

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Problème elliptique linéaire avec coefficient flous

Option : AFA

Par :

Boubellouta Souad & Lekhchine Asma

Encadré par : H . Lakhal

M.C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : M. Maouni
Examineur: K . Slimani

Prof U. SKIKDA
M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciements

**Merci Dieu tout-puissant qui nous a aidés à remplir ce mémorandum et qui nous a bénis avec la santé, le bien-être et la détermination Dieu merci
merci beaucoup**

Nous adressons nos sincères remerciements et notre gratitude à l'encadrant Dr **LAKHAL HAKIM merci pour vos précieux conseils et informations contribué à enrichir le sujet de notre étude dans ses
différentes aspects**

Nous remercions également les membres du comité de discuter **Slimani Kamel et **Maouni Messaoud** et à tous ceux qui ont été un soutien et un
soutien pour nous**

Merci à tous

Dédicaces

Ce travail est dédié à :

A mon soutien dans la vie mon cher père **ABDUL HAMID**.

A la femme la plus gentille que soit, mamère **ZINA BOUGHERRA**

A mon che époux **BOUSSIALA NABIL** auprès de qui j'ai trouvé tout le soutien
nécessaire afin d'accomplir ce travail la borieux.

A ma joie,mes enfants **MUHAMMED SIRAJUDDIN** et **YUSUF**.

A mes beaux parents et toute la belle famille.

A mes créées et soeurs, leurs maris, femmes et enfants, chacun en som nom.

A mes collègues et amis au travail, aux études et vivent partout.

A ma collègue dans ce travail **ASMA LEKHCHINE**.

Aux princesses **Lina Sirin** et mes chères **Aya** et **Yasmine**.

A tous ceux qui même avec un simple sourire, m'ont donné la force de continuer.

★ **Boubellouta Souad**

Dédicaces

Qu'il est beau pour une personne de donner ce qu'elle a de plus précieux, et qu'il est plus beau de donner le plus précieux au plus précieux

C'est le fruit de mes efforts que je récolte aujourd'hui c'est un cadeau que j'offre à mes personnes les plus chères et les plus proches chers parents **Amar** et **Lekhchine Mahbouba** que dieu les protège et prolonge leur vie celui qui m'a aidé et soutenu et sa supplication bénie a eu le plus grand impact sur la navigation du navire de recherche jusqu'à ce que j'atterrisse sur cette photo

A toute ma famille mes frères et soeurs leurs femmes, leurs maris et leurs enfants chacun son nom

A mon fiancé et tout sa famille chacun son nom

A ma collègue dans ce travail **Boubellouta Souad**

je leur dédie à tous cet humble travail

Nous demandons à dieu tout-puissant de nous en faire bénéficier et de nous assurer le succès

★ **Lekhchine Asma**

Résumé

Équation aux dérivées partielles linéaire floues

Dans ce travail nous avons étudiés l'existence et l'unicité de la solution faible pour les équation aux dérivées partielles elliptiques floues par application du théorème de Lax-Milgram sur l'espace de Sobolev avec l'espace de Lebesgue, qui a une fonction de poids positive, et nous avons utilisé le lemme de Céa pour comparer la solution avec la solution approchée que nous avons obtenons par méthode de Galerkin.

Mots-clés : Les équation aux dérivées partielles elliptiques floues, Lax-Milgram, Méthode de Galenkin.

Fuzzy linear partial differential equation

In this work we study the existence and the uniqueness of the weak solution for the Fuzzy elliptic partial differential equations by application of the theorem of lax-Miegram on the Sobolav space with the Lebesgue space, which has a positive weight function, in the and laste, and we have used the lemma of Céa to compare the solution with the approximate solution that we obtain by Galerkin method.

Key words : The Fuzzy elliptic partial dfferential equations, lax-Miegram, Galerkin method.

المعادلات التفاضلية الجزئية الضبابية الخطية

في هذا العمل قننا بالتطرق إلى وجود ووحداية الحل الضعيف للمعادلات التفاضلية الجزئية الضبابية الناقصية بتطبيق نظرية لاكس ميلغرام على فضاء صوبولوف مع فضاء لويغ الذي يمتلك دالة وزن موجبة في الأخير قننا بإستعمال توطئة سيا في مقارنة الحل مع الحل التقريبي الناتج من طريقة غالركين.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية الجزئية الضبابية الناقصية، لاكس ميلغرام، طريقة غالوركين.

Introduction		9
1	Rappeler de l'analyse fonctionnelle	12
1.1	Les Espaces	12
1.1.1	L'espace $H^1(\Omega)$	12
1.2	Espace avec poid	14
1.2.1	Espace $L^2(\Omega; \omega)$	14
1.3	Discrétisation par éléments finis	15
1.4	Bases orthonormées	17
2	Analyse floue	18
2.1	La logique floue	18
2.2	L'ensemble flou	18
2.2.1	La fonction et le degré d'appartenance	19
2.2.2	La formulation de l'ensemble flou	19
2.2.3	Les types des ensembles flous	20
2.2.4	Les caractérisations d'un ensemble floue	21
2.3	Les nombres flous	22
2.3.1	Les types des nombres flous	23
2.4	Champs flous	25
2.5	La fonction Floue	26
2.6	Arithmétique floue	26
2.6.1	Principe d'extension de Zadeh	26

2.6.2	Les opérations arithmétiques flous	28
2.6.3	Le produit de deux nombres flous	29
2.7	L'espace métrique des nombres flous	30
2.7.1	La norme d'un nombre flou	33
2.8	Approche de la surface de réponse	34
3	Problème elliptique linéaire avec coefficient flous	35
3.1	Équations aux dérivées partielles elliptique floues	35
3.1.1	Formulation du problème	35
3.1.2	Hypothèse d'entrée dimensionnelle finie	36
3.2	Solution d'EDP floue comme problème d'optimisation	37
3.3	Formulation faible	38
3.4	Discrétisation dans le domaine d'incertitude	42
3.5	Erreur limité	44
3.6	Régularité	48
3.7	Convergence	49
3.8	Discrétisation dans l'incertitude et le domaine spatial	50
	Conclusion	51
	Bibliographie	52

Chapre 2

\tilde{a}	Les ensemble flous sont désignés par la superposition d'un a tilde sur le nom de l'ensemble.
$d(x, \tilde{a})$	La distance d'un point x á l'ensemble \tilde{a} .
$d_H^*(\tilde{a}, \tilde{b})$	La séparation de Hausdorff de \tilde{a} á \tilde{b} dans \mathcal{K} .
$d_H(\tilde{a}, \tilde{b})$	La distance de Hausdorff entre $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{K}$.
$d_\infty(\tilde{a}, \tilde{b})$	La distance de Hausdorff entre $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
d_p	La distance de Hausdorff de type L^p .
$\ \cdot\ _F$	La norme d'un nombre flou.
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^c$	L'ensemble des nombres flous a des extrémités continus.
V	Un ensemble quelconque.
$\mu_{\tilde{a}}$	La fonction d'appartenance de l'ensemble \tilde{a} .
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	L'ensemble des nombre flous.
$H(\tilde{a})$	La hauteur de l'ensemble floue \tilde{a} .
$\text{noy}(\tilde{a})$	Le Noyau de l'ensemble floue \tilde{a} .
$[\tilde{a}]_{\tilde{\alpha}}$	α -coupe de l'ensemble floue \tilde{a} .
$[\tilde{a}]_{\alpha}$	α -coupe forte de l'ensemble floue \tilde{a} .
$\mathcal{F}(V)$	L'ensemble des nombres flous dans V .
$\Omega(V, W)$	L'ensemble de tous les fonctions flous de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}(V)$ á $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}(W)$.
\mathcal{K}	L'ensemble de sous ensembles convexes de \mathbb{R}^n .

Chapitre 3

α	α -niveau d'un α -coupe.
$[\tilde{a}]_\alpha$	α -coupe forte d'ensemble flou.
$F(V)$	Ensemble de tout les ensemble flous.
\tilde{a}	Les ensemble flous sont désignés par la superposition d'un a tilde sur le nom de l'ensemble.
$\mu_{\tilde{a}}$	Fonction d'appartenance d'un ensemble.
∇	Opérateur de gradient.
Ω	Domaine spatil domaine de Lipshitz dans \mathbb{R}^n .
x	Coordonne spatiale, élément de Ω .
ξ	Parmètre élément de Ξ .
d	La métrique induite.
d_H	La distence de Hausdorff.
d_∞	Distance supérieure.
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev : $= \{u \in L^2(\Omega) : D^i u \in L^2(\Omega) \forall \ i\ _1 \leq 1\}$.
$H_0^1(\Omega)$	Espace de Sobolev : $= \{u \in H^1(\Omega) : u _{\partial\Omega} = 0\}$.
u^r	approximation numérique de u .

Les incertitudes qui surviennent dans la modélisation physique peuvent généralement être classées en deux catégories. Premièrement, les incertitudes irréductibles et inhérentes à la physique sont dites aléatoires. Deuxièmement, les incertitudes qui découlent d'une connaissance incomplète de la physique sont appelées épistémiques. Habituellement, les deux types d'incertitudes sont modélisés par des paramètres aléatoires. En cas d'incertitudes épistémiques, cette pratique peut cependant conduire à des résultats très peu fiables car il faudra faire des hypothèses sur la fonction de densité de probabilité. Les intervalles, ainsi que les nombres flous, les processus flous et les champs flous offrent alors une alternative intéressante. Ils nécessitent moins d'informations sur l'incertitude, ce qui signifie que moins d'informations éventuellement incorrectes sont ajoutées au modèle. Cela les rend par exemple très utiles dans les premières étapes de conception d'une application d'ingénierie lorsque l'on sait peu de choses sur les détails spécifiques de la conception.

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur l'approche de modélisation floue. Elle contient l'utilisation des incertitudes d'intervalle en tant que sous-classe simple. Plus précisément, nous considérerons une équation aux dérivées partielles (EDP) elliptique avec un coefficient de diffusion flou. Malheureusement, il n'y a pas de consensus dans la littérature sur la façon de définir ou d'interpréter la solution aux équations différentielles floues. Au moins trois classes d'interprétations peuvent être identifiées, Une première est basée sur le concept de la dérivée de Hukuhara , une autre sur la théorie des inclusions différentielles et une dernière sur le principe d'extension de Zadeh C'est cette dernière interprétation que nous utiliserons. Le principe d'extension de Zadeh est au cœur de la plupart des calculs flous. Pourtant, des différences subtiles peuvent être trouvées dans la littérature quant à

la façon dont le principe d'extension doit être appliqué aux équations différentielles floues. Dans ce mémoire, nous proposons une définition des processus et des champs flous permettant une application simple du principe d'extension de Zadeh aux équations aux dérivées partielles floues. Quelle que soit la définition retenue, la résolution d'une équation aux dérivées partielles floue reste très coûteuse. Alors que les calculs flous sont définis par le principe d'extension de Zadeh, l'approche α -coup plus pratique est plus largement utilisée pour effectuer les calculs flous réels. L'approche α -coup reformule le problème flou comme un problème d'analyse d'intervalles empilés. Dans le cas d'une EDP floue, les calculs d'intervalle résultants reviennent alors généralement à minimiser et maximiser la valeur de la solution EDP sur un domaine de paramètres (et des parties de celui-ci) qui est déterminé par les paramètres d'entrée flous. Afin d'accélérer ce processus d'optimisation coûteux, des surfaces de réponse peuvent être utilisées. Une telle surface de réponse, par exemple sous la forme d'un polynôme multivarié, est généralement beaucoup moins chère à évaluer que l'opérateur de solution EDP. Le problème cependant avec les techniques de surface de réponse qui sont actuellement utilisées dans la littérature est qu'elles sont souvent utilisées de manière boîte noire et ont une précision et une convergence difficiles à quantifier.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

- **Le premier chapitre** : est consacré à la présentation des concepts de base ainsi que le rappel des outils d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'étude et rappelle des quelques l'espace de Sobolev.
- **Dans le chapitre 02.** On introduit à l'analyse floue avec une illustration de quelques exemples.
- **Le troisième chapitre** : est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires floues. Pour analyser ce problème nous proposons la méthode de Lax-Milgram et l'approximation de Galerkin.

CHAPITRE 1

RAPPELER DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE

1.1 Les Espaces

Définition 1.1.1. [8](**Espace de Banach**) On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Définition 1.1.2. [8](**Espace préhilbertien**) Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.

Définition 1.1.3. [8](**Espace de Hilbert**) Si un espace préhilbertien est complet, pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.4. [4](**Espace $D(\Omega)$**) On note par $D(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur Ω et à support compact inclus dans Ω .

Définition 1.1.5. [4](**Espace $L^1_{loc}(\Omega)$**) [4] On définit l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ des classes des fonctions localement intégrables sur Ω par

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable ; } \int_K |f(x)| dx < \infty, \forall K \text{ compact de } \Omega \right\}.$$

1.1.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.1.6. [10] On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions est associée à une fonction qui appartient également à $L^2(\Omega)$, c'est à dire

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} u(x)v(x) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx,$$

la norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on utilisera également une norme équivalente, notée de la même manière, définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.1.1. [10] *L'espace $H^1(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert séparable*¹.

Théorème 1.1.1. [10] (**Application trace**) *Si Ω est un ouvert borné de classe C^1 alors l'application*

$$\begin{aligned} \gamma : (C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) &\rightarrow (L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}) \\ u &\mapsto u|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

est une application linéaire et continue et se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ encore notée γ .

Définition 1.1.7. [10] (**Les espace $H_0^1(\Omega)$**) *On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui signifie que les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les limites dans $H^1(\Omega)$ des suites de fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$,

alors $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ , on a

$$H_0^1(\Omega) = \text{Ker}(\gamma) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \gamma(u) = 0 \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \right\}.$$

1.2 Espace avec poids

Définition 1.2.1. [4] On définit l'espace

$$W(\Omega) = \{\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \omega \text{ est mesurable et } \omega(x) > 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Exemple 1.2.1. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. On pose $\omega(x, y) = x^2 + y^2$, alors $\omega \in W(\Omega)$. En effet, la fonction ω est mesurable, car elle est continue sur Ω . On a $x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x, y) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$, mais $\text{mes}(\{(0, 0)\}) = 0$. On déduit que $\omega(x, y) > 0$ p.p. $(x, y) \in \Omega$.

1.2.1 Espace $L^2(\Omega; \omega)$

Soit $\omega \in W(\Omega)$.

Définition 1.2.2. On définit l'espace

$$L^2(\Omega; \omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable et } u\omega^{\frac{1}{2}} \in L^2(\Omega) \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (u | v)_{L^2(\Omega; \omega)} &= \left(v\omega^{\frac{1}{2}} | v\omega^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} u(x)v(x)\omega(x)dx, \end{aligned}$$

et de la norme associée

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega; \omega)} &= \left((u | u)_{L^2(\Omega; \omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| u\omega^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3. (**Espace produit** $(L^2(\Omega; \omega))^m$) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\left(L^2(\Omega; \omega) \right)^m = \left\{ f = (f_1, \dots, f_m); f_i \in L^2(\Omega; \omega), \forall i = 1, \dots, m \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(f | g)_{(L^2(\Omega;\omega))^m} = (f\omega^{\frac{1}{2}} | g\omega^{\frac{1}{2}})_{(L^2(\Omega))^m} = \sum_{i=1}^m (f_i\omega^{\frac{1}{2}} | g_i\omega^{\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme

$$\|f\|_{(L^2(\Omega;\omega))^m} = \left(\sum_{i=1}^m \|f_i\omega^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^2(\Omega;\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.2.1. [7] (**Formule de Green**) *On suppose que Ω est borné et de classe C^1 .*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma,$$

où n_i désigne la i -ème composante de la normale extérieure unitaire \vec{n} à $\partial\Omega$.

Théorème 1.2.1. [3] (**Lax-Milgram**) *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire sur $H \times H$ continue et coercive, c'est à dire tel qu'il existe $C, \alpha > 0$ telles que $\forall x, y \in H$,*

$$|a(x, y)| \leq C \|x\|_H \|y\|_H \quad \text{et} \quad a(x, x) \geq \alpha \|x\|_H^2,$$

alors pour toute forme linéaire L de H il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H$

$$L(x) = a(u, x),$$

de plus si a est symétrique, en posant $J(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - L(x)$ pour $x \in H$, u est caractérisé par

$$J(u) = \min_{x \in H} J(x).$$

Proposition 1.2.2. [7] (**Inégalité de Poincaré.**) *On suppose que Ω est borné et de classe C^1 . Alors il existe $C = C(\Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.3 Discrétisation par éléments finis

*On s'intéresse à la discrétisation par éléments finis du problème variationnel :
trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

on introduit l'espace

$$X_h = \{v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|_K} \in \mathcal{P}_k(K)\},$$

et on considère l'espace $X_h^0 = X_h \cap H_0^1(\Omega)$, l'espace des fonctions de X_h à trace nulle sur $\partial\Omega$. Le problème approché suivant est simplement construit par la méthode de Galerkin qui consiste à remplacer $H_0^1(\Omega)$ par X_h^0 :

trouver u_h dans X_h^0 tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

Lemme 1.3.1. [9] (**Lemme de Céa**) On a la majoration d'erreur a priori entre la solution u du problème variationnel et la solution u_h du problème approché

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Théorème 1.3.1. [8, 1] (**Inégalité de Hölder**) Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p , on a, pour $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q dx \right)^{1/q}, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

pour $p = q = 2$, on l'appelle inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Théorème 1.3.2. [8] (**Inégalité de Minkowski**) Soit $1 \leq p < \infty$. Pour $f, g \in L^p(\Omega)$, on a l'inégalité de Minkowski

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{1/p},$$

il en résulte que $L^p(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables et que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $L^p(\Omega)$. Pour $p = 1$, l'inégalité est évidente.

1.4 Bases orthonormées

Définition 1.4.1. [8] On dit qu'une suite orthonormée $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans un espace préhilbertien H est une **base orthonormée** de H si l'ensemble $\{\varphi_n; n \geq 1\}$ est total dans H , on dit aussi que $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est une **base hilbertienne**.

Théorème 1.4.1. [8] Soit H un espace préhilbertien et soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de H . Alors, tout élément $x \in H$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n, \quad \text{avec } \xi_n = (x | \varphi_n).$$

De plus, pour tous $x, y \in H$, on a les **formules de Parseval**

1) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x | \varphi_n)|^2$

2) $(x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x | \varphi_n) \overline{(y | \varphi_n)}$, la série convergeant absolument.

2.1 La logique floue

La logique floue est une logique plus large que la logique binomiale classique qui repose sur les valeurs 0 et 1. C'est une logique à valeurs multiples dans la période fermée $[0, 1]$ qu'indique le degré de logique floue.

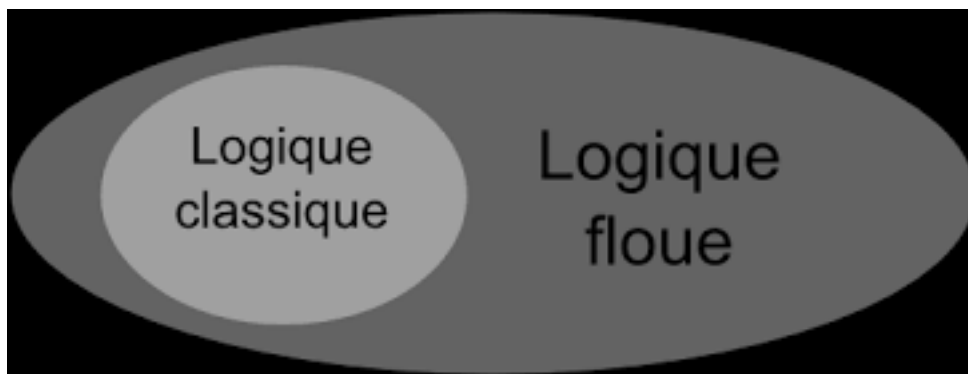


FIGURE 2.1 – La logique classique et la logique floue

2.2 L'ensemble flou

Le concept d'un ensemble est fondamental en mathématiques et peut être intuitivement décrit comme une collection d'objets éventuellement liés par certaines propriétés.

Un ensemble classique a des limites claires, c'est-à-dire que $x \in \tilde{a}$ ou $x \notin \tilde{a}$ exclut toute autre possibilité.

2.2.1 La fonction et le degré d'appartenance

Soit V un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de V , chaque sous ensemble flou \tilde{a} de V est défini par sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}}$.

Définition 2.2.1. [6]

La fonction d'appartenance de \tilde{a} est une fonction numérique définie par

$$\mu_{\tilde{a}} : V \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_{\tilde{a}}(x),$$

et $\mu_{\tilde{a}}(x)$ représente le degré d'appartenance d'un élément dans l'ensemble flou.

Remarque 2.2.1.

On peut définir la fonction d'appartenance d'un ensemble classique $\tilde{a} \subseteq V$ comme suit

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tilde{a} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2.2 La formulation de l'ensemble flou

Définition 2.2.2. [6] Les ensembles flous sont des généralisations des ensembles classiques représentés par leur fonction caractéristique

$$\mu_{\tilde{a}} : V \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_{\tilde{a}}(x),$$

l'ensemble est écrit sous forme de couples : (la première composante est l'élément, la deuxième composante est le degré d'appartenance) c'est à dire

$$\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x)) : x \in \tilde{a}, 0 \leq \mu_{\tilde{a}}(x) \leq 1\} \text{ ou } \tilde{a} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{a}}(x)}{x}; x \in V, 0 \leq \mu_{\tilde{a}}(x) \leq 1 \right\},$$

telle que V un ensemble quelconque.

Exemple 2.2.1.

1. Soit $V = \{a, b, c\}$, et soit la fonction $\mu_{\tilde{a}} : V \rightarrow [0, 1]$ défini par $\mu_{\tilde{a}}(a) = 0.15$, $\mu_{\tilde{a}}(b) = 0.3$, $\mu_{\tilde{a}}(c) = 0.2 \Rightarrow$ L'ensemble $\tilde{a} = \{(a, 0.15), (b, 0.3), (c, 0.2)\}$ est un ensemble flou.

2. Soit $V = \{a, b, c\}$, et soit la fonction $\mu_{\tilde{b}} : V \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\mu_{\tilde{b}}(a) = 0.15$, $\mu_{\tilde{b}}(b) = 2.5$, $\mu_{\tilde{b}}(c) = 0.2$ implique que l'ensemble $\tilde{b} = \{(a, 0.15), (b, 2.5), (d, 2)\}$ n'est pas un ensemble flou.
3. Soit \mathbb{N} : l'ensemble des nombres naturelles et soit la fonction $\mu_{\tilde{a}} : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ défini par $\mu_{\tilde{a}}(n) = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ implique que \tilde{a} est un ensemble flou dans \mathbb{N} .

Exemple 2.2.2.

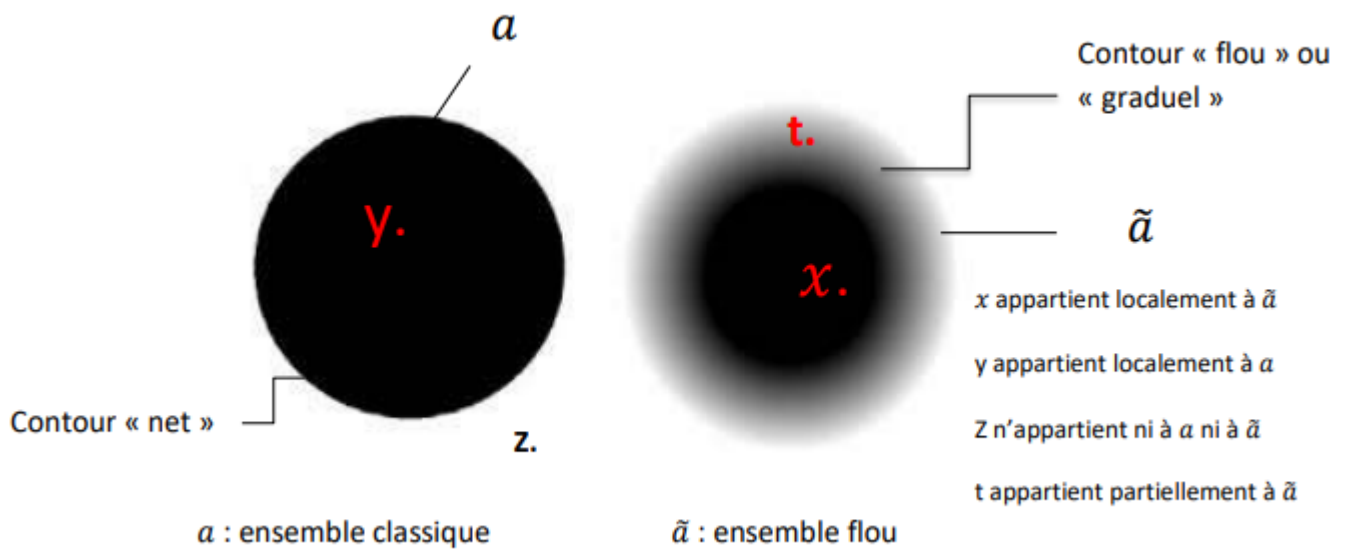


FIGURE 2.2 – La différence entre l'ensemble classique et l'ensemble flou

2.2.3 Les types des ensembles flous

L'ensemble flou discret

Exemple 2.2.3. Soit

$$V = \{x, y, z\}, \quad \text{on a}$$

$$\mu_{\tilde{a}} : V \rightarrow [0, 1]$$

telle que

$$\tilde{a} = \left\{ \frac{0.4}{x}, \frac{1}{y}, \frac{0.2}{z} \right\}.$$

L'ensemble flou continu

Exemple 2.2.4.

$$\mu_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$
$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ \frac{40-x}{20} & \text{si } 20 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2.2.2.

Soit V un ensemble non vide, \tilde{a} un sous ensemble flou de V , nous avons les remarque suivantes

1. On dit que $x \in V$ est un point d'équilibre de \tilde{a} si

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = 0.5.$$

2. On dit que \tilde{a} est un ensemble normale si

$$\exists x_0 \in \tilde{a} : \mu_{\tilde{a}}(x_0) = 1.$$

2.2.4 Les caractérisations d'un ensemble flou

Un sous-ensemble flou s'il est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance, á partir d'une telle fonction un certain nombre de caractérisations des sous-ensembles flous peuvent être étudié [6].

– Noyau

Le noyau d'un sous-ensemble flou \tilde{a} de V , noté par $\text{noy}(\tilde{a})$ est défini par

$$\text{noy}(\tilde{a}) = \{x \in V, \mu_{\tilde{a}}(x) = 1\}.$$

– α -coupe

Une α -coupe de \tilde{a} est le sous-ensemble flou noté $[\tilde{a}]_{\alpha}$ est défini par

$$[\tilde{a}]_{\alpha} = \{x \in V, \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}.$$

– α -coupe forte est définies comme $[\tilde{a}]_\alpha = \{x \in \Omega : \mu_{\tilde{a}}(x) > \alpha\}$.

– **Support**

Le support d'un ensemble flou \tilde{a} de V , noté $\text{supp}(\tilde{a})$ est défini par

$$[\tilde{a}]_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\tilde{a}]_\alpha}.$$

– **La hauteur**

Noté $H(\tilde{a})$ est défini par

$$H(\tilde{a}) = \max \{\mu_{\tilde{a}}(x), x \in V\}.$$

2.3 Les nombres flous

Les nombres flous généralisent les nombres réels classiques, et en général le nombre flou est un sous ensemble des réels qui a des propriétés supplémentaires. Les nombres flous sont capables de modéliser l'incertitude épistémique et sa propagation par des calculs. Le concept de nombre flou est basé sur l'analyse flou et les équations différentielles floues, et un outil très utile dans plusieurs applications des ensembles flous et de la logique floue.

Définition 2.3.1. [6]

Considérons un sous-ensemble flou des nombres réels telle que $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, on dit que μ est un nombre flou s'il satisfait les propriétés suivantes

1. μ est normal (c'est à dire : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq : $\mu(x_0) = 1$).
2. μ convexe flou (c'est à dire $\mu(tx + (1-t)y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\forall t \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}$).
3. μ est semi continue supérieurement dans \mathbb{R} (c'est à dire $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq :
 $\mu(x) - \mu(x_0) < \epsilon, \|x - x_0\| < \delta$).
4. $d(\tilde{a})$ note l'ensemble fermé de \tilde{a} , μ est à support compact (c'est à dire $\overline{\{x \in \mathbb{R}, \mu(x) > 0\}}$) est compact.

2.3.1 Les types des nombres flous

– Nombre flou trapézoïdal

Un nombre flou trapézoïdal \tilde{u} peut être représenté par le quadruple $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $a \leq b \leq c \leq d$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x. \end{cases}$$

Dans ce cas

les points d'extrémité de l'ensemble α -coupe sont donnés par

$$[\tilde{u}^-]_{\alpha} = a + \alpha(b - a),$$

et

$$[\tilde{u}^+]_{\alpha} = d + \alpha(d - c).$$

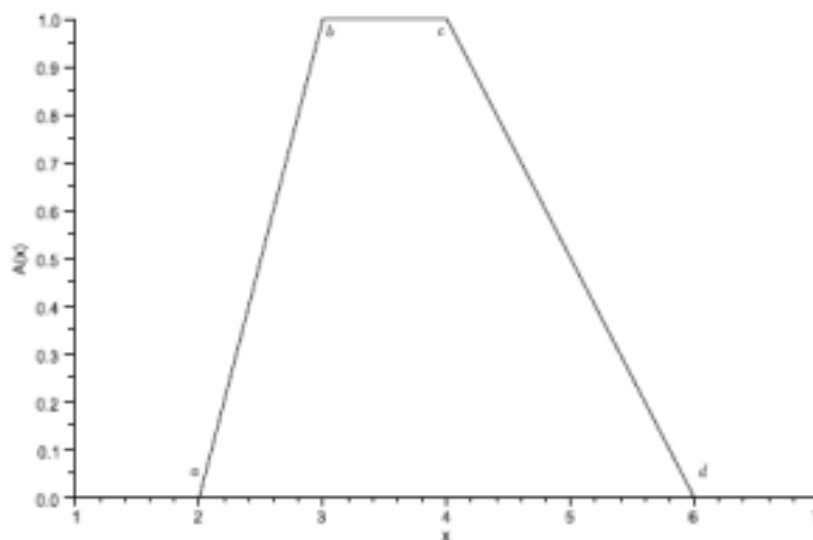


FIGURE 2.3 – Exemple de nombre flou trapézoïdal.

– Nombre flou triangulaire

Si $b = c$ dans la représentation (a, b, c, d) alors le nombre flou est appelé nombre flou triangulaire, donc le triple $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \leq b \leq c$ est suffisant pour représenter le nombre flou triangulaire.

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x. \end{cases}$$

Dans ce cas

les points d'extrémité de l'ensemble α -coupe sont donnés par

$$[\tilde{u}^-]_{\bar{\alpha}} = a + \alpha(b - a),$$

et

$$[\tilde{u}^+]_{\bar{\alpha}} = c + \alpha(b - c).$$

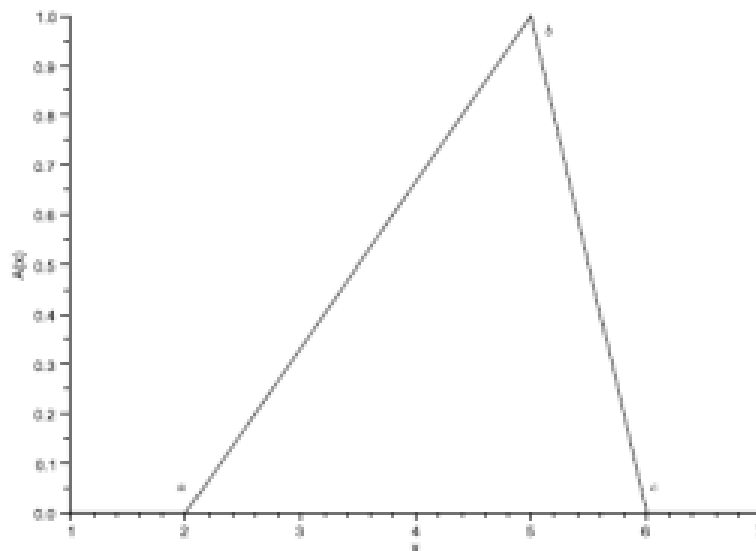


FIGURE 2.4 – Exemple de nombre flou triangulaire

2.4 Champs flous

Intuitivement, un champ flou scalaire $\tilde{a}(\cdot)$ est un ensemble flou qui varie sur une coordonnée spatiale $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, soit $\tilde{a}(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Si cette définition est utile pour guider son intuition, elle n'est pas suffisamment précise. Il ne fournit pas, par exemple, d'informations directes sur l'interactivité dans le champ, c'est-à-dire la corrélation entre les valeurs floues du champ à différents emplacements dans le domaine spatial. Ce manque de précision est particulièrement gênant lorsqu'on cherche à définir la fuzzification des opérateurs différentiels.

Nous adoptons une perspective différente et considérons la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}(\cdot)}(a(\cdot))$, qui attribue un degré d'appartenance à toutes les réalisations possibles $a(\cdot)$ de champ flou $\tilde{a}(\cdot)$. Cela nous amène à une définition quelque peu similaire à la définition de [2].

Définition 2.4.1. *Un champ flou $\tilde{a}(\cdot)$ sur le domaine spatial $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble flou sur un espace fonctionnel V de fonctions définies sur Ω , c'est-à-dire $\tilde{a}(\cdot) \in \mathcal{F}(V)$.*

Intuitivement, la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{a}(\cdot)}$ peut être considérée comme la fonction d'appartenance conjointe de toutes les valeurs floues du champ flou en tous points du domaine spatial. Il porte toutes les informations d'interactivité de terrain. Lorsque $V = C(\Omega)$ par exemple, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues, on peut facilement dériver la fonction d'appartenance jointe de $\tilde{a}(x^{(1)})$ et $\tilde{a}(x^{(2)})$, pour certains $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega$, par le principe d'extension de Zadeh

$$\mu_{\tilde{a}(x^{(1)}), \tilde{a}(x^{(2)})}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \sup_{a(\cdot): y^{(1)}=a(x^{(1)}), y^{(2)}=a(x^{(2)})} \mu_{\tilde{a}(\cdot)}(a(\cdot)), \quad (2.1)$$

et la fonction d'appartenance du champ flou en un point particulier $x \in \Omega$

$$\mu_{\tilde{a}(x)}(y) = \sup_{a(\cdot): y=a(x)} \mu_{\tilde{a}(\cdot)}(a(\cdot)). \quad (2.2)$$

Dans la section suivante, nous expliquons comment cette définition admet une application directe du principe d'extension de Zadeh aux équations différentielles floues. Dans un premier temps, nous montrons comment il permet la fuzzification d'un opérateur différentiel classique vers un opérateur applicable aux champs flous. Le gradient d'un champ flou $\tilde{a}(\cdot)$, noté $\nabla \tilde{a}(\cdot)$, peut être défini comme l'ensemble des gradients de toutes les réalisations de $\tilde{a}(\cdot)$, complété

par la fonction d'appartenance

$$\mu_{\nabla\tilde{a}(\cdot)}(y) = \sup_{a(\cdot):y=\nabla a(\cdot)} \mu_{\tilde{a}(\cdot)}(a(\cdot)), \quad (2.3)$$

ses α coupes fortes sont

$$[\nabla\tilde{a}(\cdot)]_\alpha = \{\nabla a(\cdot) : a(\cdot) \in [\tilde{a}(\cdot)]_\alpha\}. \quad (2.4)$$

2.5 La fonction Floue

Définition 2.5.1. [6]

Soit V et W deux ensembles non vide, la fonction flou F telle que $F : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$.

- Si \tilde{a} un ensemble flou dans $\mathcal{F}(V)$ alors $F(\tilde{a})$ un ensemble flou dans $\mathcal{F}(W)$, ($F(\tilde{a}) \in \mathcal{F}(W)$).

Remarque 2.5.1. [6]

$\Omega(V, W)$ l'ensemble de toute les fonction flous de $\mathcal{F}(V)$ á $\mathcal{F}(W)$.

Exemple 2.5.1.

Soit $W = \{y_1, y_2\}$, $V = \{x_1, x_2, x_3\}$

et $\tilde{a} = \left\{ \frac{a_1}{x_1}, \frac{a_2}{x_2}, \frac{a_3}{x_3} \right\}$, $B = \left\{ \frac{b_1}{y_1}, \frac{b_2}{y_2} \right\}$

c'est á dire $\mu_{\tilde{a}}(x_i) = a_i$, telle que $i = 1, 2, 3$, $\mu_{\tilde{b}}(y_j) = b_j$ telle que $j = 1, 2$

et si nous imposons $b_1 = \min \{a_1, a_2\}$, $b_2 = \max \{a_1, a_2\}$,

cette description est pour la fonction floue.

Définition 2.5.2. (*L'inverse des fonctions floues*) [6]

Soit V, W et $F, G \in \Omega(V, W)$, et $F(V) = W$, on dit que F et G l'un est inverse á l'autre si $G(F(V)) = V$ et aussi $F(G(W)) = W$.

2.6 Arithmétique floue

Nous commençons par le principe de l'extension de Zadeh.

2.6.1 Principe d'extension de Zadeh

Définition 2.6.1. [6]

Soit la fonction $f : V \rightarrow W$ où V et W sont deux ensembles quelconques, on peut prolongé

cette fonction f a une fonction $f : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$ (une fonction floue) telle que $\tilde{a} = (V, \mu_{\tilde{a}})$, alors $f(\tilde{a}) = (W, \mu_{f(\tilde{a})})$ avec

$$\mu_{f(\tilde{a})}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{a}}(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour des raisons de brièveté de notation, nous omettrons plus loin le cas de $f^{-1}(y) = \emptyset$ lors de l'écriture des spécificités d'une application floue.

L'effet du principe d'extension de Zadeh sur les fortes α -coupes est facilement visible comme étant

$$\begin{aligned} [f(\tilde{a})]_{\alpha} &= \left\{ y : \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{a}}(x) > \alpha \right\} = \left\{ y : \exists x \in f^{-1}(y) : \mu_{\tilde{a}}(x) > \alpha \right\} \\ &= \{ f(x) : x \in [\tilde{a}]_{\alpha} \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ou plus compact

$$[f(\tilde{a})]_{\alpha} = f([\tilde{a}]_{\alpha}) \quad (2.7)$$

Cette propriété très utile, connue sous le nom d'approche α -coupe, fournit un aperçu intuitif des calculs flous et révèle une relation étroite entre l'analyse floue et l'analyse par intervalles. De plus d'un point de vue informatique l'approche α -coupe est souvent plus pratique qu'une application directe du principe d'extension de Zadeh. Dans [2], il a été prouvé que l'approche α -coupe vaut également pour les α -coupes régulières (c'est-à-dire pas fortes) lorsque f est continu et que toutes les coupes $\alpha[\tilde{a}]_{\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 1$, sont compacts.

Ensuite, nous considérons le cas d'une application $f : \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ avec deux arguments d'entrée $\tilde{a} \in \mathcal{F}(V)$ et $\tilde{b} \in \mathcal{F}(W)$. Une telle application est à nouveau simplement définie par le principe d'extension de Zadeh. Nous avons que $f(\tilde{a}, \tilde{b}) = (Z, \mu_{f(\tilde{a}, \tilde{b})})$, avec

$$\mu_{f(\tilde{a}, \tilde{b})}(z) = \sup_{x, y : z=f(x, y)} \mu_{\tilde{a}, \tilde{b}}(x, y), \quad (2.8)$$

où $\mu_{\tilde{a}, \tilde{b}}(x, y)$ est la fonction d'appartenance conjointe de \tilde{a} et \tilde{b} . Une fonction d'appartenance conjointe contient des informations sur la manière dont les ensembles flous interagissent. Les ensembles flous non interactifs ont par exemple une fonction d'appartenance conjointe

$$\mu_{\tilde{a}, \tilde{b}}(x, y) = \min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)). \quad (2.9)$$

Pour $f(\tilde{a}, \tilde{b})$, cela se traduit par une fonction d'appartenance

$$\mu_{f(\tilde{a}, \tilde{b})}(z) = \sup_{x, y : z=f(x, y)} \min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)), \quad (2.10)$$

et fortes coupes α

$$[f(\tilde{a}, \tilde{b})]_{\alpha} = \{f(x, y) : x \in [\tilde{a}]_{\alpha}, y \in [\tilde{b}]_{\alpha}\}. \quad (2.11)$$

2.6.2 Les opérations arithmétiques flous

1. La somme et la multiplication scalaire [6] Pour $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ basés sur le principe d'extension, on peut définir la somme de deux nombre flous $\tilde{u} + \tilde{v}$ et la multiplication d'un nombre réel λ par un nombre flou $\lambda\tilde{u}$

$$[\tilde{u} + \tilde{v}]_{\alpha} = \{x + y \mid x \in [\tilde{u}]_{\alpha}, y \in [\tilde{v}]_{\alpha}\} = [\tilde{u}]_{\alpha} + [\tilde{v}]_{\alpha},$$

et

$$[\lambda \cdot \tilde{u}]_{\alpha} = \{\lambda x \mid x \in [\tilde{u}]_{\alpha}\} = \lambda[\tilde{u}]_{\alpha}, \forall \alpha \in [0, 1],$$

où $[\tilde{u}]_{\alpha} + [\tilde{v}]_{\alpha}$ est la somme de deux intervalles et $\lambda[\tilde{u}]_{\alpha}$ est le produit habituel d'un nombre est un sous ensemble de \mathbb{R} .

Exemple 2.6.1. Soient $\tilde{u} = (1, 2, 3)$, $\tilde{v} = (2, 3, 4)$ deux nombres flous triangulaires,

- On a

$$[\tilde{u}]_{\alpha} = [1 + \alpha, 3 - \alpha] \text{ et } [\tilde{v}]_{\alpha} = [2 + \alpha, 4 - \alpha] \text{ et } \tilde{u} + \tilde{v} = (3, 5, 7).$$

donc

$$\begin{aligned} [\tilde{u} + \tilde{v}]_{\alpha} &= [3 + 2\alpha, 7 - 2\alpha] \\ &= [1 + \alpha, 3 - \alpha] + [2 + \alpha, 4 - \alpha] \\ &= [\tilde{u}]_{\alpha} + [\tilde{v}]_{\alpha}. \end{aligned}$$

- Et

$$\begin{aligned} [2.\tilde{u}]_{\alpha} &= [2 + 2\alpha, 6 - 2\alpha] \\ &= 2[1 + \alpha, 3 - \alpha] \\ &= 2.[\tilde{u}]_{\alpha}. \end{aligned}$$

Propriétés

(a) L'addition des nombres flous est associative et commutative c-à-d

$$\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{v} + \tilde{u} \quad \text{et} \quad \tilde{u} + (\tilde{v} + \tilde{w}) = (\tilde{u} + \tilde{v}) + \tilde{w}; \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

(b) Le singleton flou $0 = \chi_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ est l'élément neutre c-à-d

$$\tilde{u} + 0 = 0 + \tilde{u} = \tilde{u}, \quad \forall \tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

(c) Aucun élément $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}/\mathbb{R}$ possède un opposé dans $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

(d) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ telle que $a, b \geq 0$ et $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on a

$$(a + b) \cdot \tilde{u} = (a \cdot \tilde{u}) + (b \cdot \tilde{u}),$$

généralement cette propriété est fausse.

(e) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on a

$$\lambda \cdot (\tilde{u} + \tilde{v}) = \lambda \cdot \tilde{u} + \lambda \cdot \tilde{v}.$$

(f) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on a

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \tilde{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \tilde{u}).$$

2.6.3 Le produit de deux nombres flous

\tilde{u} et \tilde{v} de deux nombres flous le produit $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$ est défini par

$$\begin{aligned} [(\tilde{u} \cdot \tilde{v})^-]_{\bar{\alpha}} &= \min \left\{ ([\tilde{u}^-]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^-]_{\bar{\alpha}}), ([\tilde{u}^-]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^+]_{\bar{\alpha}}), ([\tilde{u}^+]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^-]_{\bar{\alpha}}), ([\tilde{u}^+]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^+]_{\bar{\alpha}}) \right\}. \\ [(\tilde{u} \cdot \tilde{v})^+]_{\bar{\alpha}} &= \max \left\{ ([\tilde{u}^-]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^-]_{\bar{\alpha}}), ([\tilde{u}^-]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^+]_{\bar{\alpha}}), ([\tilde{u}^+]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^-]_{\bar{\alpha}}), ([\tilde{u}^+]_{\bar{\alpha}} \cdot [\tilde{v}^+]_{\bar{\alpha}}) \right\}. \end{aligned}$$

Exemple 2.6.2. Nous utilisons l'exemple simple du produit de deux nombres flous. Les nombres flous sont des ensembles flous sur \mathbb{R} avec une fonction d'appartenance qui satisfait les deux propriétés suivantes : chaque α -coupe est un intervalle fermé et borné et $[\tilde{a}]_{\bar{1}}$ n'est pas vide. La figure 1 montre le produit $\tilde{c} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$

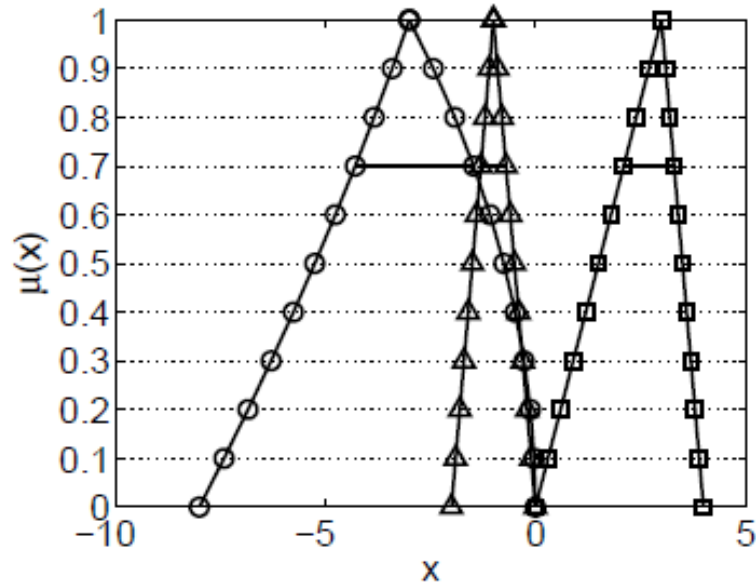


FIGURE 2.5 – Produit $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$ (○) des deux nombres flous triangulaires non interactifs $\tilde{u} = \text{triang}(-2, -1, 0)$ (Δ) et $\tilde{v} = \text{triang}(0, 3, 4)$ (□). Les lignes horizontales pleines illustrent l'approche α -coupe pour $\alpha = 0.7$.

des deux nombres flous triangulaires non interactifs $\tilde{u} = \text{triang}(-2, -1, 0)$ et $\tilde{v} = \text{triang}(0, 3, 4)$. L'opérateur $\text{triang}(l, r, t)$ est utilisé ici comme notation abrégée pour un nombre flou triangulaire avec support $[l, r]$ et top t . En utilisant l'approche α -coupe, la fonction d'appartenance de \tilde{w} peut facilement être calculée pour une série de valeurs α . Par exemple, pour $\alpha = 0.7$, nous avons

$$\begin{aligned} [\tilde{u} \cdot \tilde{v}]_{0.7} &= \{x \cdot y : x \in [\tilde{u}]_{0.7}, y \in [\tilde{v}]_{0.7}\} \\ &= \{x \cdot y : x \in [-1.3, -0.7], y \in [2.1, 3.3]\} \\ &= [-4.29, -1.47] \end{aligned}$$

2.7 L'espace métrique des nombres flous

La distance la plus utilisée dans l'espace des nombres flous est distance de Hausdorff, la distance de Hausdorff (ou en fait Hausdorff pompeiu) pour les nombres flous est basé sur la distance classique entre sous ensembles convexes compacts de \mathbb{R}^n .

Rappelons la définition du distance du Hausdorff

1. Soit \mathcal{K} note la collection de tout les ensembles non vides des sous-ensembles convexes

de \mathbb{R}^n et soit $\tilde{a} \in \mathcal{K}$, la distance d'un point x á l'ensemble \tilde{a} est

$$d(x, \tilde{a}) = \inf\{\|x - a\| : a \in \tilde{a}\}.$$

2. Maintenant, soit $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{K}$, la séparation de Hausdorff de \tilde{b} á \tilde{a} et de \tilde{a} á \tilde{b} respectivement sont

$$d_H^*(\tilde{b}, \tilde{a}) = \sup\{d(b, \tilde{a}) : b \in \tilde{b}\},$$

$$d_H^*(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sup\{d(a, \tilde{b}) : a \in \tilde{a}\}.$$

3. La distance de Hausdorff entre $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{K}$ est

$$d_H(\tilde{a}, \tilde{b}) = \max\{d_H^*(\tilde{a}, \tilde{b}), d_H^*(\tilde{b}, \tilde{a})\},$$

dans le cas de $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ sont deux intervalles (on note $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{I}$) la distance de Hausdorff est

$$d_H(\tilde{a}, \tilde{b}) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\},$$

on sait que par rapport á la distance de Hausdorff \mathcal{K} (ou \mathbb{I}) est un espace métrique séparable complet.

► Passons maintenant á notre objet qui est l'espace métrique des nombres flous

Définition 2.7.1. [6]

Soit $d_\infty : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \sup \max \left\{ \left| [\tilde{u}^-]_\alpha - [\tilde{v}^-]_\alpha \right|, \left| [\tilde{u}^+]_\alpha - [\tilde{v}^+]_\alpha \right| \right\} \\ &= \sup_{0 \leq \alpha < 1} \{d_H([\tilde{u}]_\alpha, [\tilde{v}]_\alpha)\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $[\tilde{u}]_\alpha = [[\tilde{u}^-]_\alpha, [\tilde{u}^+]_\alpha]$, $[\tilde{v}]_\alpha = [[\tilde{v}^-]_\alpha, [\tilde{v}^+]_\alpha] \subseteq \mathbb{R}$,

et d_H est la distance de Hausdorff classique entre des intervalles réales, donc d_∞ est appelé la distance Hausdorff entre les nombre flou.

► On définit maintenant la distance de type L^p .

Définition 2.7.2. [6]

Soit $1 \leq p < \infty$ nous définissons la distance d_p entre les nombres flous comme

$$\begin{aligned} d_p(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \left(\int_0^1 d_H([\tilde{u}]_\alpha, [\tilde{v}]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 \max \left\{ |[\tilde{u}^-]_\alpha - [\tilde{v}^-]_\alpha|, |[\tilde{u}^+]_\alpha - [\tilde{v}^+]_\alpha| \right\}^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

le théorème suivant donne une liste des propriétés de la distance de Hausdorff entre les nombres flous.

Proposition 2.7.1.

Soit $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_\infty)$ est une espace métrique, on a les propriétés suivantes sont vrais

1. $d_\infty(\tilde{u} + \tilde{w}, \tilde{v} + \tilde{w}) = d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
2. $d_\infty(k \cdot \tilde{u}, k \cdot \tilde{v}) = |k| d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \forall k \in \mathbb{R}$.
3. $d_\infty(\tilde{u} + \tilde{v}, \tilde{w} + e) \leq d_\infty(\tilde{u}, \tilde{w}) + d_\infty(\tilde{v}, e) \forall \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Définition 2.7.3. [2] L'ensemble flou \tilde{u} est normal si et seulement si $[\tilde{u}]_{\bar{1}}$ n'est pas vide.

Pour les champs flous $\tilde{u}(\cdot) \equiv u(\cdot, \tilde{\xi})$ et $\tilde{v}(\cdot) \equiv v(\cdot, \tilde{\xi})$, tous deux dépendant du vecteur flou de dimension finie $\tilde{\xi}$, nous avons que $[\tilde{u}(\cdot)]_\alpha = u(\cdot, [\tilde{\xi}]_\alpha)$ et $[\tilde{v}(\cdot)]_\alpha = v(\cdot, [\tilde{\xi}]_\alpha)$.

Par conséquent, $d_H([\tilde{u}]_\alpha, [\tilde{v}]_\alpha)$ dans (2.12) est égal à

$$\max \left\{ \sup_{\xi^{(1)} \in [\tilde{\xi}]_\alpha} \inf_{\xi^{(2)} \in [\tilde{\xi}]_\alpha} d(u(\cdot, \xi^{(1)}), v(\cdot, \xi^{(2)})), \sup_{\xi^{(2)} \in [\tilde{\xi}]_\alpha} \inf_{\xi^{(1)} \in [\tilde{\xi}]_\alpha} d(u(\cdot, \xi^{(1)}), v(\cdot, \xi^{(2)})) \right\}. \quad (2.13)$$

Clairement (2.13) n'est pas bon marché, ni facile à calculer. Pour alléger l'analyse des erreurs.

Lemme 2.7.1. [2] La distance d_∞ entre les champs flous $\tilde{u}(\cdot) \equiv u(\cdot, \tilde{\xi})$ et $\tilde{v}(\cdot) \equiv v(\cdot, \tilde{\xi})$ est borné par le haut comme

$$d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \sup_{\xi \in \Xi} d(u(\cdot, \xi), v(\cdot, \xi)). \quad (2.14)$$

Démonstration. La distance de Hausdorff donnée par (2.13), peut être bornée par

$$\begin{aligned} d_H([\tilde{u}]_\alpha, [\tilde{v}]_\alpha) &\leq \sup_{\xi \in [\tilde{\xi}]_\alpha} d(u(\cdot, \xi), v(\cdot, \xi)) \\ &\leq \sup_{\xi \in \Xi} d(u(\cdot, \xi), v(\cdot, \xi)). \end{aligned}$$

Par conséquent, la borne de (2.14) découle immédiatement de (2.12). □

Corollaire 2.7.1. [2] Si $u(\cdot, \xi), v(\cdot, \xi) \in W$ pour tout $\xi \in \Xi$, avec $(W, \|\cdot\|_W)$ un espace vectoriel normé et $d(\cdot, \cdot)$ la métrique induite, alors

$$d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - v(\cdot, \xi)\|_W.$$

2.7.1 La norme d'un nombre flou

Définition 2.7.4. [6] La norme d'un nombre flou est définie par

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}} = d_\infty(\tilde{u}, 0).$$

Proposition 2.7.2. $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}}$ a les propriétés suivant :

1. $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}} = 0$ si et seulement si $\tilde{u} = 0$.
2. $\|\lambda.\tilde{u}\|_{\mathcal{F}} = |\lambda|\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}} \forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
3. $\|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{\mathcal{F}} \leq \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}} + \|\tilde{v}\|_{\mathcal{F}} < d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}), \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
4. $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}} - \|\tilde{v}\|_{\mathcal{F}} < d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}), \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.
5. pour tout a et b avoir le même signe et $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ on a :

$$d_\infty(a.\tilde{u}, b.\tilde{u}) = |b - a|\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}}.$$

Démonstration.

On va démontrer la relation 5 de la proposition précédente :

soit $\tilde{u} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ et $a > b > 0$ alors on a :

$$d_\infty(a.\tilde{u}, b.\tilde{u}) = d_\infty([b + (a - b)].\tilde{u}, b.\tilde{u}) = d_\infty(b.\tilde{u} + (a - b).\tilde{u}, b.\tilde{u})$$

de puis d_∞ est invariant aux translation que nous obtenons

$$d_\infty(a.\tilde{u}, b.\tilde{u}) = d_\infty((a - b).\tilde{u}, o) = |b - a|\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}}$$

□

2.8 Approche de la surface de réponse

Les approches de surface de réponse sont fréquemment utilisées dans l'optimisation des fonctions [2]. Il ne faut donc pas s'étonner qu'ils soient aussi populaires dans les calculs flous [2]. L'opérateur de solution coûteux S est remplacé par une surface de réponse moins chère (mais approximative) S^r . Typiquement, une telle surface est construite par interpolation, bien que d'autres critères soient également possibles. Le domaine d'incertitude Ξ est échantillonné dans un ensemble de points soigneusement choisis $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{N_s}$, l'ensemble de solutions $\{S(\xi^{(k)})\}_{k=1}^{N_s}$ est calculé, puis une approximation est construite de la forme

$$u^r(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N_r} u_j^r(x) r_j(\xi) \quad (2.15)$$

Ici, $\{r_j\}_{k=1}^{N_r}$ est un ensemble de fonctions de base données et $\{u_j^r(x)\}_{k=1}^{N_r}$ est l'ensemble des coefficients. Notez que le nombre d'échantillons N_s et le nombre de fonctions de base N_r ne doivent pas nécessairement être égaux.

CHAPITRE 3

PROBLÈME ELLIPTIQUE LINÉAIRE AVEC COEFFICIENT FLOUES

3.1 Équations aux dérivées partielles elliptique floues

3.1.1 Formulation du problème

Dans ce travail, on s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles elliptique floue sur un domaine de Lipschitz d -dimensionnel $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes suivant

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\tilde{a}(x)\nabla\tilde{u}(x)) &= f(x) \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ \tilde{u}(x) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où f le terme source, \tilde{a} le champ de donne floue et \tilde{u} le champ de solution floue inconnue. Avant d'appliquer le principe d'extension de Zadeh, nous récrivons (3.1) comme une EDP déterministe paramétrée :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x, a)) &= f(x) \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(x, a) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec l'opérateur de gradient ∇ est implicitement supposé être la coordonnée spatiale x uniquement. La solution de (3.2) peut s'écrire de manière compacte sous la forme suivant

$$u(\cdot, a) = S(a), \tag{3.3}$$

avec S l'opérateur de solution qui associe un coefficient de diffusion $a(\cdot)$ à sa solution d'EDP correspondante. C'est une application $S : V \rightarrow W$, avec V et W des espaces fonctionnels appropriés pour lesquels (3.2) est bien défini. En utilisant le principe d'extension de Zadeh, l'opérateur de solution S peut alors être étendu à une application $S : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$, définissant la fonction d'appartenance de la solution $\tilde{u}(\cdot) = S(\tilde{a}(\cdot))$ comme

$$\mu_{\tilde{u}(\cdot)}(u(\cdot, a)) = \sup_{a(\cdot):u(\cdot,a)=S(a)} \mu_{\tilde{a}(\cdot)}(a(\cdot)), \quad (3.4)$$

et les fortes α -coupes comme

$$[\tilde{u}(\cdot)]_\alpha = \{u(\cdot, a) = S(a) : a(\cdot) \in [\tilde{a}(\cdot)]_\alpha\}. \quad (3.5)$$

3.1.2 Hypothèse d'entrée dimensionnelle finie

Dans de nombreux problèmes, l'incertitude d'entrée a une faible dimensionnalité intrinsèque, ce qui signifie que les réalisations $a(\cdot)$ du champ $\tilde{a}(\cdot) \in \mathcal{F}(V)$ sont des éléments de un sous-espace de faible dimension de V . Cela nous motive à considérer le cas particulier où $\tilde{a}(\cdot)$ est une fonction d'un nombre fini de nombres flous $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_{N_\xi}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_\xi})$. Pour rendre cela explicitement visible dans notre notation, nous écrivons $\tilde{a}(\cdot) \equiv a(\cdot, \tilde{\xi})$ et $\tilde{u}(\cdot) \equiv u(\cdot, \tilde{\xi})$, avec $\tilde{\xi} \equiv (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_{N_\xi})$. alors le problème flou (3.1) peut s'écrire sous la forme suivant

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, \tilde{\xi}) \nabla u(x, \tilde{\xi})) &= f(x) \text{ dans } \Omega \\ u(x, \tilde{\xi}) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

qui selon notre interprétation, admet une solution définie par la fuzzification de l'opérateur de solution $S : \mathbb{R}^{N_\xi} \rightarrow W$ de l'EDP déterministe paramétrée

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, \xi) \nabla u(x, \xi)) &= f(x) \text{ dans } \Omega \\ u(x, \xi) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.7)$$

de plus, nous nous référons à $\Xi \equiv [\tilde{\xi}]_{\bar{0}}$ comme domaine d'incertitude.

3.2 Solution d'EDP floue comme problème d'optimisation

Souvent, on aime connaître la valeur du champ flou $\tilde{u}(\cdot)$ en un point particulier $x \in \Omega$. Si $u(x, \xi)$ est continu en ξ et $[\tilde{\xi}]_{\bar{\alpha}}$ compact, on calcule $[\tilde{u}(x, \xi)]_{\bar{\alpha}}$ revient essentiellement à résoudre un problème d'optimisation car

$$\begin{aligned} [\tilde{u}(x, \xi)]_{\bar{\alpha}} &= u(x, [\tilde{\xi}]_{\bar{\alpha}}) \\ &= \{u(x, \xi) : u(\cdot, \xi) = S(\xi), \xi \in [\xi]_{\bar{\alpha}}\} \\ &= \left[\min_{\xi \in [\tilde{\xi}]_{\bar{\alpha}}} u(x, \xi), \max_{\xi \in [\tilde{\xi}]_{\bar{\alpha}}} u(x, \xi) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

En pratique, différentes α -coupes pour un ensemble fini de niveaux α $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{N_\alpha} = 1$ sera calculé, ce qui conduit à une séquence de problèmes d'optimisation avec une taille décroissante de l'espace de recherche. De plus, on pourrait être intéressé par la solution floue en un ensemble de points $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{N_x} \subset \Omega$ ou dans la valeur floue d'une certaine fonctionnelle de la solution floue. Il est alors clair que cela conduit rapidement à une quantité très importante de problèmes d'optimisation coûteux.

L'échantillonnage est une méthode populaire dans les calculs flous afin de réduire le coût d'optimisation. La solution $u(\cdot, \xi) = S(\xi)$ est calculée pour un ensemble d'échantillons $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{N_s}$, donnant un ensemble de solutions $\{u(\cdot, \xi^{(k)})\}_{k=1}^{N_s}$. Cet ensemble de solutions sert alors d'espace de recherche très réduit comme suit

$$[\tilde{u}(x, \xi)]_{\bar{\alpha}} \approx \left[\min_{\xi \in \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{N_s} \cap [\tilde{\xi}]_{\bar{\alpha}}} u(x, \xi), \max_{\xi \in \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{N_s} \cap [\tilde{\xi}]_{\bar{\alpha}}} u(x, \xi) \right]. \quad (3.9)$$

Pratiquement, dans un calcul par éléments finis par exemple, les solutions $u(\cdot, \xi^k)$ sont représentées par des vecteurs qui contiennent les valeurs numériques de la solution aux nœuds des éléments finis. Calcul d'une approximation de $[\tilde{u}(x^{(i)}, \xi)]_{\bar{\alpha}}$ pour tous les nœuds d'éléments finis $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{N_x}$ à la fois se simplifie ensuite en une maximisation et une minimisation élément par élément sur les différents vecteurs de solution qui appartiennent au correspondant α -couper.

Le choix de la stratégie d'échantillonnage a évidemment de sérieuses implications sur la précision. Les méthodes classiques comme Monte Carlo, l'échantillonnage stratifié ou équi-

distant capturent assez bien le comportement de larges classes de fonctions sur l'ensemble de leur domaine. L'échantillonnage équidistant, par exemple, fournit la meilleure approximation des extrema globaux parmi toutes les méthodes d'échantillonnage non adaptatives pour les fonctions continues de Lipschitz [2].

Ces méthodes d'échantillonnage classiques manquent cependant souvent les extrema exacts sur les différents niveaux α . D'autres méthodes d'échantillonnage comme l'échantillonnage par sommets et différentes variantes de la méthode de transformation [2] tentent d'éviter ce problème en ajoutant les sommets des différentes α -coupes de $\tilde{\xi}$ à l'ensemble d'échantillonnage. Pour une fonction monotone en chaque argument, ces méthodes d'échantillonnage récupèrent les extrema exacts. De toute évidence, la monotonie est une hypothèse plutôt restrictive. Pourtant, ces méthodes se sont avérées efficaces pour de nombreux problèmes d'ingénierie pratiques.

3.3 Formulation faible

Pour définir le cadre mathématique de l'analyse de (3.7), nous choisissons les espaces fonctionnels appropriés. On considère un coefficient de diffusion a qui satisfait $a \in L^\infty(\Omega) \otimes L^\infty(\Xi)$ et un membre droit $f \in L^2(\Omega)$. La notation $L_w^2(\Xi)$ sera utilisée pour dénoter l'espace L^2 pondéré sur Ξ , avec la fonction de pondération w .

Maintenant on donne la formulation faible du problème (3.7)

FORMULATION FAIBLE 1. $\forall \xi \in \Xi$, trouver $u(\cdot, \xi) \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (3.10)$$

On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.7) La forme bilinéaire est continue c'est-à-dire $\forall u, v \in H_0^1(\Omega) \exists k(\xi) > 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x, \xi) \nabla u(x, \xi) \nabla v(x) \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} |a(x, \xi) \nabla u(x, \xi) \nabla v(x)| \, dx \\ &\leq \sup |a(x, \xi)| \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq k(\xi) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

La forme bilinéaire est coercive c'est-à-dire $\forall u \in H_0^1(\Omega) \exists c(\xi) > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, \xi)(\nabla u)^2 dx &\geq \inf a(x, \xi) \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\geq c(\xi) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

La forme linéaire est continue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f(x)v(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

d'autre part On pourrait cependant aussi la considérer comme une EDP sur l'espace $\Omega \times \Xi$.

FORMULATION FAIBLE 2. Trouver $u \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$,

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v w(\xi) dx d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f v w(\xi) dx d\xi. \quad (3.11)$$

Un lien entre ces deux formulations est donné ci-après.

Lemme 3.3.1. [2] Soit la forme bilinéaire de la formulation faible 1 continue et coercitive pour tout $\xi \in \Xi$, c'est-à-dire,

$$\left| \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq K(\xi) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad (3.12)$$

et

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla u dx \geq c(\xi) \|u\|_{H^1}^2. \quad (3.13)$$

Soit $u^{(1)}$ la solution de (3.10) et $u^{(2)}$ la solution de (3.11). Si $\int_{\Xi} w(\xi) d\xi = 1$, $\sup_{\xi \in \Xi} K(\xi) < \infty$ et $\inf_{\xi \in \Xi} c(\xi) > 0$, alors

1. $\sup_{\xi \in \Xi} \|u^{(1)}(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$.

2. la forme bilinéaire dans la formulation faible 2 est continue c'est à dire

$$\left| \int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v w(\xi) dx d\xi \right| \leq \sup_{\xi \in \Xi} K(\xi) \|u\|_{H^1 \otimes L_w^2} \|v\|_{H^1 \otimes L_w^2}. \quad (3.14)$$

3. la forme bilinéaire dans la formulation faible 2 est coercitive c'est à dire

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla u w(\xi) dx d\xi \geq \inf_{\xi \in \Xi} c(\xi) \|u\|_{H^1 \otimes L^2_w}^2. \quad (3.15)$$

4. $u^{(1)} = u^{(2)}$ dans la $\|\cdot\|_{H^1 \otimes L^2_w}$ -norme.

Démonstration. Pour chaque ξ , le théorème de Lax-Milgram assure une solution unique $u^{(1)}(\cdot, \xi)$. Cette solution satisfait l'estimation qui on va démontrer, on a

$$\int_{\Omega} a \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} a \nabla u^{(1)} \nabla v dx = \int_{\Omega} f v(x) dx,$$

on prendre

$$u^{(1)} = v$$

d'après Cauchy Schwarz, équivalent des norme entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ on obtient

$$\begin{aligned} c(\xi) \int_{\Omega} |\nabla u^{(1)}|^2 &\leq \int_{\Omega} f(x) u^{(1)}(x, \xi) dx \\ c(\xi) \|u^{(1)}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} \\ c(\xi) \|u^{(1)}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} c \|u^{(1)}\|_{H^1(\Omega)} \\ \|u^{(1)}\|_{H^1} &\leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot c}{c(\xi)} \\ \|u^{(1)}\|_{H^1} &\leq \frac{\|f\|_{L^2}}{c(\xi) c^{-1}} \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{c(\xi)}, \end{aligned}$$

alors

$$\|u^{(1)}(\cdot, \xi)\|_{H^1} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{c(\xi)}, \quad (3.16)$$

et donc

$$\sup_{\xi \in \Xi} \|u^{(1)}(\cdot, \xi)\|_{H^1} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\inf_{\xi \in \Xi} c(\xi)} < \infty.$$

On va montre que la forme bilinéaire dans la formulation faible 2 est continue, d'après la

continuité de la forme bilinéaire dans la formulation faible 1

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v w(\xi) dx d\xi \right| &\leq \int_{\Xi} \left| \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v w dx \right| d\xi \\
 &\leq \int_{\Xi} \left| \int_{\Omega} k(\xi) \nabla u \cdot \nabla v dx \right| w(\xi) d\xi \\
 &\leq \int_{\Xi} k(\xi) \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| w(\xi) d\xi \\
 &\leq \int_{\Xi} k(\xi) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} w(\xi) d\xi \\
 &\leq \int_{\Xi} k(\xi) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} w(\xi) d\xi \\
 &\leq \sup_{\xi \in \Xi} K(\xi) \int_{\Xi} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} w(\xi) d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

on pose $\|u(\cdot, \xi)\|_{H^1(\Omega)} = U(\xi)$ on utilise l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
 &\leq \sup_{\xi \in \Xi} K(\xi) \int_{\Xi} U(\xi) V(\xi) w(\xi) d\xi \\
 &\leq \sup_{\xi \in \Xi} k(\xi) \|U(\xi)\|_{L^2} \|V\|_{L^2} \\
 &\leq \sup_{\xi \in \Xi} K(\xi) \|u\|_{H_0^1 \otimes L_w^2} \|v\|_{H_0^1 \otimes L_w^2},
 \end{aligned}$$

donc la forme bilinéaire est continue.

Maintenant on va montrer que la forme bilinéaire de la formulation faible 2 est coercitive d'après la coercitive de la forme bilinéaire de la formulation faible 1 :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla u w(\xi) dx d\xi &\geq \int_{\Xi} c(\xi) \|u\|_{H_0^1}^2 w(\xi) d\xi \\
 &\geq \inf_{\xi \in \Xi} c(\xi) \int_{\Xi} \|u\|_{H_0^1}^2 w(\xi) d\xi \\
 &\geq \inf_{\xi \in \Xi} c(\xi) \|u\|_{H_0^1 \otimes L_w^2}^2,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

alors la forme bilinéaire de la formulation faible 2 est coercitive. on va montrer que la forme bilinéaire de la formulation faible 2 est continue d'après la continuité de la formulation faible 1, on obtient

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Xi} \int_{\Omega} f \cdot v w(\xi) dx d\xi \right| &\leq \int_{\Xi} \left| \int_{\Omega} f \cdot v dx \right| w(\xi) d\xi \\
 &\leq \int_{\Xi} M \|u\|_{H_0^1} w(\xi) d\xi \\
 &\leq M \|u\|_{H_0^1 \otimes L_w^2},
 \end{aligned}$$

alors la forme linéaire de la formulation faible2 est continu.

Du fait de la continuité et de la coercitive de la forme bilinéaire dans (3.11), nous avons une unique solution $u^{(2)}$. Choisissez $\{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{\infty}$ comme base orthonormée pour $L_w^2(\Xi)$. Comme $\sup_{\xi \in \Xi} \|u^{(1)}(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$ et $\int_{\Xi} w(\xi) d\xi = 1$, on a $u^{(1)} \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$. En intégrant (3.10) sur Ξ , après multiplication par $\psi_j(\xi)w(\xi)$, on a $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall \psi_j \in \{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{\infty}$,

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u^{(1)} \cdot \nabla v \psi_j(\xi) w(\xi) dx d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f v \psi_j(\xi) w(\xi) dx d\xi \quad (3.19)$$

Ainsi, par continuité et linéarité de la forme bilinéaire, $u^{(1)}$ est une solution de la formulation faible 2 et égale à son unique solution $u^{(2)}$ dans le $\|\cdot\|_{H^1 \otimes L_w^2}$ -norme. \square

3.4 Discrétisation dans le domaine d'incertitude

Dans notre analyse d'erreur, nous ne considérerons que l'erreur causée par l'approximation dans le domaine d'incertitude. Soit $\Psi_{N_\psi} = \text{span} \{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{N_\psi} \subset L_w^2(\Xi)$, on arrive alors à la formulation faible semi-discrète suivante.

FORMULATION FAIBLE 3. Trouver

$$u^{g, N_\psi}(x, \xi) \equiv \sum_{j=1}^{N_\psi} u_j^g(x) \psi_j(\xi) \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}, \quad (3.20)$$

telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}$,

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u^{g, N_\psi} \cdot \nabla v w(\xi) dx d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f v w(\xi) dx d\xi \quad (3.21)$$

Si la forme bilinéaire est continue et coercitive, l'erreur de l'approximation de Galerkin u^{g, N_ψ} peut être bornée par le haut en utilisant le lemme de Céa, comme

$$\|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} \leq C \min_{v \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}} \|u^{(2)} - v\|_{H^1 \otimes L_w^2}. \quad (3.22)$$

Démonstration. On va montrer l'inégalité (3.22), on a

$$u^{g, N_\psi} \equiv \sum_{j=1}^{N_\psi} u_j^g(x) \psi_j(\xi) \in H_0^1 \otimes \Psi_{N_\psi}$$

telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}$ $u^{(2)} \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$, on a

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a(x, \xi) \nabla u^{(2)} \nabla v w(\xi) dx d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f.v w(\xi) dx d\xi,$$

on prend v égale à v^{g, N_ψ} , alors

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a(x, \xi) \nabla u^{(2)} \nabla v^{g, N_\psi} w(\xi) dx d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f v^{g, N_\psi} w(\xi) dx d\xi, \quad (3.23)$$

on prend v égale à v^{g, N_ψ} , dans (3.21) on trouve

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a(x, \xi) \nabla u^{g, N_\psi} \nabla v^{g, N_\psi} w(\xi) dx d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f v^{g, N_\psi} w(\xi) dx d\xi, \quad (3.24)$$

en soustrayant (3.23) a (3.24), on trouve

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a(x, \xi) (\nabla u^{(2)} - \nabla u^{g, N_\psi}) \nabla v^{g, N_\psi} w(\xi) dx d\xi = 0$$

$$a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, v^{g, N_\psi}) = 0$$

$$\text{on pose } e = u^{(2)} - u^{g, N_\psi}$$

$$a(e, e) = a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, u^{(2)} - u^{g, N_\psi}),$$

puisque $a(., .)$ est coercive, il en résulte

$$\begin{aligned} \inf c(\xi) \|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)}^2 &\leq a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, u^{(2)} - u^{g, N_\psi}) \\ &\leq a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, u - v^{g, N_\psi}) \\ &\quad + a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, v^{g, N_\psi} - u^{g, N_\psi}), \quad \forall v^{g, N_\psi} \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}. \end{aligned}$$

On a

$$a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, v^{g, N_\psi} - u^{g, N_\psi}) \text{ égal à } 0 \text{ car } (v^{g, N_\psi} - u^{g, N_\psi}) \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}.$$

Puisque $a(., .)$ est continu, il en résulte

$$\begin{aligned} |a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, u^{(2)} - u^{g, N_\psi})| &= |a(u^{(2)} - u^{g, N_\psi}, u^{(2)} - v^{g, N_\psi})| \\ &\leq \sup k(\xi) \|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)} \|u^{(2)} - v^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)} \end{aligned}$$

d'après la coercitive et la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ on trouve

$$\inf c(\xi) \|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)}^2 \leq \sup k(\xi) \|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)} \|u^{(2)} - v^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)} &\leq \frac{\sup k(\xi)}{\inf c(\xi)} \|u^{(2)} - v^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)} \\ &\leq c \|u^{(2)} - v^{g, N_\psi}\|_{H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)}. \end{aligned}$$

avec $1 \leq C < \infty$ et $u^{(2)}$ la solution de (3.11). \square

Lorsque $\{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{N_\psi}$ est une base orthonormée pour Ψ_{N_ψ} , le minimum dans le membre de droite est obtenu par le développement de Fourier tronqué

$$u^{f, N_\psi} \equiv \sum_{j=1}^{N_\psi} u_j^f(x) \psi_j(\xi), \text{ avec } u_j^f(x) = \int_{\Xi} u(x, \xi) \psi_j(\xi) w(\xi) d\xi \quad (3.25)$$

On peut donc réécrire (3.22) sous la forme

$$\|u^{(2)} - u^{g, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} \leq C \|u^{(2)} - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}. \quad (3.26)$$

3.5 Erreur limité

Dans cette section, nous retravaillons (3.26) en bornant l'erreur $\sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{g, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1}$. Tout d'abord, nous commençons par quelques résultats techniques pour les approximations de fonctions dans le cadre fonctionnel de notre problème PDE.

Lemme 3.5.1. [2] Soit $u \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$ et $v^{N_\psi} \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}$, pour lesquels

$$\|u - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} \leq C \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}, \text{ puis}$$

$$\|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} \leq \sqrt{C^2 - 1} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}, \quad (3.27)$$

avec u^{f, N_ψ} la série de Fourier tronquée telle que définie dans (3.25) et $\{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{N_\psi}$ une base orthonormée pour $\Psi_{N_\psi} \subset L_w^2(\Xi)$.

Démonstration. On a $u \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$ et $v^{N_\psi} \in H_0^1(\Omega) \otimes \psi_{N_\psi}$ pour lesquels

$$\|u - v^{N_\psi}\|_{H^1 \times L_w^2} \leq c \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} \|u - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 &= \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 + \|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \\ \|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 &= \|u - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 - \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \\ \|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 &\leq c^2 \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 - \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \\ \|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 &\leq (c^2 - 1) \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \\ \|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} &\leq \sqrt{(c^2 - 1)} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.5.2. [2] Soit $u^{N_\psi}, v^{N_\psi} \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}$ et

$$\|\psi_j(\xi)\|_\infty \equiv \sup_{\xi \in \Xi} |\psi_j(\xi)| < \infty, j = 1, \dots, N_\psi, \text{ alors}$$

$$\sup_{\xi \in \Xi} \|u^{N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} \leq \sqrt{N_\psi} \max_{j=1 \dots N_\psi} \|\psi_j\|_\infty \|u^{N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}, \quad (3.28)$$

avec $\{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{N_\psi}$ une base orthonormée pour $\Psi_{N_\psi} \subset L_w^2(\Xi)$.

Démonstration. Parce que $u^{N_\psi}, v^{N_\psi} \in H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}$, nous pouvons écrire

$$u^{N_\psi} = \sum_{j=1}^{N_\psi} u_j(x) \psi_j(\xi), v^{N_\psi} = \sum_{j=1}^{N_\psi} v_j(x) \psi_j(\xi)$$

par l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \Xi} \|u^{N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1}^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^{N_\psi} \|u_j - v_j\|_{H^1} \|\psi_j\|_\infty \right)^2 \\ &\leq N_\psi \sum_{j=1}^{N_\psi} \|u_j - v_j\|_{H^1}^2 \|\psi_j\|_\infty^2 \\ &\leq N_\psi \max_{j=1 \dots N_\psi} \|\psi_j\|_\infty^2 \sum_{j=1}^{N_\psi} \|u_j - v_j\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Par l'identité de Parseval, nous avons

$$\sum_{j=1}^{N_\psi} \|u_j - v_j\|_{H^1}^2 = \left\| \sum_{j=1}^{N_\psi} (u_j - v_j) \psi_j \right\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2,$$

telle que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \Xi} \|u^{N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1}^2 &\leq N_\psi \max_{j=1 \dots N_\psi} \|\psi_j\|_\infty^2 \left\| \sum_{j=1}^{N_\psi} (u_j - v_j) \psi_j \right\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \\ &= N_\psi \max_{j=1 \dots N_\psi} \|\psi_j\|_\infty^2 \|u^{N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.5.3. [2] *Sous les hypothèses du Lemme 3.5.1 et les conditions supplémentaires que $\sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$ et $\|\psi_j(\xi)\|_\infty \equiv \sup_{\xi \in \Xi} |\psi_j(\xi)| < \infty, j = 1 \dots N_\psi$, nous avons*

$$\sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} \leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} + C_{N_\psi} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2},$$

avec

$$C_{N_\psi} = \sqrt{N_\psi} \max_{j=1 \dots N_\psi} \|\psi_j\|_\infty \sqrt{C^2 - 1}. \quad (3.29)$$

Démonstration. $v^{N_\psi} = \sum_{j=1}^{N_\psi} v_j(x) \psi_j(\xi)$ et la série de Fourier tronquée $u^{f, N_\psi} \equiv \sum_{j=1}^{N_\psi} u_j^f(x) \psi_j(\xi)$ sont des éléments de $H_0^1(\Omega) \otimes \Psi_{N_\psi}$. Évidemment, leurs coefficients respectifs v_j et u_j^f sont des éléments de $H_0^1(\Omega)$. Parce que $\|\psi_j(\xi)\|_\infty < \infty$, nous savons que $\sup_{\xi \in \Xi} \|v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$ et $\sup_{\xi \in \Xi} \|u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$

En utilisant le lemme 3.5.2 et le lemme 3.5.1, on trouve

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \Xi} \|u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1}^2 &\|u^{f, N_\psi} - v^{N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \\ &\leq N_\psi \max \|\psi_j\|_\infty^2 (c^2 - 1) \|u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2, \end{aligned}$$

alors

$$\sup_{\xi \in \Xi} \|u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2 \leq N_\psi \max \|\psi_j\|_\infty^2 (c^2 - 1) \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}^2,$$

en supposant que $\sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - v^{N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} &\leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - v^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_H + \sup_{\xi \in \Xi} \|u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi) - v^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} \\ &\leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_H + \sqrt{N_\psi} \max \|\psi_j\|_\infty \sqrt{c^2 - 1} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} \\ &\leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_H + c_{N_\psi} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.5.1. [2] Soit u^{g, N_ψ} l'approximation de Galerkin telle que définie dans la formulation faible 3 et u la solution de la formulation faible 1. Sous les hypothèses du lemme 3.3.1 et $\|\psi_j(\xi)\|_\infty \equiv \sup_{\xi \in \Xi} |\psi_j(\xi)| < \infty, j = 1 \dots N_\psi$, on a

$$\sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{g, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} \leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} + C_{N_\psi} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2},$$

avec C_{N_ψ} telle que défini en (3.29) pour $C = \frac{\sup_{\xi \in \Xi} K(\xi)}{\inf_{\xi \in \mathcal{I}} c(\xi)}$.

Démonstration. Toutes les condition sont remplies pour appliquer le lemme 3.3.1 assurant que la formulation faible 2 a une forme continue et bilinéaire et $\sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi)\|_{H^1} < \infty$. D'après le lemme de Cea, on a (3.26) de constante $C = \frac{\sup_{\xi \in \underline{E}} K(\xi)}{\inf_{\xi \in \underline{E}} c(\xi)}$ pour la solution $u^{(2)}$ à la formulation faible 2. Comme $u = u^{(2)}$ dans le $\|\cdot\|_{H^1 \otimes L_w^2}$ -norme, la même inégalité vaut également pour u .

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 3.5.3. □

Théorème 3.5.2. [2] Sous les hypothèses du théorème 3.5.1, on a pour $\tilde{u}(\cdot) \equiv u(\cdot, \tilde{\xi})$ et $\tilde{u}^{g, N_\psi}(\cdot) \equiv u^{g, N_\psi}(\cdot, \tilde{\xi})$, avec $\tilde{\xi}$ certains ensemble flou pour lequel $\Xi = [\tilde{\xi}]_0$, que

$$d_\infty(\tilde{u}, \tilde{u}^{g, N_\psi}) \leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} + C_{N_\psi} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}.$$

Démonstration. D'après de combinez le théorème 3.5.1 avec le corollaire 2.7.1

$$\begin{aligned} d_\infty(\tilde{u}, \tilde{u}^{g, N_\psi}) &\leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{g, N_\psi}(\cdot, \xi)\| \\ &\leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1} + c_{N_\psi} \|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}. \end{aligned}$$

□

3.6 Régularité

Nous passons ici en revue un résultat de régularité de [2]. Cela permettra la construction d'une approximation de Galerkin $u^{\mathcal{S}, N_\psi}$ qui converge (sous-)exponentiellement pour $N_\psi \rightarrow \infty$ au sens flou. La régularité de u est obtenue en fixant certaines conditions sur le coefficient de diffusion a . Une première condition est

$$0 < \epsilon \leq a(x, \xi) \leq R < \infty, \quad x \in \Omega, \xi \in \Xi \quad (3.30)$$

pour un certain $0 < \epsilon \leq R < \infty$. Il assure la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire.

Une deuxième condition est que a peut être écrit comme la somme d'une fonction

$a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ et une combinaison linéaire finie de fonctions $a_r(x) \in L^\infty(\Omega)$, $r = 1 \dots N_\xi$, c'est-à-dire,

$$a(x, \xi) = a_0(x) + \sum_{r=1}^{N_\xi} \xi_r a_r(x). \quad (3.31)$$

Enfin, on suppose que

$$\Xi = [-1, 1]^{N_\xi}. \quad (3.32)$$

En considérant l'extension complexe de la formulation faible 2 sur le domaine complexe

$$\Xi^c = \otimes_{r=1}^{N_\xi} \{\xi_r \in \mathbb{C} : |\xi_r| \leq 1\}, \quad (3.33)$$

il est prouvé dans le lemme 2.2 de [2] que sous les hypothèses énoncées (3.30)-(3.32), la solution $u^1(\cdot, \xi)$ est un $H_0^1(\Omega)$ Fonction holomorphe à valeur dans le domaine

$$\mathcal{A}_\delta = \left\{ \xi \in \mathbb{C}^{N_\xi} : \delta \leq \Re(a(x, \xi)) \leq |a(x, \xi)| \leq 2R, \forall x \in \Omega \right\}, \quad (3.34)$$

avec un certain $0 < \delta < \epsilon$. Clairement, ce domaine contient Ξ^c .

Notons que pour faire correspondre le problème flou (3.6) aux conditions (3.30)-(3.32), il suffit de choisir un coefficient de diffusion flou \tilde{a} de la forme

$$a(x, \tilde{\xi}) = a_0(x) + \sum_{r=1}^{N_\xi} \tilde{\xi}_r a_r(x), \quad (3.35)$$

avec $[\tilde{\xi}]_0 = [-1, 1]^{N_\xi}$, $a_r(x) \in L^\infty(\Omega)$, $r = 0 \dots N_\xi$, et telle que (3.30) soit vérifiée.

3.7 Convergence

Il est bien connu en théorie de l'approximation que les fonctions holomorphes sont bien approximées par les polynômes [2]. Pour un résultat de convergence dans les applications stochastiques, voir par exemple le théorème 6.3 dans [2], qui prouve la convergence exponentielle de $\|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2}$ pour les espaces d'approximation $\Psi_{N_\psi(n)}$ construits par le produit tensoriel complet des polynômes de Legendre univariés jusqu'au degré n , pour $n \rightarrow \infty$.

D'après le théorème 3.5.2, nous savons que la convergence dans la norme $\sup_{\xi \in \Xi} \|\cdot\|_{H^1}$ -norme est une condition suffisante pour la convergence au sens flou (observez que $\|u - u^{f, N_\psi}\|_{H^1 \otimes L_w^2} \leq \sup_{\xi \in \Xi} \|u(\cdot, \xi) - u^{f, N_\psi}(\cdot, \xi)\|_{H^1}$). Les polynômes de Chebyshev sont connus pour avoir des propriétés d'approximation les plus proches dans la norme supremum pour de larges classes de fonctions [2]. Ils sont donc un choix évident comme base pour les espaces d'approximation Ψ_{N_ψ} .

Soit $\hat{T}_{\nu_r}(\xi_r)$ le polynôme de Chebyshev normalisé du premier type de degré ν_r , normalisé w.r.t. la fonction de pondération mise à l'échelle $\hat{w}(\xi_r) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi_r^2}}$ et soit $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N_\xi}) \in \mathbb{N}^{N_\xi}$ être un multi-index, avec $|\nu|_1 \equiv \sum_{r=1}^{N_\xi} \nu_r$ et $|\nu|_0$ le mesure de parcimonie, c'est-à-dire le nombre d'entrées non nulles. On choisit des espaces d'approximation construit à partir de produits tensoriels de polynômes de Chebyshev univariés jusqu'à un degré total n , c'est-à-dire,

$$\Psi_{N_\psi(n)} = \text{span} \left\{ \hat{T}_\nu(\xi) = \prod_{r=1}^{N_\xi} \hat{T}_{\nu_r}(\xi_r) : |\nu|_1 \leq n \right\} \quad (3.36)$$

Ils sont de dimension $N_\psi(n) = \frac{(N_\xi+n)!}{N_\xi!n!}$. Les espaces d'approximation plus avancés (anisotropes, clairsemés, de bas rang, ...), tels que décrits dans, par exemple, [2].

Pour voir que nous avons une convergence (sous-)exponentielle de $d_\infty(\tilde{u}, \tilde{u}^{g, N_\psi})$ dans le théorème 3.5.2 pour les espaces d'approximation de la forme (3.36) sous les hypothèses de régularité, on démontre d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.7.1. [2] Soit $u \in H_0^1(\Omega) \otimes L_w^2(\Xi)$ et soit $u_\nu^f \in H_0^1(\Omega)$ soit le coefficient de Fourier pour u correspondant à $\hat{T}_\nu(\xi)$. Si $u(\cdot, \xi)$ est holomorphe dans la polyellipse

$$\mathcal{E}_\rho = \otimes_{r=1}^{N_\xi} \left\{ \frac{1}{2} (z_r + z_r^{-1}) \in \mathbb{C} : |z_r| \leq \rho_r \right\}, \text{ avec } \rho_r > 1, r = 1 \dots N_\xi, \text{ alors}$$

$$\|u_\nu^f(\cdot)\|_{H^1} \leq \frac{\sqrt{2}^{|\nu|_0}}{(2\pi)^{N_\xi}} \sup_{\xi \in \mathcal{E}_\rho} \|u(\cdot, \xi)\|_{H^1} \prod_{r=1}^{N_\xi} \rho_r^{-\nu_r-1}. \quad (3.37)$$

Démonstration. Voir [2]. □

Corollaire 3.7.1. [2] *Sous les hypothèses du Lemme 3.7.1, on a*

$$\left\| u_\nu^f(\cdot) \right\|_{H^1} \leq M \varrho^{-|\nu|_1} \quad (3.38)$$

avec $M = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{N_\xi}} \sup_{\xi \in \mathcal{E}_\rho} \|u(\cdot, \xi)\|_{H^1} \prod_{r=1}^{N_\xi} \rho_r^{-1}$ et $\varrho = \min_{r=1 \dots N_\xi} \rho_r$.

On peut facilement voir maintenant que la convergence (sous-)exponentielle est atteinte pour l'erreur de l'approximation de Galerkin au sens flou, sous les hypothèses de régularité et pour $\Psi_{N_\psi(n)}$ telle que défini dans (3.36).

Théorème 3.7.1. [2] *Sous les hypothèses du théorème 3.5.2 et sous les conditions (3.30) – (3.32), on a*

$$d_\infty(\tilde{u}, \tilde{u}^{g, N_\psi}) = \mathcal{O}(\varrho^{-n} n^{N_\xi}) \text{ comme } n \rightarrow \infty \quad (3.39)$$

pour $\Psi_{N_\psi(n)}$ telle que défini en (3.36) et avec $\varrho > 1$.

Démonstration. Voir [2]. □

3.8 Discrétisation dans l'incertitude et le domaine spatial

Pour conclure, nous montrons comment la discrétisation dans le domaine spatial Ω ainsi que dans le domaine d'incertitude Ξ aboutit à un grand système linéaire d'équations. En choisissant $\Phi_{N_\varphi} = \text{span} \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_\varphi} \subset H_0^1(\Omega)$, on arrive à la formulation faible suivante.

FORMULATION FAIBLE 4. *Trouver*

$$u^{g, N_\varphi, N_\psi}(x, \xi) \equiv \sum_{i=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_\psi} u_{ij}^g \varphi_i(x) \psi_j(\xi) \in \Phi_{N_\varphi} \otimes \Psi_{N_\psi} \quad (3.40)$$

telle que $\forall v \in \Phi_{N_\varphi} \otimes \Psi_{N_\psi}$,

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} a \nabla u^{g, N_\varphi, N_\psi} \cdot \nabla v w(\xi) dx \, d\xi = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f v w(\xi) dx \, d\xi. \quad (3.41)$$

Sous l'hypothèse de (3.31), et en sélectionnant $N_\phi N_\psi$ fonctions de test $v = \varphi_l \psi_k$, $l = 1 \dots N_\phi$, $k = 1 \dots N_\psi$, on arrive au système d'équations

$$\begin{aligned} \int_{\Xi} \int_{\Omega} \left(a_0 + \sum_{r=1}^{N_\xi} \xi_r a_r \right) \nabla \sum_{i=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{N_\psi} u_{ij}^g \varphi_i \psi_j \cdot \nabla \varphi_l \psi_k w(\xi) dx d\xi \\ = \int_{\Xi} \int_{\Omega} f \varphi_l \psi_k w(\xi) dx d\xi \end{aligned} \quad (3.42)$$

Après réarrangement des termes, l'équation (3.42) devient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{N_\psi} u_{ij}^g \int_{\Xi} \psi_k \psi_j w(\xi) d\xi \int_{\Omega} a_0 \nabla \varphi_l \nabla \varphi_i dX \\ + \sum_{r=1}^{N_\xi} \sum_{i=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{N_\psi} u_{ij}^g \int_{\Xi} \xi_r \psi_k \psi_j w(\xi) d\xi \int_{\Omega} a_r \nabla \varphi_l \nabla \varphi_i dx \\ = \int_{\Xi} \psi_k w(\xi) d\xi \int_{\Omega} \varphi_l f dx \end{aligned} \quad (3.43)$$

Alternativement, en notation matricielle, ce système peut être formulé comme

$$\left(\sum_{r=0}^{N_\xi} G_r \otimes A_r \right) \mathbf{u} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{f}, \quad (3.44)$$

avec

$$\begin{aligned} [G_0]_{kj} &= \int_{\Xi} \psi_k(\xi) \psi_j(\xi) w(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad [G_r]_{kj} = \int_{\Xi} \xi_r \psi_k(\xi) \psi_j(\xi) w(\xi) d\xi, \\ [A_r]_{li} &= \int_{\Omega} a_r(x) \nabla \varphi_l(x) \nabla \varphi_i(x) dx \\ [\mathbf{g}]_{k1} &= \int_{\Xi} \psi_k(\xi) w(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad [\mathbf{f}]_{l1} = \int_{\Omega} \varphi_l(x) f(x) dx \end{aligned}$$

et \mathbf{u} la vectorisation par colonne de la matrice $[U]_{ij} = u_{ij}^g$.

La matrice des coefficients du système (3.44) est de taille $(N_\psi N_\phi \times N_\psi N_\phi)$ et; donc, généralement extrêmement grand. Pour un aperçu des solveurs rapides pour les systèmes de ce type, nous nous référons à [2].

Dans ce mémoire nous avons étudiés l'existence et l'unicité d'une solution faible sur équation aux dérivées partielles elliptique floues par théorème de Lax-Milgram et nous avons utilisés le lemme de Céa pour comparer la solution avec la solution approchée que nous obtenons par méthode de Galerkin.

- [1] *H. Brezis, Livre de Analyse fonctionnelle théorie et Application 2^e tirage, Masson 1983.*
- [2] *S. Corveleyn, S. Vandewalle, Article : Numerical solution of fuzzy elliptic partial differential equations by a polynomial Galerkin approximation, All content following this page was uploaded by Stefan Vandewalle on 06 June 2014.*
- [3] *T. Gallouet, R. Herbin, cours Master 2 de mathématique, Equation aux dérivée partielle, Université Aix de marseille, (11 september 2015).*
- [4] *B. Hadjou, R. Belkhiri, Mémoire de Master : Espaces de Sobolev à poids et résultats d'existence et d'unicité pour certains problèmes elliptiques dégénérés Université Larbi Ben M'hidi-OUM EL BOUAGHI- 2019-2020.*
- [5] *R. Herbin, cours Master de mathématiques : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Université Aix Marseille 1, 26 octobre 2011.*
- [6] *H. Lakhal, R. Rehab Bekouche, R. Toumi, mémoire de mastre :Résolution des équations différentielles avec des conditions floues par la Méthode de Décomposition Adomienne Université 20 Aout 1955 de Skikda 2019/2020.*
- [7] *S.-L Cos, cours de Méthodes numériques pour les EDPs Etude des problèmes elliptiques, M1 IMAT-MApl3-EMMAI2B1-4 semaines de cours, 10h.*
- [8] *D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercice corrigés, ISBN 978-2-7298-83058 ©Ellipses Édition Marketing S.A., 2013 32, rue Bague 75740 Paris cedex 15.*
- [9] *S. Maarouf, C. Azizi, Y. Kerchoune, mémoire de fin d'études : Analyse a posteriori et ses applications Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel, 2017/2018.*

- [10] *M-H . Vignal, cours de master 1 :Approximation des équation aux dérivées partielles, 24h de cours, 24h de TDs, Université Paul Sabatier, UPS, Institut de mathématique de Toulouse, MIP, 118 route de Narbonne, 31 Toulouse cedex 9. mhvignal math.univ-toulouse.fr*