

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**Analyse numérique de quelques équations intégrales  
avec application**

Option : ANEDP

Par :

*AGRED Dounia*

Encadré par : MEZHOUD Djafer

MCB ENP.CONSTANTINE

Devant le jury :

Président : SACI Fateh  
Examineur: ATOUI Halim

MCB U. SKIKDA  
MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

## ملخص

في هذه الرسالة، ندرس المعادلات الخطية التكاملية حيث نعالج بعض نتائج الوجود والوحدانية، و نعرض كيفية الحصول على حلول تقريبية، من خلال تطبيق الطرق التربيعية.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة تكاملية، طريقة تكرارية، طرق تربيعية.

## Résumé

Dans ce mémoire, Nous étudions des équations intégrales linéaires où on développe des résultats d'existence et d'unicité, suivis par la présentation des approximations des solutions, en appliquant des méthodes de quadrature.

**Mots clés :** équation intégrale, méthode itérative, méthodes de quadrature.

## Abstract

In this thesis, we study linear integral equations where we develop existence and uniqueness results, followed by the presentation of the approximations of the solutions, by applying quadrature methods.

**Keywords:** integral equation, iterative method, quadrature methods.

# REMERCIEMENTS



**A**vant tout j'adresse mes remerciements en premier lieu à Allah tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné pour finir ce travail.

**E**n suite, j'adresse ma reconnaissance à mon encadreur Docteur MEZHOUD DJAAFER, son sérieux, sa patience, ses conseils et surtout sa compétence m'ont été très utiles pour réaliser ce travail.

**J**e tiens également à remercier tous les enseignants du départements de mathématiques.

**E**nfin ; je remercie toutes personnes, famille, amies qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

# DÉDICACE

# إهداء



Avec grand plaisir, un cœur ouvert et une joie écrasante ... je dédie ce modeste travail ...

**À :**

**M**es très chers parents qui m'ont soutenue dans toute ma vie avec leurs patiences, amours et encouragements

**À :**

**M**es sœurs et frères, que dieu les protège,

**À :**

**M**on neveu **Abderrahmane**.

بسرور كبير و قلب منفتح و فرحة غامرة ... أهدي هذا العمل المتواضع ...

**إلى :**

والديا الأعزاء, اللذان دعماني طوال حياتي بصبرهم و حبهم و تشجيعهم,

**وإلى :**

أخواتي و إخواني حفظهم الله,

**وإلى :**

ابن أختي عبد الرحمان .

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels d'analyse fonctionnelle et Numérique</b>	<b>9</b>
1.1	Notions d'analyse fonctionnelle . . . . .	9
1.1.1	Opérateur intégral linéaire . . . . .	14
1.1.2	Opérateur adjoint . . . . .	14
1.2	Notions d'analyse numérique . . . . .	17
1.2.1	Intégration numérique . . . . .	17
1.2.2	Interpolation polynomiale . . . . .	18
1.2.3	Erreur d'interpolation . . . . .	18
1.2.4	Les Méthodes de quadratures . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Équations intégrales</b>	<b>24</b>
2.1	Définition des équations intégrales . . . . .	24
2.2	Classification des équations intégrales . . . . .	25
2.2.1	Équations intégrales de Fredholm . . . . .	26
2.2.2	Équations intégrales de Volterra . . . . .	27
2.3	Équations intégrales de Volterra-Fredholm . . . . .	28

2.3.1	Existence et Unicité . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Méthode de Nyström pour la résolution numérique des</b>	
	<b>équations intégrale</b>	<b>33</b>
3.1	Principe général . . . . .	34
3.2	Étude de convergence . . . . .	36
3.3	Implémentation de la Quadrature ; Méthode des Trapèzes . .	39
3.3.1	Exemples numériques . . . . .	40

# Liste des tableaux

3.1	Ce tableau donne l'approximation de la solution aux points $t_i$ comparées avec la solution exacte . . . . .	41
3.2	La convergence de la méthode de Nystrom . . . . .	41

# Introduction

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats de résolution théorique et numérique appliqués à des équations linéaires intégrales du second ordre à noyau continu, définies sur un espace de Banach. Ce mémoire comporte trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, intitulé "Rappels d'analyse fonctionnelle et Numérique", on initie le lecteur aux prérequis et outils mathématiques de base.

- Dans le deuxième chapitre, intitulé équations intégrales, on définit les équations intégrales, on les classifie et on propose quelques résultats d'existence et d'unicité sous certaines conditions

- Dans le troisième chapitre, intitulé méthode de Nystrom pour la résolution numérique des équations intégrales, on présente la méthode de quadrature et on étudie d'une manière détaillée sa convergence, dans ce même chapitre on expose des applications numériques.

# Chapitre 1

## Rappels d'analyse fonctionnelle et Numérique

L'objectif de ce chapitre est de rappeler des notions et résultats utilisés au long de ce travail. Le chapitre est composé de trois sections, la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces normés, les espaces de Banach, les espaces de Hilbert et les espaces  $L^2([a, b])$  la deuxième section pour les opérateurs intégrales et l'opérateur adjoint, la dernière section, rappelle des notions d'analyse numérique : intégration numérique, les méthodes de quadratures, interpolation polynomiale.

### 1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

**Définition 1.1.** (*Espace vectoriel norme*)

*Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle norme*

sur l'espace  $E$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $K$ .

1.  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogénéité).
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Exemple 1.1.** Soient  $C([a, b], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réelles, pour tout  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx, \quad \|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Les applications  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont de normes sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ .

**Définition 1.2.** (L'espace normé  $\mathcal{L}(E, F)$ )

Si  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont deux espaces vectoriels normés, on note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

Lorsque  $E = F$ , on écrit  $\mathcal{L}(E)$  au lieu de  $\mathcal{L}(E, E)$ .

**Définition 1.3.** (Espace de Banach)

Un espace  $(E, \|\cdot\|_E)$  est dit espace de Banach s'il est complet c-à-d toute suite de Cauchy dans  $(E, \|\cdot\|_E)$  est convergente vers un élément de  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

**Exemple 1.2.**  $\mathbb{R}^n$  est un espace de Banach pour chacune des normes suivantes :

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Cette dernière norme s'appelle la norme de la convergence uniforme dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.1.** Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par  $d(x,y) = \|x - y\|$ .

**Théorème 1.1.** Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.

**Lemme 1.1.** Tout espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie est complet.

**Exemple 1.3.**  $C([0, 1], \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

**Définition 1.4.** (produit scalaire) Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , un produit scalaire sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $K$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  possédant les propriétés suivantes pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$ ,

1.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .
4.  $\langle x, x \rangle = 0$  implique  $x = 0$ .

**Remarque 1.2.** *Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Définition 1.5.** *(Espace de Hilbert)*

*Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire  $\langle x, y \rangle$  et qui est complet pour la norme  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$ .*

**Remarque 1.3.** *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

**Définition 1.6.** *(Espace  $L^2([a, b])$ )*

*On dit qu'une fonction  $f$  est de carré intégrable sur  $[a, b]$  si l'intégrale  $\int_a^b f^2(x)dx$  existe et il est finie, l'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur  $[a, b]$  sera noté  $L^2([a, b])$ .*

**Définition 1.7.** *(Espace  $L^1([a, b])$ )*

*On désigne par  $L^1([a, b])$  l'ensemble des fonctions intégrable sur  $[a, b]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On pose*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Et d'une manière plus générale, on définit :

**Définition 1.8.** *(Espace  $L^P(\Omega)$ )*

*Soit  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  :*

*Si  $1 \leq p < \infty$ , on pose  $L^P(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^P \in$*

$L^1(\Omega)$  muni de la norme

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, p.p. \text{ sur } \Omega,$$

muni de la norme définie par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c, p.p. \text{ sur } \Omega\}.$$

**Remarque 1.4.** Si  $f \in L^\infty(\Omega)$ , on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, p.p. \text{ sur } \Omega.$$

**Définition 1.9.** (Ensemble convexe) Une partie  $C$  d'un espace vectoriel réel  $E$  est dite convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

**Définition 1.10.** (Inégalité de Hölder) Soient  $p$  et  $q$  deux exposants conjugués :  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$  et  $f \in L^p, g \in L^q$  alors :

$$f.g \in L^1 \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Un cas particulier de l'inégalité de Hölder, pour  $p = q = 2$  on obtient :

$$\int |fg|dx \leq \left( \int |f|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int |g|^2 dx \right)^{1/2},$$

Cette dernière inégalité est appelée l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

### 1.1.1 Opérateur intégral linéaire

**Définition 1.11.** Soit  $k : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow R$  une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur  $C([a, b])$  est défini par la formule suivante :

$$A : \varphi \in C[a, b] \rightarrow A\varphi \in C[a, b], \quad (A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Dans ce contexte la fonction  $k$  s'appelle le noyau de l'opérateur intégral  $A$ .

### 1.1.2 Opérateur adjoint

**Définition 1.12.** Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $H^1$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H^2$ , l'opérateur linéaire noté  $A^*$  défini de  $H^2$  dans  $H^1$  est dit opérateur adjoint de  $A$  si l'on a pour tout  $\varphi \in H^1$  et  $\psi \in H^2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H^2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H^1}.$$

**Théorème 1.2.** (Existence de l'opérateur adjoint)

Soit  $A$  un opérateur linéaire borné, défini sur un espace de Hilbert  $H^1$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H^2$  alors, il existe un opérateur linéaire

borné noté  $A^*$  défini de  $H^2$  dans  $H^1$  tel que l'on a pour tout  $\varphi \in H^1$  et  $\Psi \in H^2$

$$\langle A\varphi, \Psi \rangle_{H^2} = \langle \varphi, A^*\Psi \rangle_{H^1}.$$

De plus, on a  $\|A\| = \|A^*\|$ .

**Corollaire 1.1.** Soit  $A$  l'opérateur intégral de noyau  $k$ , alors  $A^*$  est l'opérateur intégral de noyau  $k^*$  avec

$$K^*(t, x) = K(x, t).$$

**Théorème 1.3.** Soit  $A$  un opérateur linéaire compact, défini Sur un espace de Hilbert  $H^1$  dans un espace de Hilbert  $H^2$  alors l'opérateur adjoint  $A^*$  défini de  $H^2$  dans  $H^1$  est aussi un opérateur linéaire compact.

**Définition 1.13.** (Opérateur auto-adjoint) Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $H$  dans lui même alors, l'opérateur  $A$  est dit opérateur auto adjoint si, on a la relation

$$A = A^*,$$

ou encore, pour tout :  $\varphi, \psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

**Corollaire 1.2.** L'opérateur intégral  $A$  de noyau  $k$  est auto-adjoint si, et

seulement si, le noyau  $k$  est symétrique :

$$k(x, t) = k(t, x), \quad \forall x, t \in [a, b].$$

**Exemple 1.4.** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $C[a, b]$  on a

$$\begin{aligned} \langle A(\varphi), \psi \rangle &= \langle \varphi, A^*(\psi) \rangle \Leftrightarrow \int_a^b \varphi(y) A^*(\psi(y)) dy = \int_a^b A(\varphi)(x) \psi(x) dx \\ &= \int_a^b \left[ \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy \right] \psi(x) dx \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que :

$$\begin{aligned} \langle A(\varphi), \psi \rangle &= \int_a^b \int_a^b [k(x, y) \psi(x) dx] \varphi(y) dy \\ &= \int_a^b \varphi(y) \left[ \int_a^b k(x, y) \psi(x) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \varphi(y) A^*(\psi)(y) dy. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'adjoint  $A^*$  est défini par

$$\forall x \in [a, b], A^*\psi(x) = \int_a^b K(y, x) \psi(y) dy.$$

où  $A\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy$  et  $A^*\varphi(x) = \int_a^b k(y, x) \psi(y) dy$ .

## 1.2 Notions d'analyse numérique

### 1.2.1 Intégration numérique

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue donnée sur un intervalle  $[a, b]$ , nous voulons calculer numériquement la quantité

$$\int_a^b f(x)dx,$$

pour ce faire nous commençons par partitionner l'intégration en  $N$  intervalle de même longueur  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  tels que

$$a = x_0 < \dots < x_i < x_{N-1} < x_N = b,$$

où

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b - a}{N}.$$

Il'est clair que lorsque  $N$  augmente, nous pouvons placer les points  $x_i$  de sorte à ce que  $h$  soit petit.

Posons  $x_i = a + ih, i = 0 \dots N$

$$\text{alors } \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{i=N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

### 1.2.2 Interpolation polynomiale

Considérons  $n + 1$  couples  $(x_i, y_i)$ . Le problème est de trouver un polynôme  $P_m$  de degré inférieur ou égale  $m$ , appelé polynôme d'interpolation, tel que

$$p_m(x_i) = a_m x_i^m + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Les points  $x_i$  sont appelés nœuds d'interpolation.

Si  $n \neq m$  le problème est sur ou sous-détermine.

Si  $n = m$ , on a le résultat suivant.

**Théorème 1.4.** *Étant donné  $n + 1$  points distincts  $x_0, \dots, x_n$  et  $n + 1$  valeurs correspondantes  $y_0, \dots, y_n$ , il existe un unique polynôme  $p_n$  de degré inférieur ou égale à  $n$  tel que  $p_n(x_i) = y_i$  pour  $i = 0, \dots, n$ .*

### 1.2.3 Erreur d'interpolation

Dans la pratique, l'interpolation polynomiale sert à remplacer une fonction  $f$  qui est soit inconnue, soit trop compliqué, par une fonction plus simple, en l'occurrence un polynôme. On dit que l'on approxime  $f$  par polynôme d'interpolation  $p_n$ . Quand on utilise une approximation, comme c'est le cas dans de nombreuses méthodes d'analyse numérique, il est fondamental d'étudier l'erreur d'approximation. Naturellement, sauf cas particulier, l'expression de l'erreur ne permet pas son calcul exact elle peut cependant être très utile pour en calculer une majoration. C'est ainsi que

pour l'interpolation polynomiale on démontre.

**Théorème 1.5.** *Soit  $[a, b]$  un intervalle contenant  $x_0 \dots x_n$  on suppose que  $f$  est  $(n + 1)$  fort dérivables sur  $[a, b]$ .*

*Alors, par tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que :*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \text{où } \prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \quad (1.1)$$

**Remarque 1.5.** *La formule (1.1) ne permet évidemment pas de calculer la valeur exacte de l'erreur parce que, en général,  $\varepsilon$  est inconnu. Elle permet par contre, d'en calculer une majoration :*

**Corollaire 1.3.** *Sous les hypothèses du théorème (1.5), on a :*

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \quad \text{où } M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (1.2)$$

**Exemple 1.5.** *Nous calculons une approximation de  $\sqrt{115}$  à l'aide de la formule de Lagrange pour la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$ , si les points d'interpolation sont :*

$$x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144?$$

*et si nous notons par  $p_2$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associée*

à  $f$  aux points  $x_0, x_1$  et  $x_2$ . On a :

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \left| \prod_{i=0}^2 (x - x_i) \right| \quad \text{où } M_3 = \max_{x \in [x_0, x_2]} |f^{(3)}(x)|,$$

avec :

- En posant

$$\begin{aligned} v(x) &= \prod_{i=0}^2 (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= (x - 100)(x - 121)(x - 144), \end{aligned}$$

alors :  $v(115) = 2610$ .

- $f(x) = x^{1/2} = f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ ,  
 $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$  et  $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$   
 et delà :  $M = \max_{x \in [100, 144]} |f^{(3)}(x)| = \frac{3}{8} \times 10^{-5}$ .

Ainsi, pour  $x = 115$  l'erreur est  $|f(115) - p_2(115)| \leq \frac{3}{8} \times 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} \times 2610 \simeq 0,16 \times 10^{-2}$ ,

## 1.2.4 Les Méthodes de quadratures

### La formule du trapèze

Cette formule est obtenue en remplaçant  $f$  par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 aux nœuds  $x_0 = a$  et  $x_1 = b$ .

Les nœuds de la formule de quadrature sont alors  $x_0 = a, x_1 = b$  et ses

poids  $\alpha_0 = \alpha_1 = (b - a)/2$ , ce qui génère

$$\int_a^b f(x)dx = I_1(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \quad (1.3)$$

Si  $f \in C^2([a, b])$ , l'erreur de quadrature est donnée par

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\varepsilon), h = b - a \quad (1.4)$$

où  $\varepsilon$  est un point de l'intervalle d'intégration.

Pour obtenir la formule du trapèze composite, on procède comme dans le cas où  $N = 1$ , on remplace  $f$  sur  $[a, b]$  par son polynôme de Lagrange de degré 1 sur  $N$  sous-intervalles, avec  $N \geq 1$ . En introduisant les nœuds de quadrature  $x_i = a + ih$ , pour  $i = 0 \dots, N$  et  $h = (b - a)/N$ , on obtient

$$I_{1,N}(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})), N \geq 1, \quad (1.5)$$

où  $x_0 = a$  et  $x_N = b$ . Chaque terme dans (1.5) apparaît deux fois, exceptée le premier et le dernier. La formule peut donc s'écrire.

$$I_{1,N}(f) = h \left[ \frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_N) \right]. \quad (1.6)$$

Comme on l'a fait pour (1.6), on peut montrer que l'erreur de quadrature associée à (1.5) s'écrit, si  $f \in C^2([a, b])$ , comme suivant :

$$E_{1,N}(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) \text{ ou } \xi \in ]a, b[.$$

### La formule de Simpson

La formule de Simpson peut être obtenue en remplaçant  $f$  sur  $[a, b]$  par son polynôme d'interpolation de degré 2 aux nœuds  $x_0 = a$ ,  $x_1 = (a + b)/2$  et  $x_2 = b$ .

Les poids sont donnés par  $\alpha_0 = \alpha_2 = (b - a)/6$  et  $\alpha_1 = 4(b - a)/6$ , et la formule s'écrit

$$I_2(f) = \frac{b - a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (1.7)$$

On peut montrer que, si  $f \in C^4([a, b])$ , l'erreur de quadrature est

$$E_2(f) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\varepsilon), \quad h = \frac{b - a}{2}, \quad (1.8)$$

où  $\varepsilon$  est dans  $]a, b[$ .

En remplaçant  $f$  par son polynôme d'interpolation de degré 2 sur  $2n$  sous-intervalles, avec  $n \geq 1$ , on obtient la formule composite correspondant à (1.7). On introduit les nœuds de quadrature  $x_i = a + ih$ , pour  $i = 0, \dots, n-1$  et on pose  $h = (b - a)/2n$ , on a alors

$$I_{2,2n} = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{r=1}^{n-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{n-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2n}) \right], \quad (1.9)$$

où  $x_0 = a$  et  $x_{2n} = b$ . Si  $f \in C^4([a, b])$  l'erreur de quadrature associée à (1.9) est

$$E_{2m}(f) = -\frac{b - a}{180} h^4 f^{(4)}(\varepsilon).$$

où  $\varepsilon \in ]a, b[$ .

## Chapitre 2

# Équations intégrales

Dans ce chapitre nous introduisons les équations intégrales, on donne des définitions pour les différents type d'équations et on propose des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions de telles équations.

### 2.1 Définition des équations intégrales

**Définition 2.1.** *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration  $\int$ .*

*C'est en général l'équation par rapport à l'inconnue  $\phi$  de la forme :*

$$\int_E k(x, y, \varphi(y)) dy = \lambda \varphi(x) + f(x), x \in E \quad (2.1)$$

où  $E$  est un espace mesuré,  $f(x)$  une fonction mesurable donnée sur  $E$ ,  $\lambda$  un scalaire donné qui peut être réel ou complexe,  $k(x, y, \varphi(y))$  une fonction mesurable sur  $E^3$  appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de rechercher la fonction  $\phi$  qui satisfait l'équation précédente.

## 2.2 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrivent leurs structures globales, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails :

Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.

L'adjectif singulière est parfois employé d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné, évidemment, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

### 2.2.1 Équations intégrales de Fredholm

**Définition 2.2.** On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm, telle que les deux limites d'intégration sont constantes, une équation à une inconnue  $\varphi(x)$  de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy, \quad (2.2)$$

où  $f(x), k(x, y)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  est un paramètre non nul, réel ou complexe.

i) Si  $h(x) = 0$ , l'équation (2.2) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = 0. \quad (2.3)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) Si  $h(x) = \text{cte} \neq 0$ , l'équation (2.2) s'écrit

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy. \quad (2.4)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si  $h(x) \neq 0$ , l'équation (2.2) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

**Remarque 2.1.** Si  $f(x) = 0$ , l'équation (2.2) est dite homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.2) est dite non homogène.

## 2.2.2 Équations intégrales de Volterra

**Définition 2.3.** On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy. \quad (2.5)$$

i) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si  $h(x) = 0$ , donc l'équation (2.5) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = 0. \quad (2.6)$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si  $h(x) = \text{cte} \neq 0$ , donc l'équation (2.5) s'écrit

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy. \quad (2.7)$$

iii) Si  $h(x) \neq 0$ , l'équation (2.5) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

**Remarque 2.2.** Si  $f(x) = 0$ , l'équation (2.5) est dite homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.5) est dite non homogène.

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $k$  vérifie la condition

$$k(x, y) = 0, \quad \text{pour } x < y.$$

## 2.3 Équations intégrales de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes, à savoir

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, y)\varphi(y)dy + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, y)\varphi(y)dy, \quad (2.8)$$

et

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^y \int_\Omega F(x, y, \mu, \tau, u(\mu, \tau))d\mu d\tau, \quad (2.9)$$

où  $f(x, y)$  et  $F(x, y, \mu, \tau, u(\mu, \tau))$  sont des fonctions analytiques sur  $D = \Omega \times [0, T]$ , et  $\Omega$  est un sous ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

**Exemple 2.1.** Soient les équations intégrales

$$\varphi(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(y)dy - \int_0^1 y\varphi(y)dy,$$

et

$$\varphi(x, y) = x + y^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}y - \int_0^y \int_0^1 (\tau - \mu)d\mu d\tau.$$

### 2.3.1 Existence et Unicité

On considère l'équation

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.10)$$

avec  $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonction continue et  $k(x, t)$  une fonction continue telle que  $0 \leq x \leq \alpha$  et  $\alpha \leq \infty$ .

**Lemme 2.1.** (*Granwall*) Soit  $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty[$  deux fonctions continues et soit  $c$  un nombre positif.

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)ds \quad , 0 \leq t \leq \alpha. \quad (2.11)$$

Alors

$$f(t) \leq c + \exp^{\int_0^t g(s)ds} \quad , 0 \leq t \leq \alpha. \quad (2.12)$$

**Théorème 2.1.** Soit  $0 < \alpha \leq \infty$ , on suppose que  $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $k : [0, \alpha] * [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, tels que  $0 \leq t \leq x \leq T$ , alors l'équation intégrale de Volterra suivante admet une solution unique :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt, x \in [0, T]. \quad (2.13)$$

## Démonstration

Soit l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t)dt.$$

On définit la suite  $(\Psi_n(x))$  sur l'intervalle  $[0, T]$  par la méthode d'approximation successive, on obtient :

$$\begin{aligned}\Psi_0(x) &= f(x) \\ \Psi_1(x) &= \int_0^x k(x, t)\Psi_0(t)dt \\ &\vdots \\ \Psi_{i+1}(x) &= \int_0^x k(x, t)\Psi_i(t)dt \\ K &= \max_{0 \leq t \leq T} k(x, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \max_{0 \leq t \leq T} |f| \\ \Psi_1(x) &\leq \int_0^x |k(x, t)\Psi_0(t)| dt \leq KFx(x) \\ |\Psi_2(x)| &\leq \int_0^x |k(x, t)\Psi_1(t)| dt \leq \frac{1}{2}K^2Fx^2 \\ &\vdots \\ |\Psi_n(x)| &\leq \int_0^x |k(x, t)\Psi_{n-1}(t)| dt \leq \frac{F(Kx)^n}{n!}.\end{aligned}$$

par récurrence la relation précédente est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(Kx)^i}{i!} = Fe^{Kx},$$

est une série de Taylor qui converge uniformément et absolument sur  $[0, T]$ ,

Alors la suite  $u_n(x) = \sum_{i=0}^n \Psi_i(x)$  converge vers  $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(x)$

$$\begin{aligned}
\int_0^x k(x,t)u(t)dt &= \int_0^x k(x,t) \left( \sum_{i=0}^n \Psi_i(t) dt \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \left( \int_0^x k(x,t)\Psi_i(t)dt \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \Psi_{i+1}(x) \\
&= u(x) - f(x).
\end{aligned}$$

Donc il existe une solution  $u$  telle que

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt. \quad (2.14)$$

Nous pouvons montrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions  $X(x)$  et  $Y(x)$  de l'équation (??), donc

$$X(x) - Y(x) = \int_0^x k(x,t)(X(t) - Y(t))dt.$$

On obtient donc la suite suivante :

$$|X(x) - Y(x)| \leq k \int_0^x |X(t) - Y(t)| dt,$$

cette relation est de la forme suivante

$$Z(x) \leq k \int_0^x |Z(t)| dt,$$

telle que  $Z(x) = X(x) - Y(x)$ , on a  $\forall c > 0$  la relation

$$Z(x) \leq c + k \int_0^x |Z(t)| dt.$$

la relation précédente est vraie pour  $c = 0$  telle  $c$  est une constante, d'après le lemme de Granwall

$$|Z(x)| \leq ce^{Kx} = 0,$$

puisque  $c = 0$ , donc

$$Z(x) = X(x) - Y(x) = 0$$

$$X(x) = Y(x).$$

Alors la solution de l'équation intégrale (??) est unique. ■

## Chapitre 3

# Méthode de Nyström pour la résolution numérique des équations intégrale

Considérons l'équation intégrale linéaire de voltera du second type :

$$u(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s)u(s)ds. \quad (3.1)$$

Il est peu probable que l'on puisse résoudre analytiquement l'équation (3.1) dans tous les cas qui nous intéressent, on fait donc un recours aux méthodes numériques pour obtenir des approximations. Dans ce qui suit plusieurs techniques de résolution basées principalement sur l'utilisation de la méthode de Nyström seront présentées :

### 3.1 Principe général

La méthode de Nyström, aussi appelé méthode de quadrature, consiste à approximer la partie intégrale de l'équation (3.1) par une formule d'intégration numérique, ce qui nous permet d'obtenir un système linéaire discret. En fait, le noyau  $k$  sera remplacer par un opérateur de dimension fini.

Soit la forme de quadrature  $Q$  qui approxime l'intégrale

$$\int_a^t g(x_i)dx$$

par :

$$Q_n(g) = \sum_a^b w_j^n g(x_j^n)$$

avec  $x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_n^n$  sont des points de quadrature contenus dans  $[a, b]$  et les réels  $\omega_1^n, \omega_2^n, \omega_3^n, \dots, \omega_n^n$  sont les poids de quadrature. On approche l'opérateur intégrale :

$$(Tu)(t) = \int_a^t k(t, s)u(s)ds$$

à noyau  $k$  continu, par une suite d'opérateurs discrets :

$$(T_n u)(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j^n k(t, t_j^n) u(t_j^n).$$

Ce qui permet d'approcher la solution de l'équation (3.1) par la solution

de l'équation :

$$u_n(t) = f(t) + \sum_{j=1}^n \omega_j^n k(t, t_j) u_n(t_j), \quad (3.2)$$

qui est une forme réduite du problème initiale en un problème de dimension fini. Le résultat suivant fournit un outil efficace pour le calcul numérique de la solution :

**Théorème 3.1.** *Soient  $u_n$  solution de (3.2) et  $t_1, t_2, \dots, t_n$  les nœuds, alors  $u_i^{(n)} = u_n(t_i^n), i = 1, 2, \dots, n$  vérifient :*

$$u_i^{(n)} = f(t_i^{(n)}) + \sum_{j=1}^{(n)} \omega_j^{(n)} k(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}) u_j^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où encore

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega_1 k_{11} & \omega_2 k_{12} & \cdots & \omega_n k_{1n} \\ -\omega_1 k_{21} & 1 - \omega_2 k_{22} & \cdots & \omega_2 k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \omega_1 k_{n1} & \omega_2 k_{n2} & \cdots & 1 - \omega_n k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \vdots \\ u_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1^n) \\ f(t_2^n) \\ \vdots \\ f(t_n^n) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

avec  $k_{ij} = k(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})$

Et inversement, on a ce résultat :

**Théorème 3.2.** *Soit  $(u_i^n)_{1 \leq i \leq n}$  solution du système (3.3) alors la fonction  $u_n$  donnée par*

$$u_i^{(n)} = f(t_i^{(n)}) + \sum_{j=1}^{(n)} \omega_j^{(n)} k(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}) u_n(t_j^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

vérifie l'équation (3.2) aux points de quadrature.

## 3.2 Étude de convergence

Dans cette section, nous présentons quelques résultats assurant la convergence des schémas issus de l'application directe de la méthode de Nyström, mais avant de procéder à la preuve de résultats de convergence, nous avons besoin de quelques définitions et résultats de base :

**Définition 3.1.** On définit l'erreur de discrétisation par :

$$|\epsilon_i| = U_i - u(t_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

**Remarque 3.1.**  $|\epsilon_i|$  dépend du pas de discrétisation  $h$ .

**Définition 3.2.** Soit  $u$  la solution de l'équation (3.1), la fonction

$$\delta(h, t_i) = \int_0^{t_n} k(t_n, s)u(s)ds - h \sum_{i=0}^n w_{ni}k(t_n, t_i)u(t_i)$$

représente l'erreur de consistance locale.

**Remarque 3.2.** L'erreur de consistance locale mesure la précision avec laquelle, pour une équation donnée, la méthode d'intégration numérique approche la partie intégral dans cette équation.

**Définition 3.3.** Pour une classe d'équation de la forme (3.1), si l'erreur

de consistence vérifie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |\delta(h, t_n)| = 0$$

alors la méthode d'approximation (3.2) est dite consistante avec l'équation (3.1), et si de plus ils existent  $c \in \mathbb{R}^+$  et  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\delta(h, t_n)| \leq ch^p$$

la méthode est dite consistante d'ordre  $p$ .

Le résultat suivant nous sera très utile par la suite :

**Théorème 3.3.** Soit la suite  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  qui vérifie :

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n = r, r+1, \dots$$

avec :

$$A > 0, \quad |B_n| \leq B, \quad \sum_{i=0}^{r-1} |\xi_i| \leq \eta.$$

Alors

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-r} (B + A\eta) \quad n = r, r+1, \dots \quad (3.4)$$

De l'équation (3.4) et pour  $A = hK$ ,  $t_n = nh$ , on obtient :

$$|\xi_n| \leq (B + hK\eta)e^{Kt_n}.$$

Nous pouvons maintenant annoncer et prouver le résultats principal

assurant la convergence de notre méthode :

**Théorème 3.4.** *Pour toute équation intégrale de second type tels que :*

1. *le noyau  $k(.,.)$  et le terme libre  $f$  sont deux fonctions continues.*
2. *la solution  $u$  de l'équation (3.1) et le noyau  $k(t, s)$  sont tels que la méthode d'approximation est de consistance d'ordre  $p$  avec l'équation (3.1)*
3. *les poids définissant la méthode d'intégration vérifient :*

$$\sup_{n,i} |\omega_{ni}| \leq W < \infty$$

4. *Pour  $r \in \mathbb{N}^*$  fixe, on a :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{r-1} |U_i - u(t_i)| = 0$$

*Alors la méthode d'approximation est convergente.*

*Démonstration.* Posons  $t = t_n$  dans l'équation (3.1). Pour  $n = r, r + 1, \dots$ , on obtient :

$$\epsilon_n = h \sum_{i=0}^n \omega_{ni} K(t_n, t_i) \epsilon_i - \delta(h, t_n).$$

Pour un choix de  $h$  vérifiant  $h < 1/LM$ , et en utilisant ... on obtient :

$$|\epsilon_n| \leq \frac{hWL}{1 - hWL} \sum_{i=0}^{r-1} |\epsilon_i| + \frac{|\delta(h, t_n)|}{1 - hWL}$$

L'application du théorème 3... et le résultat ... permet d'obtenir :

$$|\epsilon_n| \leq \frac{1}{1 - hWL} \left\{ \max_{r \leq n \leq N} |\delta(h, t_i)| + hWL \sum_{i=0}^{r-1} |\epsilon_i| \right\} e^{WLt_n/1-hWL}$$

d'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\epsilon_n| = 0.$$

□

### 3.3 Implémentation de la Quadrature ; Méthode des Trapèzes

Rappelons que l'équation intégrale est donné comme suivant :

$$u(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s)u(s)ds$$

Nous résolvons l'équation (3.1) sur l'intervalle  $[0, T]$  que nous le divisons en  $n$  segments de taille  $h = T/n$ . Le  $i$ -ème point de la subdivision obtenue est noté  $x_i$ , et il vaut  $t_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

La solution de l'équation (3.1) évaluée au point  $t_i$  vérifie :

$$u(t_i) = f(t_i) + \int_0^{t_i} k(t_i, s)u(s)ds$$

Avec la notation  $K_{ij} = k(t_i, t_j)$ ,  $F_i = f(t_i)$ ,  $U_i = u(t_i)$  et par application d'une formule de quadrature basé sur la méthode des trapèzes, on obtient :

$$\begin{aligned}
U_0 &= F_0, \\
U_1 &= F_1 + \frac{h}{2}(K_{1,0}U_0 + K_{1,1}U_1), \\
&\vdots \\
U_i &= F_i + \frac{h}{2}(K_{1,0}U_0 + 2\sum_{j=1}^{i-1} K_{i,j}U_j + K(i,i)U_i), \\
&\vdots \\
U_n &= F_n + \frac{h}{2}(K_{n,0}U_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} K_{n,j}U_j + K(n,n)U_n).
\end{aligned}$$

Nous remarquons que l'approximation  $(U_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  vérifient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{h}{2}K_{1,0} & 1 - \frac{h}{2}K_{1,1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -\frac{h}{2}K_{n,0} & -hK_{n,1} & \cdots & 1 - \frac{h}{2}K_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.3.1 Exemples numériques

Dans cette partie, nous présentons quelques exemples numériques, où on applique la méthode de quadrature pour approcher certaines équations intégrales linéaires de Voltera :

#### Exemple1

Considérons l'équation suivante :

$$u(t) = 2t - t^2 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in [0, 1]$$

$i$	$t_i$	$U_i$	$u(t_i)$	$\epsilon_i$
0	0	0	0	0
1	0.2	0.4000000000000000	0.4	0
2	0.4	0.8000000000000000	0.8	0
3	0.6	1.0400000000000000	1.2	0.1600000000000000
4	0.8	1.5644444444444445	1.6	0.0355555555555556
5	1	1.956543209876543	2	0.043456790123457

TABLE 3.1 – Ce tableau donne l'approximation de la solution aux points  $t_i$  comparées avec la solution exacte

$h$	$n$	$ \epsilon_n $
0.1	10	0.029798131146936
0.01	$10^2$	0.000319619100878
0.001	$10^3$	0.000003194793364

TABLE 3.2 – La convergence de la méthode de Nystrom

dont la solution exacte est  $u_{ex}(t) = 2t$ . Pour la subdivision  $t_i = ih$ , avec  $h = 0.2$ , on obtient les résultats suivants (voir Table 3.1)

### Exemple2

Considérons l'équation suivante :

$$u(t) = t^2 - t^4 + \int_0^t 4xu(x)dx$$

dont la solution exacte est  $u_{ex}(t) = t^2$  qu'on approche par différentes subdivisions ( on choisit des valeurs différentes pour le pas  $h$ ). Les résultats du tableau suivants ( voir Table 3.2) représente la variation de l'erreur en fonction de  $h$ , et illustrent la convergence de la méthode de Nystrom.

# Conclusion et commentaires

Dans ce mémoire, nous avons envisagé une méthode de quadrature pour résoudre un problème défini par une équation intégrale sur un intervalle fini. Nous avons montré l'efficacité numérique de cette méthode numérique en exhibant quelques exemples.

Nous concluons que généralement les équations intégrales sur intervalle fini peuvent être résolues d'une manière précise numériquement via la méthode de quadrature.

# Bibliographie

- [1] Ahues. M et al, *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2001.
- [2] Amosov. A. et all, *analysis of integral equations stated on great interval and its application to stellar radiative transfer modelling*. C.R. Acad. Sci., Paris, 2001.
- [3] Atkinson. K. E, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle :Théorie et applications*, Massons, Paris 1987.
- [5] Stoer. J, and Burlisch. J, *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, 1983.
- [6] Varga R.S, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs New York, 1962.
- [7] Mollapourasl R, *An efficient numerical scheme for a nonlinear integro-differential equations with an integral boundary condition*. Applied Mathematics and Computation, Volume 248, Pages 8-17, 2014.