(s)$ peut être décomposé comme une somme de fractions rationnelles en utilisant les pôles de s_i de $G(s)$; on obtient ainsi :

$$Y(s) = \left[\frac{c_1}{(s-s_1)} + \frac{c_2}{(s-s_2)} + \dots \right] + \frac{a}{(s+j\omega)} + \frac{b}{(s-j\omega)}$$

Où a et $c_i (i=1,2,\dots,n)$ sont des constants et b le nombre complexe conjugué de a . La transformée de Laplace inverse de l'équation ci-dessus est donnée par l'équation suivante :

$$y(t) = ae^{(-j\omega t)} + be^{j\omega t} + c_1 e^{(-s_1 t)} + c_2 e^{(-s_2 t)} + \dots + c_n e^{(-s_n t)}$$

Comme on s'intéresse au comportement de systèmes supposés stables, cela signifie que les pôles s_i de $G(s)$ sont tous réels négatifs ou complexes à partie réelle négative. La sortie $y(t)$ est composée de la réponse naturelle et la réponse forcée. Les termes provenant du $G(s)$ correspondent à la réponse naturelle stable composée d'exponentielles à coefficients réels ou complexes $\exp(-s_1 t) + \exp(-s_2 t) + \dots + \exp(-s_n t)$, mais dans tous les cas, possédant un comportement amorti lorsque t devient très grand. Il reste donc les deux derniers termes de la réponse forcée, d'où la réponse au bout d'un temps suffisamment long :

$$y(t) = ae^{(-j\omega t)} + be^{j\omega t}$$

Pour calculer a et b , il suffit d'utiliser l'expression de $Y(s)$

$$a = \left| -G(s) \frac{U\omega}{(s^2 + \omega^2)} (s + j\omega) \right|_{(s=-j\omega)} = \frac{-U}{2j} G(-j\omega)$$

$$b = \left| G(s) \frac{U\omega}{(s^2 + \omega^2)} (s - j\omega) \right|_{(s=j\omega)} = \frac{U}{2j} G(j\omega)$$

Comme $y(t)$ est réel, on vérifie bien que a et b sont complexes conjugués (Fig.1.2). La réponse au bout d'un temps suffisamment long peut s'écrire :

$$G(j\omega) = G_x + j \cdot G_y$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cos\varphi + j |G(j\omega)| \sin\varphi$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| (\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi}$$

De même façon nous calculons a alors :

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\varphi} = |G(j\omega)| e^{-j\varphi}$$

Il suit que :

$$a = \frac{-U}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\varphi}$$

$$b = \frac{U}{2j} |G(j\omega)| e^{j\varphi}$$

Alors l'équation ci-dessus peut être écrite comme :

$$y(t) = |G(j\omega)| U \frac{(e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)})}{2j}$$

$$y(t) = |G(j\omega)| U \sin(\omega t + \varphi)$$

Le rapport d'amplitude est égal à :

$$RU = |G(j\omega)|$$

et le déphasage :

$$\phi = \text{argument}(G(j\omega))$$

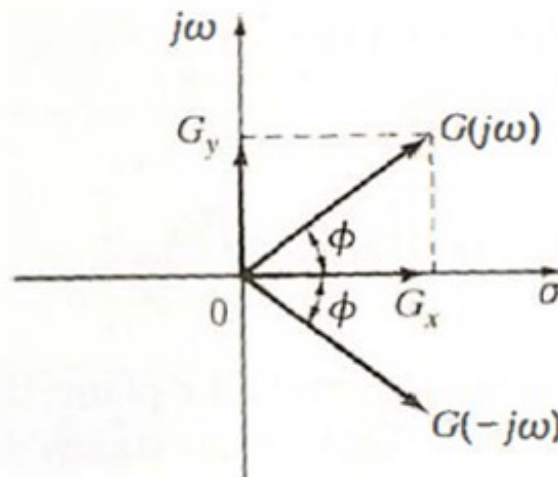


Fig.1.2. Fonction complexe et sa conjuguée

3. Cas d'un système linéaire en série

Considérons un système global constitué de n sous-systèmes linéaires en série (Fig.1.3). La fonction de transfert G(s) du système global est égale au produit des fonctions de transfert des sous-systèmes considérés individuellement :

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \dots G_n(s)$$

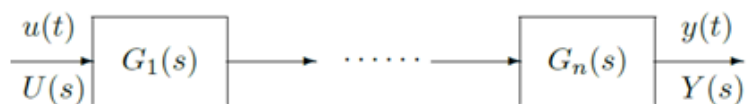


Fig.1.3. Système linéaire en série

Le module de la fonction de transfert du système global est égal au produit des modules:

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| \dots |G_n(j\omega)|$$

et l'argument de la fonction de transfert du système global est égal à la somme des arguments:

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(G_1(j\omega)) + \arg(G_2(j\omega)) + \dots + \arg(G_n(j\omega))$$

B. Représentation de la réponse fréquentielle

L'influence de la fréquence sur le module de $G(j\omega)$ et sur son argument peut être représentée par différents diagrammes, en particulier deux de Bode et de Nyquist (diagramme polaire).

1. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode se compose de deux parties : dans un premier diagramme, on porte le logarithme du module de $G(j\omega)$ en fonction du logarithme de la fréquence; dans un diagramme disposé en-dessous, on porte l'argument de $G(j\omega)$ en fonction du logarithme de la fréquence (Fig.1.5).

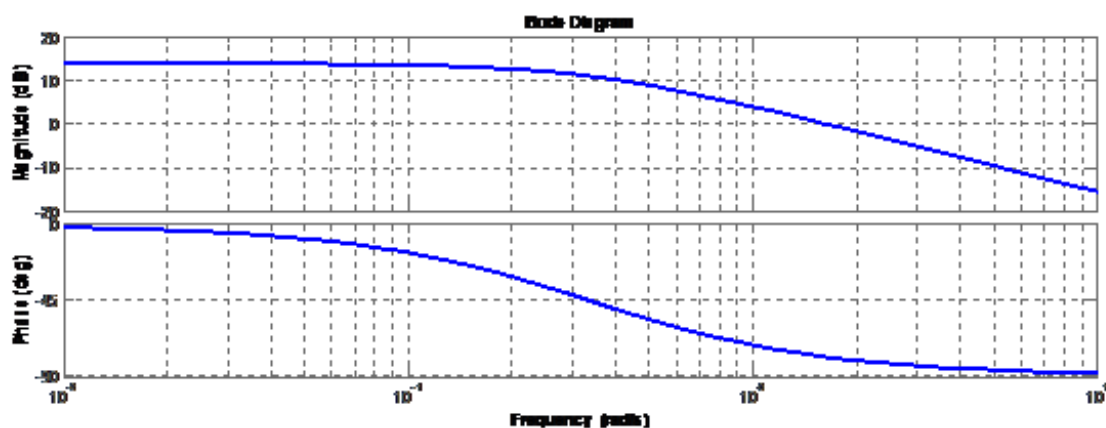


Fig.1.4. Diagramme de Bode pour un système de premier ordre ($K = 5$, $\tau = 3$ sec)

a) Système de premier ordre

De la fonction de transfert, on déduit:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{(\tau j\omega + 1)}$$

d'où le module et l'argument de $G(j\omega)$:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\tau^2\omega^2 + 1)}} \\ \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Lorsque ω est faible (basses fréquences), le module de $G(j\omega)$ est équivalent au gain constant K du procédé (asymptote de basse fréquence) et l'argument ϕ tend vers 0 (Figure 1.4). Lorsque ω est élevé (hautes fréquences), le module de $G(j\omega)$ est équivalent à $1/\omega$, donc dans le diagramme logarithmique $[\log(|G(j\omega)|), \log(\omega)]$ cela donne une droite de pente -1 (asymptote de haute fréquence), soit en décibels:

-20dB/décade, et l'argument tend vers $(-\pi)/2$. Le module en décibels est simplement proportionnel au logarithme du module exprimé sans unité:

$$|G(j\omega)_{dB}| = 20 \log(|G(j\omega)|)$$

b) Système de second ordre

La fonction de transfert est égale à :

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 - \tau^2\omega^2 + 2\zeta j\omega}$$

d'où le module et l'argument de $G(j\omega)$:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{((1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2)}} \\ \phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(2\frac{\zeta\tau\omega}{(1 - \tau^2\omega^2)}\right)$$

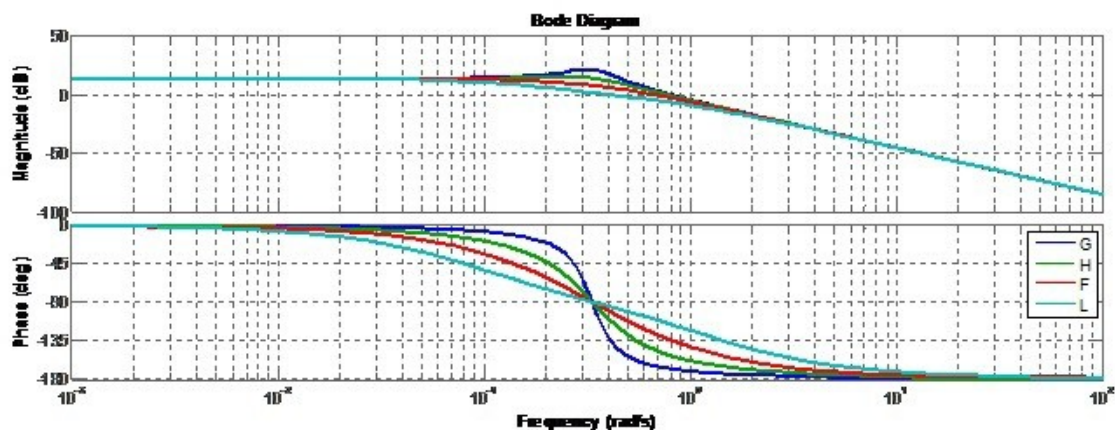


Fig.1.5. Diagramme de Bode pour un système de second ordre pour différentes valeurs de ζ ($Kp = 2, \tau = 5, \zeta = 0, 2; 0, 5; 1; 2$; respectivement représenté par G, H, F, L).

Lorsque ω est faible (basses fréquences), le module de $G(j\omega)$ est équivalent au gain constant K du procédé et l'argument ϕ tend vers 0 (Fig.1.5). Lorsque ω est élevé (hautes fréquences), le module de $G(j\omega)$ est équivalent à $1/\omega^2$, donc dans le diagramme logarithmique, cela correspond à une droite de pente -2 et l'argument tend vers $-\pi$.

Lorsque l'on trace le diagramme pour différentes valeurs de ζ , la courbe de gain présente une résonance (rapport d'amplitude supérieur à sa valeur sur l'asymptote de basse fréquence) pour

$\zeta = 0,2$ et $\zeta = 0,5$ (système G et H) à la fréquence de coupure $\omega = \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\tau}$, résonance qui disparaît pour $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour le vérifier, il suffit de rechercher à τ fixé le maximum de $|G(j\omega)|$ par rapport à ω . Ce maximum est égal à: $\frac{K}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}$.

c) Système avec retard pur

Le retard θ se caractérise par la présence d'un terme de la forme $\exp(-\theta s)$ dans la fonction de transfert qui peut s'écrire sous la forme du produit du terme exponentiel et d'une fonction de transfert sans retard notée G_{sr} :

$$G(s) = e^{-\theta s} G_{sr}(s)$$

La fonction de transfert pour $s = j\omega$ est donc égale à:

$$G(j\omega) = e^{-\theta j\omega} G_{sr}(j\omega)$$

donc son module et son argument sont égal à:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |G_{sr}(j\omega)| \\ \arg &= \arg(G_{sr}(j\omega)) - \omega\theta \end{aligned}$$

donc l'angle de phase est non borné (Fig 1.6).

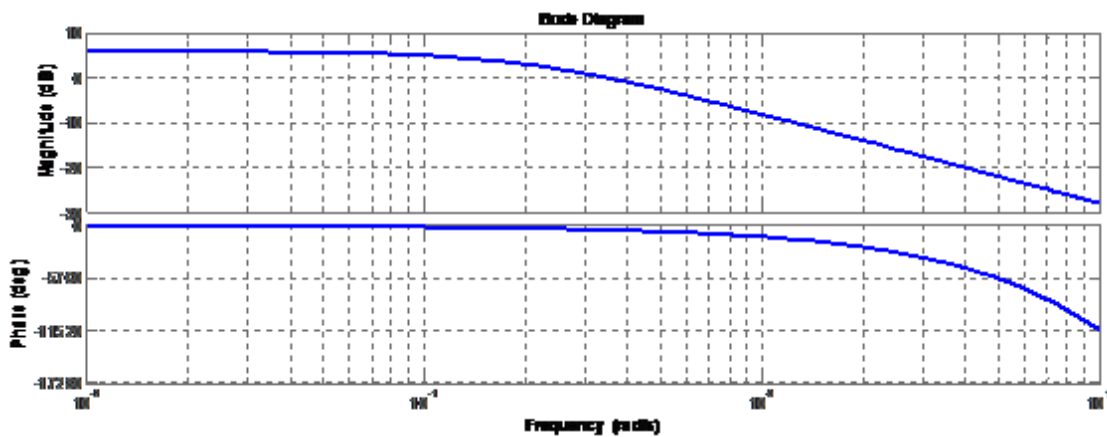


Fig.1.6 Diagramme de Bode pour un système de premier ordre avec retard

2. Diagramme de Nyquist (Polaire)

Le diagramme de Nyquist (Fig.1.7) consiste à représenter dans le plan complexe, en abscisse la partie réelle de $G(j\omega)$ et en ordonnée la partie imaginaire de $G(j\omega)$. Le lieu est donc celui d'un point M tel que le vecteur (\vec{OM}) correspond au nombre complexe $G(j\omega)$. Il vérifie donc: $OM = |G(j\omega)|$ et $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \arg(G(j\omega))$. Le diagramme de Nyquist fournit les mêmes informations que le diagramme de Bode, mais sous une forme différente.

$$(\vec{OM})$$

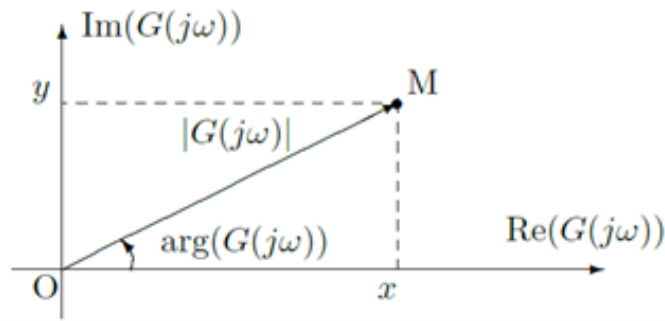


Fig.1.7. Principe de la représentation de Nyquist.

a) Système de premier ordre

La fonction de transfert d'un système de premier ordre est:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

donne:

$$\Re[G(j\omega)] = \frac{K}{\tau^2 \omega^2 + 1}$$

$$\Im[G(j\omega)] = \frac{-K\tau\omega}{\tau^2 \omega^2 + 1}$$

On remarque que la partie réelle est toujours positive et la partie imaginaire toujours négative, donc la courbe est entièrement située dans le quadrant droit inférieur (Fig 1.8) ; l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \arg(G(j\omega))$ est compris entre 0 et $(-\pi)/2$. Sur cette figure, le lieu est représenté en trait plein pour les fréquences positives et en pointillé pour les fréquences négatives. Lorsque la pulsation ω est nulle, le point représentatif se trouve en K sur l'axe des x ; ensuite, il se déplace vers l'origine des coordonnées (limite pour ω tendant vers l'infini). La tangente à l'origine des coordonnées est verticale. Le lieu pour les fréquences positives est en fait un demi-cercle centré sur l'axe des abscisses.

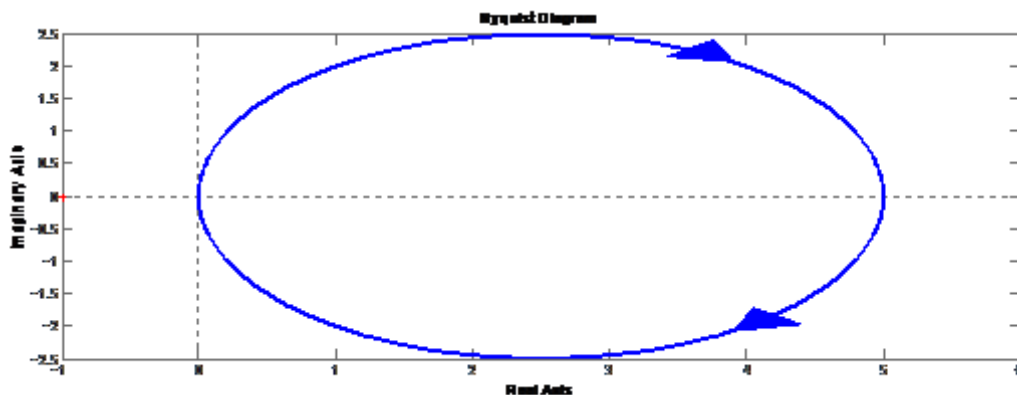


Fig.1.8. Diagramme de Nyquist pour un système de premier ordre ($K = 5, \tau = 3$).

b) Système de second ordre

La fonction de transfert d'un système de deuxième ordre est:

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Donne :

$$\Re[G(j\omega)] = \frac{K(1 - \tau^2 \omega^2)}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}$$

$$\Im[G(j\omega)] = K 2 \frac{\zeta\tau\omega}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}$$

La partie imaginaire est toujours négative, donc la courbe est située dans le demi-plan inférieur (Fig.1.9) ; l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \arg(G(j\omega))$ est compris entre 0 et $-\pi$. Lorsque la pulsation ω est nulle, le point se trouve en K sur l'axe des x ; ensuite, il se déplace vers l'origine des coordonnées (limite pour ω tendant vers l'infini). La tangente à l'origine des coordonnées est horizontale.

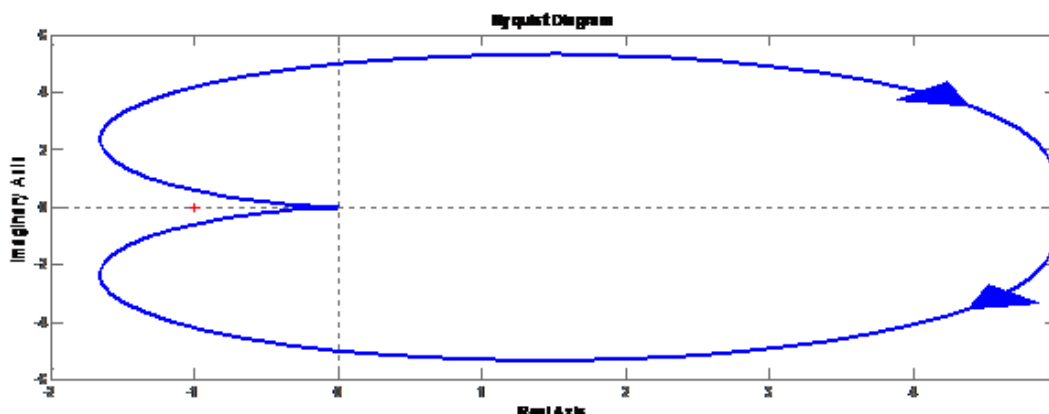


Fig.1.9. Diagramme de Nyquist pour un système de second ordre ($K = 2$, $\tau = 5$, $\zeta = 0,5$)

i Système d'ordre n

Considérons un système général d'ordre n de fonction de transfert $G(s)$. A basse fréquence (ω tend vers 0), le point représentatif M dans le plan de Nyquist est sur l'axe des abscisses et a son abscisse égale au gain stationnaire de la fonction de transfert. Lorsque ω augmente, le point se déplace avec un module $p = OM$ décroissant et un argument négatif. A haute fréquence, le point tend vers l'origine des coordonnées. Finalement, l'angle (\vec{Ox}, \vec{OM}) a décrit un angle $\frac{-n\pi}{2}$ lorsque ω augmente de 0 à ∞ .

ii Système avec retard

En reprenant les notations précédentes pour la fonction de transfert avec retard.

$$G(s) = e^{-\theta s} G_{sr}(s) \Rightarrow G(j\omega) = e^{-\theta j\omega} G_{sr}(j\omega)$$

on en déduit la partie réelle et la partie imaginaire:

$$\begin{aligned}\Re[G(j\omega)] &= \Re[G_{sr}(j\omega)] \cos(\omega\theta) + \Im[G_{sr}(j\omega)] \sin(\omega\theta) \\ \Im[G(j\omega)] &= \Im[G_{sr}(j\omega)] \cos(\omega\theta) - \Re[G_{sr}(j\omega)] \sin(\omega\theta)\end{aligned}$$

Du fait de la présence des facteurs périodiques en cosinus et sinus dans les expressions de la partie réelle et de la partie imaginaire de la fonction de transfert avec retard, liée à la décroissance vers zéro du module de $G_{sr}(j\omega)$ lorsque la fréquence augmente, la courbe dans le diagramme de Nyquist pour une fonction de premier ordre avec retard a une allure en spirale. Lorsque la fréquence tend vers 0, le point représentatif de module de G maximum se trouve le plus à droite sur l'axe des abscisses, et au fur et à mesure que la fréquence augmente, le point représentatif converge vers l'origine des coordonnées (Fig.1.10).

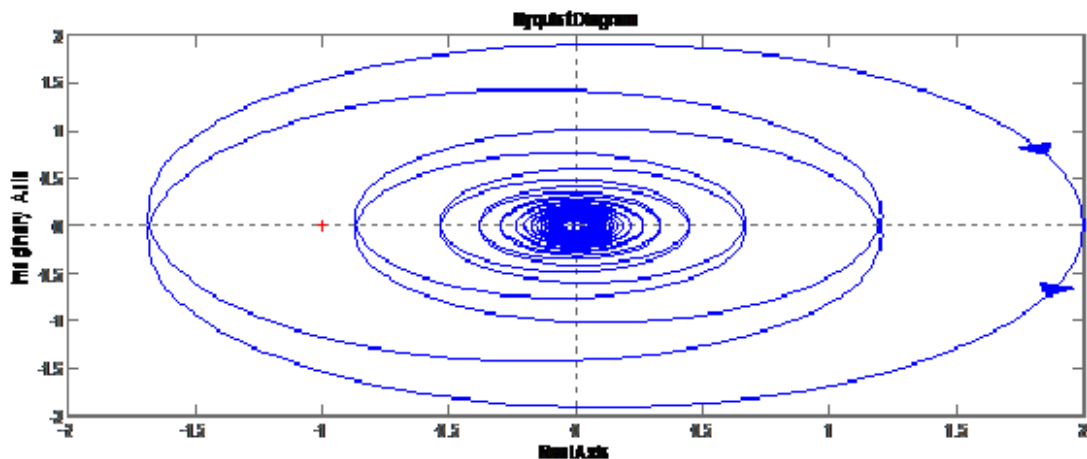


Fig.1.10 Diagramme de Nyquist pour un système de premier ordre avec retard

C. Théorème de stabilité des systèmes en boucle fermée de Nyquist

Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en boucle fermée obtenu à partir du lieu de Nyquist du système en boucle ouverte. Il est une conséquence du théorème de Cauchy appliqué à la fonction de transfert d'un système asservi.

1. Enoncé du critère de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si l'image du contour de Nyquist par la fonction $G_{BO}(s)$ fait autour du point critique $(-1,0)$, dans le sens horaire, un nombre de tours égal à $-n$ où n est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(s)$. L'image du contour de Nyquist, par ailleurs, ne doit pas passer par le point critique $(-1,0)$.

La relation : $Z = P - N$ donne le nombre Z de zéros instables de l'équation caractéristique $1+G(s) = 0$ et donc de pôles instables de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée $G_{BF}(s)$, avec :

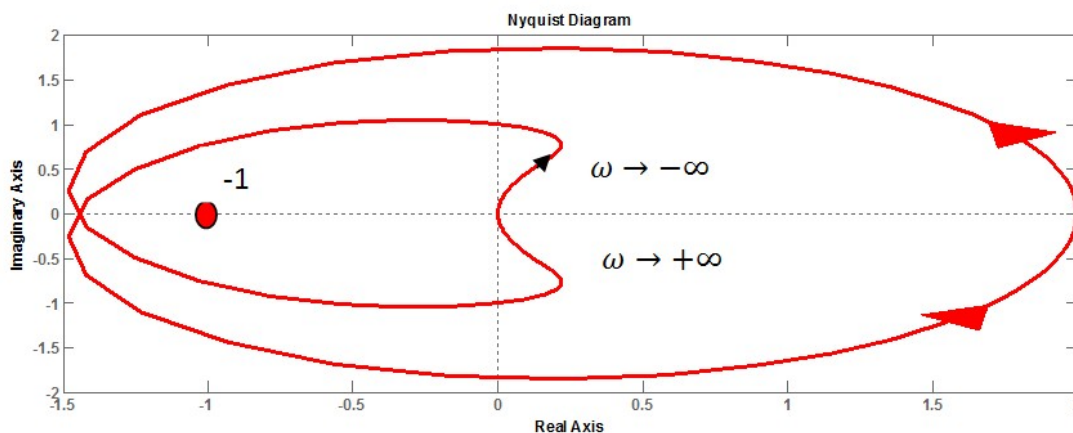
- P : Nombre de pôles instables de la $G_{BO}(s)$
- N : Nombre de tours que fait le lieu complet de Nyquist (ω variant de $-\infty$ à $+\infty$) autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens trigonométrique (sens anti-horaire).

En particulier, le système asservi est stable, à condition que : $Z = 0 \Rightarrow P = N$

Exemple

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ avec :

$$G(s) = \frac{10(s+1)(s+2)}{(s+10)(s-2)^2}$$



$P=2$ pôles instable en B.O ; $N=2$ tours autour du point $(-1,0)$

$$Z=P-N \Rightarrow 2-2=0$$

Donc le système est stable en B.F.

2. Critère du Rivers

C'est le plus simple critère graphique qui permet de juger la stabilité ou de l'instabilité, d'un système asservi à partir de la courbe représentative de sa fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(s)$.

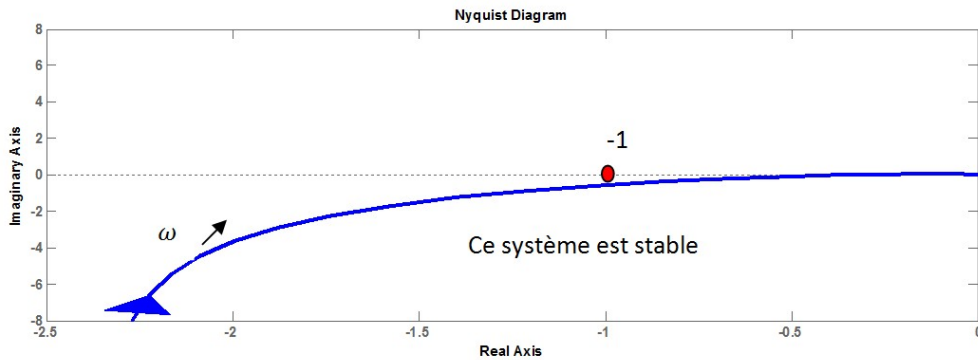
a) Règle du revers dans le plan de Nyquist

Si la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(s)$ d'un système asservi ne possède aucun pôle à partie réelle positive, alors ce système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des ω croissants, on laisse toujours le point critique $C(-1,0)$ à gauche de la courbe.

Exemple

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ avec :

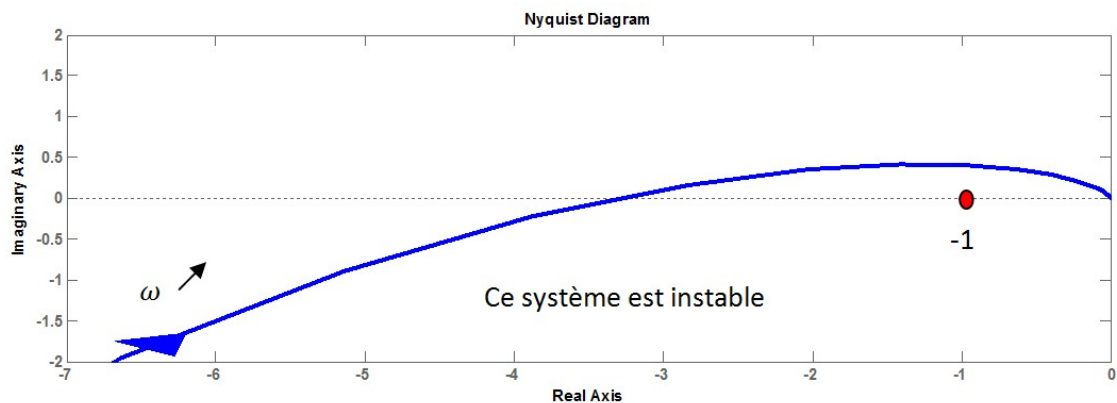
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$



Le système bouclé est stable puisque si la courbe représentative de $G(j\omega)$ est parcourue dans le sens des pulsations croissantes, le point critique $(-1, 0)$ reste à sa gauche.

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ avec :

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)}$$



Le système bouclé est instable puisque si la courbe représentative de $G(j\omega)$ est parcourue dans le sens des pulsations croissantes, le point critique $(-1, 0)$ reste à sa droite.

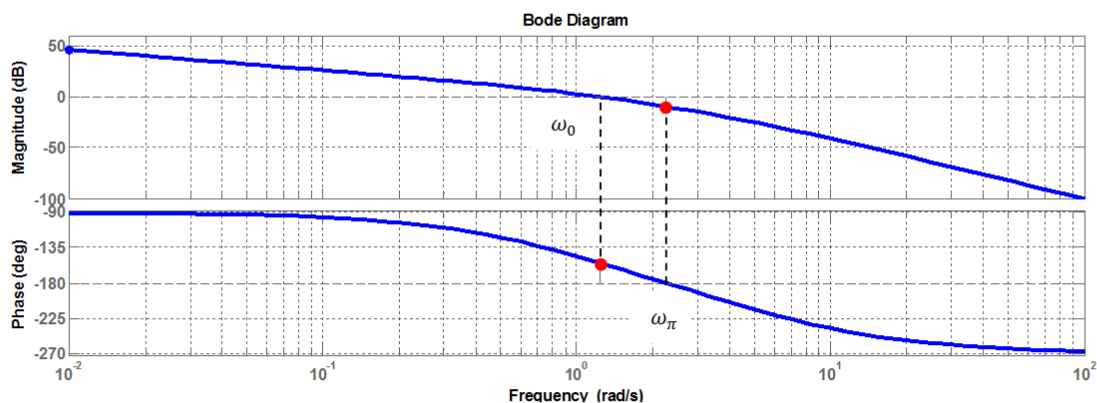
b) Règle du revers dans le diagramme de Bode

Un système asservi à retour unitaire est stable si pour la pulsation ω_c , la courbe du logarithme du module de $G_{BO}(j\omega)$ passe en dessous du niveau 0dB. Il est instable dans le cas contraire.

Exemple

- Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ avec :

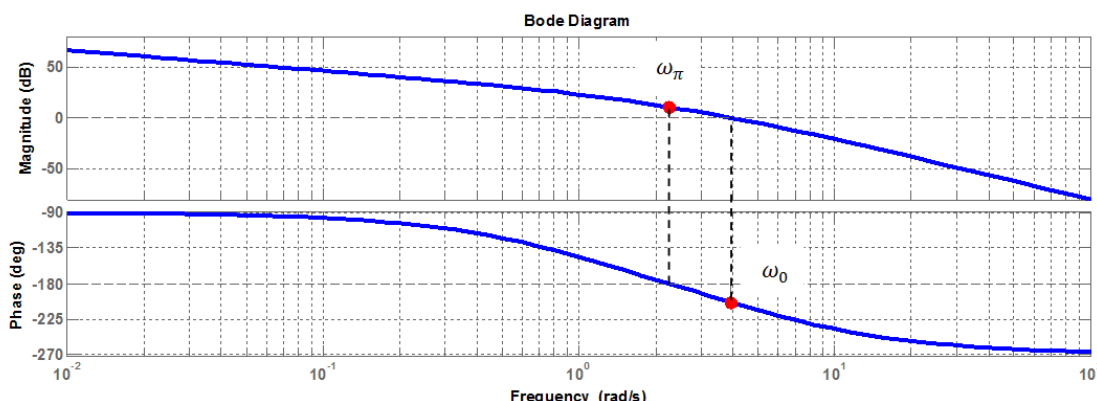
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$



Le système bouclé est stable puisque la courbe du module logarithmique représentative de $G(j\omega)$ pour ω_n est passé en dessous du niveau 0dB.

- Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ avec :

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)}$$



Le système bouclé est instable puisque la courbe du module logarithmique représentative de $G(j\omega)$ pour ω_n est passé en dessus du niveau 0dB.

c) Marge de stabilité

Il ne suffit pas qu'un système soit stable, il faut qu'il suffisamment stable. En effet l'évaluation de la fonction de transfert d'un système n'est pas toujours parfaite. La courbe représentative de la fonction de transfert doit donc passer assez loin du point critique, et l'évaluation de cet éloignement est effectuée à l'aide de deux critères :

- La marge de gain notée ΔG où :

$$\Delta G = 20 \log \frac{1}{|G_{BO}(j\omega_\pi)|}$$

avec $\varphi(\omega_n) = -\pi$

- La marge de phase notée $\Delta\varphi$

$$\Delta \varphi = \pi + \text{Arg}[G_{BO}(j\omega_c)]$$

avec

$$|G_{BO}(j\omega_c)| = 1$$

Pour qu'un système soit stable, il faudrait que $\Delta \varphi > 0$ et $\Delta G > 0$ ($|G_{BO}(j\omega)| > 1$)

Les valeurs courantes des marges sont : $6\text{dB} < \Delta G < 12\text{dB}$ ($2 < |G_{BO}(j\omega)| < 4$) et $40^\circ < \Delta \varphi < 60^\circ$.

Ces valeurs sont à adapter en fonction de la connaissance du procédé étudié.

d) Lecture graphique des marges de stabilité

On peut lire directement la marge de phase et de gain à partir de la courbe (Diagramme de Bode ou plan de Nyquist) comme dans les figures suivantes.

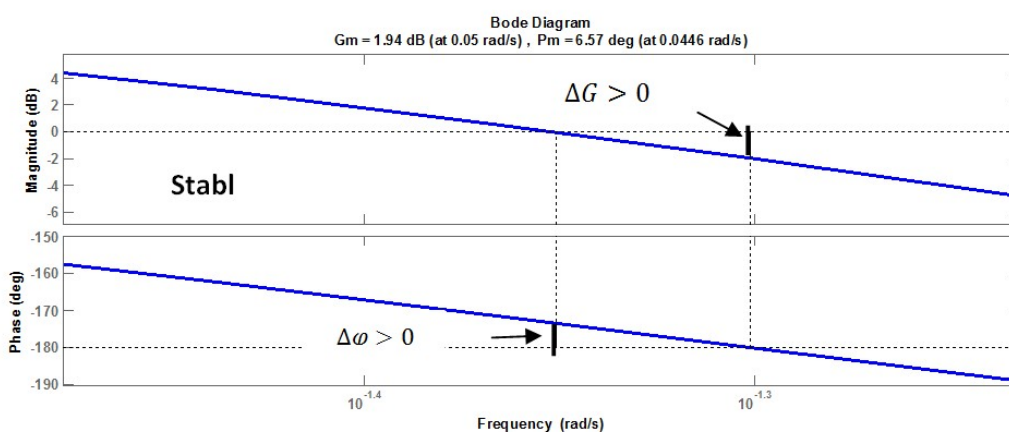


Fig.1.11. Les Marges de stabilité dans le diagramme de Bode

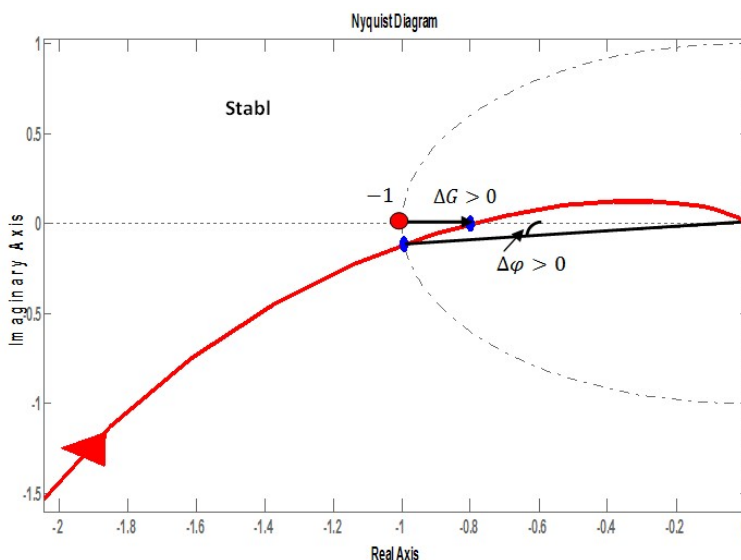


Fig.1.12. Les Marges de stabilité dans le diagramme de Nyquist

Chapitre 02 : Calcul des correcteurs dans le domaine fréquentiel



A. Réponse fréquentielle des contrôleurs

1. Correcteur proportionnel

Le correcteur est un simple amplificateur de gain réglable $C(s) = K$ qui a pour mission de modifier le gain statique initial du système. Nous connaissons déjà, pour l'avoir étudiée au chapitre précédent, l'influence du gain statique sur les performances :

- Si $K < 1$, autrement dit s'il s'agit d'un atténuateur, on améliore la stabilité du système et on diminue son dépassement en boucle fermée. En revanche, la rapidité et la précision sont dégradées.
- Si $K > 1$, on améliore la rapidité et la précision du système en boucle fermée mais on diminue la stabilité (ce qui peut aller jusqu'à rendre le système instable) et on accroît son dépassement.

De la fonction de transfert on déduit que le module de $G(j\omega)$ est égal au gain K_p du régulateur et que l'angle de phase est nul quelle que soit la fréquence.

2. Correcteur intégral et proportionnel intégral

Définition : correcteur intégral

Le correcteur est un intégrateur de fonction de transfert : $C(s) = \frac{1}{s}$ qui a pour mission d'ajouter un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Nous savons déjà qu'un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte possède un pôle nul sera caractérisé par une erreur de position nulle.

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

Remarque

On dit parfois, bien que ceci n'ait aucun sens d'un point de vue physique, que le gain statique du système en boucle ouverte tend vers l'infini, ce qui corrobore la nullité de l'erreur de position en boucle fermé qui est inversement proportionnelle au gain statique en boucle ouverte.

Le correcteur à action intégrale est donc censé améliorer la précision du système asservi.

a) Influence sur les autres performances

Les modifications apportées à la fonction de transfert modifient sans aucun doute les autres performances du système. Il nous reste à savoir dans quel sens elles évoluent. La simulation, sur un diagramme de Bode, des transformations subies par les courbes de gain et de phase après adjonction de ce correcteur peuvent nous renseigner sur ces modifications.

Considérons un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte $G_i(s)$ (Fig2.1). Les graphes représentent respectivement :

$$G_{idB} = 20 \log |G_i(\omega)|$$

$$\varphi_i(\omega) = \arg G_i(\omega)$$

Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux (en plus clair sur la figure 2.1) :

$$G_{c dB} = 20 \log G_c(\omega) = 20 \log \frac{G_i(\omega)}{\omega} = 20 \log G_i(\omega) - 20 \log \omega$$

$$\varphi_c(\omega) = \arg (G_c(\omega)) = \arg G_i \frac{(j\omega)}{j\omega} = \varphi_i(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

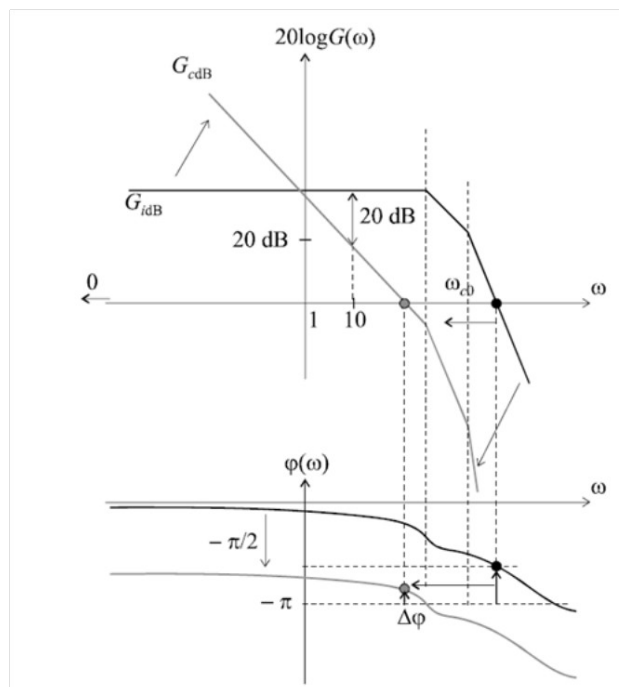


Fig.2.1. Influence d'un Intégrateur sur les performances

On passe donc de la courbe de gain initiale G_{idB} à la courbe corrigée $G_{c dB}$ en « retranchant » à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente est égal à 1, autrement dit en décrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation

$\omega=10$, le gain a chuté de 20 dB, il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à $G_{c,dB}$. Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de $\pi/2$ vers le bas.

On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB diminue.

Compte tenu que :

$$t_m = \frac{3}{\omega_0}$$

On peut en déduire que le temps de montée augmente. L'intégrateur aura donc tendance à ralentir le système en boucle fermée. De plus, malgré la diminution de ω_{co} , la marge de phase aura tendance à diminuer car la courbe de phase a changé et est susceptible de se retrouver très proche de $-\pi$. La stabilité et la limitation du dépassement s'en trouvent dégradées.

En conclusion, seule la précision du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action intégrale. Toutes les autres performances sont diminuées.

b) Régulateur proportionnel-intégral

La fonction de transfert du régulateur est égale à :

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{k_i s} \right)$$

En remplaçant s par $j\omega$, on obtient le rapport d'amplitude :

$$A = |G_c(j\omega)| = K_p \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k_i^2 \omega^2} \right)}$$

et l'angle de phase :

$$\phi = \arg(G_c(j\omega)) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{k_i \omega}\right)$$

Aux basses fréquences (Figure 5.12), l'action intégrale prédomine : la pente de la droite de rapport d'amplitude est égale à -1 et l'angle de phase vaut $-\pi/2$. Lorsque la fréquence est élevée, le régulateur PI se comporte comme un régulateur proportionnel simple : le rapport d'amplitude tend vers K_p (pente = 0) et l'angle de phase vers 0.

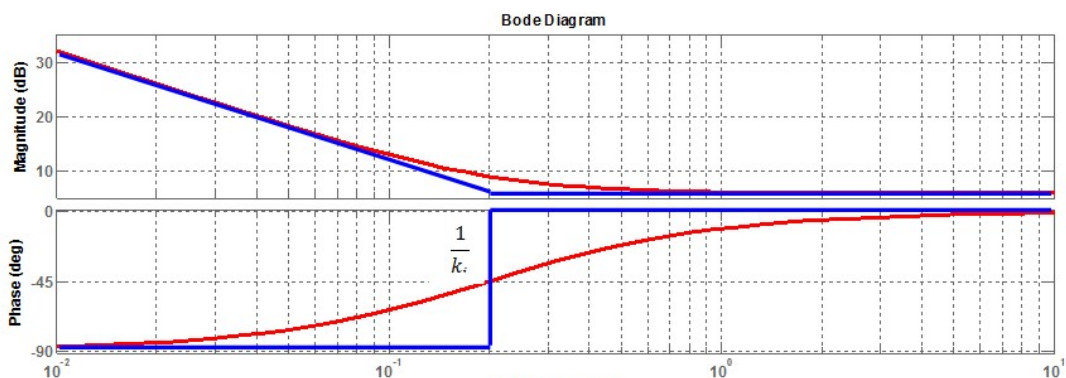


Fig.2.2. Diagramme de Bode pour un régulateur proportionnel-intégral ($K_p = 2, k_i = 5$).

Alors nous concluons que l'avantage de ce contrôleur est : Précision parfaite en réponse à un échelon à cause de l'action intégrale, et leurs Inconvénients sont :

- Diminution de la marge de phase et donc du degré de stabilité;

- Réponse lente.

3. Correcteur à action dérivée et proportionnel dérivée

Définition : correcteur à action dérivée

Le correcteur est un dérivateur de fonction de transfert : $G(s)=s$ qui a pour mission d'ajouter un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Intuitivement, nous pouvons imaginer que son action est l'inverse de celle de l'intégrateur. Vérifions cela sur un diagramme de Bode.

a) Influence de l'action D sur les autres performances

Considérons à nouveau un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte $G_i(s)$. Les graphes représentent respectivement :

$$G_{i\text{dB}} = 20 \log G_i(\omega)$$

$$\varphi_i(\omega) = \arg G_i(\omega)$$

Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux :

$$G_{c\text{dB}} = 20 \log G_c(\omega) = 20 \log \omega G_i(\omega) = 20 \log G_i(\omega) + 20 \log \omega$$

$$\varphi_c(\omega) = \arg G_c(\omega) = \arg j\omega G_i(\omega) = \varphi_i(\omega) + \frac{\pi}{2}$$

On passe donc de la courbe de gain initiale $G_{i\text{dB}}$ à la courbe corrigée $G_{c\text{dB}}$ en « ajoutant » à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente égale à 1, autrement dit en incrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation $\omega=10$, le gain a augmenté de 20 dB, il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à $G_{c\text{dB}}$. Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de $\pi/2$ vers le haut.

On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB augmente.

Compte tenu que :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{co}}$$

On peut en déduire que le temps de montée diminue. Le dérivateur aura donc tendance à accélérer le système en boucle fermée.

L'augmentation de ω_{co} influe également sur la marge de phase mais cette influence dépend de l'ordre du système. En effet, la « remontée de phase de $+\pi/2$ » peut avoir deux effets différents : si le système possède un ordre élevé, le déphasage peut tendre vers des valeurs négatives très importantes ; la remontée de phase peut alors être sans effet sur l'amélioration de la marge de phase, voire la dégrader et même rendre le système instable (courbe grise en trait plein). Si au contraire l'ordre du système est faible, la remontée de phase peut se traduire par une nouvelle courbe $\varphi_c(\omega)$ qui tend vers une valeur située largement au dessus de $-\pi$ (courbe grise pointillée).

Pour finir, la précision du système, liée au gain statique va être dégradée par l'action dérivée puisque le gain aux basses fréquences diminue fortement.

En conclusion, seule la rapidité du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action dérivée. Toutes les autres performances sont diminuées ou susceptibles de l'être.

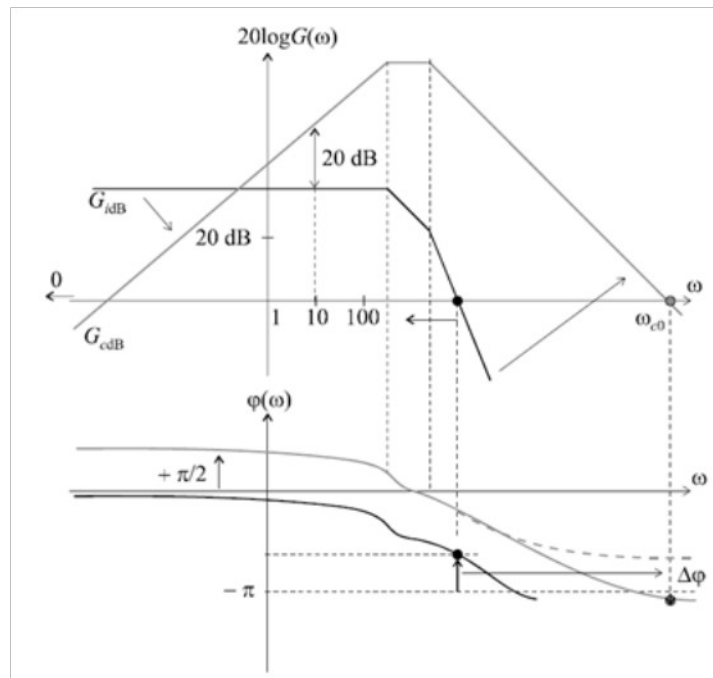


Fig.2.3. Influence d'un dérivateur sur les performances

b) Régulateur proportionnel-dérivé idéal

Bien que ce type de régulateur ne soit pas réalisable physiquement, il est intéressant d'examiner son diagramme de Bode afin d'extraire les caractéristiques de l'action dérivée. La fonction de transfert du régulateur est égale à :

$$G_c = K_p(1 + k_d s)$$

En remplaçant s par $j\omega$, on obtient le rapport d'amplitude :

$$A = G(j\omega) = K_p \sqrt{1 + k_d^2 \omega^2}$$

et l'angle de phase :

$$\phi = \arg(G(j\omega)) = \tan^{-1}(k_d \omega)$$

est positif quel que soit ω et constitue donc une avance.

Aux basses fréquences (Fig.2.4), le régulateur PD se comporte comme un régulateur proportionnel simple: le rapport d'amplitude tend vers K_p (pente = 0) et l'angle de phase vers 0.

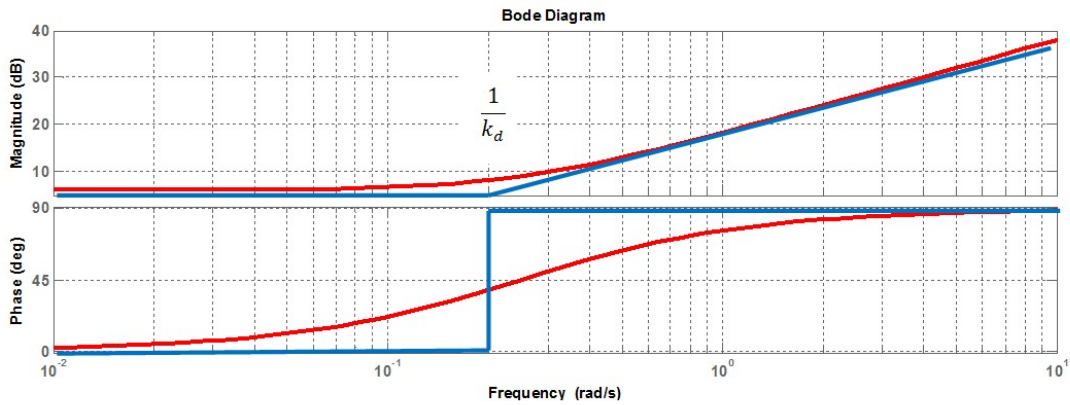


Fig.2.4. Diagramme de Bode pour un régulateur proportionnel-dérivée PD ($K_p=2, k_d=4$).

Lorsque la fréquence est élevée, l'action dérivée l'emporte, la pente de la droite de rapport d'amplitude est égale à +1 et l'angle de phase vaut $\pi/2$. Alors en constate que les Avantages sont :

- Amélioration de la stabilité (par apport de phase)
- Augmente la rapidité (par augmentation de la bande passante)

Et les Inconvénients sont :

- Amplifie les bruits de mesures
- Ne permet pas d'améliorer la précision.

Supposons qu'un bruit de mesure sinusoïdal de la forme: $\eta = a \sin(\omega t)$ influence un système commandé par un régulateur PD idéal (Fig 2.5). En considérant seulement l'action dérivée pure du régulateur **PD**, le bruit a pour effet d'ajouter à la commande u un signal égal à :

$$u_\eta = -K_p k_d \frac{d\eta}{dt} = -a K_p k_d \omega \cos \omega,$$

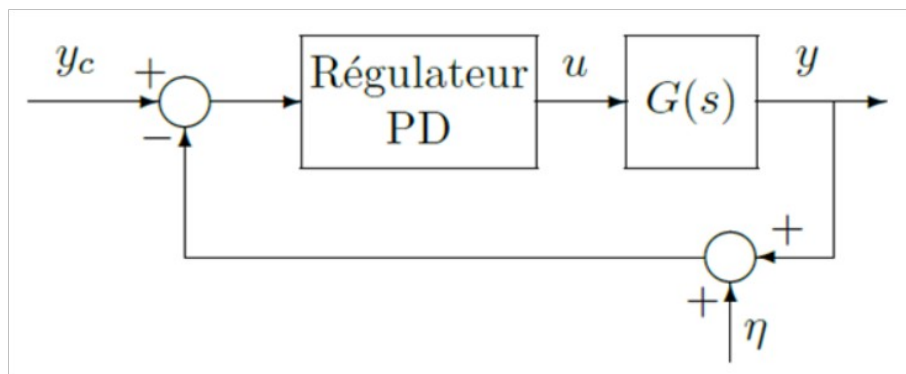


Fig.2.5. Influence du bruit sur un système commandé par un régulateur PD idéal.

Si bien que si le bruit comporte des fréquences élevées, le signal de commande aura une amplitude très élevée. Pour résoudre ce problème, on remplace l'action dérivée idéale en filtrant par un filtre de premier ordre de constante de temps k_d/N tel que la fonction de transfert dérivée réelle sera de la forme:

$$K_p \frac{(k_d s)}{\left(\frac{k_d s}{N+1} \right)}$$

ou sous une forme légèrement différente:

$$K_p \frac{(k_d s + 1)}{(\beta k_d s + 1)} \text{ avec } \beta = \frac{1}{N}$$

L'action dérivée est ainsi sensible seulement pour les basses et moyennes fréquences. Le gain est limité par N aux hautes fréquences et par conséquent également le bruit de mesure aux hautes fréquences.

4. Régulateur proportionnel-intégral-dérivé

a) Régulateur proportionnel-intégral-dérivé idéal

La fonction de transfert du régulateur proportionnel-intégral-dérivé idéal est égale à :

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{k_i s} + k_d s \right)$$

En remplaçant s par $j\omega$, on obtient le rapport d'amplitude:

$$A = |G(j\omega)| = K_p \sqrt{1 + \left(k_d \omega - \frac{1}{k_i \omega} \right)^2}$$

et l'angle de phase:

$$\phi = \arg(G_c(j\omega)) = \tan^{-1} \left(k_d \omega - \frac{1}{k_i \omega} \right)$$

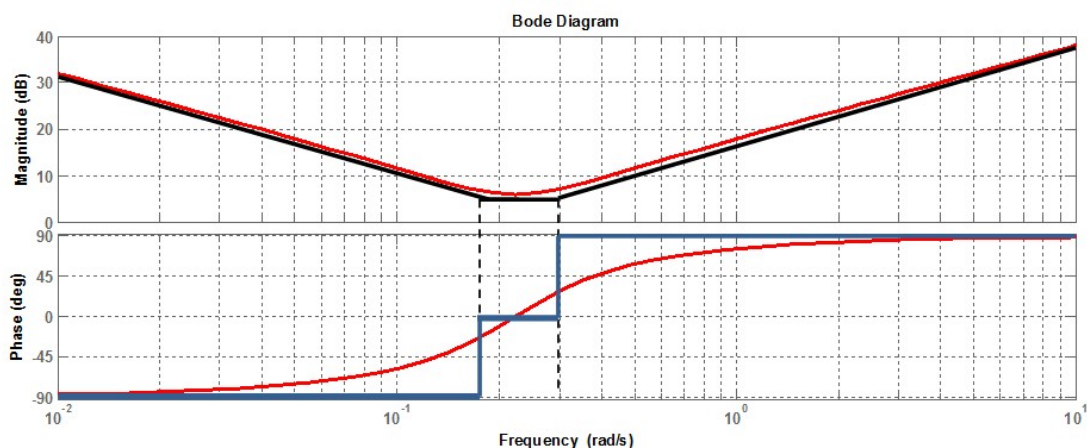


Fig.2.6. Diagramme de Bode pour un régulateur proportionnel- intégral-dérivée PID idéal ($K_p=2, k_i=5, k_d=4$).

Aux basses fréquences (Fig .2.6.), le régulateur PID se comporte comme un régulateur PI ; l'action intégrale l'emporte, le rapport d'amplitude a une pente égale à -1 et l'angle de phase tend vers $(-n)/2$.

Lorsque la fréquence est élevée, l'action dérivée l'emporte, la pente de la droite de rapport d'amplitude est égale à +1 et l'angle de phase tend vers $(+n)/2$. Donc l'angle de phase change de n .

b) Régulateur proportionnel-intégral-dérivé réel

Par rapport au régulateur proportionnel-intégral-dérivé idéal, l'action dérivée est modifiée en filtrant par un filtre de premier ordre de manière à limiter l'influence du bruit haute fréquence. Le régulateur est alors réalisable physiquement.

La fonction de transfert du régulateur proportionnel-intégral-dérivé réel (pneumatique ou électronique) est égale à :

$$G_c(s) = K_p \left(\frac{1+k_i s}{k_i s} \right) \left(\frac{k_d s + 1}{\beta k_d s + 1} \right)$$

Les valeurs du paramètre β sont souvent comprises entre 0 et 1. La fonction de transfert correspond en fait au produit de la fonction de transfert d'un PI et de celle d'un PD.

Après réarrangement, cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$G_c(s) = \frac{1}{(\beta k_d s + 1)} \tilde{k}_p \left(1 + \frac{1}{\tilde{k}_i s} + \tilde{k}_d s \right)$$

La première fraction agit comme un filtre de premier ordre sur un régulateur qui aurait pour paramètres \tilde{K}_p , \tilde{K}_i , \tilde{K}_d égaux à :

$$\tilde{K}_p = K_p \left(\frac{k_d}{k_i} + 1 \right); \quad \tilde{k}_i = k_d + k_i; \quad \tilde{k}_d = \frac{(k_d k_i)}{(k_d + k_i)}$$

Par rapport au PID idéal, le comportement à haute fréquence est modifié car l'asymptote de rapport d'amplitude est alors bornée :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_c(j\omega)| = \frac{K_p}{\beta}$$

De ce fait, le régulateur est moins sensible au bruit. Le rapport d'amplitude comme précédemment est borné aux hautes fréquences. L'action dérivée est alors limitée dans le domaine des hautes fréquences, ce qui est un avantage car cela limite le bruit haute fréquence. La figure (Fig.2.7) pour $\beta = 0,1$ montre que le rapport d'amplitude est borné lorsque ω devient supérieur à environ 10 rad/sec. Si l'on choisit des valeurs plus importantes de β , la remontée du rapport d'amplitude s'atténue et la "bosse" de phase disparaît ($\beta = 0,5$). Pour $\beta = 0,9$, le comportement est tout à fait voisin d'un régulateur PI.

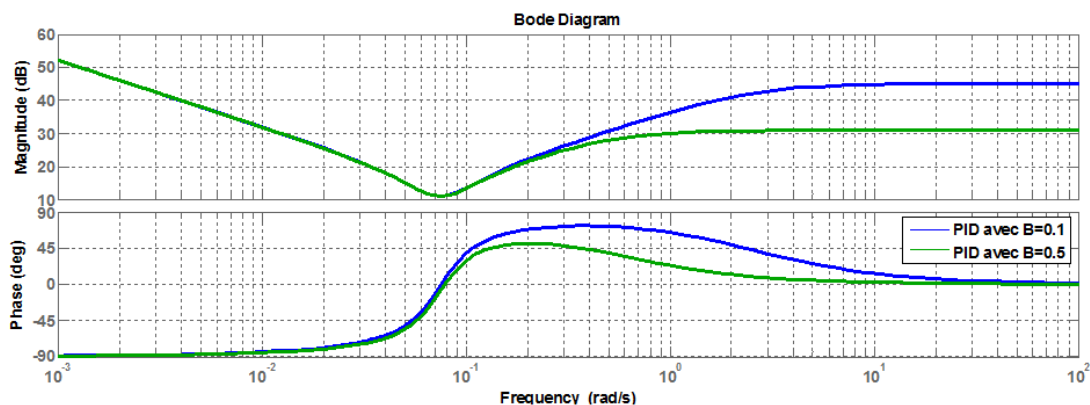


Fig.2.7. Diagramme de Bode pour un régulateur proportionnel- intégral-dérivée réel PID ($K_p=2$, $k_i=5, k_d=4, \beta=0.1$ et $\beta=0.5$).

5. Action proportionnelle intégrale (Correcteur à retard de phase)

Le correcteur à retard de phase est un correcteur qui, comme son nom ne l'indique pas, permet d'augmenter le gain uniquement aux basses fréquences. Il sera donc utilisé pour améliorer la précision d'un système asservi.

Sa fonction de transfert est :

$$C(s) = a \frac{(1+Ts)}{(1+aTs)}, \text{ avec } a > 1$$

Pour mieux comprendre l'action de ce correcteur, traçons son diagramme de Bode (Fig.2.8). Il y a deux pulsations de coupure :

$$\frac{1}{T} \text{ et } \frac{1}{aT}, \text{ telles que : } \frac{1}{aT} < \frac{1}{T}$$

On a :

$$C(\omega) = \frac{a\sqrt{(1+T^2\omega^2)}}{\sqrt{(1+a^2T^2\omega^2)}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega - \arctan aT\omega$$

Lorsque : $\omega \rightarrow +\infty$, on a : $C(\omega) \rightarrow 1 \Rightarrow 20 \log(C(\omega)) \rightarrow 0\text{dB}$

Lorsque : $\omega \rightarrow 0$, on a : $C(\omega) \rightarrow a \Rightarrow 20 \log(C(\omega)) \rightarrow 20 \log a \text{ dB}$

En résumé un correcteur à retard de phase permet, pour une précision statique donnée, d'améliorer la marge de phase du système asservi. En revanche la rapidité du système est diminuée puisque la bande passante est réduite.

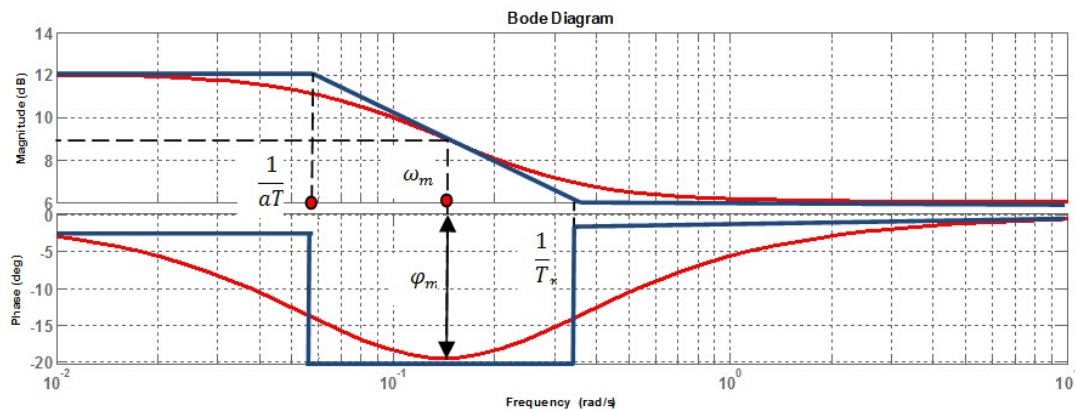


Fig.2.8. Diagramme de Bode d'un correcteur à retard de phase.

6. Action proportionnelle Dérivé (Correcteur à avance de phase)

Le correcteur à avance de phase est un correcteur qui, comme son nom l'indique, permet d'augmenter la marge de phase d'un système. Il s'agit de compenser un trop faible déphasage autour de la pulsation de coupure à 0 dB.

Sa fonction de transfert est :

$$C(s) = \frac{(1+aTs)}{(1+Ts)}, \text{ avec } a > 1$$

Ce correcteur a deux pulsations de coupure $\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{aT}$, telles que : $\frac{1}{aT} < \frac{1}{T}$

On a :

$$C(\omega) = \frac{\sqrt{(1+a^2 T^2 \omega^2)}}{\sqrt{(1+T^2 \omega^2)}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega$$

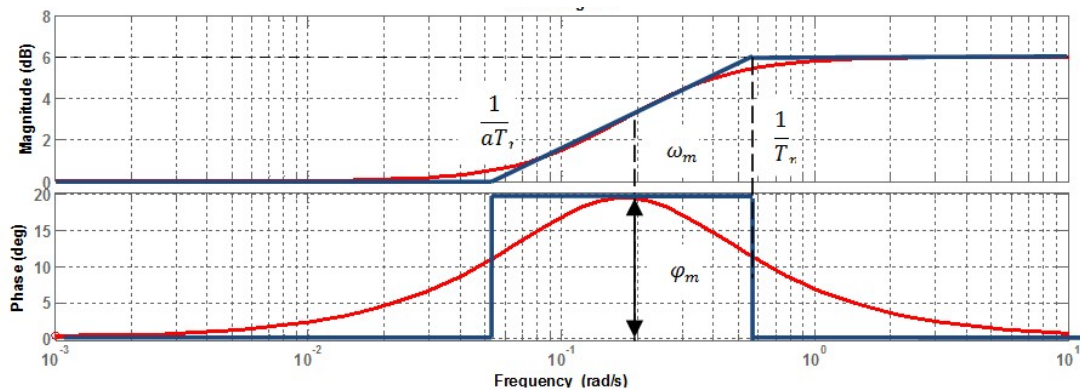


Fig.2.9. Diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase

Lorsque : $\omega \rightarrow 0$, on a : $C(\omega) \rightarrow 1 \Rightarrow 20 \log C(\omega) \rightarrow 0 \text{ dB}$

Lorsque : $\omega \rightarrow +\infty$, on a $C(\omega) \rightarrow a \Rightarrow 20 \log C(\omega) \rightarrow 20 \log a \text{ dB}$

La courbe de phase possède un max

$$\varphi_m = \arcsin \frac{(a-1)}{(a+1)} \text{ réalisé en } \omega_m = \frac{1}{(T\sqrt{a})}$$

Le principe de l'action correctrice consiste à faire coïncider ω_m avec la pulsation de coupure à 0dB ω_{co} du système à corriger et à régler φ_m , que l'on appelle la remontée de phase, de manière à obtenir la marge de phase voulue.

B. Spécification dans le domaine fréquentiel

1. Marge de gain et de phase

Le modèle d'un système est toujours déterminé avec incertitude. De plus, le système est susceptible de dériver dans le temps. Des perturbations sont également présentes. Pour ces raisons, on conçoit qu'il est en fait dangereux de faire fonctionner le régulateur trop près de la valeur limite trouvée précédemment ; il faudra donc prévoir une marge de sécurité.

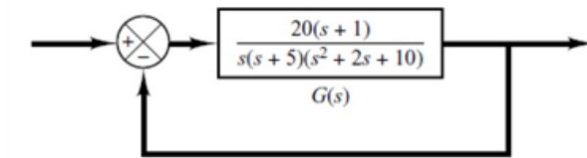
La marge de gain et de phase est l'écart de $H(s)=G_c(s)G(s)$ par rapport au point $-1(0dB, -180^\circ)$, c'est-à-dire le degrés de stabilité du système bouclé. On a :

$$M\phi = \varphi(\omega_c) + 180^\circ, \text{ avec } H(\omega_c) = 0$$

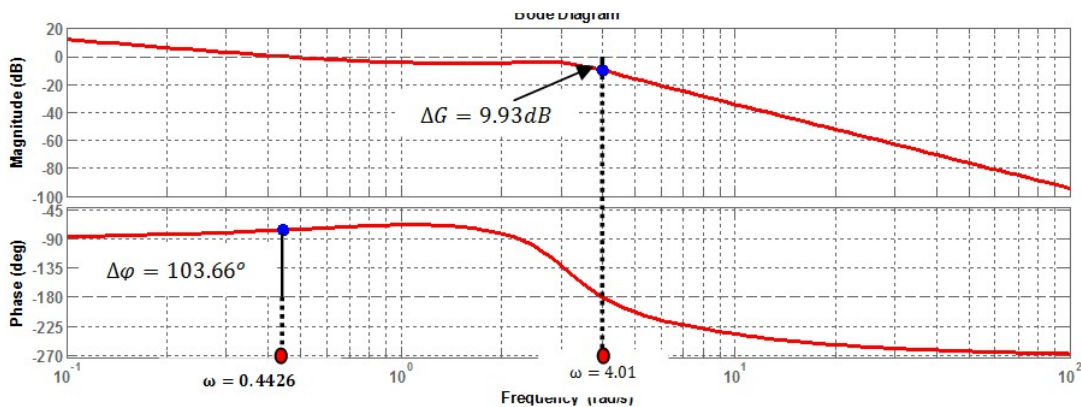
$$M_G = -20 \log(H(\omega_\pi)) \text{ avec, } \varphi(\omega_\pi) = -180^\circ$$

Exemple

Considérons le système de la fonction de transfert $G(s)$ placé dans la boucle de régulation à retour unitaire suivante :



- Tracer le diagramme de bode de la fonction de transfert $G(s)$ en boucle ouverte ;
- Déterminer de la courbe la marge de gain et la marge de phase



2. Bande passante

La plupart des processus physiques ont un comportement de type « passe bas », c'est-à-dire que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = 0$$

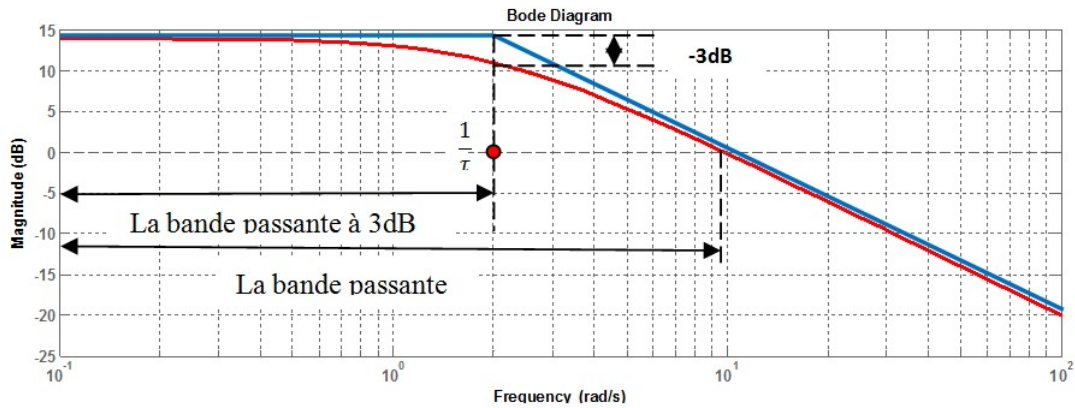
La pulsation de coupure (ω_c) à -3dB en boucle fermée est définie par :

$$H_{BF}(\omega_c) - H_{BF}(0) = -3 \text{ db}$$

Avec :

$$H_{BF}(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{H(j\omega)}{1 + H(j\omega)} \right|$$

Elle correspond à une division de l'amplitude par $\sqrt{2}$. On parle alors de bande passante à -3dB.



Dans ce cas, la bande passante à -3dB est l'intervalle $[0, 1/\tau]$. La bande passante augmente avec le gain statique K et diminue quand la constante de temps τ augmente donc le système est lent, alors si la bande passante augmente implique le système est rapide.

3. Facteur de résonance

On a résonance pour des valeurs du coefficient d'amortissement $\zeta > 1/\sqrt{2}$, la pulsation de résonance ω_r correspond à la valeur de ω et coefficient d'amortissement ζ . Alors :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

et la valeur du gain à la résonance est :

$$A_{dB}(\omega_r) = 20 \log \frac{K}{(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})}$$

Le facteur de résonance Q du système. Le facteur de surtension exprimé en dB est la différence entre la valeur du gain à la résonance

($A_{dB}(\omega_r)$) et le gain statique ($A_{dB}(0)$):

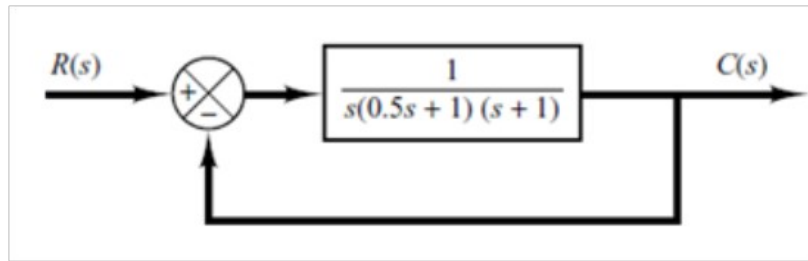
$$Q_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})} \right) - 20 \log K$$

Le facteur de résonance est alors :

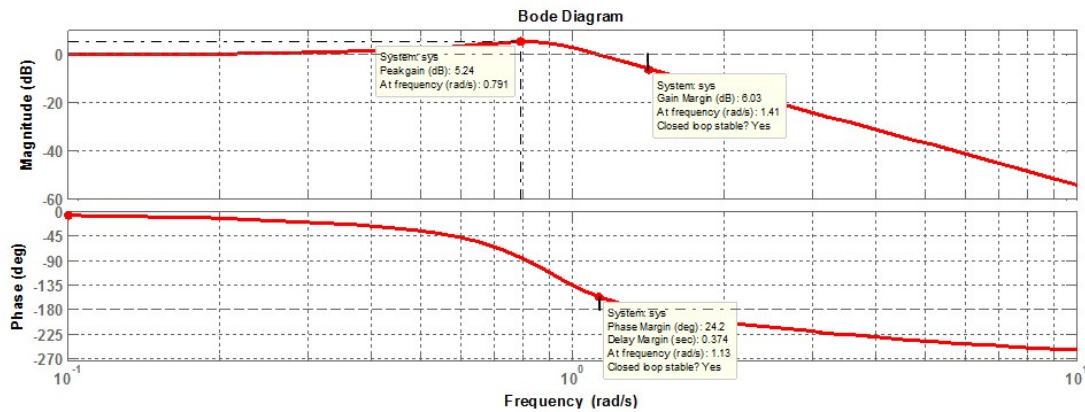
$$Q = \frac{1}{(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})}$$

Exemple

Considérons le système qui est présenté dans la figure suivante



Tracer le diagramme de bode du système, trouver la valeur du gain à résonance, sa fréquence et le facteur de résonance.



De diagramme de bode nous avons trouvé :

$$\omega_r = 0.791 \text{ rad/sec}$$

$$A_{dB}(\omega_r) = 5.24 \text{ dB}$$

C. Calcul des contrôleurs en utilisant le diagramme de bode

Cette méthode est envisagée lorsque le cahier des charges contient des spécifications relatives à des considérations fréquentielles : bande passante, coefficient de qualité, marge de stabilité (marge de gain ou marge de phase)..., avec éventuellement des spécifications sur la précision et les caractéristiques de la réponse transitoire. Cette méthode fût parmi les méthodes les plus anciennes basées sur la connaissance du lieu de transfert du procédé qui peut être obtenu soit expérimentalement soit par la connaissance de sa fonction de transfert.

L'insertion du régulateur dans la chaîne de commande permet de modeler le lieu de transfert en boucle ouverte $H(s) = G_c(s) \cdot G(s)$ conférant au système en boucle fermée un fonctionnement tel qu'il précisé dans le cahier des charges.

On rappelle brièvement les performances attendues dans le domaine fréquentiel :

- Un gain très grand voire infini en basses fréquences de $H(s)$, ce qui assure une bonne précision en régime permanent;
- Le lieu de transfert en boucle ouverte doit passer le plus loin possible du point critique, ce qui assure des bonnes marges de stabilité ;
- La bande passante doit être la plus large possible de manière à obtenir une bonne rapidité.

Il n'existe pas en toute rigueur une démarche systématique à suivre pour calculer les paramètres du régulateur et souvent la synthèse est guidée par le bon sens du concepteur.

On peut utiliser indifféremment l'une des représentations graphiques pour représenter les lieux de transfert : Bode, Black ou Nyquist. En pratique, les deux premières représentations sont plus commodes d'utilisation que la représentation dans le plan de Nyquist.

Pour illustrer la méthode fréquentielle pour la synthèse des régulateurs, on considère les deux exemples suivants de difficulté croissante:

Exemple

Il s'agit de réaliser un asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu et à excitation indépendante.

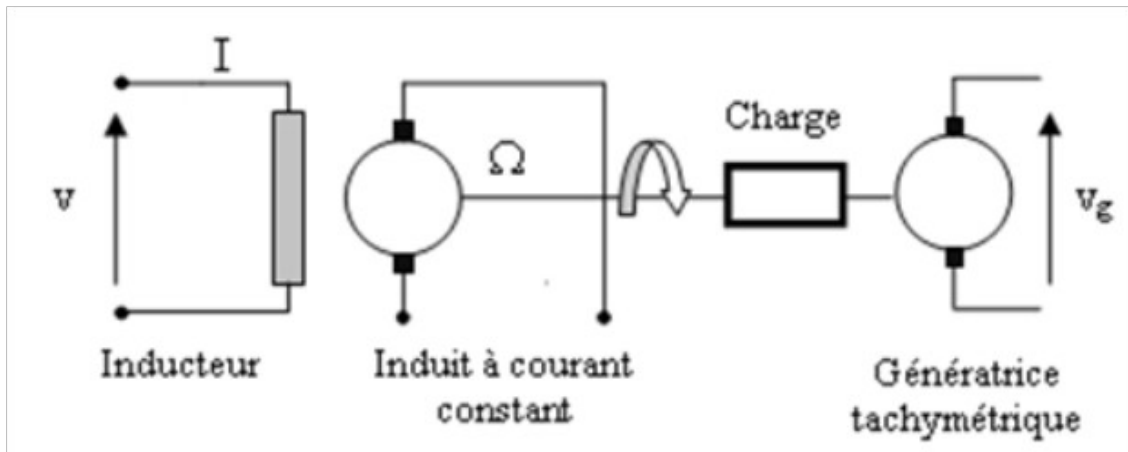


Fig.2.10

W désigne la vitesse de rotation du moteur mesurée par une génératrice tachymétrique délivrant une tension v_g et v représente la tension de commande de l'inducteur.

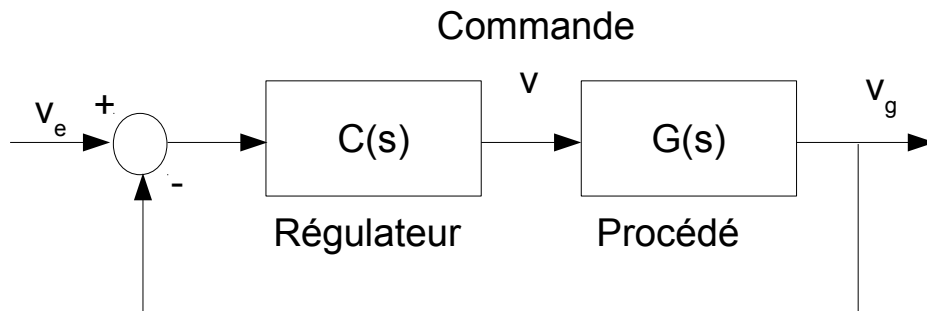


Fig.2.11

L'objectif est d'asservir la vitesse W à une tension de référence v_e et de faire la synthèse d'un correcteur selon un cahier de charges.

Le système à contrôler est donné par sa fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{(v_g(s))}{(v(s))} = \frac{4.05}{((1+0.1s)(1+0.5s))}$$

Le cahier des charges est :

- Erreur indicielle nulle. (Précision statique parfaite)
- Marge de phase $MP = 45^\circ$.

La contrainte sur la précision nécessite l'introduction d'une intégration dans la chaîne en boucle ouverte. Comme le système n'en dispose pas, le régulateur doit être de type intégrateur. Quant à la deuxième contrainte, elle peut être assurée par une action proportionnelle. Soit donc le régulateur PI suivant:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{k_i s} \right)$$

On commence par ajuster le gain K_p du régulateur P supposé agissant seul de manière à satisfaire la contrainte sur la marge de phase :

$$\begin{aligned} |K_p G(j\omega_0)| &= 1 \\ \Delta\varphi &= 180^\circ + \arg(K_p G(j\omega_0)) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{(4.05 K_p)}{\sqrt{((1+(0.5\omega_0)^2)(1+(0.1\omega_0)^2))}} &= 1 \\ \Delta\varphi = 180^\circ - \tan^{-1}(0.5\omega_0) - \tan^{-1}(0.1\omega_0) &= 45^\circ \end{aligned}$$

De l'équation de l'angle on déduit que $\omega_0 = 13.5 \text{rd/s}$ et de l'équation l'amplitude on calcule le gain K_p ; soit $K_p = 2.83$.

La figure suivante confirme le respect de la contrainte sur la marge de phase.

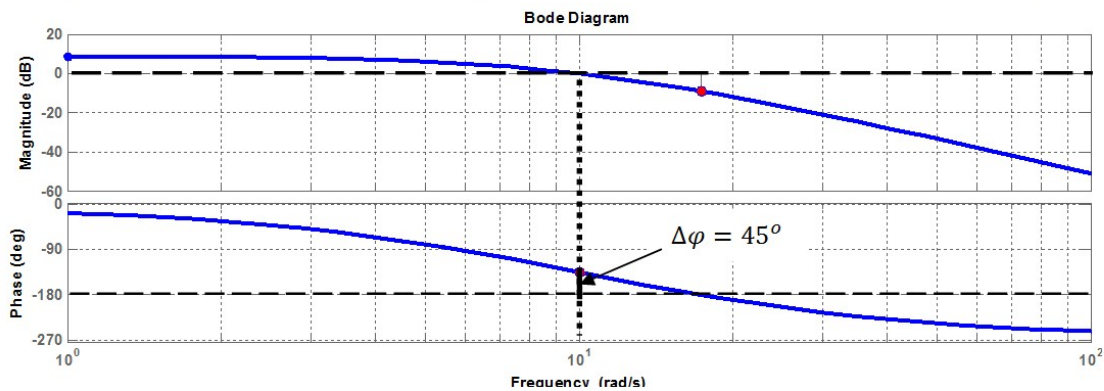


Fig.2.12

Il convient à présent de calculer la constante d'intégration k_i de manière à ce que la marge de phase reste à peu près égale à 45° . Il est possible de choisir k_i de telle sorte que la contribution en module et en phase du terme $\left(1 + \frac{1}{k_i s}\right)$ soit négligeable à la pulsation ω_0 .

Pour ce faire, on prendra $\frac{1}{T_i} \approx 0,1 \omega_0$ (une décade à gauche de ω_0), ce qui permet de placer ce terme suffisamment à gauche de la pulsation ω_0 . D'où la valeur de $k_i = 0.74$.

Le régulateur est : $G_c(s) = 2.83 \left(1 + \frac{1}{0.74 s} \right)$

Remarque

Remarque : Comme le montre les courbes de Bode de $G_c(s) \cdot G(s)$ données par la figure 2.13, la marge de phase est légèrement inférieure à 45° . Cela est dû au fait que la phase apportée

par le terme $(1 + \frac{1}{k_i s})$ à la pulsation ω_0 n'est pas nulle. A priori une marge de phase de 36.8° est aussi correcte, néanmoins on peut remédier à cette situation (s'il le faut !!) en plaçant ce terme davantage à gauche ou surestimer la marge de phase nécessaire (55° au lieu de 45° par exemple).

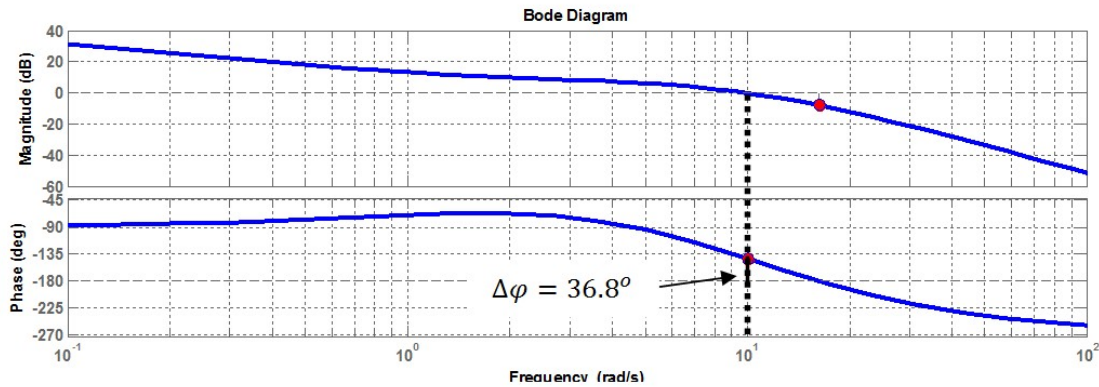


Fig.2.13

Exemple

Considérons un système de fonction de transfert $G(s)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(s) = \frac{K}{(1 + 0.1s)^3}$$

Le paramètre K , gain statique du système en boucle ouverte est positif et réglable. On souhaite que ce système présente en boucle fermée une erreur de position $\varepsilon_p = 5\%$, tout en ayant une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$.

On commence par régler K pour satisfaire à la condition sur la marge de phase :

Comme :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + 0.1j\omega)^3}$$

On a : $\Delta\varphi = 180 - 3 \tan^{-1}(0.1\omega_0) = 45^\circ \Rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad/sec}$.

On a donc :

$$G(\omega_0) = \frac{K}{(\sqrt{1 + 0.01\omega_0^2})^3} = 1 \Rightarrow K = (\sqrt{2})^3 = 2.8 \Rightarrow 20 \log K = 8.9 \text{ dB}$$

Calculons à présent l'erreur de position obtenue en boucle fermée dans ces conditions :

$$\varepsilon_p = \lim_{(s \rightarrow 0)} [1 - H(s)] = \lim_{(s \rightarrow 0)} \left[1 - \frac{K}{K + (1 + 0.1s)^3} \right]$$

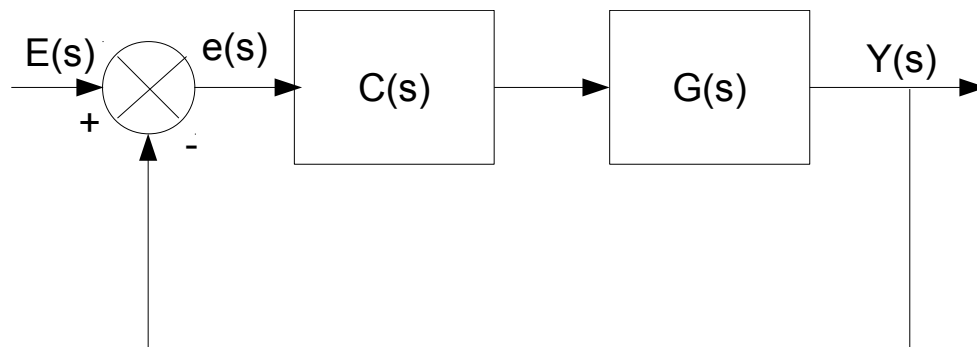
Soit :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{(1+K)} = 0.26 = 26\%$$

La précision constatée ne satisfait pas au cahier des charges. Pour obtenir une erreur de position de 5 %, il est nécessaire de disposer d'un gain statique K' tel que :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{(1+K')} = 0.05 \Rightarrow K' = 19 \Rightarrow 20 \log K' = 25.6 \text{ dB}$$

Introduisons un correcteur à retard de phase dans la chaîne directe



On a :

$$G_c(s) = \frac{(a(1+Ts))}{(1+aTs)} \text{ avec } a > 1$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$H(s) = G_c(s)G(s) = \frac{(a(1+Ts))}{(1+aTs)} \frac{2.8}{(1+0.1s)^3} \text{ avec } a > 1$$

Le nouveau gain statique est : $K' = 2.8a$

Par conséquent, il est nécessaire de régler le paramètre a de sorte que :

$$a = \frac{19}{2.8} = 6.8 \Rightarrow 20 \log (6.8) = 16.7 \text{ dB}$$

Il suffit, pour finir, de choisir T de manière à ce que $1/T$ soit très inférieur à la pulsation de coupure à 0 dB.

Nous pouvons prendre, par exemple, $T = 10 \text{ s}$.

On a finalement :

$$G_c(s) = \frac{(6.8(1+10s))}{(1+68s)}$$

La figure 2.15 présente les diagrammes de Bode comparés du système initial et du système corrigé. Rappelons que les diagrammes de Bode de $G(s)$ et de $G_c(s)$ s'additionnent pour former celui du système corrigé $H(s)$.

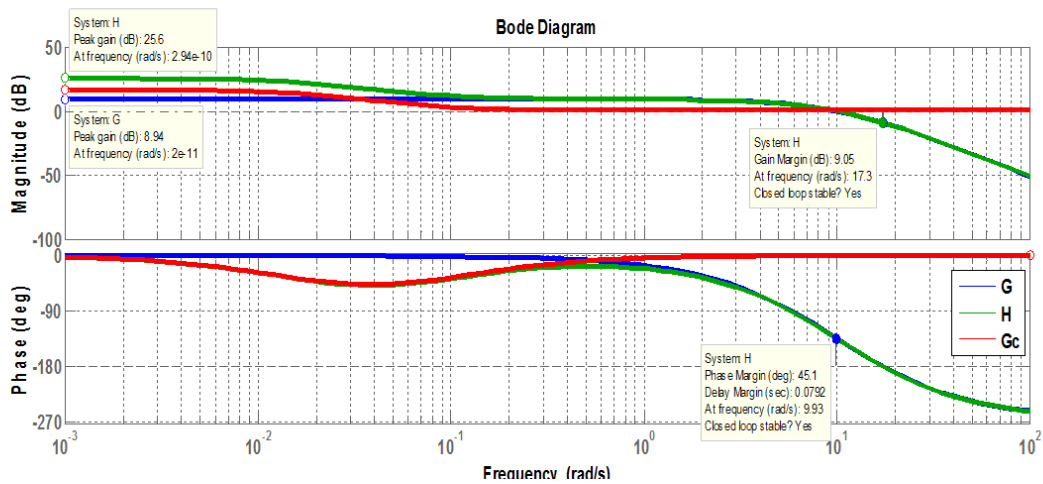


Fig.2.15. Diagramme de Bode du système, contrôleur et système contrôlé

D. Abaque de Black-Nichols

La fonction de transfert $H(s)$ se détermine à partir de la fonction de transfert en boucle fermée par :

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Cette relation permet de déterminer les caractéristiques (phase et gain) du système en boucle fermée en fonction des paramètres de la boucle ouverte.

L'abaque de Black-Nichols permet de lire graphiquement $H(j\omega)$ à partir de $G(j\omega)$ par le tracé sur le diagramme de Black des courbes "iso-déphasage" et "iso-gain" de la fonction de transfert en boucle fermée.

La figure suivante donne un exemple d'utilisation du diagramme de Black-Nichols pour la fonction

$$G(s) = \frac{4}{((1+12s)^2(1+50s))}$$

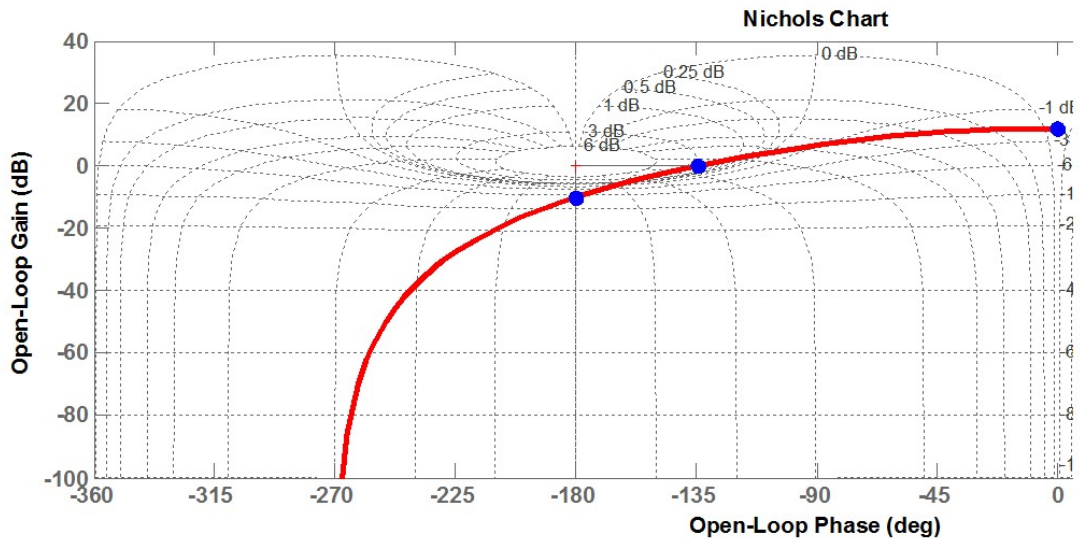


Fig.2.16. Le diagramme de Black Nichols du système en BO

Pour une fréquence nulle, le gain en boucle fermée est d'environ -1.9 dB. Le gain maximum est de 3 dB. Il est obtenu pour pulsation de résonance $\omega_R = 0.06$ rd/s.

Il est possible de déterminer l'allure de la réponse à un échelon en utilisant un modèle du deuxième ordre. Il s'agit ici de trouver le filtre du second ordre de paramètre (K, ξ, ω_n) ayant le même gain statique, le même facteur de sur-oscillation et la même fréquence de résonance que le système étudié en boucle fermée. On approxime la réponse à l'échelon du système en boucle fermée à celle du deuxième ordre équivalent.

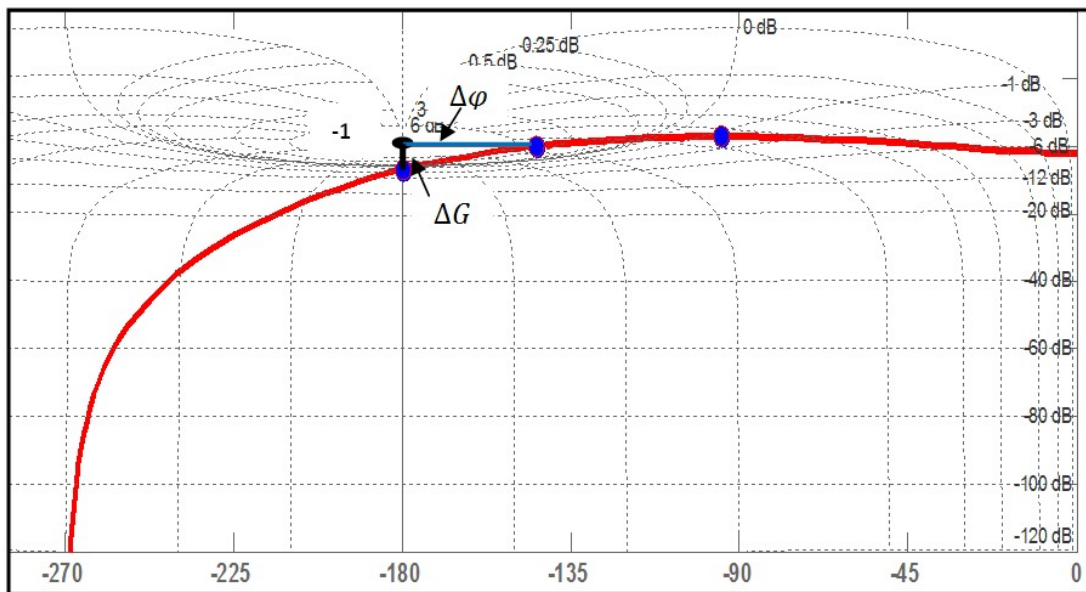


Fig.2.17. Le diagramme de Black Nichols du système en BF

Gain statique : -1.9 dB \Rightarrow Le facteur $K = 10^{(-1.9/20)} = 0.8$.

Le facteur de sur-oscillation est de l'écart entre le gain maximum en boucle fermée et le gain statique. Le gain maximum en boucle fermée est donnée par la courbe de gain en boucle fermée d'amplitude maximale tangente au lieu de Black (dans la figure, $+3$ dB en boucle fermée pour $\omega_R = 0.06$ rd/s).

On a donc : $M = 3 - (-1.9) = 4.9$ dB.

La lecture des abaques nous donne un facteur ξ équivalent de 0.3 .

La relation entre la pulsation de résonance ω_R et la pulsation propre ω_n pour $\xi = 0.3$ est, d'après la lecture des abaques pour $\xi = 0.3$: $\omega_n = \omega_R / 0.9 = 0.67$.

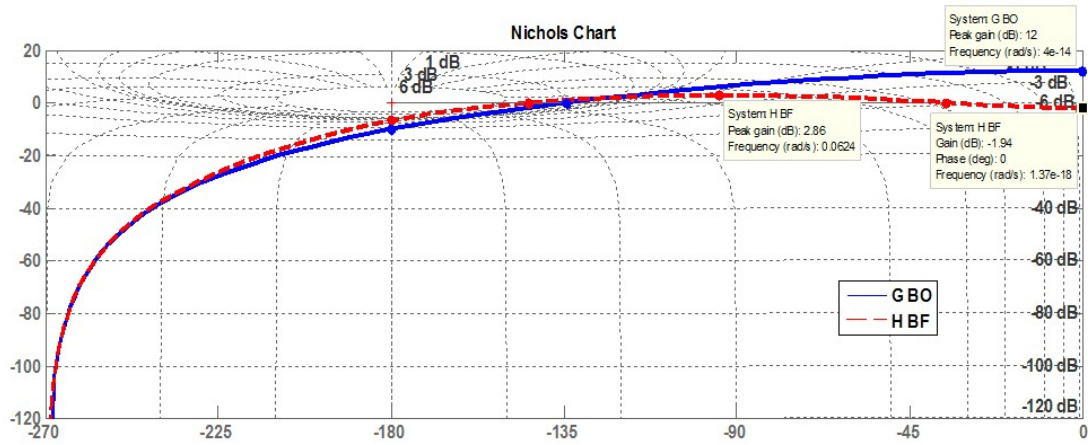
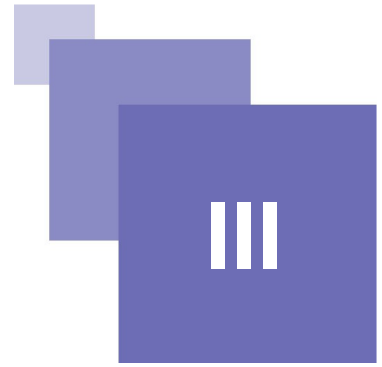


Fig.2.18. Le diagramme de Black Nichols du système en BF

Partie 02 :

Chapitre 01 :

Représentation des systèmes d'état



L'idée de base des représentations d'état est que le futur d'un système dépend de son passé, de son présent et de ses entrées : le future peut alors être décrit à partir d'un ensemble de variables bien choisies.

A. Concepts

Dans cette partie nous allons donnés quelques concepts liée aux représentations d'état.

1. Etat

L'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant $t=t_0$, ainsi que celle du signal d'entrée pour $t \geq t_0$, suffit à déterminer complètement le comportement du système pour $t \geq t_0$.

2. Variable d'état

Ce sont les variables, grandeurs qui constituent l'état du système.

3. Vecteur d'état

De manière plus mathématique, l'on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, à priori réel, de dimension n , que l'on note $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_n]'$.

4. Espace d'état

Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans le quel le vecteur d'état \mathbf{x} est susceptible d'évoluer, chaque instance de \mathbf{x} étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc \mathbb{R}^n .

B. Représentation d'état des systèmes mono-variables linéaires continue

Un système mono-variable continu est décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

x est le vecteur d'état de dimension n . $A(n \times n)$ est la matrice d'état (ou d'évolution), $B(n \times 1)$ la matrice d'entrée (ou de commande) et $C(1 \times n)$ la matrice de sortie (ou d'observation). D est un scalaire dans ce cas mono-variable.

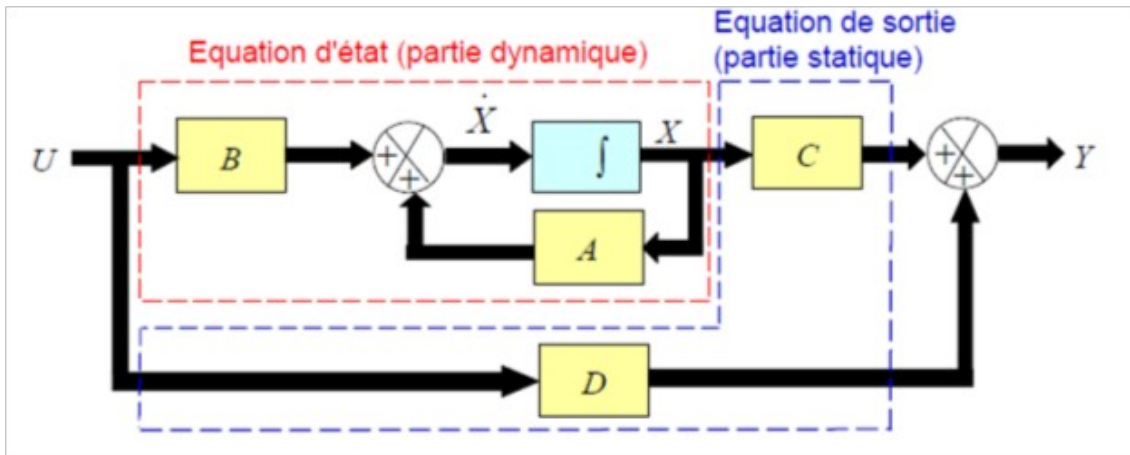
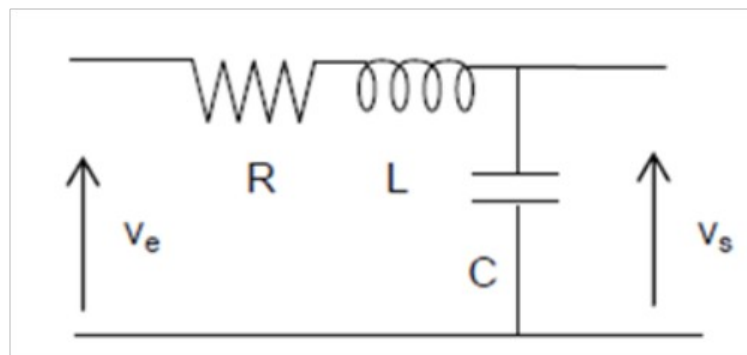


Fig.3.1. Schéma bloc d'une représentation d'état.

Plusieurs techniques sont disponibles pour obtenir la représentation d'état des systèmes, parmi les techniques existantes les suivants :

1. Par le jeu d'équation



De la figure ci-dessus nous modélisons le système par l'ensemble d'équations suivantes :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau \Leftrightarrow dy \frac{(t)}{dt} = \frac{1}{c} i(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{(di(t))}{dt} &= \frac{-R}{L}i(t) - \frac{1}{L}y(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \frac{(dy(t))}{dt} &= \frac{1}{C}i(t)\end{aligned}$$

Soit les deux variables d'état sont $x_1=i$ et $x_2=y$ alors

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{-R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1\end{aligned}$$

Le système d'équation précédente peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y(t) &= [0 \quad 1]x(t) + 0u\end{aligned}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 1]; \quad D = 0$$

A : Matrice d'état du système ($n \times n$) ; x: Vecteur d'état du système ; u: Vecteur d'entrée
y : Vecteur de sortie ; B : Matrice de commande $n \times m$; C : Matrice de sortie $p \times n$

2. Par équation différentielle unique (la forme canonique de commandabilité)

Un système est modélisé sous forme d'une équation différentielle comme suit :

$$a_n \frac{(d^n y(t))}{dt^n} + a_{(n-1)} \frac{(d^{(n-1)} y(t))}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{(dy(t))}{dt} + a_0 y(t) = bu(t)$$

En suppose que : $a_n=1$ et $x_1=y$; $x_2=\dot{y}$; $x_3=\ddot{y}$... ; $x_n = \frac{(d^{(n-1)} y)}{dt^{(n-1)}}$

Alors on peut montrer que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{(n-1)} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]; \quad D = 0$$

Exemple

Soit un système est défini par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L} \dot{y}(t) + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} u(t)$$

Le modèle d'état de ce système est le suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad D = 0$$

Dans le cas où $m \neq 0$. L'on suppose que $m = n$ sans perte de généralité (il suffit de considérer $b_j = 0, \forall j/m < j \leq n$). Le coefficient $a_n = 1$ (supposé). L'on définit.

$$\beta_n = b_n; \quad \beta_{(n-j)} = b_{(n-j)} - \sum_{k=0}^{j-1} a_{(n-j+k)} \beta_{(n-k)}; \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Les variables d'état peuvent alors être ainsi choisies :

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \\ x_2 = (\dot{x}_1) - \beta_{(n-1)} u \\ \vdots \\ x_n = (x_{(n-1)}) - \beta_1 u \end{cases}$$

Il vient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{(n-1)} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{(n-1)} \\ \beta_{(n-2)} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]; \quad D = \beta_n$$

3. De la fonction de transfert à la représentation d'état

a) Cas de la fonction de transfert strictement propre ($m < n$)

Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan : L'on suppose sans perte de généralité que $a_n = 1$.

$$G(s) = N \frac{(s)}{D} = N \frac{(s)}{(s^n + a_{(n-1)}s^{(n-1)} + \dots + a_1s + a_0)} = \frac{(N(s))}{(\prod_{(i=1)}^n (s - \lambda_i))}$$

L'expression fait apparaître les pôles du système.

Pôle distincts : Dans le cas où tous les pôles λ_i , $i=1, \dots, n$ sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de $Y(s) = G(s)U(s)$ et vient :

$$Y(s) = \sum_{(i=1)}^n \left(\frac{\alpha_i}{(s - \lambda_i)} U(s) \right)$$

Avec :

$$X_i(s) = \frac{\alpha_i}{(s - \lambda_i)} U(s)$$

Si l'on focalise son intention sur chaque terme $X_i(s)$, l'on déduit que :

$$sX_i(s) = \alpha_i U(s) + \lambda_i X_i(s) \Rightarrow^{(TL^{-1})} x_i = \alpha_i u + \lambda_i x_i$$

En choisissant le vecteur d'état $x = [x_1 \ \dots \ x_n]'$ alors :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 1 \ \dots \ 1] x$$

i Réalisation de la forme compagne :

Il existe plusieurs réalisations de forme compagne qui peut être facilement obtenues à partir de la fonction de transfert.

Forme compagne Horizontale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{(n-1)} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m] x$$

4. De la représentation d'état à la fonction de transfert

Il n'existe qu'une façon de l'obtenir à partir d'une équation différentielle

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \Leftrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) + D(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Les conditions initiales considérées nulles :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$Den(s) = \det(sI - A).$$

C. Représentation des systèmes discrets

En temps discret, il est possible de décomposer un système en utilisant des gains et des opérateurs dit de décalage de fonction de transfert \mathbf{Z}^{-1} . La figure suivante présente un exemple de système composé de tels éléments. On peut, dans un tel modèle, définir des variables d'état, que nous noterons $\mathbf{x}_i(\mathbf{k})$ et qui représentent la valeur des signaux x_i aux instants \mathbf{kT}_e , \mathbf{T}_e étant la période d'échantillonnage de tous les signaux présents dans le système .

La forme générale pour un système mono variable (en anglais Single Inputs Single Outputs SISO) des équations en temps discret correspond, donc à :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

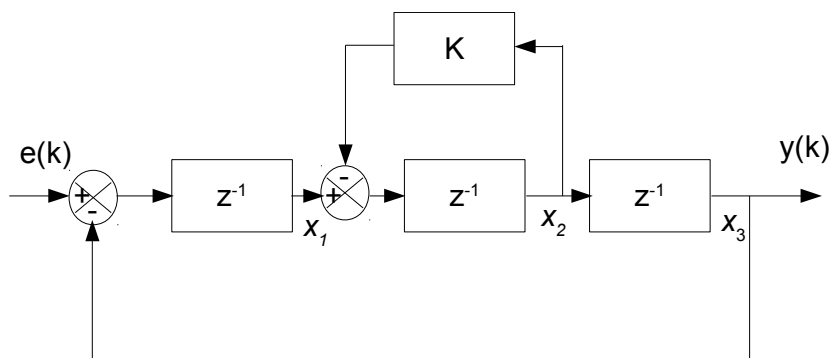


Fig.3.2. Modélisation d'état en temps discret.

D. De la non linéarité à la linéarité

f et g sont des fonctions très complexes, généralement non linéaires et ils convient dans le cadre de ce cours, de recourir à une approximation linéaire. Pour faire, l'on considère souvent que l'état du système ainsi que son entrée évoluent au voisinage d'un point d'équilibre, ou point de fonctionnement et l'on fait l'hypothèse que toutes les variations autour de ce point sont faibles.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) = \begin{cases} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

x_e et u_e : Les valeurs du point d'équilibre.

$\xi(t) = x(t) - x_e$: La variation d'état

$v(t) = u(t) - u_e$: La variation d'entrée

$z(t) = y(t) - g(x_e, u_e, t)$: La variation de sortie.

Si les valeurs de $v(t)$ et des composantes $\xi_i(t)$ de $\xi(t)$ restent faibles, l'on peut calculer les matrices Jacobiennes suivantes.

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix}; \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_e, u_e, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) \quad \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \right], \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(x_e, u_e, t)$$

Ainsi si l'on considère que $\xi(t)$ et $v(t)$ sont respectivement le nouveau vecteur d'état et la nouvelle entrée du modèle (linéarisé tangent) autour du point d'équilibre, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi(t) + B(t)v(t) \\ Z(t) &= C(t)\xi(t) + D(t)v(t) \end{aligned}$$

L'approximation linéaire au premier ordre consiste donc à supposer que $\xi(t)$ et $v(t)$ restent faibles et à décrire le comportement du système par les équations non linéaires, comme $x(t), u(t)$ et $y(t)$, l'on écrira :

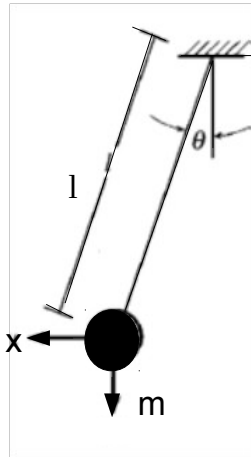
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Si le système est invariant dans le temps (LTI) le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax + Bu \\ y(t) &= Cx + Du \end{aligned}$$

Exemple

L'on considère le monument du pendule autonome représenté sur la figure suivante.



L'application de la relation fondamentale de la dynamique et le choix d'un vecteur d'état $x' = [\theta \ \dot{\theta}]$ telque $x = [\theta \ \dot{\theta}]$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 = f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Le point d'équilibre ($\dot{x} = 0$) Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{(\delta f_1)}{(\delta x_1)} x_e &= 0; \quad \frac{(\delta f_1)}{(\delta x_2)} x_e = 1 \\ \frac{(\delta f_2)}{(\delta x_1)} x_e &= -\frac{g}{l} \cos(x_{(e_1)}); \quad \frac{(\delta f_2)}{(\delta x_2)} x_e = -\frac{k}{m} \end{aligned}$$

Cette approximation conduit à la représentation LTI du système autonome

$$\dot{x} = A x \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

Chapitre 02 : Analyse des systèmes dans l'espace d'état

IV

A. Résolution des équations d'état et matrice de transition

Résoudre les équations d'état consiste à déterminer les expressions temporelles des n variables d'état, connaissant le système (A, B et C) et connaissant l'entrée $U(t)$ qui lui est appliqué.

1. Etude préalable

Si on avait affaire à un système décrit par une simple équation différentielle et non par un système différentiel, l'équation d'état se résumerait à :

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u(t)$$

La solution d'une telle équation différentielle est connue et a pour expression :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

Etat à t Solution du système libre ($u=0$) Solution au régime forcé (commandé)

2. Généralisation au système vectoriel

Considérons le système différentiel représentant les équations d'état :

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

On obtient, par généralisation du résultat précédent :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Dans cette écriture, e^{At} représente une matrice exponentielle que l'on note en général $\Phi(t)$ et que l'on appelle matrice de transition du système.

3. Calcul de la matrice de transition

L'opération la plus délicate, dans la résolution des équations d'état, consiste à calculer la matrice de transition. De nombreuses méthodes existent :

a) Utilisation de la transformé de Laplace

Appliquons la transformation de Laplace au système d'équations différentielles de la représentation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{TL} sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

Soit :

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s)$$

où I : Matrice carré Identité

d'où :

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

La solution générale est :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Que la matrice de transition e^{At} possède pour TL de la matrice $(sI - A)^{-1}$.

Transformons l'expression de $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right)^{-1} = \left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^{(n-1)}}{s^n} + \frac{A^n}{s^{(n+1)}} \right)$$

On appliquant la TL⁻¹ on obtient :

$$e^{At} = \left(I + At + \frac{A^2}{(2!)} t^2 + \dots + \frac{A^n}{(n!)} t^n + \dots \right)$$

Cette expression ne surprendra personne puisqu'on y retrouve l'expression du développement de Taylor.

Exemple

Prenons comme exemple la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A) = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(\det(sI - A))} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(s+3)}{(s^2 + 3s + 2)} & \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)} \\ \frac{-2}{(s^2 + 3s + 2)} & \frac{s}{(s^2 + 3s + 2)} \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{pmatrix}$$

Par la transformé de Laplace inverse on obtient :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{(-2t)} & e^{-t} - e^{(-2t)} \\ 2e^{(-2t)} - 2e^{-t} & 2e^{(-2t)} - e^{(-t)} \end{pmatrix}$$

b) Méthode de diagonalisation (Cayley-Hamilton)

Il est facile de remarquer que le calcul de la matrice de transition est très simple à effectuer si celle-ci est diagonale. En effet :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Cette constatation nous conduit naturellement à imaginer une méthode relativement facile pour calculer e^{At} : il suffit de diagonaliser la matrice A. Considérons une matrice de commande quelconque :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice sont définis par :

$$A(V_i) = \lambda_i(V_i)$$

Les vecteurs non nuls V_i sont les vecteurs propres de A ; les λ_i sont ses valeurs propres. Ces grandeurs sont très faciles à déterminer, étant donné que les λ_i sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice A définie par :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Si on appelle $[\Delta]$ la matrice diagonale formée des valeurs propres de la matrice A et $[T]$ la matrice modale formée de ses vecteurs propres, on a :

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T] = [(V_1) \ (V_2) \ \dots \ (V_n)]$$

Dans ces conditions :

$$A = [T][\Delta][T]^{-1}$$

Il est alors facile de vérifier que :

$$A^n = ([T][\Delta][T]^{-1}) \times ([T][\Delta][T]^{-1}) \times \cdots \times ([T][\Delta][T]^{-1})$$

$$A^n = [T][\Delta]^n[T]^{-1}$$

Comme :

$$e^{At} = \left(I + At + \frac{A^2}{(2!)} t^2 + \cdots + \frac{A^n}{(n!)} t^n + \cdots \right)$$

On a :

$$e^{At} = [T] \left(I + [\Delta]t + \frac{[\Delta]^2}{(2!)} t^2 + \cdots + \frac{[\Delta]^n}{(n!)} t^n + \cdots \right) [T]^{-1} = [T] e^{[\Delta]t} [T]^{-1}$$

Par conséquent :

$$e^{At} = [T] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} [T]^{-1}$$

Les fonctions $e^{(\lambda_1 t)}$, $e^{(\lambda_2 t)}$, \dots , $e^{(\lambda_n t)}$ qui constituent la base de fonctions élémentaires du vecteur d'état, donc des signaux internes du système, sont appelées les modes du système.

Exemple

Considérons la matrice de commande

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \implies \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 1 & \lambda+3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3) - 2 = 0 \implies \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Calculons le premier vecteur propre

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -2x - 2y &= -x \\ -x - 3y &= -y \end{aligned} \implies x = -2y$$

Remarque : Ne soyons pas surpris de ce résultat : il existe une infinité de vecteurs propres, tous colinéaires, associés à une valeur propre.

Prenons par exemple :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le second vecteur propre se calcule tout aussi facilement :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -2x - 2y &= -4x \\ -x - 3y &= -4y \end{aligned} \implies x = y$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]^{-1} = \frac{1}{(\det[T])} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

Calculons à présent la matrice de transition :

On a :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}; \quad e^{[\Delta]} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{-2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ \frac{-1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

4. Calcul de l'état d'un système en fonction d'un signal de commande

Nous avons déjà montré que :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

La connaissance de la matrice de transition permet de calculer directement le vecteur d'état du système à partir de cette expression. Il y a bien évidemment autant de calculs à effectuer qu'il y a de variables d'état.

Exemple

Considérons par exemple le système régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Supposons que ce système soit sollicité par un échelon unitaire, $u(t) = 1$, et que son état initial est défini par : $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice de transition a été calculée à l'exemple précédent :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \\ -\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} d\tau$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t [2e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}] d\tau \\ \int_0^t [-e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}] d\tau \end{pmatrix}$$

Ce qui donne immédiatement le résultat :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(7 + e^{-4t} - 8e^{-t}) \\ -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}e^{-4t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

5. Stabilité

Un système est dit stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.

Un système linéaire invariant est stable si pour des entrées nulles et quelle que soit la condition initiale $x(0)$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Pour qu'un système linéaire, défini dans l'espace d'état : $\dot{x}(t) = Ax + Bu$
 $y(t) = Cx + Du$

soit stable il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de la matrice **A** soient réelles négatives ou à partie réelle négative.

Pour que la solution de ce système soit différente de la solution triviale (tous les si nuls), il faut que le déterminant de $(sI - A)$ soit nul :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Cette équation est en fait le polynôme caractéristique de la matrice **A** et les racines si sont les valeurs propres de **A**.

Exemple

Considérons par exemple le système régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

étudier la stabilité de ce système

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -4$$

Les deux valeurs propres sont réel négatives, alors le système est stable.

B. Commandabilité d'un système

La problématique générale de l'automatique consiste à commander un système de manière à ce qu'il évolue, depuis un état initial constaté, vers un état final déterminé. En représentation d'état, il s'agira de déterminer le signal de commande $u(t)$ entre deux instants donnés, t_1 et t_2 , pour amener le système de l'état $x(t_1)$ vers un état $x(t_2)$ souhaité.

Définition

Le modèle représenté par la formule suivante est commandable ou gouvernable si pour toute instance x_1 du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_1 en un temps fini.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Remarque

La notion de commandabilité ne porte que sur l'état du système et non sur sa sortie. Par conséquent, seule l'équation vectorielle $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est à considérer pour caractériser la commandabilité d'un système. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A ,B) qui est commandable.

1. Critère de Kalman

Il existe de nombreux critères de commandabilité ou de non-commandabilité. Le critère de Kalman est l'un des plus couramment utilisés.

Méthode : Énoncé de Kalman

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs $[B, AB, A^2 B, \dots, A^{(n-1)} B]$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes $[B, AB, A^2 B, \dots, A^{(n-1)} B]$

$$C_{(A,B)} = [B, AB, A^2 B, \dots, A^{(n-1)} B]$$

La paire (A,B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

Exemple

Reprenons l'exemple du système régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$C_{(A,B)} = [B \ AB]$$

Où :

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$C_{(A,B)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(C_{(A,B)}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Le système est complètement commandable.

C. Observabilité de l'état d'un système

Dans cette partie, nous avons vu combien il était important, notamment pour la commande des systèmes en boucle fermée, d'être capable de mesurer un signal de sortie. En représentation d'état, il nous importe d'être capable de connaître à chaque instant, l'état du système, autrement dit de pouvoir déterminer le vecteur d'état $x(t)$. Certaines variables d'état sont très faciles à mesurer. Un capteur placé au bon endroit, à l'intérieur du système, peut nous donner accès à l'information recherchée. Dans ce cas, on dit que la variable d'état

considérée est mesurable. Dans d'autres cas, cette investigation directe n'est pas possible. La grandeur est alors dite non mesurable.

En revanche, elle peut, tout en étant non mesurable, influencer la sortie $y(t)$ du système. Il est alors possible, à partir de la mesure de la sortie, de déduire la grandeur considérée. On dit que celle-ci est observable.

Définition

Un système est dit observable à un instant t_1 , si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ permet de calculer l'état du système à l'instant t_1 .

Si un système est observable quel que soit l'instant t_1 , il est dit complètement observable.

Méthode : Critère d'observabilité

On considère un système défini par le système (1). Ce système est complètement observable si et seulement si les vecteurs lignes $[C, CA, CA^2, \dots, CA^{(n-1)}]$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des n vecteurs lignes $[C, CA, CA^2, \dots, CA^{(n-1)}]$

$$O_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

La paire (A,C) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

Exemple

Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1] x \end{aligned}$$

La matrice d'observabilité est :

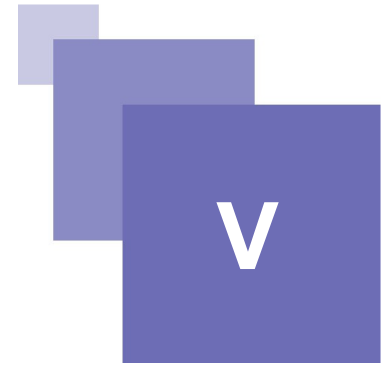
$$O_{(A,C)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Elle est de rang $2 = n \Rightarrow$ le système est observable

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

Alors le système est observable.

Chapitre 03 : Commande par retour d'état



A. Principe générale de la commande par retour d'état :

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système. La figure 3.1 présente une représentation schématique de ce concept.

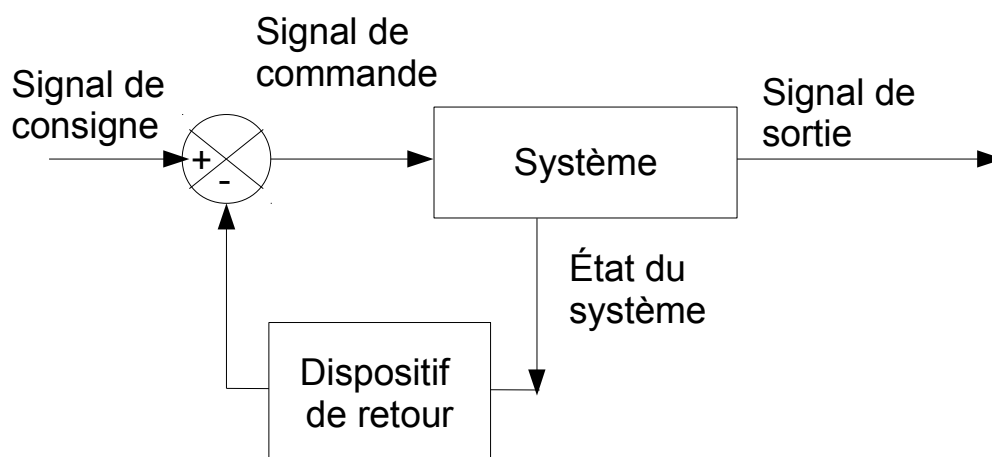


Fig.3.1. Principe du retour d'état

1. Vecteur de gain

Le vecteur d'état étant supposé connu, le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de n signaux $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, on le multiplie par un vecteur ligne (k) appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction.

On a alors :

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

et :

$$\varepsilon(t) = e(t) - K(x) = e(t) - [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

soit :

$$\varepsilon(t) = e(t) - K(x) = e(t) - k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 \quad \dots - k_n \cdot x_n$$

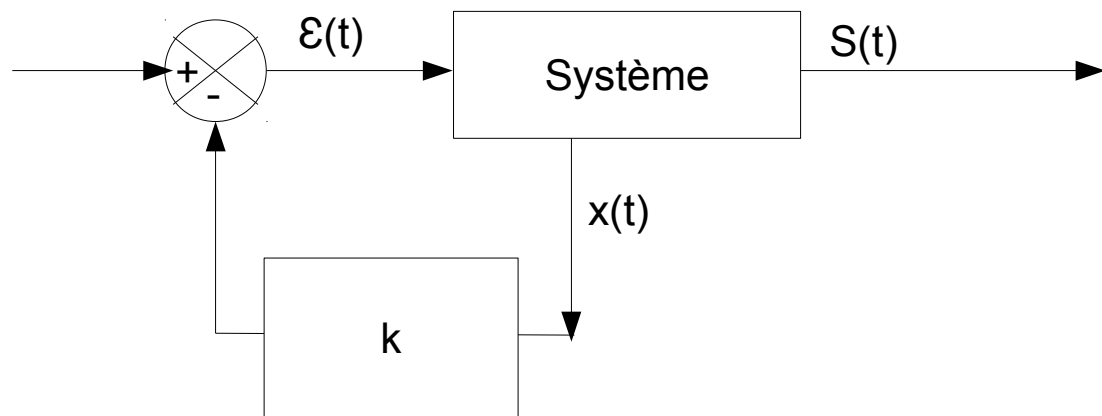


Fig.3.2. Bouclage du système par un vecteur de gain.

B. Retour d'état et performances transitoires : le placement de pôles

Le placement de pôles consiste à déterminer K de telle sorte que le système ait les pôles désirés ou, plus rigoureusement, de telle sorte que la matrice d'état en boucle fermée ait les valeurs propres spécifiées. Ceci permet d'agir de manière significative sur le comportement transitoire du système, en termes de temps de réponse, d'oscillations, etc.

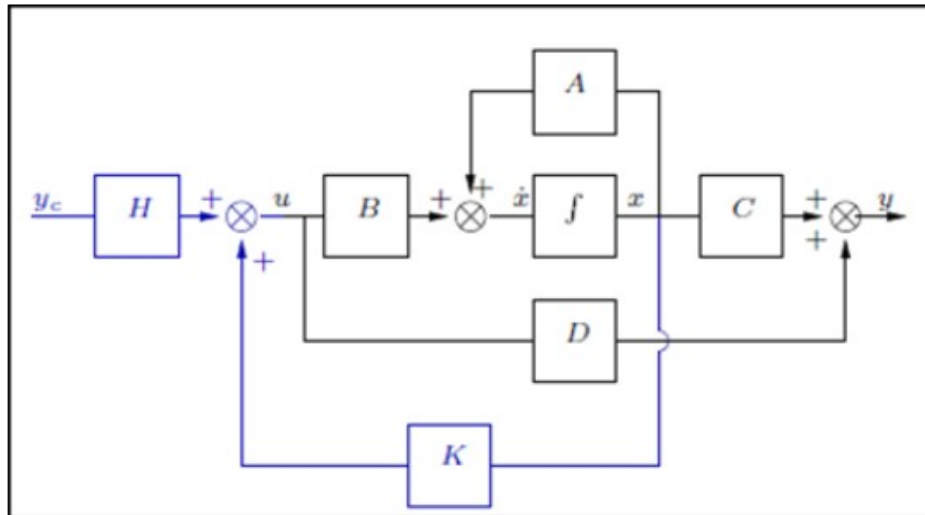


Fig 3.3. Schéma d'asservissement

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

$$u(t) = Hy_c(t) + Kx(t)$$

Plus exactement, si l'on injecte l'équation de commande dans l'équation de système, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + BHy_c \\ y &= (C + DK)x + DHy_c\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice en boucle fermée est $A_f = A + BK$. Donc le problème de placement de pôles se résume à ceci :

Méthode : Placement de pôle

Soient une matrice $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ et un vecteur $B \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}$, déterminer le vecteur $K \in \mathbb{R}^{(1 \times n)}$ tel que le spectre de $A + BK$ coïncide avec un spectre donné.

Ce problème n'est pas forcément simple et il convient de l'aborder en plusieurs étapes.

1. Commandabilité et placement de pôles

Le choix de K est prépondérant pour agir sur les performances transitoires du système car il induit un choix de pôles. Cependant, une question peut venir à l'esprit : le problème du placement de pôles a-t-il une solution ? A priori, il s'agit d'imposer les n valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée en choisissant les n composantes de K . L'on dispose donc de suffisamment de degrés de liberté. Toutefois, le problème n'est pas aussi simple et l'on peut montrer que ce problème n'admet une solution que lorsque le modèle d'état est commandable.

Le problème de placement de pôles par retour d'état admet une solution si et seulement si la paire $(A; B)$ est commandable.

2. Placement de pôles sur une réalisation canonique

Avant d'aborder le problème dans son intégralité, l'on se contente de supposer que le système est d'écrit dans une base de l'espace d'état particulière telle que la réalisation est dite canonique de commande. En réalité, il s'agit de la forme compagne horizontale associée à une matrice d'état ici notée \tilde{A} et à un vecteur de commande ici noté \tilde{B} . La matrice d'état du système bouclé est alors :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{(n-1)} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0] x$$

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Où $\alpha_i = a_i - k_{(i+1)}$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. Par ailleurs, les vecteurs de commande et d'observation \tilde{B} et \tilde{C} ne changeant pas, l'on note que la réalisation obtenue par le retour d'état est toujours de la forme compagne horizontale. Or les composantes α_i sont les coefficients du polynôme caractéristique désiré en boucle fermée $D_d(s)$. Ainsi, si l'on désire placer les pôles λ_i , $i=1, \dots, n$, il faut choisir les composantes \tilde{k}_i du retour d'état $\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \ \dots \ \tilde{k}_n]$ de sorte que

$$D_d(s) = s^n + \sum_{(i=0)}^{(n-1)} (\alpha_i s^i) = \prod_{(i=1)}^n (s - \lambda_i)$$

En développant le membre de droite de l'équation caractéristique en boucle fermée, l'on détermine, par identification, les coefficients α_i et il reste à déduire les paramètres du retour :

$$\tilde{k}_i = a_{(i-1)} - \alpha_{(i-1)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Remarque

Une telle loi de commande change les pôles du système mais ne modifie en rien ces zéros puisque seuls les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, sont modifiés.

3. Placement de pôles sur une réalisation quelconque

La technique présentée ci-dessus s'applique à une forme compagne horizontale. Lorsque la réalisation n'est pas canonique, il faut d'abord en obtenir une.

a) Obtention de la forme canonique à partir de la fonction de transfert

Une première solution consiste à déterminer la fonction de transfert telle que celle donnée dans l'équation suivante avec $\mathbf{a}_n = \mathbf{1}$ et de déduire la forme canonique de commande à partir des coefficients du numérateur et du dénominateur de cette fonction de transfert.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

b) Obtention de la forme canonique à partir d'une autre réalisation

Le passage d'une forme quelconque à une forme compagne horizontale consiste en un changement de base dans l'espace d'état. L'on prend généralement $m_n = B$ ce qui signifie que la matrice de passage est :

$$M = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n] \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} m_n = B \\ m_{n-1} = (A + \alpha_{n-1} I) B \\ m_{n-1} = (A^2 + \alpha_{n-1} A + \alpha_{n-2} I) B \\ \vdots \\ m_1 = (A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 I) B \end{array} \right.$$

L'on rappelle que la matrice M est telle que la réalisation canonique vérifie ($\tilde{A} = M^{-1} A M$, $\tilde{B} = M^{-1} B$, $\tilde{C} = C M$, $\tilde{D} = D$). Lorsque le système n'est pas commandable, la matrice M est singulière et le changement de base est impossible. Ainsi, l'algorithme présenté ci-après n'est pas applicable pour un système non commandable.

c) Algorithme de placement de pôles

L'on dispose d'un spectre désiré $\lambda_i, i=1, \dots, n$

- **Etape 1** : Vérification de la commandabilité. Si la paire (A;B) n'est pas commandable, le placement de pôles est génériquement impossible.
- **Etape 2** : Détermination du polynôme caractéristique désiré :

$$D_d(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

- **Etape 3**: Détermination du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$D(s) = \det (sI - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- **Etape 4** Calcul du retour d'état \tilde{K} dans la base canonique.
- **Etape 5** Calcul de la matrice de passage M.
- **Etape 6** Calcul du retour d'état dans la base initiale : $K = \tilde{K} M^{-1}$, puisque la commande s'exprime

$$u = \tilde{K} \tilde{x} = \tilde{K} M^{-1} x = Kx$$

Exemple

Soit le système de réalisation (A;B;C; 0)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 1] x \end{aligned}$$

auquel on souhaite assigner le pôle double -1.

Etape 1 : La matrice de commandabilité est :

$$Co = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Elle est de **rang 2** donc le système est commandable.

Etape 2 : Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est :

$$D_d(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Etape 3 : Le polynôme caractéristique en boucle ouverte est :

$$D(s) = \det(sI - A) = s^2 - 3s - 2 = s^2 + a_1 s + a_0$$

Etape 4 : Le retour d'état correspondant à la base canonique de commande est :

$$\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \ \tilde{k}_2] \text{ avec } \begin{cases} \tilde{k}_1 = a_0 - \alpha_0 = -2 - 1 = -3 \\ \tilde{k}_2 = a_1 - \alpha_1 = -3 - 2 = -5 \end{cases}$$

Etape 5 : La matrice de passage à la base canonique est :

$$M = [m_1 \ m_2] = [(A - 3I)B \ B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Le retour d'état dans la base initiale est :

$$K = \tilde{K} M^{-1} = [-3 \ -5] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-3 \ -8]$$

Epilogue : L'on peut vérifier que la matrice d'état en boucle fermée est :

$$A_f = A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

qui conduit bien au polynôme caractéristique

$$D(s) = \det(sI - A) = (s-1)(s+3) + 4 = s^2 + 2s + 1$$

et donc aux bonnes valeurs de pôles.

4. La méthode de comparaison direct

Si la localisation des pôles désirés (valeurs singulier) en boucle fermée sont :

$$s = \lambda_1, \quad s = \lambda_2, \dots, \quad s = \lambda_n$$

de l'équation $u = -Kx$, on a :

$$|sI - A + BK| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$$

$$|sI - A + BK| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$$

En résoudre l'équation caractéristique, on obtient les coefficients K_i du régulateur.

Exemple

Soit le système défini par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \ 1] x$$

Déterminer la loi de commande qui permet de placer les pôles du système avec un temps de réponse à 5% $T_r = 2$ sec et un facteur d'amortissement = 0.707.

L'équation désirée est :

$$D_d(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2; \text{ où: } \omega_n = \frac{4}{\xi T_r}$$

$$D_d(s) = s^2 + 4s + 8$$

$$|sI - A + BK| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \right|$$

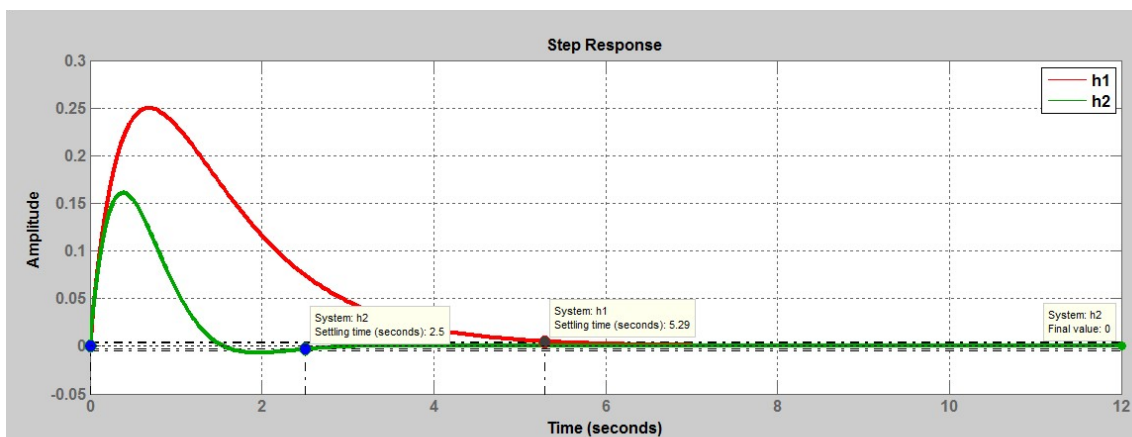
$$s^2 + (k_1 + 3)s + 2 - k_2 = s^2 + 4s + 8$$

Par comparaison on obtient :

$$k_2 + 3 = 4 \Rightarrow k_2 = 1$$

$$2 - k_1 = 8 \Rightarrow k_1 = -6$$

$$K = [-6 \ 1]$$



La réponse du système en BO (h1) et le système réglé par retour d'état BF (h2)

5. Formule d'Ackerman

Soit un système dont l'évolution est caractérisée par la paire (A; B). La matrice de commandabilité associée est notée M.

Alors, la matrice de gain :

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] C o^{-1} \phi(A) \quad \text{Où}$$

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I$$

Admet pour le polynôme caractéristique

$$s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

Le développement de l'équation caractéristique déduite de la dynamique désirée permet de déterminer les α_i et d'appliquer la formule pour obtenir la matrice de gain.

L'intérêt pratique de cette formule est à mettre en balance avec sa faible robustesse.

La validité de la formule peut en effet être mise à mal par un mauvais conditionnement de la matrice de commandabilité du système. Ainsi, pour un système d'ordre élevé, la formule d'Ackerman est inapplicable en raison de la précision numérique nécessaire.

Exemple

Soit le système de réalisation (A;B;C; 0)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

auquel on souhaite assigner le pôle double -2.

La matrice de commandabilité est :

$$Co = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(Co) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{système est commandable}$$

L'équation caractéristique du système en BO est :

$$D(s) = \det(sI - A) = s^2 - 4s + 0 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0;$$

L'équation caractéristique désirée du système en BF est:

$$(s+2)(s+2) = 0$$

$$s^2 + 4s + 4 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

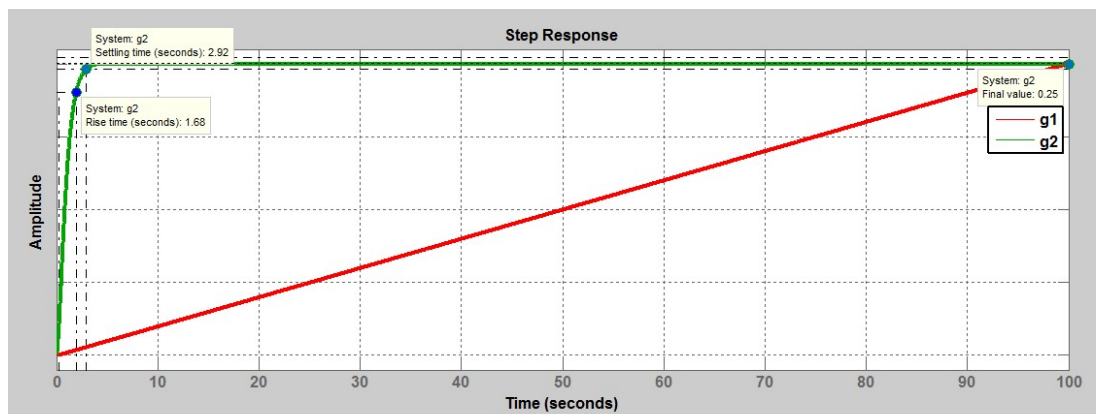
Nous appliquons la formule d'Ackerman :

$$K = [0 \ 1] C o^{-1} \phi(A)$$

$$C_o^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi(A) &= A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I \\ \phi(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \phi(A) &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ K &= [4 \quad 0] \end{aligned}$$



La réponse du système en BO (g1) et BF (g2), réglé par un retour d'état

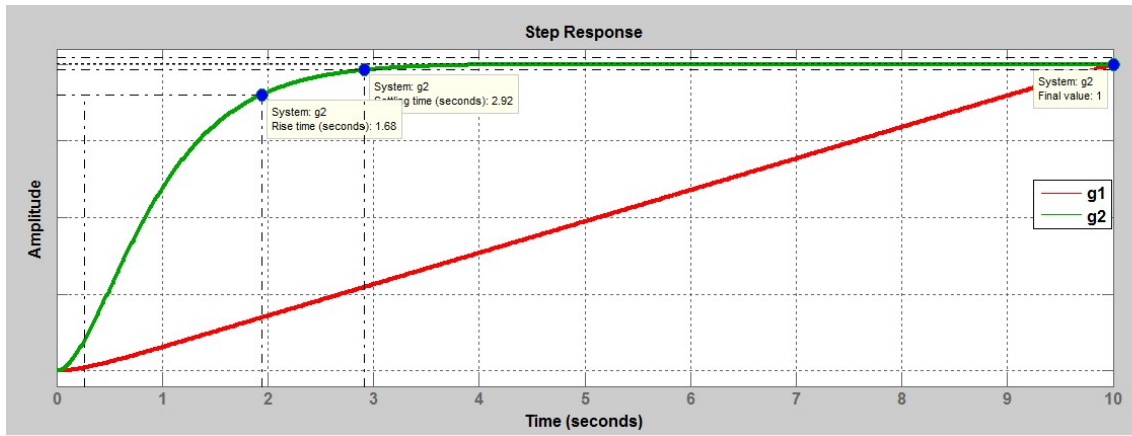
On remarque que nous avons modifié le comportement en régime transitoire par la modification des pôles du système. Cependant il existe un écart très important en régime permanent.

On constate que cette méthode permet de régler la dynamique du système (régime permanent) par le placement des pôles. Par contre cette technique ne permet pas de régler le problème de la précision. Nous ne pouvons pas de choisir le régime permanent du système en boucle fermée par le choix de K. Nous proposons une structure de commande permettant d'annuler l'erreur statique.

$$u(t) = -Kx(t) + Ny_{ref}(t)$$

Où N est un gain matricielle permettant de régler le gain statique du système en boucle fermée.

On calcul N = 4 et on obtient les courbes suivantes



Réponse du système réglé par un retour d'état et un compensateur

C. Détermination de la matrice de réaction d'état dans le cas des systèmes multivariables

Dans le cas des systèmes monovariables, la matrice de retour d'état est une matrice ligne de dimension n égale au degré du polynôme caractéristique du système (qui est égal à la dimension du vecteur d'état). Il existe donc un seul choix possible des n coefficients \mathbf{K}_i de la matrice de réaction d'état.

Dans le cas de systèmes multivariables, l'équation caractéristique est toujours d'un ordre n égal à la dimension du vecteur d'état mais la matrice de retour d'état est définie par $m \times n$ coefficients \mathbf{K}_{ij} reliés entre eux par n relations non linéaires obtenues par exemple en identifiant termes à termes les coefficients du polynôme caractéristique désiré :

$$D_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

et ceux de

$$\det(sI - A + BK)$$

Il existe donc une infinité de choix possibles des $m \times n$ coefficients \mathbf{K}_{ij} de la matrice \mathbf{K} de retour d'état et donc une infinité de structures de commandes possibles.

L'unicité du choix s'obtient par l'introduction de relations supplémentaires résultant de techniques de commande particulières .

Chapitre 04 : Synthèse des observateurs d'état



VI

La plupart du temps, soit par impossibilité physique d'introduire un capteur, soit parce que l'information délivrée par un capteur est trop bruitée pour pouvoir être exploitée, soit pour des questions de coût, . . . on ne peut pas mesurer tous les états.

Nous allons voir dans ce chapitre comment on peut, à partir de mesures faites sur l'entrée et la sortie du processus, reconstruire (on dit aussi estimer) le vecteur d'état

x , noté alors \hat{x} . Le sous-système qui réalise cette reconstruction est appelé un reconstruteur d'état (ou observateur).

A. Observateur d'état d'ordre plein

L'équation $\mathbf{U} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ exige que toutes les variables d'état doivent être mesurées. Dans la pratique, cette exigence ne peut pas se produire pour un nombre de raisons, y compris le coût, ou parce que l'état peut ne pas être physiquement mesurable. Dans ces conditions, il devient nécessaire, si un retour complet de l'état est nécessaire d'observer ou d'estimer les variables d'état. Un observateur d'état d'ordre complet estime toutes les variables d'état d'un système. Si, pourtant, quelque variable d'état est mesurée, il peut être seulement nécessaire d'estimer quelques-uns entre eux. C'est ce qu'on appelle un observateur d'état d'ordre réduit. Tous les observateurs utilisent quelque modèle sous forme mathématique pour produire l'état estimé \hat{x} à partir du vecteur d'état actuel. La figure suivante montre l'organisation d'un observateur d'ordre complet.

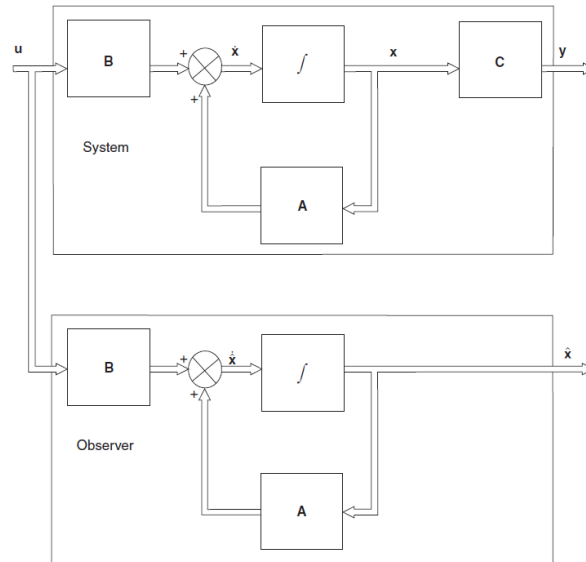


Fig.4.1. Un simple observateur d'état d'ordre complet

La dynamique de l'observateur ne sera jamais exactement égale à la dynamique du système, cette disposition en boucle ouverte signifie que x et \hat{x} divergeront progressivement. Si, pourtant, un vecteur de sortie \hat{y} est estimé et soustrait de vecteur de sortie actuel y , la différence peut être utilisée dans la boucle fermée, pour modifier la dynamique de l'observateur, alors l'erreur de sortie $(y - \hat{y})$ est minimisée. Cette organisation d'observateur appelle Observateur de Luenberger (Fig 4.1).

Soit le système de la figure 4.2 est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Le vecteur d'état estimé est donnée par :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x})$$

Où : K_e est la matrice de gain de l'observateur

Si on soustrais $\hat{x} - \hat{x}$ nous obtenons le vecteur d'erreur

$$\dot{e} = (A - K_e C)e$$

De l'équation du vecteur d'état estimé, l'équation de l'observateur d'état d'ordre complet est :

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C)\hat{x} + Bu + K_e y$$

Ainsi à partir de l'équation de la dérivé d'erreur, le comportement dynamique du vecteur d'erreur dépend des valeurs propres de $(A - K_e C)$. Comme pour plusieurs systèmes de mesure, ces valeurs propres devraient permettre à la réponse transitoire de l'observateur d'être plus rapide que le système lui-même, sauf si le filtrage est nécessaire.

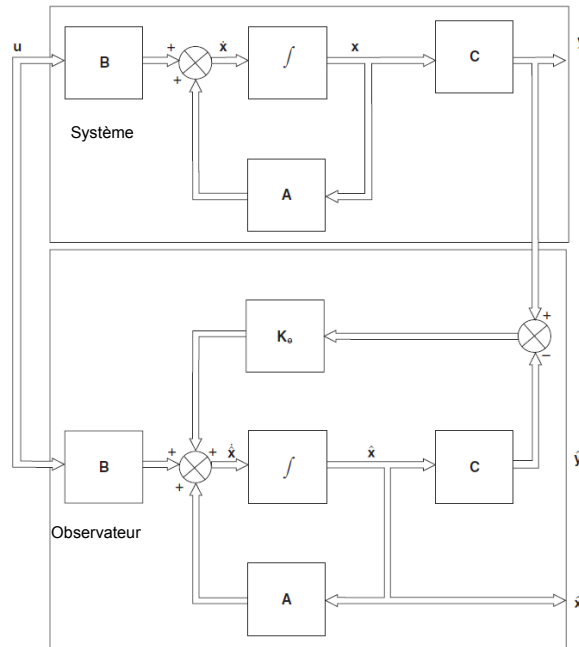


Fig.4.2. Observateur de Luenberger d'ordre complet

Le même problème de conception des régulateurs est posé dans la conception des observateurs, peut être les mêmes méthodes sont utilisés

1. La méthode de comparaison direct

Si la localisation désirés des pôles en boucle fermée de l'observateur sont :

$$s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$$

Alors :

$$|sI - A + K_e C| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n)$$

$$|sI - A + K_e C| = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Exemple

Un système est décrit par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

Construit un observateur d'ordre plein, avec $\omega_n = 10 \text{ rad/sec}$ et $\xi = 0,5$

La première étape consiste à vérifier si le système est observable :

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ AC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(O) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(O) = n = 2$$

Le système est donc complètement observable.

Puis les valeurs propres en boucle ouverte:

$$|sI - A| = s^2 + 3s + 2 = s^2 + a_1s + a_0$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3$$

Alors, les valeurs propre en boucle ouverte :

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow (s+1)(s+2) = 0$$

$$s = -1, \quad s = -2$$

Puis on considère l'équation caractéristique désirée :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s^2 + 10s + 100 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_0 = 100, \quad \alpha_1 = 10$$

Alors les valeurs propre désiré sont les solutions de l'équation caractéristique désiré :

$$\mu_1 = -5 + j8,66, \quad \mu_2 = -5 - j8,66$$

Pour comparer directement, on considère maintenant l'équation caractéristique :

$$|sI - A + K_e C| = s^2 + \alpha_1s + \alpha_0$$

Qui doit être égale à l'équation caractéristique désirée :

$$\left[\begin{array}{cc} s & 0 \\ 0 & s \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} k_{e1} \\ k_{e2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] = s^2 + 10s + 100$$

$$\left[\begin{array}{cc} s+k_{e1} & -1 \\ 2+k_{e2} & s+3 \end{array} \right] = s^2 + 10s + 100$$

$$s^2 + (3+k_{e1})s + (3k_{e1} + 2 + k_{e2}) = s^2 + 10s + 100$$

Par identification, on en déduit les valeurs des composantes de la matrice de gain de l'observateur :

$$(3+k_{e1}) = 10 \Rightarrow k_{e1} = 7$$

$$(3k_{e1} + 2 + k_{e2}) = 100$$

$$k_{e2} = 100 - 2 - 21 = 77$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 7 \\ 77 \end{bmatrix}$$

Donc l'observateur sera donné par l'équation suivante :

$$\hat{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -79 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 7 \\ 77 \end{bmatrix} y$$

2. Méthode de la forme canonique observable

De la fonction de transfert généralisé, la forme observable de l'équation d'état peut être écrite comme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] x$$

Pour obtenir la matrice de gain de l'observateur, nous utilisons les mêmes méthodes qui ont été utilisées dans l'équation de la matrice du gain du retour d'état.

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} = (WN^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad Q = (WN^T)^{-1}$$

Avec :

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T]$$

Exemple

On considère le système de l'exemple précédent :

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = Q \begin{bmatrix} 100 - 2 \\ 10 - 3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 98 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$Q = (WN^T)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$WN^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = (WN^T)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 98 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 77 \end{bmatrix}$$

3. La méthode d'Ackerman

Comme dans la conception du contrôleur d'état, c'est seulement applicable pour les systèmes où $u(t)$ et $y(t)$ sont des quantités scalaires. Il peut être utilisé pour calculer la matrice de gain de l'observateur comme suit.

$$K_e = \phi(A)N^{-1} [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$$

$$K_e = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I$$

Exemple

On considère le même exemple utilisé dans les deux méthodes précédentes

$$K_e = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = (A^2 + \alpha_1A + \alpha_0I) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -20 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 98 & 7 \\ 14 & 77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 7 \\ 77 \end{bmatrix}$$

B. Observateur d'ordre minimal

Il s'agit l'a d'un observateur dont le modèle d'état correspond à un vecteur d'état de dimension minimale. L'on peut démontrer que pour observer convenablement un vecteur d'état de dimension n , la dimension du vecteur d'état de l'observateur doit être au minimum de $(n - 1)$. Ceci conduit à un modèle d'observateur de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_b &= A_{bb}x_b + A_{ba}x_a + B_b u \\ \dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u &= A_{ab}x_b\end{aligned}$$

La conception de l'observateur d'ordre minimum peut être effectuée comme suit: Premièrement, notez que l'équation d'observateur pour l'observateur d'ordre complet :

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C)\hat{x} + Bu + K_e y$$

Puis faire une substitution nous obtenons :

$$\dot{\hat{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + K_e(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u)$$

où la matrice du gain de l'observateur d'état **Ke** est une matrice **(n-1) x 1**. Dans l'équation précédente, notez que pour estimer \hat{x}_b , nous avons besoin de la dérivée de x_a . Cela présente une difficulté, car la différenciation amplifie le bruit. Si $x_a (= y)$ est bruité, l'utilisation de \dot{x}_a est inacceptable.

Pour éviter cette difficulté, nous éliminons \dot{x}_a de la manière suivante. Réécrivez d'abord l'équation comme :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b + (A_{ba} - K_e A_{aa})y + (B_b - K_e B_a)u \\ \dot{\hat{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab})(\hat{x}_b - K_e y) + [(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}]y + (B_b - K_e B_a)u\end{aligned}$$

Définir:

$$\begin{aligned}x_b - K_e y &= x_b - K_e x_a = \eta \\ \hat{x}_b - K_e y &= \hat{x}_b - K_e x_a = \hat{\eta}\end{aligned}$$

Alors l'équation précédente devient :

$$\dot{\hat{\eta}} = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{\eta} + [(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}]y + (B_b - K_e B_a)u$$

Définir :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A_{bb} - K_e A_{ab} \\ \tilde{B} &= \tilde{K}_e + A_{ba} - K_e A_{aa} \\ \tilde{F} &= B_b - K_e B_a\end{aligned}$$

Alors l'équation ci-dessus devient :

$$\dot{\hat{\eta}} = \tilde{A}\hat{\eta} + \tilde{B}y + \tilde{F}u$$

L'ensemble des deux équations $x_b - K_e y = x_b - K_e x_a = \eta$ et $\hat{\eta} = \tilde{A} \hat{\eta} + \tilde{B} y + \tilde{F} u$ définissent l'observateur d'ordre minimal.

Comme :

$$y = [1 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ x_b \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix} [\hat{x}_b - K_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ K_e y \end{bmatrix}$$

où 0 est un vecteur ligne constitué de (n-1) zéros, si nous définissons

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ K_e y \end{bmatrix}$$

Alors nous pouvons écrire \hat{x} en termes de y comme suit :

$$\hat{x} = \tilde{C} \hat{\eta} + \tilde{D} y$$

La figure suivante montre le schéma bloc d'un retour d'état par via un observateur d'ordre minimal.

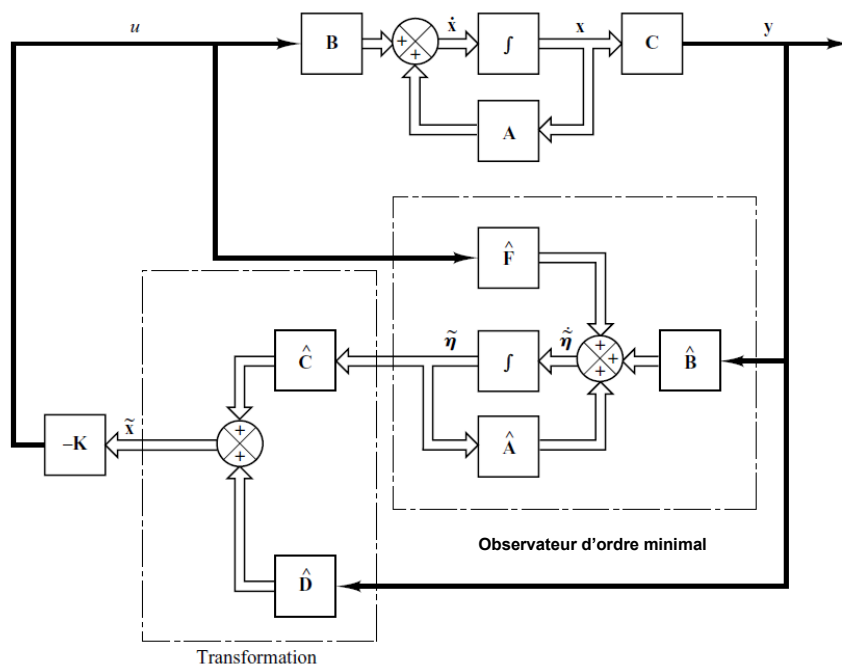


Fig.4.3. Système observé avec observateur d'ordre minimal

L'équation de l'erreur est

$$e = \hat{x}_b - x_b = \eta - \hat{\eta}$$

L'équation d'erreur de l'observateur d'ordre minimal est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab}) e$$

La dynamique d'erreur peut être choisie comme souhaité en suivant la technique développée pour l'observateur d'ordre complet, à condition que le rang de la matrice soit **n-1**. Il s'agit de la condition d'observabilité complète applicable à l'observateur minimal .

$$\begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} A_{bb} \\ \vdots \\ A_{ab} A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de l'observateur d'ordre minimal est obtenue à partir de l'équation d'erreur de l'observateur d'ordre minimal comme suit:

$$\begin{aligned} |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_1 s + \hat{\alpha}_0 \end{aligned}$$

Où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont les valeurs propres désirées pour l'observateur d'ordre minimal. La matrice du gain de l'observateur **Ke** peut être déterminée en choisissant d'abord les valeurs propres souhaitées pour l'observateur d'ordre minimal.

Comme dans la conception de l'observateur d'ordre plein. Pour calculer la matrice de gain de l'observateur d'ordre minimal nous utilisons les mêmes méthodes qui utilise pour l'observateur d'ordre plein, seulement avec quelque modifications comme suit:

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 - \hat{a}_0 \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \end{bmatrix} = (WN^T)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 - \hat{a}_0 \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \end{bmatrix}, \quad Q = (WN^T)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \cdots & \hat{a}_{n-2} & 1 \\ \hat{a}_2 & \hat{a}_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{a}_{n-2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = [A_{ab}^T : A_{bb}^T A_{ab}^T : \cdots : (A_{bb}^T)^{n-2} A_{ab}^T]$$

$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n-2}$, sont les coefficients de l'équation caractéristique.

$$|sI - A_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0$$

Également, si la formule d'Ackermann doit être utilisée, elle doit être modifiée comme suit :

$$K_e = \phi(A_{bb}) N^{-1} [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$$

$$K_e = \phi(A_{bb}) \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} A_{bb} \\ \vdots \\ A_{ab} A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_{n-2} A_{bb}^{n-2} + \dots + \hat{\alpha}_2 A_{bb} + \hat{\alpha}_1 I$$

Exemple

Soit le système suivant :

$$C(s)H(s) = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

La représentation d'état du système est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

La synthèse de l'observateur d'ordre minimal avec $\omega_n = 45.16 \text{ rad/sec}$ et $\zeta = 0,7$:

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}, \quad A_{ab} = [1 \ 0]$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} [1 \ 0] \right| = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} & 0 \\ k_{e2} & 0 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 632s + 2039,4$$

$$\left| \begin{bmatrix} s+k_{e1} & -1 \\ 10+k_{e2} & s+7 \end{bmatrix} \right| = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$s^2 + (7+k_{e1})s + (7k_{e1} + 10 + k_{e2}) = s^2 + 632s + 2039,4$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 56,2 \\ 1636 \end{bmatrix}$$

C. Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un observateur optimal dont le principe est illustré dans la figure suivante. Le principe consiste à minimiser en temps réel les erreurs entre les sorties estimées et mesurées, au moyen d'une contre réaction qui ajuste les variables « incertaines » du modèle utilisé. Par un tel ajustement du modèle, il est possible d'observer des paramètres physiques du système non accessibles à la mesure. La correction est pondérée par un vecteur gain K qui permet de fixer la dynamique et les performances du filtre.

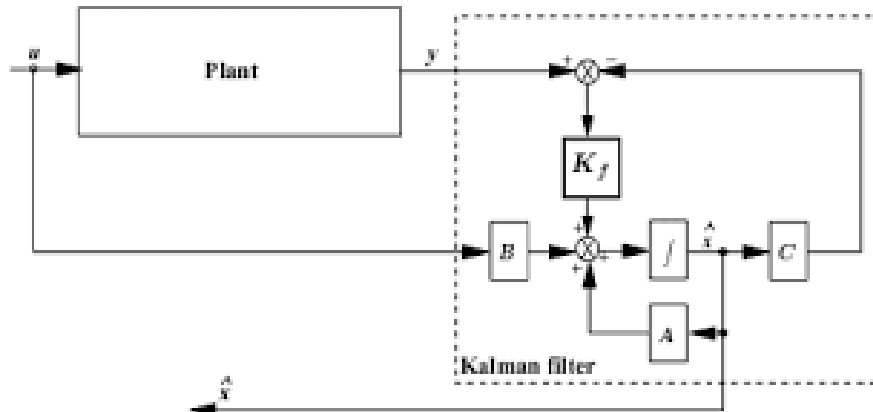


Fig. 4.4. Schéma fonctionnel du Filtre de Kalman

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + V(k) \\ y(k+1) = Cx(k) + Du(k) + W(k) \end{cases}$$

Dans ce cas, le gain est calculé à chaque itération, à partir des prédictions d'erreur, et des incertitudes (bruits) sur les états et les mesures, comparativement à l'observateur de Luenberger où le gain K_e est calculé par un placement de pôle décidé par l'utilisateur.

Le réglage de la dynamique du filtre repose donc sur l'initialisation des matrices de bruits d'état Q et de mesure R ainsi qu'au travers de l'initialisation de la matrice de covariance d'erreur supposée P .

Les estimations du filtre de Kalman reposent avant tout sur une modélisation de la dynamique du système observé. Cette modélisation doit tenir compte non seulement de la dynamique propre du système, mais également des bruits (bruits ou incertitudes) sur les états et mesures. Considérons la représentation d'état d'un système linéaire discrétisé.

Où A , B , C et D représentent respectivement les matrices de transition, de commande de sortie et de lien entre commande et sortie, x est le vecteur d'état, u le vecteur de commande, y le vecteur de sortie, $V(k)$ le vecteur des bruits d'état et $W(k)$ le vecteur des bruits de mesure. Si le modèle est non linéaire, une linéarisation est effectuée à chaque itération de manière à obtenir les matrices équivalentes de transition et de sortie. Ces bruits sont supposés être centrés, blancs, gaussiens et décorrélés des états estimés. Les matrices de covariances de bruits sont définies telles que :

$$\begin{aligned} Q &= E\{V(k)V^T(k)\} \\ R &= E\{W(k)W^T(k)\} \end{aligned}$$

Références



- [1] Yves Granjon. Automatique : Système linéaires, non linéaires, à temps continue, à temps discret, représentation d'état. Cours et exercices corrigés. 2ème Édition. 2001, 2010. Parais, France.
- [2] Patrick Prouvost. Automatique : Contrôle et régulation. Cours et exercices corrigé. IUT 1ère cycle /Licence. France
- [3] Jean Pierre CORRIOU. Commande des procédés. 3ème Edition. 2012. Parais, France
- [4] Katsuhiko Ogata. Modern control engineering. 5 ème Edition. 2010. New jersey, USA
- [5] Roland S. Burns. Advanced control engeneering. 2001. Oxford, UK
- [6] Ahmed Chemouri. Cours d'Automatique des systèmes Actionnés Partie 2 : Analyse et commande en espace d'état. 2013-2014. Ecole polytechnique universitaire de Montpellier. Département de Mécanique et Interaction.
- [7] KENDOUCI KHEDIDJA. ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRE CONTINUS DANS L'ESPACE D'ÉTAT. USTO, Oran, Algérie
- [8] Ajit K. Mandal. Introduction To control Engineering, Modeling, Analysis and Designe. New age international (P) Limited, Publishers.