وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كليـــــــة العلـــــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2023.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Espace de Sobolev fractionnaire unidimensionnel et ses applications

Option : Analyse numérique des EDP .

Par :

1. *Boudoucha Rihana.*
2. *Mecibah Loubna.*

Encadreur : Slimani Kamel. — **M.C.A U. SKIKDA**

Co-Encadreur: Lakhal Hakim. — **M.C.A U. SKIKDA**

Devant le jury :

Président : Maouni Massoud. — **Prof U. SKIKDA**

Examinateur: *Hamdi Zakaria.* — **M.C.B U. SKIKDA**

Année : 2022/2023


بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la force, la volonté, la santé, la patience et le courage qu'il nous à donné pour accomplir notre travail.

Nous tiendrions à exprimer nos profondes gratitudes, nos sincères et chaleureux remerciement, à nos encadreur

Dr. Slimani Kamel.

Pour leur confiance qu'il nous a accordée en acceptant d'encadrer ce travail et pour sa patience, et aussi pour ses bénéfiques conseils et explication dans cette étude.

Nos remerciements Monsieur

Dr. Lakhal Hakim.

Pour d'avoir accepté d'évaluer notre travail, pour l'intérêt qu'elle a porté notre mémoire.

Nous remercions également Monsieur le président

Prof. Maouni Massoud.

De nous avoir fait l'honneur de présider ce jury.
De même, nous remercions Monsieur l'examinateur

Dr.Hamdi Zakaria.

D'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Nos sincères remerciements à l'ensemble des enseignants de notre département.

Enfin, Nos remerciement notre familles.

Rihana & Loubna

Dédicas

Du profond de mon cœur, je dédie ce modeste travail à :

Ma très cher mère Bousselsel Fatima

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur. Qu'Allah nous procure santé et longue vie.

Mon très cher père Mouloud

Mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie. Celui qui s'est tout jour, sacrifié pour me voir réussir, qui ma toujours pausé et motive dans mes études.

Mes belles sœurs: Asma, Meriem, Imane et leurs maris.

Sans oublier leurs enfants source de joie et de bonheur: Sirej Eldin, Yousef Rasim, Sidra Elmontaha .

Chère amie avant d'être binôme: Rihana.

Mes fidèles amies: Ahlem, Iklese.

A tout la famille Mecibah et la famille Bousselsel.

Loubna

Dédicas

Du profond de mon cœur, je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère Louiza

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur. Qu'Allah nous procure santé et longue vie.

Mon très chèr père Djamel

Mon exemple éternel , mon soutien moral et source de joie. Celui qui s'est tout jour, sacrifié pour me voir réussir, qui ma toujours pausé et motive dans mes études.

Mes sœurs :Khaoula, Maymouna, et leurs maris: Moussa, Houcine

et ma petite sœur: Takoua.

Mes frères : Anes, Soheyb et sa marie Selma.

Sans oublier leurs enfants :Rahma ,Maouadda, Ilef, Okba, Tamim et Zaid.

Chère amie avant d'être binôme :Loubna.

Mes fidèles amies: Warda, Ahlem, kawther, Sameh, Chaima et Asma .

Et sans oublier ma cousine : Chaima

et mon cousin: Ahmed.

A tout ma famille Boudoucha et Belksier qui m'a toujours soutenue.

A tous mes collègues et amis.

Rihana

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود الحلول الضعيفة لمعادلة تفاضلية كسرية بمفهوم المشتق الكسري لريمان ليوفيل في فضاء صوبوليف الكسري ذات البعد 1 وذلك باستعمال طريقة المر الجبلي ، مبدأ إكلند.

كلمات مفتاحية: فضاءات صوبوليف، مبدأ إكلند، نظرية المر الجبلي، النقطة الحرجة .

Abstract

The object of this work is the study of the existence of weak solutions for fractional ordinary differential equations in the sense of derivate Riemann-Liouville in the space of fractional sobolev in dimension one, using the Mountain-pass method, Ekeland principle.

Keywords: Sobolev space, Ekeland principle, Mountain-pass theorem, critical point.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'existence des solutions faibles pour les équations différentielles fractionnaires au sens de dérivée de Riemann-Liouville dans l'espace de sobolev fractionnaire en dimension un, en utilisant la méthode de passe-Montagne, principe d'Ekeland.

Mots clés: Espace de Sobolev, principe d' Ekeland, théorème de passe-Montagne,point critique.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une champ d'étude mathématiques qui sort du traditionnel définitions des opérateurs intégrales et dérivées : définir l'intégrale fractionnaire comme simple généralisation de l'intégrale d'ordre entier, et la dérivée fractionnaire comme l'opération inverse, c'est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique connu aujourd'hui . On croit généralement que le concept de calcul fractionnel découle d'une question posée en 1695 par le marquis de l'Hopital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716),qui cherchait à comprendre le sens de Leibniz (actuellement populaire) notation $\frac{d^n x}{dy}$ pour la dérivée de l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quand $n = \frac{1}{2}$ (Et qu'est –ce qui se passerait si $n = \frac{1}{2}$.) Dans sa réponse en date du 30 septembre 1695, Leibniz écrivit à L'Hopital comme suit :"... C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, des conséquences utiles seront tirées... ." Une mention ultérieure de dérivés fractionnaire a été fait, par(par exemple) Euler en 1730,Lagrange en 1772,Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer 1859, Holmgren en 1865, Griinwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888,Krug en 1890 et Weyl en 1917.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions générales des espaces fonctionnels, espace de Lebesgue L^p, l'espace des fonctions spéciales Gamma et Beta, fonction de Mittag-Leffler. Nous terminons le chapitre par quelques théorèmes :Lax-Milgram , Passe Montagne.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé l'intégrale de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo ,et quelque propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous présentons l'espace de Sobolov fractionnaire et ses propriétés.

Le dèrniér chapitre est consacré à la résolution du problème fractionnaire aux limites non linéaires Voir[5].

Chapitre 1

Notions générales et définitions

Dans ce chapitre nous mentionnons les notations de base, les définitions et les espaces que nous utilisons dans le calcul de dérivée fractionnaire.

1.1 Espaces fonctionnels

Les espaces L^p

Définition 1.1. *voir [6] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

1. *On définit*

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f; \textit{est mesurable et} \int_\Omega |f|dx < \infty\}.$$

2. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ on définit*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f; \textit{est mesurable et}\, |f|^p \in L^1(\Omega).\}$$

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^n$, on le muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. *Si $p = \infty$ on définit l'espace*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ est mesurable et} \exists\, C > 0 \textit{ telle que } |f(x)| \leqslant C,\ p.p \textit{ sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C\ p.p\ \ sur\ \Omega\}.$$

4. *Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$< f, g >= \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

5. *L^1_{loc} désigne l'ensemble des fonction localement intégrable sur Ω, donc*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L^1(K) \textit{ pour tout compact } K \textit{ de } \Omega\}.$$

Proposition 1.1. *voir [6]*

- ***Inégalité de Young***

$$\forall a,b \geq 0 \quad on\ a:\ ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

- ***Inégalité de Hölder*** *Soient* $f \in L^p(\Omega)$, *et* $g \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 < p \leqslant \infty$, *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$$

- ***Inégalité de Chauchy Schwartz*** *Soient* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $g \in L^2(\Omega)$, *alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \, \|g\|_2$$

- ***Inégalité de Minkowsk*** *Soient* $f, g \in L^p(\Omega)$, *avec* $p \geq 1$ *alors*

$$f + g \in L^p(\Omega) \quad et \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposition 1.2. *voir[6]*
$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.
$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est un espace séparable pour tout* $1 \leq p < +\infty$.
$(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est un espace réflexif pour tout* $1 < p < \infty$.

Théorème 1.1. ***(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)*** *voir[6]*
Soit f_n *une suite croissante de fonctions de* L^1 *telle que* $\sup_n \int f_n < \infty$. *Alors* $f_n(x)$ *converge p.p. sur* Ω *vers une limite finie notée* $f(x)$ *;*
de plus $f \in L^1$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Théorème 1.2. ***(Théorème de Convergence dominée de Lebesgue)*** *voir[6]*
Soit $(f_n)_n$ *une suite des fonctions de* $L^1(\Omega)$ *qui converge presque par tout vers une fonction mesurable* f. *On suppose qu'il existe* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que, pour tout* $n \geq 1$ *on ait :* $|f_n| \leq g$ *p.p. sur* Ω, *alors*

$$f \in L^1(\Omega) \ et \ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0.$$

Théorème 1.3. ***(Théorème de Convergence dominée-inverse)*** *voir [6]*
On suppose $1 \leq p \leq +\infty$. *Soient* $(f_n)_{n\in N}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$ *tels que* $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *Alors il existe une sous-suite extraite* $(f_{n_k})_{k\in N}$ *et* $h \in L^p(\Omega)$ *tq :*

- $f_{n_k}(x) \to f(x)$, *presque par tout sur* Ω.
- $| f_{n_k}(x) | \leqslant h(x) \ \ \forall k$ *et presque par tout sur* Ω .

Lemme 1.1. ***(Lemme de Fatou)*** *voir[6]*
Soit f_n une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

1. $\forall n, f_n(x) \geq 0 \quad p.p \text{ sur } \ \Omega.$
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)dx < +\infty.$

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$, alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega f(x)dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Théorème 1.4 (**Fubini**). *Soit f une fonction sommable de deux variables sur le produit des espaces mesurables (X, μ) et (Y, υ). On a alors les assertions suivantes*

1. *Pour μ presque tous les $x \in X$, la fonction. $f(x, y)$ est sommable sur Y et son intégrale sur Y est une fonction sommable sur X.*
2. *Pour υ presque tous les $y \in Y$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur X et son intégrale sur X est une fonction sommable sur Y .*
3. *On a*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\upsilon)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\upsilon(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\upsilon(y).$$

Théorème 1.5. ***Théorème d'Arzela-Ascoli :*** *voir [5]*
Soit E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque. Une partie M de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :

1. *M est équicontinue sur E.*
2. *Pour tout $x \in E$, l'espace $M(x)$ défini par :*

$$M(x) = \{f(x) \in M\}$$

est relativement compact dans F .

Espace $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et quelques notions

1. Soit $n \in \mathbb{N}, I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ l'espace des fonctions n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue noté $\mathcal{C}^n(I)$ et définie par

$$\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \left\{f : I \to \mathbb{R}; f, f', ..., f^{(n)} \text{sont existes et continues}\right\}.$$

2. L'application

$$N : \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longmapsto N(f) = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty., \quad \|f^{(k)}\|_\infty = \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)|$$

existe et continue sur $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème 1.6. *$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|$*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty,$$

est un espace de Banach.

Définition 1.2 (**Lipschitzienne**). *Soient G une partie de $\mathbb{R}^2, f : G \to \mathbb{R}$ une application et L un nombre réel positif. On dit que f est lipschitzienne par rapport à y si*

$$\forall (y_1, y_2) \in G, \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Oú L est appelée la constante de Lipschitz. Si $0 \leq L < 1$, On dit que f est contractante par rapport à y.

Définition 1.3 (**Convergence uniforme**). *On dit que la suite des fonctions f_n définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ converge uniformément vers la fonction f, quand n tendant vers $+\infty$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \ \forall n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.4 (**Fonction bornée**). *Une fonction $f : G \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée si*

$$\exists M > 0, \forall t \in G : |f(t)| \leq M.$$

Définition 1.5 (**Fonction convexe**). *La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in I \subset \mathbb{R}$ et pour $t \in [0,\ 1]$ on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.6. *voir [3, 7] Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.f est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout partition $\{]a_k, b_k[\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$.si $\sum_{i=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, alors*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

L'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ noté par $AC([a, b])$

Définition 1.7 (voir [1]). *Pour $n \in \mathbb{N}$,on désigne par $AC^n[a, b]$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées continues sur $[a, b]$ jusque'à l'ordre $(n-1)$ telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$, c'est-à-dire*

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \ \ \textit{(n-1) dérivable et } f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \right\}.$$

En particulier $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

Définition 1.8 (**Fonction à variation bornée** voir [7]). *Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dit à variation bornée,s'il existe une constant c positif telle que, pour tout subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$,on ait*

$$\sum_{k-1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c.$$

Remarque 1.1. *La quantité*

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|; N \geq 2, a = x_1 < ... < x_N = b \right\},$$

s'appelle la variation totale de fonction sur $[a, b]$.

Lemme 1.2 (voir [7]).
Si f une fonction monotone de $[a,b]$, dans $\mathbb{R}$, alors elle à variation bornée.

Preuve. *Il est clair qu'une fonction monotone est à variation bornée, car on peut toujours enlever les valeurs absolues lors du calcul de la variation totale, et celle-ci est égale à $|f(b)-f(a)|$..*

Soit $\bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1},x_k]$ une partition de $[a,b]$ On suppose que f est croissante, de plus $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ ça implique $f(x_k)-f(x_{k-1})<f(b)-f(b)$ Donc :

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|<|f(b)-f(a)|,$$

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=f(x_n)-f(x_0)\leq|f(b)-f(a)|.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq|f(b)-f(a)|.$$

✐.

Proposition 1.3 (voir [1]).

- *Si f est absolument continue alors elle est uniformément continue donc continue. La réciproque est,en général,fausse.*
- *La somme de deux fonction absolument continue et le produit d'une telle fonction par un nombre sont absolument continue.*
- *Tout fonction absolument continue est à variation bornée.*
- *Tout fonction absolument continue est la différence de deux fonction absolument continue croissantes.*

Caractérisation d' espace des fonctions $AC^n([a,b])$ et $AC([a,b])$

Théorème 1.7 (voir [1]). *Soit $f\in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ est absolument continue.*

- *$(AC([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_{AC})$ est une espace de Banach,avec*

$$\|f\|_{AC}=|f(a)|+\int_a^b|f'(s)|ds.$$

- $f\in AC([a,b],\mathbb{R})\Longleftrightarrow f(x)=f(a)+\int_a^x f'(s)ds,\ f'\in L^1([a,b],\mathbb{R}).$
- $f\in AC^n([a,b],\mathbb{R})\Longleftrightarrow f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x f^{(n)}(s)ds.$

1.2 Les fonctions spéciales

La Fonction Gamma $\Gamma(.)$

Définition 1.9. *voir [7] La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivant*

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt\quad z\in\mathbb{C},Re(z)>0.$$

quand la partie réelle de z est strictement positive $Re(z) > 0$.

propriété 1.1. *voir[7]*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \quad pour \quad n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.1.

1. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{-1}{2}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$.
   (Posant le changement de variable $t = r^2$)

La Fonction Bêta

Définition 1.10. *voir [7] La fonction Bêta On définie par l'intégral :*
Pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ avec $Re(z) > 0$, $Re(w) > 0$ on a

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

propriété 1.2. *voir [7] Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, avec $Re(z) > 0, Re(w) > 0$, alors*

1. $B(z, w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.
2. $B(z, w) = B(w, z)$.

Fonction de Mittage-Leffler

Définition 1.11. *voir [1] La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonction suivant :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C}.$$

La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Proposition 1.4. *voir [1]*

1. $E_{1,1}(z) = e^z$.
2. $E_{1,2}(z) = \dfrac{e^x - 1}{z}$.
3. $E_{1,3}(z) = \dfrac{e^z - z - 1}{z^2}$.
4. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$.
5. $E_{2,2}(z^2) = \dfrac{\sinh(z)}{2}$.

1.3 Théorème de Lax-Milgram

Soient V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $(./.)$ de norme associée noté $\|.\|$ et $a(.,.)$ une forme bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui est :

1. Continue, ce qui équivalent : dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(u, v) \in V^2$, on a $|a(u, v)| < C\|u\|_V\|v\|_V$
2. Coercive sur V, c'est-á-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in V$, $|a(u, u)| \geq \alpha\|u\|_V^2$.

Et soit L une forme linéaire continue sur V. Alors il existe une solution unique telle que $a(u, v) = L(v)$ soit vérifiée pour tout v de V,

$$\begin{cases} \exists! u \in V, \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

1.4 Fonction semi-continue inférieurement

Définition 1.12. *voir[6]*
Soit X un espace topologique,une fonction $f : X \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $x_0 \in X$ si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}; \lambda < f(x_0)$ il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V : f(x) \geq \lambda$.
f est s.c.i sur X si elle est en tout $x \in X$.
Si f est s.c.i en $x_0 \in X$ alors $\exists V_{x_0}; \forall x \in V : f(x) \geq f(x_0)$ il suffit de prendre $\lambda = f(x_0) - \epsilon, \epsilon > 0$.

Proposition 1.5. *voir[6]*

1. *Si f est continue alors elle est s.c.i, la réciproque est fausse.*
2. *f est s.c.i. et si $x_n \longrightarrow x$, si et seulement si $\liminf f(x_n) \geq f(x)$.*
3. *Si I_1 et I_2 sont s.c.i alors $I_1 + I$ est s .c.i .*

Proposition 1.6. *Si X est compact et si I s.c.i alors I atteint sa borne inférieure sur X.*

1.5 Dérivées et points critiques

Soit X, Y deux espaces de espaces de Banach sur K et I une application d'un ouvert U de X à valeurs dans Y. On utilise la notation de Landau $o(v)$ pour designer une fonction de v telle que $\lim\limits_{\|v\| \to 0} \dfrac{o(\|v\|)}{\|v\|}$

Dérivées aux sens de Fréchet et Gâteaux

Définition 1.13. ***Dérivée de Fréchet.*** *Soit $u \in U$, on dit que I est Fréchet différentiable (F-Diff) au point u s'il existe une application linéaire et continue L de X dans Y tel que :*

$$I(u + v) - I(u) - L(v) = o(\|v\|)$$

L'application L, si elle existe, est unique et s'appelle différentielle de I en u et notée $DIu = L$.
On dit que I est continument différentiable sur U, ou de classe C^1, si I est différentiable en tout point de U et si l'application qui à u associe DIu est continue. si

I_1 et $I_2 : X \to Y$ sont différentiables en u, alors $\lambda I_1 + I_2, \lambda \in \mathbb{K}$ est différentiable en u et $D(\lambda I_1 + I_2)u = \lambda DI_1 u + DI_2 u$

Définition 1.14. ***Dérivée de Gateaux*** *On dit que I est Gâteaux différentiable (G-diff) au point $u \in U$ s'il existe une application linéaire et continue L de X dans Y telle que pour tout direction $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = L(v) = \partial_t I(u+tv)_{t=0}$$

L est appelée La différentiel I au point u et est notée $DI(u) = L$.

Remarque 1.2.

* *I est Fréchet différentiable $\Longrightarrow$ I est Gâteaux différentiable.*

* *I est Gâteaux différentiable en u et l'application $u \longrightarrow DIu$ est continue en ce point alors I est Fréchet différentiable.*

Points critiques

Définition 1.15. *On dit que $u \in U$ est un point critique de I, si $DI(u) = 0$. Si non on dit que u est un point régulier de I. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de I, s'il existe $u \in U; I(u) = c$ et $DI(u) = 0$. Si non on dit que c est une valeur régulière de I.*

Lemme 1.3. ***Lemme d'Ekeland***
Soit (X, d) un espace métrique complet et $I : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle s.c.i. bornée infèrieurement sur X. Soit $c = \inf_X I$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que

$$\begin{cases} c \leq I(x_\varepsilon) \leq c + \varepsilon \\ I(x_\varepsilon) < I(x) + \varepsilon d(x, x_\varepsilon), \forall x \in X \ \text{avec } x \neq x_\varepsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.16. ***La condition de Palais-Smale***
Soit $I : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On dit que I vérifie la condition de Palais-Smale (local au niveau $c \in \mathbb{R}$), notée (PS) $((PS)_c)$, si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$I(u_n)_n \quad \text{est bornée } (I(u_n) \to c \text{ dans } X) \text{ et } I'(u_n) \longrightarrow 0$$

dans X'contient une sous-suite convergente.

Théorème 1.8. ***Théorème de passe Montagne***
Soit $I \in C^1(X; \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale et telle que

1. *$I(0) = 0$.*
2. *Il existe $r > 0 a > 0$ tels que si $||u||_X = r$ alors $I(u) \geq a$.*
3. *Il exsiste $v \in X, ||v||_X > r$, tel que $I(v) < a$.*
   Alors I admet une valeur critique$c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], E^\alpha_{L,0}[a,b]) : \gamma(0) = 0 \ \text{ et } \ \gamma(1) = v \right\},$$

et :

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Chapitre 2

Intégration et dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, on considère l'intégrale : Une primitive de f est donnée par

$$\begin{aligned} I^1_{a+} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (I^1_{a+} f)(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I^1_{b-} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (I^1_{b-} f)(x) = \int_x^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Pour une primitive seconde, on aura :

$$(I^2_{a+} f)(x) = I^1_{a+} f(I^1_{a+} f(t))(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)ds \right) dt. \quad (a \le s \le t \le x \le b)$$

$$(I^2_{b-} f)(x) = I^1_{b-} f(I^1_{b-} f(t))(x) = \int_x^b \left(\int_t^b f(s)ds \right) dt. \quad (a \le x \le t \le s \le b)$$

D'après le théorèm de Fubini nous ramènons cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I^2_{a+} f)(x) = \int_a^x f(s)ds \int_s^x dt = \int_a^x \frac{(x-s)}{1!} f(s)ds,$$

et

$$(I^2_{b-} f)(x) = \int_x^b f(s)ds \int_x^s dt = \int_x^b \frac{(s-x)}{1!} f(s)ds.$$

Dans le cas général pour tout entier n et par une itération on a la formule de Cauchy :

$$(I^n_{a+} f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

et

$$(I^n_{b_-}f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt.$$

Comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, donc

$$(I^n_{a_+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt,$$

$$(I^n_{b_-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_x^b (t-x)^{n-1}f(t)dt.$$

Définition 2.1. *voir [1] Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* $I^\alpha_{a_+}f$ *et* $I^\alpha_{b_-}f$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ *sont définies par*

$$(I^\alpha_{a_+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \qquad (x > a; Re(\alpha) > 0), \tag{2.1}$$

$$(I^\alpha_{b_-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt \qquad (x < b; Re(\alpha) > 0), \tag{2.2}$$

respectivement. Ici $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma .Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires de gauche et de droite.*

Cas particulier : Pour $\alpha = 0$

$$I^0_{a_+}f(x) = f(x).(I^0_{a_+} \text{ est l'opérateur identité }).$$

L'intégrale fractionnaire des fonctions usuelles

1- **La fonction** $f(t) = (t-a)^\beta$.

Soit $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$

$$I^\alpha_{a_+}[(t-a)^\beta](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta ds$$

Posons $s = x + r(x-a)$ alors on obtient

$$\begin{aligned}
I^\alpha_{a_+}[(t-a)^\beta](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [x-a-(x-a)r]^{\alpha-1}[r(x-a)]^\beta(x-a)dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta}\int_0^1 r^\beta(1-r)^{\alpha-1}dr \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$I^\alpha_{a_+}[(t-a)^\beta](x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{2.3}$$

$$I_{b_-}^{\alpha}[(b-t)^{\beta}](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (s-x)^{\alpha-1}(b-s)^{\beta} ds$$

Posons $s = x + r(b-x)$ alors on obtient

$$\begin{aligned}
I_{b_-}^{\alpha}[(b-t)^{\beta}](x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 (b-x)^{\alpha} r^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}(1-r)^{\beta-1} dr \\
&= \frac{(b-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1} dr \\
&= \frac{(b-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2- **La fonction** $f(t) = C$

$$\begin{aligned}
I_{a_+}^{\alpha} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} C ds \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_a^x \\
&= \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left[(x-s)^{\alpha}\right]_a^x \\
&= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Donc :

$$I_{a_+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}.$$

De même manière on montre que :

$$I_{b_-}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)}(b-t)^{\alpha}.$$

Propriétés principales de l'intégrale de Riemann-Liouville

Théorème 2.1. *voir[1] Soit $f \in L^1[a,b]$. Pour $\alpha, \beta > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la Propriérté de semi-groupe suivante :*

$$I_{a_+}^{\alpha}(I_{a_+}^{\beta} f)(x) = I_{a_+}^{\alpha+\beta} f(x),$$

$$I_{b_-}^{\alpha}(I_{b_-}^{\beta} f)(x) = I_{b_-}^{\alpha+\beta} f(x).$$

Preuve. *D'après (2.1), on a*

$$\begin{aligned}
I_{a_+}^{\alpha}(I_{a_+}^{\beta} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(I_{a_+}^{\beta} f)(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds\right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on obtient :

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s)ds \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt. \tag{2.4}$$

En y'effectuant le changement de variable $t = s + r(x-s)$, *alors*

$$\begin{aligned} dt &= (x-s)dr, \\ t = s &\Longrightarrow s + (x-s)r = s \Longrightarrow r = 0, \\ t = x &\Longrightarrow s + (x-s)r = x \Longrightarrow r = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt &= \int_0^1 (x-(s+r(x-s)))^{\alpha-1}((s+r(x-s))-s)^{\beta-1}(x-s)dr \\ &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1}(1-r)^{\alpha-1}(x-s)^{\beta-1}r^{\beta-1}(x-s)dr \\ &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta-1}r^{\beta-1}(1-r)^{\alpha-1}dr \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 r^{\beta-1}(1-r)^{\alpha-1}dr \\ \text{D'après 1.10} \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \\ \text{D'après 1.2} \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

En remplaçant la dernière expression dans (2.4), on obtient :

$$I_{a_+}^{\alpha}(I_{a_+}^{\beta}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds = I_{a_+}^{\alpha+\beta}f(x).$$

De la même manière on montre que : $I_{b_-}^{\alpha}I_{b_-}^{\alpha}f = I_{b_-}^{\alpha+\beta}f.$ ✎.

Proposition 2.1. *Les opérateurs* $I_{a_+}^{\alpha}, I_{b_-}^{\alpha}$ *sont linéaires.*

Preuve. *Soient* f, g *deux fonctions telles que* $I_{a_+}^{\alpha}f$ *et* $I_{a_+}^{\alpha}g$ *existent et soit* c_1 *et* c_2 *deux constantes réelles on a :*

$$\begin{aligned} I_{a_+}^{\alpha}(c_1f + c_2g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(c_1f+c_2g)(t)dt \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)dt \\ &= c_1I_{a_+}^{\alpha}f(x) + c_2I_{a_+}^{\alpha}g(x). \end{aligned}$$

Donc :

$$I_{a_+}^{\alpha}(c_1f + c_2g)(x) = c_1I_{a_+}^{\alpha}f(x) + c_2I_{a_+}^{\alpha}g(x).$$

✎.

Proposition 2.2. *Soit* $f \in C[a,b]$, *pour* $Re(\alpha) > 1$ *on a :*

$$\frac{d}{dx}(I_{a_+}^{\alpha}f)(x) = (I_{a_+}^{\alpha-1}f)(x).$$

Proposition 2.3. ***Intégration par partie de l'intégrale fractionnaire****voir[4]*

$$\int_a^b [I_a^\alpha u(x)]v(x)dx = \int_a^b u(x)I_b^\alpha v(x)dx, \ \ \alpha > 0, \tag{2.5}$$

à condition que $u \in L^p[a,b], v \in L^q[a,b]$ *et*
$p \geq 1, q \geq 1$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} < 1 + \alpha$ *ou* $p \neq 1, q \neq 1$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \alpha.$

Les injections continus de l'intégrale de Riemann-Liouville

Théorème 2.2. *voir[4]*
Soit $\alpha \in (0,1)$ *et* $p \in [1,\infty]$, *alors les énoncés suivants sont satisfaits :*

1- *Si* $\alpha \in (0,1)$, *alors les opérateures* $I_{a_+}^\alpha, I_{b_-}^\alpha : L^1[a,b] \longrightarrow L^q[a,b]$ *sont continus pour tout* $q \in \left[1, \dfrac{1}{1-\alpha}\right)$.

2- *Si* $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{p}\right)$, *alors les opérateures* $I_{a_+}^\alpha, I_{b_-}^\alpha : L^p[a,b] \longrightarrow L^q[a,b]$ *sont continus pour tout* $q \in \left[1, \dfrac{p}{1-\alpha p}\right]$.

3- *Si* $\alpha = \dfrac{1}{p}$, *alors les opérateures* $I_{a_+}^{\frac{1}{p}}, I_{b_-}^{\frac{1}{p}} : L^p[a,b] \longrightarrow L^q[a,b]$ *sont continus pour tout* $q \in [1,\infty)$.

4- *Si* $\alpha \in \left(\dfrac{1}{p}, 1\right)$, *alors les opérateures* $I_{a_+}^\alpha, I_{b_-}^\alpha : L^p[a,b] \longrightarrow L^\infty[a,b]$ *sont continus.*
De plus, $I_{a_+}^\alpha, I_{b_-}^\alpha$ *peut être identifié à la fonction continue Hölderienne avec l'exposant* $\alpha - \dfrac{1}{p}$ *nul à* $t = a$ *et* $t = b$ *respectivement.*

Les injections compacts de l'intégrale de Riemann-Liouville

Théorème 2.3. *voir[4]*

1- *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *et* $p \geq 1$. *Alors les opérateurs* $I_{a_+}^\alpha, I_{b_-}^\alpha : L^p[a,b] \longrightarrow L^p[a,b]$ *sont compacts.*

2- *Soit* $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{p}\right)$ *.Alorslesoprateurs* $I_{a_+}^\alpha, I_{b_-}^\alpha : L^p[a,b] \longrightarrow L^q[a,b]$ *sont compacts pour tout* $q \in [1, p_\alpha^*)$, *où* $p_\alpha^* = \dfrac{p}{1-\alpha p^*}$.

2.2 La dérivée de Riemann-Liouville

Définition 2.2. *voir [1] Soit* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n-1 < \alpha < n$ *et* $a > 0$. *Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville* $D_{a_+}^\alpha$ *et* $D_{b_-}^\alpha$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) \geq 0)$ *sont* *définies par*

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}(I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \quad (n=[Re(\alpha)]+1; x>a)\end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{b-}f)(x) &= \left(\frac{-d}{dx}\right)^{n}(I^{n-\alpha}_{b-})(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt \quad (n=[Re(\alpha)]+1; x<b)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1. *En particulier*

1. *Pour* $\alpha = 0$, *alors*
$$(D^{0}_{a+}f)(x) = (D^{0}_{b-}f)(x) = f(x),$$
2. *Pour* $\alpha = n$,*alors*
$$\begin{cases}(D^{n}_{a+}f)(x) = f^{(n)}(x)\\ (D^{n}_{b-}f)(x) = (-1)^{n}f^{(n)}(x)\end{cases} \quad (n\in\mathbb{N})$$
où $f^{(n)}(x)$ *est la dérivée usuelle de* $f(x)$ *d'ordre* n.
3. *Pour* $0<\alpha<1$, *alors*
$$\begin{cases}(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \dfrac{d}{dx}(I^{1-\alpha}_{a+}f)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt; \quad (x>a).\\ (D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \dfrac{-d}{dx}(I^{1-\alpha}_{b-}f)(x) = \dfrac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt; \quad (x<b).\end{cases}$$

Remarque 2.2. *Si* $\alpha<0$, *on convient de prendre* $D^{\alpha}_{a+}f(t) = I^{-\alpha}_{a+}f(t)$.

Lemme 2.1. *Soient* $\alpha>0$ *et* $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)....(1-\alpha)(x-\alpha)^{-\alpha}.$$

Exemple 2.1.

1 ***La fonction*** $f(t)=(t-a)^{\beta}$ *D'après la définition* (2.2)-(2.6), *on a :*

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta}$$

D'après (2.3), donc pour l'ordre $n-\alpha$ *on obtient :*

$$I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right]\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left[(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right]\end{aligned} \tag{2.8}$$

D'après le lemme (2.1), on obtient :

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)....(\beta+1-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.9)$$

Et comme :

$$\Gamma(\beta+1+n-\alpha) = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta+1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\alpha) \quad (2.10)$$

Par substitution de (2.9) et (2.10) dans (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a_+}(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta+1-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha}}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta+1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} \end{aligned}$$

Donc,

$$D^{\alpha}_{a_+}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}$$

2 ***La fonction*** $f(t) = C$

$$\begin{aligned} (D^{\alpha}_{a_+}C) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a_+}C) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{C}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]_a^x \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right] \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (2.1) et (2.10), on trouve

$$(D^{\alpha}_{a_+}C) = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Lemme 2.2. *voir [3] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ tel que $n = [\alpha]+1$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction donnée. Supposons que $D^{\alpha}_{a_+}f = 0$. Alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}$$

où les c_k sont des constantes réelles quelconques .

Preuve. *D'abord, on a*

$$\begin{aligned} (D^{\alpha}_{a_+}f)(x) = 0 &\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a_+}f)(x) = 0 \\ &\Longrightarrow (I^{n-\alpha}_{a_+}f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k \end{aligned}$$

Par composition avec I^{α}_{a+} on a

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a+}[I^{n-\alpha}_{a+}f](x) &= I^{\alpha}_{a+}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k\right) \\
\Longrightarrow [I^{n}_{a+}f](x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I^{\alpha}_{a+}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}(x-a)^{k+\alpha}
\end{aligned}
$$

puis par dérivation classique d'ordre n, on obtient

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{k+\alpha} \\
\Longrightarrow f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}.
\end{aligned}
$$

✐.

Lemme 2.3. *voir [1] Soit $\alpha \geqq 0$, et $n = [\alpha] + 1)$. Si $f(x) \in AC^n[a,b]$, alors les dérivées fractionnaires $D^{\alpha}_{a+}f$ et $D^{\alpha}_{b-}f$ existent presque partout sur $[a,b]$ et peuvent être représentées sous les formes*

$$
(D^{\alpha}_{a+}f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt.,
$$

et

$$
(D^{\alpha}_{b-}f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(k)}f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt.
$$

Corollaire 2.1. *voir [1] Si $0 \leqq \alpha < 1(\alpha \neq 0)$ et $f(x) \in AC([a,b])$, alors*

$$
(D^{\alpha}_{a+}f) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right],
$$

et

$$
(D^{\alpha}_{b-}f) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].
$$

2.3 Composition des l'opérateurs au sens de Riemann-Liouville

Composition des dérivées fractionnaires

Théorème 2.4.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, alors

$$
D^{\alpha_1}_{a+}D^{\alpha_2}_{a+}f \neq D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a+}f \text{ et } D^{\alpha_1}_{b-}D^{\alpha_2}_{b-}f \neq D^{\alpha_1+\alpha_2}_{b-}f
$$

.

Exemple 2.2. *Soit la fonction f définie par*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Calculons : $D_0^{\frac{1}{2}} f, D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f$
De la même manière que l'exemple précédent,on trouve que $(D_0^{\frac{1}{2}} f) = 0$, *de plus on a*

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f)(x) = (D^1 f)(x) = \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}.$$

D'où $(D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = 0 \neq -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$.

Remarque 2.3. *voir [3]*
En particulier :

$$D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} f = D_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2} f.$$

Exemple 2.3. *On considère la fonction f définie par*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 1$$

Calculons : $D_0^{\frac{1}{2}} f, D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} f$ *et* $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f$
On a $D_0^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{-1}{2}}$ *ceci nous donne*

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt &= \int_0^1 r^{-\frac{1}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}} dr \\ &= \int_0^1 r^{\frac{1}{2}-1} (1-r)^{\frac{1}{2}-1} dr \\ &= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Donc $D_0^{\frac{1}{2}} D_0^{\frac{1}{2}} 1 = 0 = D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} 1$.

Composition mixte

Lemme 2.4. *voir [1] Soient $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrale, alors*

$$D_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x),$$

est vraie pour presque tout sur $[a,b]$.

Preuve.

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} f(x) &= D^n I^{n-\alpha}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f(x)) \\ &= D^n (I^{n-\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} f)(x) \\ &= D^n I^n_{a_+} f(x) = f(x). \end{aligned}$$

✐.

Lemme 2.5. *voir[4] Si $f \in AC^1[a,b]$, alors :*

$$I^{\alpha}_a (D^{\alpha}_a f(x)) = f(x) - [I^{1-\alpha}_a f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

$$I^{\alpha}_b (D^{\alpha}_b f(x)) = f(x) - [I^{1-\alpha}_b f(x)]_{x=b} \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

pour $x \in [a,b]$.

Théorème 2.5. *voir [3] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $n-1 \leq \alpha < n, m-1 \leq \beta < m$, avec $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $D = \dfrac{d}{dx}$, alors :*

1- Si $0 < \beta < \alpha$ alors :

$$D^{\beta}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{a_+}(x). \quad p.p. x \in [a,b].$$

2- Si $0 < \alpha \leq \beta$ et $D^{\beta-\alpha}_{a_+} f$ existe alors :

$$D^{\beta}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) = (D^{\beta-\alpha}_{a_+} f)(x)$$

3- S'il existe une fonction $g \in L^1[a,b]$ tel que $f = I^{\alpha}_{a_+} g$, alors :

$$I^{\alpha}_{a_+} D^{\alpha}_{a_+} f(x) = f(x). \quad p.p. x \in [a,b].$$

4- Pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$. Si $D^{\alpha}_{a_+} f$ et $D^{k+\alpha}_{a_+} f$ existent, alors :

$$D^k (D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = D^{k+\alpha}_{a_+} f(x).$$

Preuve.

1- Pour $0 < \beta < \alpha$. D'après la définition (2.2), on a :

$$\begin{aligned} D^{\beta}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= D^n I^{n-\beta}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) \\ &= D^n (I^{n-\beta}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} f)(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1)

$$\begin{aligned} &= D^n (I^{n+\alpha-\beta}_{a_+} f)(x) \\ &= I^{\alpha-\beta}_{a_+} f(x). \end{aligned}$$

2- Pour $0 < \alpha < \beta$, d'après la définition (2.2) on a :

$$\begin{aligned} D^{\beta}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= D^m I^{m-\beta}_{a_+}(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) \\ &= D^m (I^{m-\beta}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} f)(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1)

$$= D^m(I_{a_+}^{m-(\beta-\alpha)}f)(x)$$
$$= D^m I_{a_+}^m(I_{a_+}^{-(\beta-\alpha)}f)(x)$$
$$= (I_{a_+}^{-(\beta-\alpha)}f)(x)$$

D'après la remarque (2.2), on obtient :

$$= D_{a_+}^{\beta-\alpha}f(x)$$

3- *D'après le lemme (2.4)*

$$\begin{aligned} I_{a_+}^{\alpha}D_{a_+}^{\alpha}f(x) &= I_{a_+}^{\alpha}D_{a_+}^{\alpha}(I_{a_+}^{\alpha}g(x)) \\ &= I_{a_+}^{\alpha}g(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

4- *Pour* $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\begin{aligned} D^k(D_{a_+}^{\alpha}f)(x) &= D^k D^n I_{a_+}^{n-\alpha}f(x) \\ &= D^{k+n}I_{a_+}^{n-\alpha+k-k}f(x) \\ &= D^{k+n}I_{a_+}^{k+n-(k+\alpha)}f(x) \\ &= D_{a_+}^{k+\alpha}f(x). \end{aligned}$$

✐.

Lemme 2.6. *voir [3] Soit* $\alpha > 0$ *avec* $n = [\alpha] + 1$ *et soit* $(I_{a_+}^{n-\alpha}f)(x)$ *l'intégrale fractionnaire d'ordre* $n - \alpha$.

1. *Si* $f(x) \in L^1[a,b]$, *alors*

$$(I_{a_+}^{\alpha}D_{a_+}^{\alpha}f)(x) = f(x).$$

2. *Si* $f(x) \in L^1[a,b]$ *et* $(I_{a_+}^{n-\alpha}f)(x) \in AC^n[a,b]$, *alors l'égalité*

$$(I_{a_+}^{\alpha}D_{a_+}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(I_{a_+}^{n-\alpha}f)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}.$$

tient presque partout sur $[a,b]$.
En particulier, si $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$(I_{a_+}^{\alpha}D_{a_+}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \frac{I_{a_+}^{1-\alpha}f(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1},$$

pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *l'égalité suivante est vérifiée*

$$(I_{a_+}^{n}D_{a_+}^{n}f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Lemme 2.7. *voir [3] Soit* $\alpha > 0$ *avec* $n = [\alpha] + 1$.
Soit $(I_{b_-}^{n-\alpha}f)(x)$. *l'intégral fractionnaire d'ordre* $n - \alpha$.

1. *Si* $f(x) \in L^1[a,b]$, *alors*

$$(I_{b_-}^{\alpha}D_{b_-}^{\alpha}f)(x) = f(x).$$

2. *Si* $f(x) \in L^1[a,b]$ *et* $(I_{b_-}^{n-\alpha}f)(x) \in AC^n[a,b]$, *alors la formule*

$$(I_{b_-}^{\alpha}D_{b_-}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{(n-k)}(I_{b_-}^{n-\alpha}f)^{(n-k)}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{2.11}$$

tient presque partout sur $[a,b]$.

2.4 La dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 2.3. *voir [1] La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche et à droite* $({}^C D^{\alpha}_{a_+} f)(x)$ *et* $({}^C D^{\alpha}_{b_-} f)(x)$ *respectivement d'ordre* $\alpha \geq 0$*, avec* $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ *sur* $[a, b]$ *sont définis par :*

$$({}^C D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = \left(D^{\alpha}_{a_+} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x), \tag{2.12}$$

et

$$({}^C D^{\alpha}_{b_-} f)(x) = \left(D^{\alpha}_{b_-} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k \right] \right)(x), \tag{2.13}$$

Où

$$n = [\alpha] + 1 pour \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.4. *voir [1] Soit* $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ *et* $n = [\alpha]+1$ *on a :*

$$({}^C D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = (D^{\alpha}_{a_+} f(t))(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \ (x),$$

et

$$({}^C D^{\alpha}_{b_-} f)(x) = (D^{\alpha}_{b_-} f(t))(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha} \ (x).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
({}^C D^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= \left(D^{\alpha}_{a_+} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x) \\
&= D^{\alpha}_{a_+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} D^{\alpha}_{a_+}(t-a)^k \\
&= D^{\alpha}_{a_+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \\
&= D^{\alpha}_{a_+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \\
&= D^{\alpha}_{a_+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.
\end{aligned}$$

✐.

Remarque 2.4. *Cas particulières*

1. *Si* $\alpha = n$ *on a*

$$({}^C D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = (D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = (D^n f)(x).$$

2. *Si* $0 < \alpha < 1$ *on a*

$$({}^C D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = (D^{\alpha}_{a_+} f)(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b_-} f)(x) = (D^{\alpha}_{b_-} f)(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}.$$

Proposition 2.5. *voir [1]*
Soit $\alpha > 0$, *si* $f^{(k)}(a) = 0$ *et* $f^{(k)}(b)$ *pour* $k = 0, 1, ..., n-1$ *alors*

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} f)(x) = (D^{\alpha}_{a+} f)(x),$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b-} f)(x) = (D^{\alpha}_{b-} f)(x).$$

Théorème 2.6. *voir [1] Soit* $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$

– *Si* $f \in AC^n([a, b])$, *alors*

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} f)(x) = (I^{n-\alpha}_{a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt,$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b-} f)(x) = (I^{n-\alpha}_{b-} \left(\frac{-d}{dx}\right)^n f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dt.$$

Cas particulier : *Pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in AC([a, b])$, *alors*

$$\begin{cases} ({}^C D^{\alpha}_{a+} f)(x) = (I^{1-\alpha}_{a+} f')(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \quad (x > a), \\ ({}^C D^{\alpha}_{b-} f)(x) = (-I^{1-\alpha}_{b-} f')(x) = \dfrac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt \quad (; x < b). \end{cases}$$

Preuve.
D'après les définitions (2.3) et (2.2) on a :

$$\begin{aligned} ({}^C D^{\alpha}_{a+} f)(x) &= \left(D^{\alpha}_{a+} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right](x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \right), \end{aligned}$$

on pose :

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \right),$$

en intégrant par partie, on aura :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Bigg[-\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)\\
&\quad+\int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\frac{d}{dt}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha}\frac{d}{dt}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha}\frac{d}{dt}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha+1-1}\frac{d}{dt}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt\\
&= I_{a_+}^{n-\alpha+1}\frac{d}{dt}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt,
\end{aligned}$$

en répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
F(t) &= I_{a_+}^{n-\alpha+n}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt,\\
&= I_{a_+}^{n}I_{a_+}^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)dt,
\end{aligned}$$

comme $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ *est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent*

$$F(t) = I_{a_+}^{n}I_{a_+}^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n(f(t)),$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
({}^C D_{a_+}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n F(t)\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a_+}^{n}I_{a_+}^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)
\end{aligned}$$

d'après le lemme (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
({}^C D_{a_+}^{\alpha} f)(x) &= I_{a_+}^{n-\alpha}(\left(\frac{d}{dt}\right)^n f)(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt.
\end{aligned}$$

✐.

Proposition 2.6. *voir [3] Soit $f \in AC^n([a,b]),\mathbb{R})$, avec α un réel strictement positif et $[\alpha] = n$. On a ${}^C D_{a_+}^{\alpha} f = 0$ alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k \quad pour \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Preuve.
On a ${}^C D^{\alpha}_{a+} f = 0$ *ça implique que* $D^{\alpha}_{a+}\left[f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = 0$, *et d'après le théorème (2.6), alors*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}.$$

D'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad \textit{pour} \quad x \in [a,b],$$

avec $c_k = \tilde{c}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, *pour* $k = 1, ..., n-1$. ✎.

Exemple 2.4.
1. ***la fonction*** $f(t) = (t-a)^{\beta}$ ***et*** $\beta > -1$.
   D'après la définition (2.3) On a :

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} f)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x),$$

   et

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad \forall k = 0, 1, ..., n-1.$$

   Donc :

$$\begin{aligned} {}^C D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} &= D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta} \quad (\beta > n). \end{aligned}$$

   De la même manière, on obtient :

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\beta})(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(b-x)^{\beta} \quad (\beta > n).$$

   D'après le théorème(2.2) On a :

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} C)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{C^{(n)}(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}} dt C^(n) = 0.$$

   Donc :

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} C)(x) = 0.$$

   De la màme manière, on obtient :

$$({}^C D^{\alpha}_{b-} C)(x) = 0.$$

2.5 Composition des l'opérateurs au sens de Caputo

La Composition des l'opérateurs ${}^C D^{\alpha}_{a+}$ avec l'opérateur I^{α}_{a+}

Lemme 2.8. *voir [1] Soit Re*$(\alpha) > 0$ *et soit* $f(x) \in C[a,b]$.
1. *Si Re*$(\alpha) \notin \mathbb{N}$ *ou* $\alpha \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f)(x) = f(x),$$

   et

$$({}^C D^{\alpha}_{b-} I^{\alpha}_{b-} f)(x) = f(x).$$

La composition de l'opérateur ${}^{C}D^{\alpha}_{a_+}$ avec l'opérateur ${}^{C}D^{\beta}_{a_+}$

Lemme 2.9. *voir [3] Soit $\alpha, \beta \in [0,1]$ avec $\alpha+\beta \leq 1$ et $f \in C^1([a,b]),\mathbb{R})$ alors :*

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a_+}\, {}^{C}D^{\beta}_{a_+} f)(x) = ({}^{C}D^{\alpha+\beta}_{a_+} f)(x) =^{C} D^{\beta}_{a_+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f(x).$$

Preuve. *On a*

$$\begin{aligned}
({}^{C}D^{\alpha}_{a_+}\, {}^{C}D^{\beta}_{a_+} f)(x) &=^{C} D^{\alpha}_{a_+}({}^{C}D^{\beta}_{a_+})f(x) =^{C} D^{\alpha}_{a_+}(I^{1-\beta}_{a_+} f')(x) \\
&= D^{\alpha}_{a_+}(I^{1-\beta}_{a_+} f')(x) = DI^{1-\alpha}_{a_+}(I^{1-\beta}_{a_+})f(x) \\
&= (DI^{1-\beta}_{a_+} I^{1-\alpha}_{a_+} f)(x) = DI^{1-\beta}_{a_+}(I^{1-\alpha}_{a_+} f')(x) \\
&== DI^{1-\beta}_{a_+}(I^{1-\alpha}_{a_+} f)(x) = ({}^{C}D^{\beta}_{a_+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f)(x) \\
&= D^{\alpha}_{a_+}(I^{1-\beta}_{a_+} f')(x) = D^{\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+}(I^{1-\alpha-\beta}_{a_+} f')(x), \\
&= (I^{1-\alpha-\beta}_{a_+} f')(x) = ({}^{C}D^{\alpha+\beta}_{a_+} f)(x).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a_+}\, {}^{C}D^{\beta}_{a_+} f)(x) = ({}^{C}D^{\alpha+\beta}_{a_+} f)(x) = ({}^{C}D^{\beta}_{a_+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f)(x).$$

✎.

La composition de l'opérateur $I^{\alpha}_{a_+}$ avec l'opérateur ${}^{C}D^{\alpha}_{a_+}$

Théorème 2.7. *voir [3] Soit $\alpha > 0$ avec $[\alpha] = n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $f \in AC^n([a,b]),\mathbb{R})$. Alors*

$$(I^{\alpha}_{a_+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En particulier : *pour $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a,b]),\mathbb{R})$, alors an a*

$$(I^{\alpha}_{a_+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = f(x) - f(a).$$

Preuve. *Soit $f \in AC^n([a,b]),\mathbb{R})$, par définition on a*

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a_+}\, {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= (I^{\alpha}_{a_+}\left[I^{n-\alpha}_{a_+}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\right] f)(x) \\
&= (I^{n}_{a_+}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f)(x) \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

✎.

2.6 Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville

Lemme 2.10. *voir[2] Soit $f(x)$ est une fonction tel que les deux opérateurs $(D^{\alpha}_{a_+} f)(x)$ avec ${}^{C}(D^{\alpha}_{a_+} f)(x)$ et $(D^{\alpha}_{b_-} f)(x)$ avec ${}^{C}(D^{\alpha}_{b_-} f)(x)$ existent, avec $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, alors*

$$(D^{\alpha}_{a_+} f)(x) \neq ({}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f)(x),$$

et

$$(D^{\alpha}_{b_-} f)(x) \neq ({}^{C}D^{\alpha}_{b_-} f)(x).$$

Remarque 2.5. *voir[2] Si $f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2, ..., n-1$, alors les dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo coïncident,i.e :*

$$({}^{c}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha}_{a+}f)(x).$$

Proposition 2.7. *voir[2] Soit $n-1 < \alpha < n$, alors :*

$$\lim_{\alpha \to n}(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \lim_{\alpha \to n}({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = f^{(n)}(x),$$

et

$$\lim_{\alpha \to n}(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \lim_{\alpha \to n}({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f)(x) = (-1)^{n}f^{(n)}(x),$$

Remarque 2.6. ***(Commutativité)*** *Soit la fonction $f(t)$ telle que $f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2, ..., n$, alors les deux dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont commutatives avec la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$*

$$(D^{n}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha+n}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha}_{a+}D^{n}_{a+}f)(x),$$

et

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}D^{n}_{a+}f)(x) = ({}^{C}D^{\alpha+n}_{a+}f)(x) = (D^{n}_{a+}\,{}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(x).$$

2.7 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Théorème 2.8. *voir [7] L'Opérateur de dérivée fractionnaire est un Opérateur linéaire*

$$D^{\alpha}_{a+}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^{\alpha}_{a+}f(x) + \mu D^{\alpha}_{a+}g(x), \quad x > 0.$$

Preuve. *Par exemple, pour l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α, $(b-1 \leq \alpha < n)$*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda f(t) + \mu g(t))dt \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}g(t)dt \\ &= \lambda D^{\alpha}_{a+}f(x) + \mu D^{\alpha}_{a+}g(x). \end{aligned}$$

.

Proposition 2.8. ***Intégration par partie de la dérivée fractionnaire*** *voir[4] Soit $f \in L^{p}[a,b]$ et $g \in AC[a,b]$. Alors :*

$$\int_{a}^{b} f(x)D^{\alpha}_{a}g(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)D^{\alpha}_{b}f(x)dx + g(b)I^{1-\alpha}_{b}f(b), \tag{2.15}$$

et

$$\int_{a}^{b} f(x)D^{\alpha}_{b}g(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)D^{\alpha}_{a}f(x)dx + g(a)I^{1-\alpha}_{b}f(a). \tag{2.16}$$

Corollaire 2.2. ***(Règle de Leibniz)*** *voir[2] Soit $t > a, a \in \mathbb{R}, n-1 < a < n \in \mathbb{N}$. Si $f_1(x), f_2(x)$ et tous ses dérivées sont continues sur $[a,t]$, alors*

$$^{C}D^{\alpha}_{a_+}(f_1(t)f_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha}_{a_+}f_1(t))f_2^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}((f_1(t)f_2(t))^{k}(a)).$$

Preuve. *On applique consécutivement la relation*

$$^{C}D^{\alpha}_{a_+}f(t) = D^{\alpha}_{a_+}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(a),$$

et la règle de Leibniz pour la dérivée de Riemann-Liouville

$$^{C}D^{\alpha}_{a_+}(f_1(t)f_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}_{a_+}f_1(t))f_2^{(k)}(t),$$

Après, la règle de Leibniz pour la dérivée de Caputo est obtenue :

$$\begin{aligned}
^{C}D^{\alpha}_{a_+}(f_1(t)f_2(t)) &= D^{\alpha}_{a_+}(f_1(t)f2(t))) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}((f_1(t)f_2(t))^{(k)}(a)),\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}_{a_+}f_1(t))f_2^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}((f_1(t)f_2(t))^{(k)}(a)).
\end{aligned}$$

.

Chapitre 3

L'espace de Sobolev fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans ce chapitre, nous introduisons l'espace fractionnaire et quelques propriétés (Voir [4]).

Note : Dans ce chapitre, on note

$$D^{\alpha}_{a_+} = D^{\alpha}_{a} \text{ et } D^{\alpha}_{b_-} = D^{\alpha}_{b}.$$

3.1 L'espace des dérivées fractionnaires

Soient $u \in L^1(a,b)$ et $\alpha \in (0,1)$. S'il existe $v \in L^1_{loc}(a,b)$ telle que :

$$\int_a^b u(x) D^{\alpha}_{b}\varphi(x)dx = \int_a^b v(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C^{\infty}_0(a,b), \tag{3.1}$$

alors v est appelé la dérivée fractionnaire à gauche faible de u et, on note par :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u = v.$$

De la même manière, s'il existe $w \in L^1_{loc}(a,b)$ telle que :

$$\int_a^b u(x) D^{\alpha}_{a}\varphi(x)dx = \int_a^b w(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C^{\infty}_0(a,b), \tag{3.2}$$

alors w est appelé la dérivée fractionnaire à droite faible de u et, on note par :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b}u = w.$$

Tout au long de cette section, nous considérons certains résultats pour les deux dérivées fractionnaires faibles $\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b}u$, mais nous ne donnons la preuve que pour la dérivée faible fractionnaire à gauche $\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u$,puisque pour l'autre nous pouvons procéder de la même manière.

Lemme 3.1. *Les dérivées fractionnaires faibles $\mathcal{D}^{\alpha}_{a}, \mathcal{D}^{\alpha}_{b}$ sont uniques.*

Preuve. *Soient $u \in L^1(a,b)$ et v, w deux dérivées faibles de u, on a :*

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)dx = \int_a^b u(x) D^{\alpha}_{b}\varphi(x)dx = \int_a^b w(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C^{\infty}_0(a,b).$$

Ce qui implique que :

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)dx = \int_a^b w(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Donc :

$$\int_a^b (v-w)(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

En suite, par [[6], corollaire 4.24] on a $v = w$ p.p.$x \in (a,b)$.
✐.

Lemme 3.2. *Les dérivées fractionnaires faibles $\mathcal{D}_a^\alpha, \mathcal{D}_b^\alpha$ sont linèaires.*

Preuve. *Soient $u, v \in L^1[a,b]$ et $k \in \mathbb{R}$. On fixe $\varphi \in C_0^\infty[a,b]$, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b (ku+v)(x)D_b^\alpha\varphi(x)dx &= k\int_a^b u(x)D_b^\alpha\varphi(x)dx + \int_a^b v(x)D_b^\alpha\varphi(x)dx\\ &= k\int_a^b \mathcal{D}_a^\alpha u(x)\varphi(x)dx + \int_a^b \mathcal{D}_a^\alpha v(x)\varphi(x)dx\\ &= \int_a^b [k\mathcal{D}_a^\alpha u(x) + \mathcal{D}_a^\alpha v(x)]\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Donc, d'après la définition de la dérivée fractionnaire faible (3.1), on obtient :

$$\mathcal{D}_a^\alpha(ku+v)(x) = k\mathcal{D}_a^\alpha u(x) + \mathcal{D}_a^\alpha v(x).$$

✐.

Remarque 3.1. *Si $u \in C^1[a,b]$, alors :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha u = D_a^\alpha u \quad et \quad \mathcal{D}_b^\alpha u = D_b^\alpha u. \tag{3.3}$$

Preuve. *Soit $\varphi \in C_0^\infty[a,b]$, alors :*

$$D_b^\alpha\varphi(x) = {}^cD_b^\alpha\varphi(x).$$

Donc,d'après le théorème (2.6) et l'intégration par parties (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)D_b^\alpha\varphi(x)dx = \int_a^b u(x)^cD_b^\alpha\varphi(x)dx &= -\int_a^b u(x)I_b^{1-\alpha}\varphi'(x)dx\\ &= -\int_a^b I_a^{1-\alpha}u(x)\varphi'(x)dx\\ &= -\left[I_a^{1-\alpha}u(x)\varphi'(x)\right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \frac{d}{dx}I_a^{1-\alpha}u(x)\varphi(x)dx\\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}I_a^{1-\alpha}u(x)\varphi(x)dx\\ &= \int_a^b D_a^\alpha u(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la définition de la dérivée fractionnaire faible on obtient (3.3).
De la même manière, on peut montrer que :

$$\mathcal{D}_b^\alpha u = D_b^\alpha u.$$

Lemme 3.3. *Soient* $\alpha \in (0,1)$ *et* $u \in L^1[a,b]$ *avec :*

$$\int_a^b u(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a,b].$$

Alors, il existe une constante C *telle que :*

$$u(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \quad p.p.\ x \in [a,b].$$

Preuve. *Comme* $\varphi \in C_0^\infty[a,b]$, *alors :*

$$D_b^\alpha \varphi(x) = {}^c D_b^\alpha \varphi(x).$$

En utilisant le théorème (2.6) et l'intégration par partie(2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b u(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx &= \int_a^b u(x) {}^c D_b^\alpha \varphi(x) dx \\ = -\int_a^b u(x) I_b^{1-\alpha} \varphi'(x) dx &= -\int_a^b I_a^{1-\alpha} u(x) \varphi'(x) dx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b I_a^{1-\alpha} u(x) \varphi'(x) dx = 0.$$

Donc, d'après [[6], lemme 8.1], il existe C *telle que :*

$$I_a^{1-\alpha} u(x) = C, \quad p.p.\ x \in [a,b]. \tag{3.4}$$

Maintenant, comme :

$$D_a^{1-\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1},$$

alors, on applique $D_a^{1-\alpha}$ *sur les deux cotés de (3.4) on a :*

$$D_a^{1-\alpha}(I_a^{1-\alpha} u(x)) = D_a^{1-\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}, \quad p.p.\ x \in [a,b],$$

donc

$$u(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}, \quad p.p.\ x \in [a,b].$$

Remarque 3.2. *Comme dans le lemme (3.3), si* $u \in L^1[a,b]$ *avec :*

$$\int_a^b u(x) D_a^\alpha \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a,b],$$

alors, il existe C *telle que :*

$$u(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1} \quad p.p.\ x \in [a,b].$$

Maintenant, motivés par la définition des espaces de sobolev, on introduit les espaces des dérivées fractionnaires suivants :

Définition 3.1. *Soit $\alpha \in (0,1)$. On définit les espaces de dérivée à gauche fractionnaire de type sobolev comme :*

$$E_L^\alpha[a,b] = \left\{ u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^\alpha u \in L^2[a,b] \right\}.$$

On définit la norme :

$$\|u\|_L = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

De la même manière, on définit les espaces de dérivée à droite fractionnaire de type sobolev comme :

$$E_R^\alpha[a,b] = \left\{ u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_b^\alpha u \in L^2[a,b] \right\}.$$

On définit la norme :

$$\|u\|_R = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |\mathcal{D}_b^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

Théorème 3.1. *Les espaces fractionnaires $(E_L^\alpha[a,b], \|.\|_L)$ et $(E_R^\alpha[a,b], \|.\|_R)$ sont des espaces de Banach, réflixifes et séparables.*

Preuve.
Étape1 : $E_L^\alpha[a,b]$ *est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
Soit (u_n) est une suite de Cauchy dans $E_{L,0}^\alpha[a,b]$, alors (u_n) et $(\mathcal{D}_a^\alpha u_n)$ sont des suites de Cauchy dans $L^p[a,b]$, donc :

$$u_n \xrightarrow{L^p[a,b]} u \quad et \quad \mathcal{D}_a^\alpha u_n \xrightarrow{L^p[a,b]} v.$$

Comme $\mathcal{D}_a^\alpha u_n \subset L^p[a,b] \Longrightarrow I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u_n \subset L^p[a,b]$, alors :

$$I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u_n(x) = u_n(x) - \frac{I_a^{1-\alpha} u_n(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \quad p.p \;\; x \in [a,b].$$

$$\Longrightarrow u_n(x) = I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u_n(x) + \frac{I_a^{1-\alpha} u_n(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \quad p.p \;\; x \in [a,b].$$

En passant á la limite pour $n \longrightarrow +\infty$, on a :

$$u(x) = I_a^\alpha v(x) + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{I_a^{1-\alpha} u_n(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}.$$

On pose $A_\alpha = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{I_a^{1-\alpha} u_n(a)}{\Gamma(\alpha)}$ et en composition avec $I_a^{1-\alpha}$, on a :

$$I_a^{1-\alpha} u(x) = I_a^{1-\alpha} I_a^\alpha v(x) + I_a^{1-\alpha} A_\alpha (x-a)^{\alpha-1},$$

d'après le théorème (2.1), on obtient :

$$I_a^{1-\alpha} u(x) = I_a^1 v(x) + A_\alpha I_a^{1-\alpha}(x-a)^{\alpha-1}.$$

Comme $I_a^{1-\alpha} u(x) \in L^p[a,b]$, alors :

$$\frac{d}{dx} I_a^{1-\alpha} u(x) = \frac{d}{dx} I_a^1 v(x) + A_\alpha \frac{d}{dx} I_a^{1-\alpha}(x-a)^{\alpha-1}$$

$$\mathcal{D}_a^\alpha u(x) = v(x) + A_\alpha \mathcal{D}_a^\alpha (x-a)^{\alpha-1},$$

comme $\mathcal{D}_a^\alpha (x-a)^{\alpha-1} = 0$, *on obtient :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha u(x) = v(x).$$

Étape2 : $E_L^\alpha[a,b]$ *est un espace réflexif pour* $1 < p < \infty$.
On a $X = L^p[a,b] \times L^p[a,b]$ *est un espace réflexif.On définit l'opérateur*

$$\begin{aligned} T : E_L^\alpha[a,b] &\longrightarrow L^p[a,b] \times L^p[a,b] \\ u &\longrightarrow T(u) = (u, \mathcal{D}_a^\alpha u) \end{aligned}$$

T est isométrie car :

$$\begin{aligned} \|u\|_X &= \left(\|u\|^p_{L^p[a,b]} + \|\mathcal{D}_a^\alpha u\|^p_{L^p[a,b]} \right)^{\frac{1}{P}} \\ &= \|u\|_L. \end{aligned}$$

Comme $T(E_L^\alpha[a,b])$ *est un sous espace fermé de l'espace de Banach réflexif* X, *alors* $T(E_L^\alpha[a,b])$ *est réflexif, donc* $E_L^\alpha[a,b]$ *est réflexif.*
Étape3 : $E_L^\alpha[a,b]$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < \infty$.
On a $X = L^p[a,b] \times L^p[a,b]$ *est un espace métrique séparable.On définit l'opérateur*

$$\begin{aligned} T : E_L^\alpha[a,b] &\longrightarrow L^p[a,b] \times L^p[a,b] \\ u &\longrightarrow T(u) = (u, \mathcal{D}_a^\alpha u) \end{aligned}$$

T est isométrie car :

$$\begin{aligned} \|u\|_X &= \left(\|u\|^p_{L^p[a,b]} + \|\mathcal{D}_a^\alpha u\|^p_{L^p[a,b]} \right)^{\frac{1}{P}} \\ &= \|u\|_L. \end{aligned}$$

Comme $T(E_L^\alpha[a,b])$ *est un sous espace de l'espace métrique séparable* X, *alors* $T(E_L^\alpha[a,b])$ *est séparable, donc* $E_L^\alpha[a,b]$ *est séparable.*
.

Théorème 3.2. *Soient* $u : [a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et* $\alpha \in \mathbb{R}^+$. *Alors u est localement intégrable sur [a,b) si et seulement si la fonction :*

$$g(x) = \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds$$

existe presque par tout pour $x \geq a$. *De plus* $g \in L^1[a,c]$ *pour tout* $c \in [a,b)$ *et :*

$$\|g\|_{L^1[a,c]} \leq \frac{(c-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{L^1[a,c]}.$$

Preuve. *Soit* $c \in [a,b)$ *telle que* $u \in L^1[a,c]$ *alors :*

$$\|g\|_{L^1[a,c]} = \int_a^c \left| \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds \right| dx \leq \int_a^c |u(s)| \int_s^c (x-s)^{\alpha-1} dx ds \leq \frac{(c-a)^\alpha}{\alpha} \|u\|_{L^1[a,c]}.$$

D'autre part, on suppose que la fonction $(x-s)^{\alpha-1}u(s)$ *est intégrable sur* $[a,x]$. *Alors, étant donné* $c \geq a$, *il existe* $x_0 > c$ *telle que la fonction* $(x_0-s)^{\alpha-1}u(s)$ *est* *intégrable sur* $[a, x_0]$. *Donc, si* $\alpha > 1$, *on a :*

$$\int_a^c |u(s)|ds \leq (x_0 - c)^{1-\alpha} \int_a^c \left|(x_0 - s)^{\alpha-1} u(s)\right| ds.$$

Si $\alpha \in (0, 1]$, *alors :*

$$\int_a^c |u(s)|ds \leq (x_0 - a)^{1-\alpha} \int_a^c \left|(x_0 - s)^{\alpha-1} u(s)\right| ds.$$

Par les dernières expressions on obtient que $u \in L^1[a, c]$. ✐.

Lemme 3.4. *Soient* $g \in L^1_{loc}[a, b]$ *et* $\alpha \in (0, 1)$. *On considère la fonction suivante :*

$$v(x) = I_a^\alpha g(x), \quad x \in (a, b). \tag{3.7}$$

Alors $v \in L^1_{loc}[a, b]$ *et :*

$$\int_a^b v(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b]. \tag{3.8}$$

Preuve. *D'après le théorème (3.2),* $v \in L^1_{loc}[a, b]$.

D'autre part, comme $\varphi \in C_0^\infty[a, b]$, *alors :*

$$D_b^\alpha \varphi(x) =^c D_b^\alpha \varphi(x).$$

Alors, d'après le théorème(2.6), l'intégration par partie (2.3) et le théorème (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b v(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx &= \int_a^b I_a^\alpha g(x)^c D_b^\alpha \varphi(x) dx \\
&= -\int_a^b I_a^\alpha g(x) I_b^{1-\alpha} \varphi'(x) dx \\
&= -\int_a^b I_a^{1-\alpha} I_a^\alpha g(x) \varphi'(x) dx \\
&= -\int_a^b I_a^1 g(x) \varphi'(x) dx \\
&= \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b].
\end{aligned}$$

✐.

Remarque 3.3. *Comme dans le lemme (3.4), si :*

$$v(x) = I_b^\alpha g(x), \quad x \in (a, b).$$

Alors $v \in L^1_{loc}[a, b]$ *et :*

$$\int_a^b v(x) D_a^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b].$$

Théorème 3.3. *Soient $u \in E_L^\alpha[a,b]$ avec $\alpha \in (0,1)$, si :*

$$v(x) = I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u(x).$$

Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$u(x) = v(x) + \frac{\lim_{x \longrightarrow a} I_a^{1-\alpha} u(x)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \quad p.p \;\; x \in [a,b].$$

Preuve. *Soit $u \in E_L^\alpha[a,b]$, alors : $\mathcal{D}_a^\alpha u \in L^2[a,b] \subset L^1[a,b]$.*

Soient $g(x) = \mathcal{D}_a^\alpha u(x)$ et $v(x) = I_a^\alpha g(x)$. Alors, d'après le lemme (3.4) on a :

$$\int_a^b v(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b g(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a,b]. \tag{3.9}$$

D'autre part, par la définition de la dérivée fractionnaire faible (3.1), on obtient :

$$\int_a^b u(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b g(x)\varphi(x) dx. \tag{3.10}$$

Alors, par (3.9) et (3.10), on a :

$$\int_a^b v(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b g(x)\varphi(x) dx = \int_a^b u(x) D_b^\alpha \varphi(x) dx,$$

donc :

$$\int_a^b (v(x) - u(x)) D_b^\alpha \varphi(x) dx = 0.$$

En suite, d'après le lemme (3.3), il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$u(x) = v(x) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \quad p.p \;\; x \in [a,b], \tag{3.11}$$

alors, en appliquant $I_a^{1-\alpha}$ des deux côtés de (3.11) :

$$I_a^{1-\alpha} u(x) = I_a^{1-\alpha} \left(v(x) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \right).$$

Comme $I_a^{1-\alpha}$ est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} I_a^{1-\alpha} u(x) &= I_a^{1-\alpha} v(x) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)} I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\alpha-1} \\ &= I_a^{1-\alpha} (I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u(x)) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)} I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.1), on obtient :

$$I_a^{1-\alpha} u(x) = I_a^1 \mathcal{D}_a^\alpha u(x) - \frac{C}{\Gamma(\alpha)} I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\alpha-1}.$$

De plus, comme :

$$I_a^{1-\alpha} (x-a)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha),$$

alors :

$$I_a^{1-\alpha} u(x) = I_a^1 \mathcal{D}_a^\alpha u(x) - C.$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\int_a^x |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|dx \leq \left(\int_a^x |1|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^x |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sqrt{(x-a)}\|\mathcal{D}_a^\alpha u(x)\|_{L^2[a,b]}.$$

En passant à la limite on a :

$$\lim_{x\longrightarrow a} \int_a^x |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|dx \leq \lim_{x\longmapsto a} \sqrt{(x-a)}\|\mathcal{D}_a^\alpha u(x)\|_{L^2[a,b]},$$

alors :

$$\lim_{x\longrightarrow a} \int_a^x |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|dx = 0.$$

Ce qui implique que :

$$\lim_{x\longrightarrow a} I_a^{1-\alpha} u(x) = \lim_{x\longrightarrow a} \int_a^b |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|dx - C = -C. \tag{3.12}$$

Donc, en remplaçant (3.12) dans (3.11), on obtient :

$$u(x) = I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u(x) + \frac{lim_{x\longmapsto a} I_a^{1-\alpha} u(x)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \quad p.p\ x \in [a,b].$$

✐.

Définition 3.2. *Soit $\alpha \in (0,1); E_{L,0}^\alpha[a,b]$ désigne la fermeture de $C_0^\infty[a,b]$ dans $E_L^\alpha[a,b]$ il est muni par la norme de $E_L^\alpha[a,b]$ c'est-à- dire :*

$$E_{L,0}^\alpha[a,b] = \overline{C_0^\infty[a,b]}^{\|.\|_L}.$$

Maintenant, nous considérons quelques résultats antérieurs pour étudier les propriétés des espaces fractionnaires $E_{L,0}^\alpha[a,b]$.

Lemme 3.5. *L'opérateur $I_a^\alpha : L^2[a,b] \longrightarrow E_L^\alpha[a,b]$ est linéaire et borné.*

Lemme 3.6. *L'opérateur $\mathcal{D}_a^\alpha : E_L^\alpha[a,b] \longrightarrow L^2[a,b]$ est linéaire et continu.*

Lemme 3.7. *Soient $\alpha \in (0,1)$ et $u \in C[a,b]$, alors :*

$$\lim_{x\longmapsto a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0.$$

Preuve. *Notez que :*

$$\begin{aligned}
\left|I_a^{1-\alpha} u(x)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} u(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} |u(t)|dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \sup_{x\in[a,b]} |u(t)|dt \\
&= \frac{\|u\|_\infty}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{\|u\|_\infty}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1}{(1-\alpha)}(x-t)^{1-\alpha}\right]_a^x \\
&= \frac{\|u\|_\infty}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} \\
&= \frac{\|u\|_\infty}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha}, \quad \forall x \in [a,b].
\end{aligned}$$

En passant à la limite on a :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left|I_a^{1-\alpha}u(x)\right| \leq \frac{\|u\|_\infty}{\Gamma(2-\alpha)}\lim_{x\longmapsto a}(x-a)^{1-\alpha},$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow a} I_a^{1-\alpha}u(x) = 0.$$

✐.

Lemme 3.8. *Soit $u \in E^\alpha_{L,0}[a,b]$, alors :*

$$I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u(x) = u(x), \quad p.p.\ x \in [a,b].$$

Preuve. *Soit $u \in E^\alpha_{L,0}[a,b]$, alors par la définition de $E^\alpha_{L,0}[a,b]$ (3.2), il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty[a,b]$ telle que :*

$$\lim_{x\longrightarrow a}\|u-\psi_n\|_L = 0. \tag{3.13}$$

Alors :

$$\|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u - u\|_L \leq \|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha(u-\psi_n)\|_L + \|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha \psi_n - \psi_n\|_L + \|\psi_n - u\|_L. \tag{3.14}$$

Comme $\psi_n \in C_0^\infty[a,b] \subset C^1[a,b]$, d'après la remarque(3.1) on a :

$$\mathcal{D}_a^\alpha \psi_n = D_a^\alpha \psi_n.$$

$\psi_n \in C_0^\infty[a,b] \subset C[a,b]$, d'après le lemme(3.7) on a :

$$\lim_{x\longmapsto a} I_a^{1-\alpha}\psi_n(x) = 0,$$

et d'après le lemme (2.5), on obtient :

$$I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha \psi_n(x) = \psi_n(x).$$

Donc

$$\|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha \psi_n(x) - \psi_n(x)\|_L = \|\psi_n(x)-\psi_n(x)\|_L = 0.$$

D'autre part, d'après le lemme(3.5)

$$\|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha(u-\psi_n)\|_L \leq \left(\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)}+1\right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{D}_a^\alpha(u-\psi_n)\|_{L^2[a,b]}$$

D'après la définition de la norme de $E_L^\alpha[a,b]$, on obtient :

$$\|\mathcal{D}_a^\alpha(u-\psi_n)\|_{L^2[a,b]} \leq \|u-\psi_n\|_L,$$

alors,

$$\|\mathcal{D}_a^\alpha(u-\psi_n)\|_{L^2[a,b]} \leq C\|u-\psi_n\|_L,$$

donc

$$\|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u - u\|_L \leq (C+1)\|u-\psi_n\|_L,$$

en prenant $n \longrightarrow +\infty$, d'après (3.13) on conclu :

$$\|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u - u\|_L = 0,$$

ce qui implique que :

$$\|I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u - u\|_{L^2(a,b)} = 0,$$
$$I_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha u(x) = u(x) \quad p.p.\ x \in [a,b].$$

✐.

Corollaire 3.1. ***(Inégalité de Poincaré Fractionnaire)***
Pour tout $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *on a :*

$$\|u\|_{L^2[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|\mathcal{D}^{\alpha}_{a} u\|_{L^2[a,b]}. \tag{3.15}$$

Remarque 3.4. *D'après le corollaire (3.1), on peut muni* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *avec la norme :*

$$\|u\|_{\alpha} = \left(\int_a^b |\mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui équivalent à $\|.\|_L$.

Théorème 3.4. *Soit* $\alpha \in (0,1)$, *si* $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *alors :*

$$\lim_{x \longrightarrow a} I^{1-\alpha}_{a} u(x) = 0, \quad p.p. \ x > a.$$

Preuve. *On dit que si* $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *alors* $u, \mathcal{D}^{\alpha}_{a} u \in L^2[a,b]$. *En fait, par la définition (3.2) il existe* $\varphi_n \in C^{\infty}_0[a,b]$ *telle que :*

$$\|u - \varphi_n\|_L \longrightarrow 0 \ \ pour \ \ n \longrightarrow +\infty.$$

Alors, d'après le lemme de Fatou, on a :

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \lim_{n \longmapsto +\infty} \inf \int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx < +\infty$$

et

$$\int_a^b |\mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)|^2 dx \leq \lim_{n \longmapsto +\infty} \inf \int_a^b |\mathcal{D}^{\alpha}_{a} \varphi_n(x)|^2 dx < +\infty.$$

Ainsi, d'après le lemme(3.8) et le théorème(2.1), on a :

$$I^{1-\alpha}_{a} u(x) = I^{1-\alpha}_{a} (I^{\alpha}_{a} \mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)) = I^{1}_{a} \mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^x |\mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)| dx &\leq \left(\int_a^x |1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^x |\mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{(x-a)} \|\mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x)\|_{L^2[a,b]}, \end{aligned}$$

en passant à la limite on a :

$$\lim_{x \longmapsto a} I^{1-\alpha}_{a} u(x) = \lim_{x \longmapsto a} \int_a^x \mathcal{D}^{\alpha}_{a} u(x) dx = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \longmapsto a} I^{1-\alpha}_{a} u(x) = 0.$$

✎.

3.2 Injection des résultats

Injection continu

Théorème 3.5. *Si* $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, *alors l'injection* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b] \hookrightarrow L^q[a,b]$ *est continu pour tout* $q \in [1, 2^*_\alpha]$, *où* $2^*_\alpha = \dfrac{2}{1-2\alpha}$ *est l'exposant critique fractionnaire.*

Preuve. *D'abord, nous considérons* $q = 2^*_\alpha$. *D'après le lemme(3.8), pour tout* $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *on a :*

$$u(x) = I^{\alpha}_{a}\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u(x) \quad p.p. \ x \in [a,b].$$

De plus, d'après le théorème (3.4),$u, \mathcal{D}^{\alpha}_{a}u \in L^2[a,b]$, *alors d'après le théorème (2.2) on a :*

$$\|u\|_{L^{2^*_\alpha}[a,b]} = \|I^{\alpha}_{a}\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u\|_{L^{2^*_\alpha}[a,b]} \leq \frac{[2^*_\alpha]^{\frac{1}{1+2\alpha}}}{\Gamma(\alpha+1)}\|\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u\|_{L^2[a,b]}. \tag{3.16}$$

En suite, comme $[a,b]$ *est borné, il existe une constante positive* C *telle que :*

$$\|u\|_{L^q[a,b]} \leq C\|u\|_{L^{2^*_\alpha}[a,b]} \quad \forall q \in [1, 2^*_\alpha].$$

Combiner avec(3.16), on obtient :

$$\|u\|_{L^q[a,b]} \leq \frac{[2^*_\alpha]^{\frac{1}{1+2\alpha}}C}{\Gamma(\alpha+1)}\|\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u\|_{L^2[a,b]} \quad \forall q \in [1, 2^*_\alpha].$$

On a $\|u\|_\alpha = \|\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u\|_{L^2[a,b]}$,

$$\|u\|_{L^q[a,b]} \leq \frac{[2^*_\alpha]^{\frac{1}{1+2\alpha}}C}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_\alpha \quad \forall q \in [1, 2^*_\alpha].$$

✐.

Théorème 3.6. *Si* $\alpha = \dfrac{1}{2}$, *alors l'injection* $E^{\frac{1}{2}}_{L,0}[a,b] \hookrightarrow L^p[a,b]$ *est continu pour tout* $p \in [1, +\infty)$.

Preuve. *Soit* $u \in E^{\frac{1}{2}}_{L,0}[a,b]$, *alors, d'après le lemme (3.8)*

$$u(x) = I^{\frac{1}{2}}_{a}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a}u(x) \quad p.p. \ x \in [a,b].$$

Donc, d'après le théorème(2.2) on a :

$$\|u\|_{L^p[a,b]} = \|I^{\frac{1}{2}}_{a}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a}u\|_{L^p[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})[\frac{p}{2}+1]^{\frac{1}{p}}}\|u\|_{L^2[a,b]}$$

pour tout $p \in [1, +\infty)$,. ✐.

Théorème 3.7. *Si* $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, *alors l'injection* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b] \hookrightarrow H^{\alpha-\frac{1}{2}}[a,b]$ *est continu. De plus :*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}}\|\mathcal{D}^{\alpha}_{a}u\|_{L^2[a,b]}. \tag{3.17}$$

Preuve. *Soit* $u \in E_{L,0}^{\frac{1}{2}}[a,b]$*, alors, D'après l'inégalité de Hölder :*

$$\begin{aligned}|u(x)| = |I_a^{\alpha}\mathcal{D}_a^{\alpha}u(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\mathcal{D}_a^{\alpha}u(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x (x-s)^{2(\alpha-1)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^x |\mathcal{D}_a^{\alpha}u(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\|\mathcal{D}_a^{\alpha}u\|_{L^2(a,b)}}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}}(x-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Ce qui implique(3.17). D'autre part, soit $a \leq x < z \leq b$*, alors d'après le théorème (2.2) on obtient :*

$$|u(x_2)-u(x_1)| = |I_a^{\alpha}\mathcal{D}_a^{\alpha}u(x_2) - I_a^{\alpha}\mathcal{D}_a^{\alpha}u(x_1)| \leq \frac{(x_2-x_1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}}\|\mathcal{D}_a^{\alpha}u\|_{L^2[a,b]}. \quad (3.18)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{\alpha-\frac{1}{2}}[a,b]} &= \|u\|_{\infty} + \sup_{x,y\in[a,b],x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha-\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}}\|\mathcal{D}_a^{\alpha}u\|_{L^2[a,b]} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}}\|\mathcal{D}_a^{\alpha}u\|_{L^2[a,b]} \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}+1}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}}\|\mathcal{D}_a^{\alpha}u\|_{L^2[a,b]}.\end{aligned}$$

✎.

Injection compact

Théorème 3.8. *Si* $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$*, alors l'injection* $E_{L,0}^{\alpha}[a,b] \hookrightarrow L^p[a,b]$ *est compact pour tout* $p \in [1, 2_{\alpha}^*)$.

Preuve. *D'après le théorème (3.5).L'opérateur* $i : E_{L,0}^{\alpha}[a,b] \hookrightarrow L^p[a,b]$ *avec* $p \in [1, 2_{\alpha}^*]$ *est borné. De plus, il existe une constante* $C_p > 0$ *telle que :*

$$\|u_n\|_{L^p[a,b]} \leq C_p\|u_n\|_{\alpha} \quad \forall p \in [1, 2_{\alpha}^*]. \quad (3.19)$$

Donc, si $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $E_{L,0}^{\alpha}[a,b]$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $E_{L,0}^{\alpha}[a,b]$ *et par (3.19) est borné dans* $L^p[a,b]$ *pour tout* $p \in [1, 2_{\alpha}^*]$*. De l'autre côté, comme la suite :* $(\mathcal{D}_a^{\alpha}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $L^2[a,b]$*, D'après le théorème (2.3)-(2), la suite* $(I_a^{\alpha}(\mathcal{D}_a^{\alpha}u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est précompact dans* $L^p[a,b]$ *pour tout* $p \in [1, 2_{\alpha}^*)$*, c'est qu'il existe une suite croissante* $(u_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $u \in L^p[a,b]$ *telle que :*

$$\|I_a^{\alpha}(\mathcal{D}_a^{\alpha}u_{nk}) - u\|_{L^p(a,b)} \longrightarrow 0 \quad pour \quad k \longrightarrow +\infty$$

Maintenant, comme $u_n \in E_{L,0}^{\alpha}[a,b]$*, alors* $u_n(x) = I_a^{\alpha}(\mathcal{D}_a^{\alpha}u_n(x))$*, alors :*
$i(u_n) = (i \circ I_a^{\alpha})(\mathcal{D}_a^{\alpha}u_n)$*, par la continuité de* i*, on conclu que l'opérateur*
$i : E_{L,0}^{\alpha}[a,b] \hookrightarrow L^p[a,b]$ *est compact pour tout* $p \in [1, 2_{\alpha}^*)$. ✎.

Théorème 3.9. *Soit* $\alpha = \dfrac{1}{2}$*, alors* $E_{L,0}^{\alpha}[a,b] \hookrightarrow L^p[a,b]$ *est compact pour tout* $p \in [1, \infty)$.

Théorème 3.10. *On suppose que* $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, *et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *alors :*

$$u_n \longrightarrow u \ \ dans \ \ C[a,b]$$

C'est-à-dire : $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u - u_n\|_{\infty} = 0.$

Preuve. *Comme* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$, *donc d'après le théorème (3.7),* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $C[a,b]$. *Maintenant on dit que :*

(a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément borné.Comme* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$, *alors il existe* $K > 0$ *telle que*

$$\|u_n\|_{\alpha} \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, d'après (3.17) on a :

$$\|u_n\|_{\infty} \leq \frac{K(b-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui implique la bornitude uniforme de u_n.

(b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinu. Soit* $a \leq x < y \leq b$, *alors D'après (3.18) on a :*

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \frac{K(y-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)[2\alpha-1]^{\frac{1}{2}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est précompact dans* $C[a,b]$, *donc il existe une suite croissante* $(u_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ *et* u *dans* $C[a,b]$ *telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_{nk} - u\|_{\infty} = 0.$$

.

3.3 Le caractérisation des espaces des dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous allons caractériser les espaces fractionnaires $E^{\alpha}_{L}[a,b]$ et $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$. On commence notre analyse en considérant les espaces fractionnaires $E^{\alpha}_{L}[a,b]$:

Théorème 3.11. *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *et* $u \in E^{\alpha}_{L}[a,b]$ *si et seulement si* $u \in L^2[a,b], I^{1-\alpha}_a u \in H^1[a,b]$ *et*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_a u(x) = \frac{d}{dx} I^{1-\alpha}_a u(x) \ \ p.p. \ \ x \in (a,b).$$

où $\frac{d}{dx}$ *s'entend au sens faible.*

Preuve. *Soit* $u \in E^{\alpha}_{L}[a,b]$. *Le théorème(3.3) implique que :*

$$u(x) = I^{\alpha}_a \mathcal{D}^{\alpha}_a u(x) + \frac{lim_{x\longmapsto a} I^{1-\alpha}_a u(x)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \quad p.p \ \ x \in (a,b). \tag{3.20}$$

En suite, on applique $I_a^{1-\alpha}$ sur les deux côtés de (3.20) :

$$\begin{aligned} I_a^{1-\alpha}u(x) &= I_a^{1-\alpha}\left(I_a^{\alpha}\mathcal{D}_a^{\alpha}u(x) + \frac{lim_{x\longmapsto a}I_a^{1-\alpha}u(x)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}\right) \\ &= \int_a^b \mathcal{D}_a^{\alpha}u(x)dx + lim_{x\longmapsto a}I_a^{1-\alpha}u(x), \end{aligned}$$

de la dernière expression, on obtenue $I_a^{1-\alpha}u(x) \in AC[a,b]$ et ainsi $I_a^{1-\alpha}u \in H^1[a,b]$ d'autre part, comme $I_a^{1-\alpha}u \in H^1[a,b]$, il existe $g \in L^2[a,b]$ telle que :

$$\int_a^b I_a^{1-\alpha}u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in C_0^{\infty}[a,b].$$

En outre, on utilise le théorème(2.6) et l'intégration par partie (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)D_b^{\alpha}\varphi(x)dx = \int_a^b u(x)^c D_b^{\alpha}\varphi(x)dx &= -\int_a^b u(x)I_b^{1-\alpha}\varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^b I_a^{1-\alpha}u(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}u(x) = g(x) = \frac{d}{dx}I_a^{1-\alpha}u(x)$$

où $\frac{d}{dx}$ s'entend au sens faible.
De l'autre côté, on suppose que $u \in L^2[a,b]$ telle que : $I_a^{1-\alpha}u \in H^1[a,b]$ et

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}u(x) = \frac{d}{dx}I_a^{1-\alpha}u(x).$$

Comme $I_a^{1-\alpha}u \in H^1[a,b]$ alors $\frac{d}{dx}I_a^{1-\alpha}u \in L^2[a,b]$. Donc $\mathcal{D}_a^{\alpha}u \in L^2[a,b]$. alors $u \in E_L^{\alpha}[a,b]$. ✐.

Théorème 3.12. *Soit $\alpha \in (0,1)$, alors :*

$$E_{L,0}^{\alpha}[a,b] = \left\{u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^{\alpha}u \in L^2[a,b] \;\; et \;\; \lim_{x\longmapsto a} I_a^{1-\alpha}u(x) = 0, \quad p.p. \;\; x > a\right\}.$$

En outre, si $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ on a :

$$E_{L,0}^{\alpha}[a,b] = \left\{u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^{\alpha}u \in L^2[a,b] \;\; et \;\; \lim_{x\longrightarrow a} I_a^{1-\alpha}u(x) = 0, \quad \forall \;\; x > a\right\},$$

et si $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ on a :

$$E_{L,0}^{\alpha}[a,b] = \left\{u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^{\alpha}u \in L^2[a,b] \;\; et \;\; u(a) = u(b) = 0\right\}.$$

Preuve. *Par la définition (3.2) on a :*

$$E_{L,0}^{\alpha}[a,b] = \overline{C_0^{\infty}[a,b]}^{\|.\|_L},$$

donc, pour tout $u \in E_{L,0}^{\alpha}[a,b]$ il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^{\infty}[a,b]$ telle que :

$$\lim_{x\longmapsto a} \|u - \varphi_n\|_L = 0.$$

Alors, d'après le lemme de Fatou, on a :

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \lim_{n \longmapsto +\infty} \inf \int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx < +\infty$$

et

$$\int_a^b |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|^2 dx \leq \lim_{n \longmapsto +\infty} \inf \int_a^b |\mathcal{D}_a^\alpha \varphi_n(x)|^2 dx < +\infty.$$

Donc, $u \in L^2[a,b]$ *et* $\mathcal{D}_a^\alpha u \in L^2[a,b]$. *Ainsi, d'après le théorème (3.4), si* $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ *alors :*

$$\lim_{x \longmapsto a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0, \quad p.p. \ x > a.$$

Donc :

$$E_{L,0}^\alpha[a,b] = \left\{ u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^\alpha u \in L^2[a,b] \ \ et \ \ \lim_{x \longmapsto a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0, \quad p.p. \ x > a \right\}.$$

D'autre part, si $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ *le théorème* (2.2) *implique que :*

$$\lim_{x \longmapsto a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0, \quad \forall \ x > a.$$

car $1 - \alpha > \dfrac{1}{2}$. *Donc :*

$$E_{L,0}^\alpha[a,b] = \left\{ u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^\alpha u \in L^2[a,b] \ \ et \ \ \lim_{x \longmapsto a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0, \quad \forall \ x > a \right\}.$$

Si $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, *alors d'après le théorème (3.10) on a :*

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_L.$$

Par la définition de $E_{L,0}^\alpha[a,b]$, *alors il existe une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty[a,b]$ *telle que :*

$$\lim_{x \longmapsto a} \|u - \varphi_n\|_L = 0 \tag{3.21}$$

Donc :

$$\|u - \varphi_n\|_\infty \leq C_\infty \|u - \varphi_n\|_L$$
$$\max_{x \in (a,b)} |u(x) - \varphi_n(x)| \leq C_\infty \|u - \varphi_n\|_L$$

Alors

$$|u(a) - \varphi_n(a)| \leq C_\infty \|u - \varphi_n\|_L$$

Comme $\varphi_n(a) = 0$ *et par (3.21) alors :*

$$0 \leq |u(a)| \leq C_\infty \|u - \varphi_n\|_L \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ n \longrightarrow \infty,$$

ce qui implique que $u(a) = 0$. *de la même manière on peut avoir* $u(b) = 0$. *Donc, si* $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ *on obtient :*

$$E_{L,0}^\alpha[a,b] = \left\{ u \in L^2[a,b] : \mathcal{D}_a^\alpha u \in L^2[a,b] \ \ et \ \ u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

✐.

3.4 La composition de $\mathcal{D}_a^{\alpha}$ avec une fonction convexe

Théorème 3.13. *soit $\alpha \in (0,1)$ et $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction convexe telle que $\Phi(0) = 0$. Alors, pour tout $u \in E_{L,0}^{\alpha}[a,b]$ on a :*

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}\Phi(u) \leq \Phi'(u)\mathcal{D}_a^{\alpha}u.$$

Preuve. *D'abord, on dit que, si $\varphi \in C^1[a,b]$, alors*

$$^cD_b^{\alpha}\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(x) - \varphi(s)}{(x-s)^{\alpha+1}}ds. \tag{3.22}$$

En fait, notez que :

$$(x-s)^{-\alpha} = (x-a)^{-\alpha} + \alpha\int_a^s (x-t)^{-\alpha-1}dt. \tag{3.23}$$

Par le théorème(2.6) et(3.23) :

$$\begin{aligned}
^cD_a^{\alpha}\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-s)^{-\alpha}\varphi'(x)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left((x-a)^{-\alpha} + \alpha\int_a^s (x-t)^{-\alpha-1}dt\right)\varphi'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_a^x (x-a)^{-\alpha}\varphi'(s)ds + \alpha\int_a^s (x-t)^{-\alpha-1}dt\varphi'(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\int_a^x \varphi'(s)ds + \alpha\int_a^x\int_a^s (x-t)^{-\alpha-1}dt\varphi'(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\left[\varphi(s)\right]_a^x + \alpha\int_a^x\int_a^s (x-t)^{-\alpha-1}dt\varphi'(s)ds\right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fibuni

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x\int_t^x (x-t)^{-\alpha-1}\varphi'(s)dsdt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x \frac{\left[\varphi(s)\right]_t^x}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}dt\right).
\end{aligned}$$

Soit $u \in E_{L,0}^{\alpha}[a,b]$, alors par la définition (3.2) il existe $\Phi_n \in C_0^{\infty}[a,b]$ telle que :

$$\|u - \varphi_n\|_L \longrightarrow 0 \text{ pour } n \longrightarrow \infty, \tag{3.24}$$

ce qui implique que

$$\|u - \varphi_n\|_{L^2[a,b]} \longrightarrow 0 \quad \text{et } \|\mathcal{D}_a^{\alpha}u - \mathcal{D}_a^{\alpha}\varphi_n\|_{L^2[a,b]} \longrightarrow 0 \text{ pour } n \longrightarrow \infty. \tag{3.25}$$

Donc par (3.22) on a :

$$D_a^{\alpha}\varphi_n(x) =^c D_a^{\alpha}\varphi_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(s)}{(x-s)^{\alpha+1}}ds$$

De plus $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ est convexe, alors :

$$\Phi(a) - \Phi(b) \leq \Phi'(a)(a-b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

En suite :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha \Phi(\varphi_n(x)) &= \frac{\Phi(\varphi_n(x)) - \Phi(\varphi_n(a))}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{\Phi(\varphi_n(x)) - \Phi(\varphi_n(s))}{(x-s)^{\alpha+1}} ds \\
&\leq \Phi'(\varphi_n(x)) \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \Phi'(\varphi_n(x)) \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(s)}{(x-s)^{\alpha+1}} ds \\
&= \Phi'(\varphi_n(x)) \left(\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(s)}{(x-s)^{\alpha+1}} ds \right) \\
&= \Phi'(\varphi_n(x)) D_a^\alpha \varphi_n(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$D_a^\alpha \Phi(\varphi_n(x)) \leq \Phi'(\varphi_n(x)) D_a^\alpha \varphi_n(x). \tag{3.26}$$

De l'autre côté, comme $\Phi' \in C(\mathbb{R})$, par (3.24) on obtient :

$$\Phi'(\varphi_n(x)) \longrightarrow \Phi'(u(x)) \quad p.p. \;\; x \in (a,b). \tag{3.27}$$

Et par (3.25) on a :

$$\mathcal{D}_a^\alpha(\varphi_n(x)) \longrightarrow \mathcal{D}_a^\alpha(u(x)) \quad p.p \;\; x \in (a,b). \tag{3.28}$$

Donc, par (3.26), (3.27) et (3.28) on obtient :

$$\mathcal{D}_a^\alpha \Phi(u(x)) \leq \Phi'(u(x)) \mathcal{D}_a^\alpha u(x)$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\mathcal{D}_a^\alpha \Phi(u(x))|^2 dx &\leq \int_a^b |\Phi'(u(x)) \mathcal{D}_a^\alpha u(x)|^2 dx \\
&\leq [\max_{x\in[a,b]} \Phi'(u(x))]^2 \int_a^b |\mathcal{D}_a^\alpha u(x)|^2 dx,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\Phi(u) \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$. ✐.

Remarque 3.5. *Si $\Phi \in Lip(\mathbb{R})$ est une fonction convexe et dérivable presque par tout telle que $\Phi(0) = 0$, alors le théorème (3.13) est vrai, c'est -à- dire :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha \Phi(u) \leq \Phi'(u) \mathcal{D}_a^\alpha u$$

et $\Phi(u) \in E_{L,0}^\alpha(a,b)$.
Dans ce qui suite, on note par u^+ la partie positive d' une fonction u, c'est -à- dire :

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$$

Lemme 3.9. *Soit u,v : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|u^+(x) - v^+(y)| \leq |u(x) - v(y)|.$$

Lemme 3.10. *Soit $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$. Alors sa partie positive $u^+ \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$.*

Preuve. *D'après le lemme (3.9) avec $v = u$, la fonction u^+ est lipschitzienne continue avec constante 1 et d'après le théorème de Rademacher u^+ est dérivable presque par tout. Donc, d'après la remarque (3.5) on obtient que $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ et :*

$$\mathcal{D}_a^\alpha u^+(x) \leq (u^+(x))' \mathcal{D}_a^\alpha u$$

et $u^+ \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$. ✐.

Chapitre 4

Applications aux problèmes aux limites

Dans ce chapitre, nous étudions deux problèmes (Voir [4]) :

– Problème linéaire aux limites (étude de l'existence et l'unicité).
– Problème non linéaire (étude de l'existence de plusieurs solutions)

4.1 Problème 01 : Le problème linéaire

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On considère le problème linéaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \\ D_b^\alpha(D_a^\alpha u) = f, \ \text{ p.p sur } (a,b), \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Où $\alpha \in (0,1)$, et $f \in L^2[a,b]$.
D_a^α, D_b^α sont les dérivées faibles fractionnaires à gauche et droite respectivement.
La solution forte : Comme $f \in L^2[a,b]$ alors la fonction $D_a^\alpha u$ admet une dérivée faible droite dans $L^2[a,b]$ donc il suffit de prendre $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ et $D_b^\alpha(D_a^\alpha u) \in L^2[a,b]$.

Proposition 4.1. *La solution faible du problème (4.1) est une fonction de $E_{L,0}^\alpha[a,b]$ qui vérifiée :*

$$\int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in E_{L,0}^\alpha[a,b]. \tag{4.2}$$

Preuve. *On multiplie l'équation du problème (4.1) par une fonction de test φ et on intègre sur $[a,b]$.*

$$\int_a^b D_b^\alpha(D_a^\alpha u(x)) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D[a,b].$$

D'après la définition de la dérivée faible (3.1), ona :

$$\int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D[a,b].$$

Comme $D[a,b]$ *dense dans* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$, *alors pour tout* $v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *il existe une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D[a,b]$ *telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|v-\varphi_n\|_L = 0, \quad .$$

Alors :

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad \forall \varphi_n \in D[a,b].$$

En passant à la limite pour $n \longrightarrow +\infty$, *on obtient :*

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b].$$

Donc la formulation variationnelle est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b] \text{ telle que }, \\ \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]. \end{cases}$$

Avec : $a(u,v) = \displaystyle\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a v(x)dx, \;\; l(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$

✎.

Proposition 4.2. *Le problème (4.2) admet une solution unique dans l'espace* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$.

Preuve. *On muni l'espace* $E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *par la norme* $\|u\|_{\alpha} = \|D^{\alpha}_a u\|_{L^2}$.
D'après le théorème de Lax-Milgram,on a :

1. *La continuité de* $a(.,.)$ *:*

$$\exists C > 0, \forall u,v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b] : |a(u,v)| \le C\|u\|_{\alpha}\|v\|_{\alpha}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall u,v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b], \quad |a(u,v)| &= \left| \int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a v(x)dx \right| \\ &\le \int_a^b |D^{\alpha}_a u(x)||D^{\alpha}_a v(x)|dx \\ &\le \left(\int_a^b |D^{\alpha}_a u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |D^{\alpha}_a v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|u\|_{L^2[a,b]}\|v\|_{L^2[a,b]} \\ &\le \|u\|_{\alpha}\|v\|_{\alpha} \end{aligned}$$

Alors, $\exists C = 1$ *telle que* $|a(u,v)| \le \|u\|_{\alpha}\|v\|_{\alpha}, \forall u,v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ *donc* $a(.,.)$ *est continu.*

2. *La coercivité de* $a(.,.)$ *:*

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b] : |a(u,u)| \ge \alpha\|u\|^2_{\alpha}.$$

$$a(u,u) = \int_a^b |D^{\alpha}_a u(x)|^2 dx = \|D^{\alpha}_a u\|^2_{L^2[a,b]} = \|u\|^2_{\alpha}$$

Alors, $\exists \alpha = 1, \forall u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b] : |a(u,u)| \ge \|u\|^2_{\alpha}.$

3. La continuité de $l(.)$:

$$\exists C > 0, \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b] : |l(v)| \leq C\|v\|_{\alpha}.$$

En utilisant les inégalié de Cauchy Schwartz et Pointcaré, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b] : \quad |l(v)| &= \left|\int_a^b f(x)v(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)||v(x)|dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2[a,b]}\|v\|_{L^2[a,b]} \\ &\leq \|f\|_{L^2[a,b]} \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \|D^{\alpha}_a v\|_{L^2[a,b]} \\ &= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \|f\|_{L^2[a,b]}\|v\|_{\alpha} \\ &= C\|v\|_{\alpha}\end{aligned}$$

Alors, $l(v)$ est continu.

D'après (1),(2) et (3) le problème admet une solution unique. ✐.

Proposition 4.3. *La solution faible du (4.1) est une solution forte.*

Preuve. *Soit $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow a} I^{1-\alpha}_a u(x) = 0$, on a :*

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a,b].$$

Comme $D[a,b] \subset E^{\alpha}_{L,0}[a,b]$, alors :

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in D[a,b].$$

Comme $D^{\alpha}_a \varphi =^c D^{\alpha}_a \varphi$, on a :

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x)^c D^{\alpha}_a \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in D[a,b].$$

D'après le théorème (2.6), on a :

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) I^{1-\alpha}_a \varphi'(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

D'après l'intégration par partie (2.3), on a :

$$\int_a^b I^{1-\alpha}_b D^{\alpha}_a u(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} I^{1-\alpha}_b D^{\alpha}_a u(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

D'après la définition de dérivée faible(2.1), on obtient :

$$\int_a^b D_b^\alpha D_a^\alpha u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

Donc :

$$D_b^\alpha D_a^\alpha u - f = 0 \quad p.p \;\; x \in [a,b].$$

C'est-à-dire :

$$D_b^\alpha D_a^\alpha u = f \quad p.p \;\; x \in [a,b].$$

✐.

4.2 Problème 02 :Le problème non linéaire

Étape 01 : Cas $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On considère le problème non linéaire voir suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V, \\ \\ D_b^\alpha(D_a^\alpha u) = f(u), \;\; p.p \text{ sur } (a,b), \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a} I_a^{1-\alpha} u(x) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

avec les hypothèses suivantes :
(H_1) **:** $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ et $p \in (1, 2_\alpha^* - 1)$. $2_\alpha^* = \dfrac{2}{1-2\alpha}$
(H_2) **:** $f(u) = \lambda(u^+)^\sigma + (u^+)^p, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma \in (0,1)$, $u^+(x) = max(u(x), 0)$
La solution forte : on a
$\forall x \in [a,b] : \; |f(u(x))| \leq \lambda |u(x)|^\sigma + |u(x)|^p \leq \lambda + (1+\lambda)|u(x)|^p.$
Si on prend $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ (pour prendre la condition aux limites en considération) et comme l'injection $E_{L,0}^\alpha \hookrightarrow L^p$ est continue d'après (3.5), ona

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(u)|\, dx &\leq \lambda(b-a) + (1+\lambda) \int_a^b |u^p|\, dx \\ &\leq \lambda(b-a) + C\|u\|_\alpha^p, \end{aligned}$$

alors $f(u) \in L^1[a,b]$, donc la solution forte du probème $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ est admet une dérivée fractionnaire faible à droite dans $L^1[a,b]$.
Plus précisement, si on pose $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q} = 1$ c'est-à-dire $q = 1 + \dfrac{1}{p} > 1$ alors $L^{p+1} \hookrightarrow E_{L,0}^\alpha$ est continue d'après l'inégalité de Hölder on a $f \in L^q[a,b]$.
Nous introduisons la fonctionnelle $I : E_{L,0}^\alpha[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ définit par :

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_a^b |D_a^\alpha u|^2 dx - \int_a^b F(u) dx = I_1 + I_2,$$

avec :
-$F(u) = \displaystyle\int_0^u f(x)dx.$

-$I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b |D_a^\alpha u|^2 dx$

-$I_2 = I_{2.1} + I_{2.2} = \displaystyle\int_a^b \dfrac{1}{p+1}(u^+)^{p+1} dx + \int_a^b \dfrac{\lambda}{\sigma+1}(u^+)^{\sigma+1} dx$

I **est bien définie :**
I_1 est bien définie car $D_a^\alpha u \in L^2[a,b]$.
I_2 est bien définie car $E_{L,0}^\alpha[a,b]$ s'injecte continument dans $L^{\sigma+1}[a,b], L^{p+1}[a,b]$.

Proposition 4.4. *La fonctionnelle I est de classe $C^1(E_{L,0}^\alpha[a,b],\mathbb{R})$, tout point $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ point critique de I est vérifie la formulation variationnelle :*

$$\forall v \in E_{L,0}^\alpha[a,b] : \int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha v(x) dx = \int_a^b f(u(x))v(x) dx$$

Preuve. *Montrons que I_1 est G-diff et sa dérivée est continue. Soit $u, v \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} &= \frac{\frac{1}{2}\int_a^b |D_a^\alpha(u+tv)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b |D_a^\alpha(u)|^2 dx}{t} \\
&= \frac{1}{2t}\left[\int_a^b |D_a^\alpha u|^2 dx + t^2\int_a^b |D_a^\alpha v|^2 dx + 2t\int_a^b D_a^\alpha u D_a^\alpha v dx - \int_a^b |D_a^\alpha u|^2 dx\right] \\
&= \frac{1}{2t}\left[t^2\int_a^b |D_a^\alpha v|^2 dx + 2t\int_a^b D_a^\alpha u D_a^\alpha v dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[t\int_a^b |D_a^\alpha v|^2 dx + 2\int_a^b D_a^\alpha u D_a^\alpha v dx\right]
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = \int_a^b D_a^\alpha u D_a^\alpha v dx$$

Montrons que l'application $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b] \mapsto I_1'(u) \in (E_{L,0}^\alpha[a,b])'$ est continue.
Soit $u_n \xrightarrow{E_{L,0}^\alpha[a,b]} u$ alors $D_a^\alpha u_n \xrightarrow{L^2[a,b]} D_a^\alpha u$. On a :

$$\begin{aligned}
|I_1'(u_n)(v) - I_1'(u)(v)| &= \left|\int_a^b (D_a^\alpha u_n - D_a^\alpha u) D_a^\alpha v dx\right| \\
&\leq \|D_a^\alpha u_n - D_a^\alpha u\|_{L^2[a,b]} \|D_a^\alpha v\|_{L^2[a,b]} \\
&\leq \|D_a^\alpha u_n - D_a^\alpha u\|_{L^2[a,b]} \|v\|_\alpha
\end{aligned}$$

$$\textit{donc } \frac{|I_1'(u_n)(v) - I_1'(u)(v)|}{\|v\|_\alpha} \leq \|D_a^\alpha u_n - D_a^\alpha u\|_{L^2[a,b]},$$

on prend le sup par rapport à v et en passant à la limite pour $n \to \infty$ nous obtenons que :

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(E_{L,0}^\alpha([a,b]))'} \longrightarrow 0.$$

Donc, I_1' est continue.

Maintenant, montrons que I_2 est G-diff et sa dérivée est continue.

*) *D'abord : on montre que $I_{2.1}$ est G-diff et sa dérivée est continue.*
Soit $|t| < 1$ on pose $S(t) = |u + tv|^{p+1}$, on applique le théorème des accroissement finis sur S dans $[0, t]$, alors il existe un nombre $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned}|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1} - (p + 1)tv|u|^{p-1}u &= t(p + 1)v|u + \theta tv|^{p-1}(u + \theta tv) - t(p + 1)v|u|^{p-1}u \\ &= (p + 1)tv(|u + \theta tv|^{p-1}(u + \theta tv) - |u|^{p-1}u)\end{aligned}$$

Par continuité, dans le second membre tend vers 0 presque partout sur [a,b] lorsque $t \to 0$.
En majorant Le second membre par une fonction intégrable sur $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1} - ptv|u|^{p-1}u}{t}\right| &\leq (p + 1)|v|(((|u| + |v|)^p + |u|^p) \\ &\leq (p + 1)|v|(2^{p-1}(|u|^p + |v|^p) + |u|^p) \\ &\leq (p + 1)|v|((2^{p-1} + 1)|u|^p + 2^{p-1}|v|^p) \\ &\leq c|v|(|u|^p + |v|^p)\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'injection continue de $E^{\alpha}_{L,0}[a, b]$ dans $L^p(a, b)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que l'intégrale de cette dernière fonction est majorée par $\|v\|_{\alpha}(\|u\|_{\alpha} + \|v\|_{\alpha})$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure la G-différentiabilité de $I_{2.1}$ au point u.
Montrons que l'application $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a, b] \mapsto I'_{2,1}(u) \in (E^{\alpha}_{L,0}[a, b])'$ est continue.
On a $I'_{2.1}(u) = |u^+|^{p-1}u^+ = (u^+)^p$. Soit $u_n \xrightarrow{E^{\alpha}_{L,0}[a,b]} u$ montrons que $I'_{2.1}u_n \to I'_{2.1}u$ dans $(E^{\alpha}_{L,0}[a, b])'$
Comme $u_n \xrightarrow{E^{\alpha}_{L,0}[a,b]} u$ et l'injection de $E^{\alpha}_{L,0}[a, b]$ dans $L^p[a, b]$ est continue alors, $v \in L^p[a, b]$ on a

$$\begin{aligned}|(I'_{2.1}(u_n) - I'_{2.1}(u))(v)| &= |\int_a^b ((u^+)^p_n - (u^+)^p)(v)dx| \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^q[a,b]}\|v\|_{L^p[a,b]}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|I'_{2.1}(u_n) - I'_{2.1}(u)\|_{\left(E^{\alpha}_{L,0}[a,b]\right)'} \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

*) *De la même manière on va monter que $I_{2.2}$ est G-diff et sa dérivée est continue.*
Alors I_2 est G-diff et sa dérivée est continue.par conséquent I est de classe C^1.
De plus si u est un point critique alors on a $I'(u)(v) = 0; \quad \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}([a, b])$
✎.

Proposition 4.5. *Si I admet une minimum alors on a :*

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x)D^{\alpha}_a v(x)dx = \int_a^b f(u)vdx, \quad \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a, b].$$

C'est-à-dire : u est une solution faible du problème (4.3).

Preuve. *On multiplie l'équation du problème (4.3) par une fonction de test* φ *et on intègre sur* $[a,b]$.

$$\int_a^b D_b^\alpha(D_a^\alpha u(x))\varphi(x)dx = \int_a^b f(u)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in D[a,b].$$

D'après la définition de la dérivée faible (2.1), on a :

$$\int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha \varphi(x)dx = \int_a^b f(u)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in D[a,b].$$

Comme $D[a,b]$ *dense dans* $E_{L,0}^\alpha[a,b]$, *alors* $\forall v \in E_{L,0}^\alpha([a,b])$ *il existe une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D[a,b]$ *telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|v-\varphi_n\|_L = 0, \quad .$$

Alors :

$$\int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(u)\varphi_n(x)dx, \quad \forall\varphi_n \in D[a,b].$$

En passant à la limite pour $n \longrightarrow +\infty$, *on obtient :*

$$\int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha v(x)dx = \int_a^b f(u)v(x)dx, \quad \forall v \in E_{L,0}^\alpha[a,b].$$

Donc la formulation variationnelle est :

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in E_{L,0}^\alpha[a,b] \ \textit{tq}, \\ \displaystyle\int_a^b D_a^\alpha u(x) D_a^\alpha v(x)dx = \int_a^b f(u)v(x)dx, \quad \forall v \in E_{L,0}^\alpha[a,b]. \end{cases}$$

✐.

Proposition 4.6. *il existe* $r, a, \Lambda > 0$ *tels que :*

$$I(u) \geq a > 0 \ \textit{pour} \ \|u\|_\alpha = r \ \textit{et} \ \lambda \in (0,\Lambda).$$

De plus, la fonctionnelle I *bornée inférieurement sur* $\overline{B}(0,r)$.

Preuve. - *On a :*

$$\begin{aligned} \int_a^b |F(u)|dx &= \int_a^b \left|\frac{\lambda}{\sigma+1}(u^+)^{\sigma+1} + \frac{1}{p+1}(u^+)^{p+1}\right| dx \\ &\leq \int_a^b \left(\frac{\lambda}{\sigma+1}|u|^{\sigma+1} + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\right) dx \\ &\leq \frac{\lambda}{\sigma+1}\int_a^b |u|^{\sigma+1}dx + \frac{1}{p+1}\int_a^b |u|^{p+1}dx \\ &\leq \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u\|_{L^{\sigma+1}(a,b)}^{\sigma+1} + \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(a,b)}^{p+1} \end{aligned}$$

Alors on a :

$$-\int_a^b |F(u)|dx \geq -\frac{\lambda}{\sigma+1}\|u\|_{L^{\sigma+1}(a,b)}^{\sigma+1} - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(a,b)}^{p+1}$$

Par la définition de I, on a :

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - \int_a^b |F(u)|dx \geq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - \frac{\lambda}{\sigma+1}\|u\|_{L^{\sigma+1}(a,b)}^{\sigma+1} - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(a,b)}^{p+1}$$

D'après le théorème (3.5), il existe $C_{\sigma+1}, C_{p+1}$ tels que :

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 - \frac{\lambda}{\sigma+1}C_{\sigma+1}\|u\|_\alpha^{\sigma+1} - \frac{C_{p+1}}{p+1}\|u\|_\alpha^{p+1}$$

Maintenant, on fixe $\|u\|_\alpha = r$ le dèrnier inégalité implique que :

$$I(u) \geq \frac{r^2}{2} - \frac{\lambda C_{\sigma+1}}{\sigma+1}r^{\sigma+1} - \frac{C_{p+1}}{p+1}r^{p+1}$$

Comme $p+1 > 2$, et $\lim_{r\to 0^+} \dfrac{\frac{r^2}{2} - \frac{C_{p+1}}{p+1}r^{p+1}}{r^2} = \dfrac{1}{2}$ alors pour $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ dans la définition de la limite il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $0 < r < r_1$ on a

$$\frac{r^2}{2} - \frac{C_{p+1}}{p+1}r^{p+1} \geq \frac{r^2}{4}$$

Donc on peut choisir r suffisamment petit $(r < r_1)$ telle que

$$I(u) \geq \frac{r^2}{4} - \frac{\lambda C_{\sigma+1}}{\sigma+1}r^{\sigma+1}, \text{ pour } \|u\|_\alpha = r$$

En suite on a $\lim_{\lambda\to 0^+} \dfrac{r^2}{4} - \dfrac{\lambda C_{\sigma+1}}{\sigma+1}r^{\sigma+1} = \dfrac{r^2}{4}$ alors pour $\varepsilon = \dfrac{r^2}{8}$ dans la définition de la limite il existe $\Lambda > 0$ telle que :

$$\frac{r^2}{4} - \frac{\lambda C_{\sigma+1}}{\sigma+1}r^{\sigma+1} > \frac{r^2}{8} = a, \quad \forall\lambda \in (0,\Lambda).$$

Alors, pour tout $u \in E_{L,0}^\alpha(a,b)$ avec $\|u\|_\alpha = r$ et pour tout $\lambda \in (0,\Lambda)$ on obtient :

$$I(u) \geq a > 0.$$

-Montrons maintenant que la fonctionnelle est borné infèrieurement sur la boule fermé de rayon r. D'après la définition de I et le théorème (3.5) on a :

$$|I(u)| \leq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 + \int_a^b |F(u)|dx \leq \frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}C_{\sigma+1}\|u\|_\alpha^{\sigma+1} + \frac{C_{p+1}}{p+1}\|u\|_\alpha^{p+1}.$$

Alors, si $u \in \overline{B}(0,r)$, on a $\|u\|_\alpha \leq r$, et :

$$|I(u)| \leq \frac{r^2}{2} + \lambda\frac{C_{\sigma+1}}{\sigma+1}r^{\sigma+1} + \frac{C_{p+1}}{p+1}r^{p+1} = K,$$

ce qui implique que :

$$I(u) \geq -K, \quad \forall u \in \overline{B}(0,r).$$

✎.

Proposition 4.7. *La fonctionnelle I admet une suite $(u_n) \subset \overline{B}(0,r)$ tel que $I(u_n) \to I_\infty = \inf_{\overline{B}(0,r)} I(u)$ et $I'(u_n) \to 0$ dans $(E_{L,0}^\alpha[a,b])'$.*

Preuve. *Soit* $d(u,v) = \|u-v\|_\alpha$. *Comme* $X = \overline{B}(0,r)$ *est fermé dans l'espace de Hilbert* $E^\alpha_{L,0}(a,b)$, *alors le couple* $(\overline{B}(0,r), d)$ *est un espace métrique complet. La fonctionnelle* I *est continue alors il est semi continue infèrieurement d'après le proposition (4.6).On applique le principe d'Ekeland sur la boule fermé pour* $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}(0,r)$ *telle que :*

$$I(u_n) \leq \inf_{\overline{B}(0,r)} I(u) + \frac{1}{n}, \tag{4.4}$$

et

$$I(u_n) < I(u) + \frac{1}{n}\|u-u_n\|_\alpha. \quad \text{pour } u \neq u_n. \tag{4.5}$$

D'après (4.4) et en passant à la limite pour $n \to +\infty$, *on a* $I(u_n) \to \inf\limits_{\overline{B}(0,r)} I(u)$,
Maintenant Montrons que $\|I'(u_n)\|_{(E^\alpha_{L,0}[a,b])'} \longrightarrow 0$ *pour* $n \to \infty$. *En fait, étant donné* $v \in \overline{B}(0,r)$ *avec* $\|v\|_\alpha \leq 1$, *comme* $u_n \in \overline{B}(0,r)$ *on a* $u_n + tv \in \overline{B}(0,r)$ *pour* t *est suffisamment petit et* $u_n + tv \neq u_n$.
D'après (4.5), en prendant $u = u_n + tv$ *on a :*

$$I(u_n+tv) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|tv\|_\alpha = -\frac{1}{n}t\|v\|_\alpha.$$

Alors,

$$\frac{I(u_n+tv) - I(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n}\|v\|_\alpha.$$

En passant à la limite quand $t \to 0$, *on a :*

$$I'(u_n)(v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{I(u_n+tv) - I(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n}\|v\|_\alpha. \tag{4.6}$$

Si on change v *par* $-v$, *on obtient :*

$$I'(u_n)(-v) \geq -\frac{1}{n}\|-v\|_\alpha. \Longrightarrow -I'(u_n)(v) \geq -\frac{1}{n}\|v\|_\alpha.$$

on multiplie les deux côtés par (-1) *:*

$$I'(u_n)(v) \leq \frac{1}{n}\|v\|_\alpha. \tag{4.7}$$

Donc, d'après (4.6) et (4.7) on obtient :

$$|I'(u_n)(v)| \leq \frac{1}{n}\|v\|_\alpha. \tag{4.8}$$

$$\frac{|I'(u_n)(v)|}{\|v\|_\alpha} \leq \frac{1}{n}.$$

Alors, on prend le sup sur la boule unité fermé et en passant à la limite nous obtenons :

$$\|I'(u_n)\|_{(E^\alpha_{L,0}[a,b])'} \longrightarrow 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

$\varnothing$.

Proposition 4.8. *le nombre* $I_\infty = \inf\limits_{\overline{B}(0,r)} I(u)$ *est strictement négatif et* $I_\infty = I(u_1)$, *c-à-d un mininmum donc* u_1 *est un point critique.*

Preuve. *Soit $\varphi \in D([a,b]) - \{0\}$ est une fonction non négative et $t > 0$. On a :*

$$I(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|_\alpha^2 - \frac{\lambda t^{\sigma+1}}{\sigma+1}\int_a^b |\varphi|^{\sigma+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_a^b |\varphi|^{p+1}dx.$$

Comme, $1 < \sigma + 1 < 2 < p + 1$, on peut prendre t suffisamment petit tel que :

$$I(t\varphi) < 0 \ \text{ et } t\varphi \in \overline{B}(0,r).$$

Alors, pour t suffisamment petit :

$$I_\infty \leq I(t\varphi) < 0.$$

D'après (4.4), on a $I(u_n) \to I_\infty < 0$ quand $n \to +\infty$, on peut suppose que :

$$I(u_n) < 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

Par conséquent, $u_n \in \overline{B}(0,r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notez que, d'après les résultats de la proposition (4.7) on a $\exists (u_n) \subset \overline{B}(0,r)$ et :

$$I(u_n) \to I_\infty = \inf_{\overline{B}(0,r)} I(u) \ \text{ et } I'(u_n) \to 0.$$

Comme $E_{L,0}^\alpha(a,b)$ est un espace réflexif et (u_n)est borné alors il existe $u_1 \in E_{L,0}^\alpha(a,b)$ et une sous suite de (u_n) notée (u_n) tel que :

$$u_n \rightharpoonup u_1 \ \text{ dans } E_{L,0}^\alpha(a,b)$$

et Comme l'injection de $E_{L,0}^\alpha(a,b)$ dans $L^{p+1}(a,b)$; $L^{\sigma+1}(a,b)$ est compact on a, pour $n \to +\infty$: $u_n \xrightarrow{L^{\sigma+1}} u_1$ et $u_n \xrightarrow{L^{p+1}} u_1$. On a

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\int_a^b |D_a^\alpha u_n(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{\sigma+1}\int_a^b |u_n(x)|^{\sigma+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_a^b |u_n(x)|^{p+1}dx.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ nous obtenons que $\|u_n\|_\alpha$ est convergente donc est borné alors

$$\|u_n - u_1\|_\alpha \longrightarrow 0$$

en utilisant la continuité de I alors $[I(u_n) - I(u_1)] \longrightarrow 0$ et par l'unicité de la limite on a $I(u_1) = I_\infty < 0$ de plus $I'(u_1) = 0$
✐.

Proposition 4.9. *Soit $\varphi \in C_0^\infty[a,b]$ 0 est une fonction non négative, alors :*

$$I(t\varphi) \to -\infty \ \text{ pour } t \to \infty.$$

C'est -à-dire :

$$\exists w \in E_{L,0}^\alpha(a,b), \|w\|_\alpha > r \wedge I(w) < a.$$

Preuve. *Pour $t > 0$, on a :*

$$I(t\varphi^+) = \frac{t^2}{2}\|\varphi^+\|_\alpha^2 - \frac{\lambda t^{\sigma+1}}{\sigma+1}\int_a^b |\varphi^+|^{\sigma+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_a^b |\varphi^+|^{p+1}dx.$$

Comme $p + 1 > 2 > \sigma + 1$, alors :

$$I(t\varphi^+) \to -\infty \ \text{ pour } t \to +\infty.$$

En prenant $\hat{t}$ suffisamment grand et $v = \hat{t}\varphi^+$. ✐.

Proposition 4.10. *Le probléme admet une deuxième solution.*

Preuve. *Notez que* $I(0) = 0$. *De plus d'après les propositions* (4.6) *et* (4.9) *la fonctionnelle* I *vérifie les conditions de théorème de Passe Montagne . De plus la condition de Palais-Smale est vérifie. Alors il éxiste* $u_2 \in E^{\alpha}_{L,0}[a, b]$ *telle que :*

$$I(u_2) = c > 0 \ \ et \ \ I'(u_2) = 0,$$

Où :

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

et :

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0, 1], E^{\alpha}_{L,0}[a, b]) : \gamma(0) = 0 \ \ et \ \ \gamma(1) = \hat{t}\varphi\right\}.$$

Remarque 4.1. *D'après le principe d' Ekeland, on obtient* $u_1 \in E^{\alpha}_{L,0}(a, b)$ *telle que :*

$$I(u_1) = \inf_{\overline{B}(0,r)} I(u) < 0 \ \ et \ \ I'(u_1) = 0.$$

De plus, d'après le théorème de Passe Montagne, on obtient $u_2 \in E^{\alpha}_{L,0}(a, b)$ *telle que :*

$$I(u_2) = c > 0 \ \ et \ \ I'(u_2) = 0.$$

En suite,

$$I(u_1) < 0 < I(u_2),$$

Ce qui montre que $u_1 \neq u_2$ *sont des solutions faibles du problème (4.3).*
Dans les deux cas, on a que $u_1, u_2 \in E^{\alpha}_{L,0}(a, b)$ *alors :*

$$\lim_{x\to a^+} I^{1-\alpha}_a u_1(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} I^{1-\alpha}_a u_2(x)$$

Proposition 4.11. *Soit* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *et* $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Alors, tout point critique* u *de* I *dans* $E^{\alpha}_{L,0}[a, b]$ *est une solution de* 4.3 *sur* $[a, b]$.

Preuve. *Soit* $u \in E^{\alpha}_{L,0}[a, b]$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow a} I^{1-\alpha}_a u(x) = 0$, *on a :*

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a v(x)dx = \int_a^b f(u(x))v(x)dx \quad \forall v \in E^{\alpha}_{L,0}[a, b].$$

Comme $D[a, b] \subset E^{\alpha}_{L,0}[a, b]$, *alors :*

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x) D^{\alpha}_a \varphi(x)dx = \int_a^b f(u(x))\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in D[a, b].$$

Comme $D^{\alpha}_a \varphi =^c D^{\alpha}_a \varphi$, *on a :*

$$\int_a^b D^{\alpha}_a u(x)^c D^{\alpha}_a \varphi(x)dx = \int_a^b f(u(x))\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in D[a, b].$$

D'après le théorème (2.6), on a :

$$\int_a^b D_a^\alpha u(x) I_a^{1-\alpha}\varphi'(x)dx = \int_a^b f(u(x))\varphi(x)dx$$

D'après l'intégration par partie(2.3), on a :

$$\int_a^b \left[I_b^{1-\alpha}(D_a^\alpha u(x))\right]\varphi'(x)dx = \int_a^b \left[-\int_a^x f(u(t))dt\right]\varphi'(x)dx.$$

Donc, il existe une constante C*, telle que :*

$$I_b^{1-\alpha}D_a^\alpha u(x) = -\int_0^x f(u(t))dt + C. \quad p.p\ sur[a,b].$$

Comme $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, *alors* $1-\alpha > \frac{1}{2}$. *Alors, comme* $u \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ *alors* $D_a^\alpha u \in L^2[a,b]$. *Donc, par le théorème (2.2)-(4),* $I_b^{1-\alpha}(D_a^\alpha u) \in C[a,b]$. *Donc*

$$I_b^{1-\alpha}(D_a^\alpha u(x)) = -\int_0^x f(u(t))dt + C.$$

Finalement, comme l'opérateur de l'intégrale est différentiable, par la différentiation on obtient l'égalité recherchée.

Étape 02 : Cas $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. *On considère le problème non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} trouver\ u \in V, \\ D_b^\alpha(D_a^\alpha u) = f(u),\ \ p.p\ sur\ (a,b), \\ u(a) = 0, u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Où $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \sigma \in (0,1), p \in (1, +\infty), \lambda$ *est une paramètre dans* $\mathbb{R}^+$ *et* $f = \lambda(u^+)^\sigma + (u^+)^p$ *dans* $L^p[a,b]$.
Nous introduisons la fonctionnelle $I : E_{L,0}^\alpha[a,b] \to \mathbb{R}$ *définit par :*

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_a^b |D_a^\alpha u|^2 dx - \int_a^b F(u)dx.$$

Comme ci-dessus, la fonctionnelle $I \in C^1(E_{L,0}^\alpha[a,b], \mathbb{R})$ *et ses points critiques sont des solutions faibles de (4.9).*
En suite les même étapes précédent pour obtenir par le principe d'Ekeland l'existence de $v_1 \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ *tel que :* $I(v_1) = \inf_{\overline{B}(0,r)} I(u) < 0$ *et* $I'(v_1) = 0$, *et par le théorème de Passe Montagne l'existence de* $v_2 \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ *tel que :*

$$I(v_2) = c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{x\in[0,1]} I(\gamma(x)) > 0$$

De plus, comme $v_1, v_2 \in E_{L,0}^\alpha[a,b]$ *et* $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *alors d'après le théorème (3.12)*

$$v_1(a) = v_2(a) = v_1(b) = v_2(b) = 0.$$

✎.

Bibliographie

[1] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006.

[2] A.Kolmogorov, S.Fomine,*Eléments de la thérie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, 2e edition, Editions Mir-Moscou.1974.

[3] B.Bollobas, w.Fulton, A.Katok, P.Sarnak, Fixed Point Theory and Application, 2004.

[4] Crésar E.Torres Ledesma, Manuel C.Montalvo Bonilla. *Fractional Sobolev space with Riemann-Liouville fractional derivative and application to a fractional concave-convex problem*, Advances in Operator Theory (2021) 6 :65.

[5] Fridjet Kheira, Soualah Safa .*Dé rivée et intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville.*Université Hamma Lakhdar el Oued (2018).

[6] Haïm.Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod,PARIS-France, 1999.

[7] Igor.Padlubny.*Fractional Differential Equations.*Mathematique in Science and Engineering volume 198.Academic Press , 1999.

[8] Khalouta Ali.*Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques.Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire*. Thèse de Doctorat. Université Ferhat Abbas Setif 1 (2019).